H. Italmazow

ALGEBRA WE SANLAR TEORIÝASY

II kitap

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2018

UOK 512 + 511 : 378
I 83

Italmazow H.

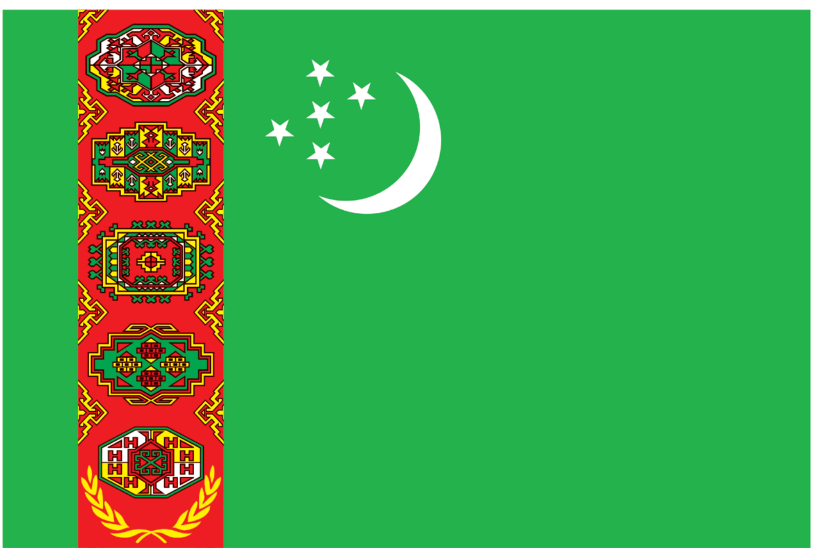
I 83 **Algebra we sanlar teoriýasy.** II kitap. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.

Okuw kitaby mugallymçylyk instituty üçin «Algebra we sanlar teoriýasy» dersi boýunça okuw maksatnamasyna laýyklykda taýýarlanyldy. Bu okuw kitaby 2015-nji ýylda neşir edilen «Algebra we sanlar teoriýasy, I» okuw kitabynyň dowamy bolup, mugallymçylyk institutynyň matematika fakultetiniň talyplary üçin niýetlenendir. Şeýle-de, okuw kitabyndan algebra dersi boýunça ýokary okuw mekdepleriniň talyplary we mugallymlary, mekdep mugallymlary hem peýdalanyp bilerler. Okuw kitabynda orta mekdebiň täze okuw maksatnamalaryna girizilen köp soraglara seredilýär.

TDKP № 9, 2018 KBK 22.14 + 22.132 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ
DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Giriş

Türkmenistanyň Prezidenti hormatly Gurbanguly Berdimuhamedow Türkmenistanda ylym-bilim ulgamyny XXI asyryň ösen talaplaryna laýyklykda guramak, ýaşlara berilýän bilimi dünýä ülňülerine laýyk kämilleşdirmek maksady bilen mugallymlaryň, pedagoglaryň, alymlaryň öňünde uly wezipeler goýdy. Şol wezipeleriň biri hem has kämil okuw maksatnamalaryny işläp düzmek, ylmyň soňky gazananlaryna daýanýan okuw kitaplaryny ýazmakdan ybaratdyr.

Hormatly Prezidentimiziň biziň öňümizde goýan wezipelerine jogap edip, eliňizdäki okuw kitaby Seýitnazar Seýdi adyndaky türkmen döwlet mugallymçylyk institutynyň matematika hünäriniň talyplary üçin «Algebra we sanlar teoriýasy» dersiniň 456 sagatlyk (onuň 210 sagady umumy okuw) okuw maksatnamasy esasynda ýazyldy.

Birinji kitapda esasy algebraik sistemalaryň kesgitlemesine we olara degişli ýönekeý häsiýetlere seredilipdi. Ikinji okuw kitabynyň birinji bölüminde toparlara we halkalara degişli maglumatlara giňişleýin seredilýär. Ýewklid halkasy, baş ideallar halkasy aýratynlykda öwrenilýär. Bu bölümde seredilen maglumatlaryň köpüsi kitabyň indiki bölümlerini özleşdirmäge ýeňillik bolar. Meselem, bir üýtgeýänli köpagzalar we köp üýtgeýänli köpagzalar bütewülik ýaýlasynda kesgitlenilýär, bölünijilik gatnaşygynyň abstrakt kesgitlenilişi köpagzalaryň bölünijiliginde ulanylýar.

Kitabyň ikinji bölüminde bir üýtgeýänli köpagzalara seredilýär. Bir üýtgeýänli köpagzalara algebraik we funksional kesgitlemeler berlip, olaryň deňgüýçliligi görkezilýär. Bu deňgüýçlilik bolsa algebra dersini matematiki analiz we beýleki matematika degişli okuw dersleri bilen özara baglanyşdyrmaga mümkinçilik berýär. Bu baglanyşygyň mysaly «Rasional droblaryň meýdany» bölüminde berilýär.

Kitabyň üçünji bölümi köp üýtgeýänli köpagzalary öwrenmäge degişlidir. Bu bölümde köp üýtgeýänli köpagzalar algebraik kesgitlenýär. Olary bellibir tertipde ýazmak üçin leksikografiki ýazgy düşünjesi girizilýär. Bu bölümde simmetrik köpagzalara aýratyn üns berlip, onuň mekdep matematikasy bilen baglanyşykly ýerleri açylyp görkezilýär. Bu bölümiň ahyrynda bolsa mekdep matematikasy bilen berk baglanyşykly bolan iki üýtgeýänli algebraik deňlemeler sistemasyna seredilýär we olary çözmekligiň käbir usullary görkezilýär.

Okuw kitabynyň dördünji bölüminde hem köpagzalara, degişli maglumatlar berilýär. Ýöne, bu bölümde köpagzalara san meýdanlarynda seredilýär. Bölümde, esasan, bir üýtgeýänli algebraik deňlemeleri çözmeklige we olaryň köklerine (kökleriň sanyna, kratnylylygyna, ýerleşişine we ş.m.) degişli soraglar mekdep matematikasy bilen baglanyşdyrylyp berilýär.

Okuw kitabynyň soňky bölüminde san meýdanlarynyň algebraik giňeltmeleri berilýär. San meýdanlarynyň algebraik giňeltmeleriniň her birine aýratynlykda seredilip, olaryň arasyndaky baglanyşyklar görkezilýär. Okuw kitaby algebraik deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmek meselesi bilen jemlenýär. Bu bölümde gurmaga degişli nusgawy meseleler (kuby ikeltmek, burçy deň üç bölege bölmek, tegelegiň kwadraturasy) çözülip görkezilýär.

I BÖLÜM TOPARLAR WE HALKALAR

Birinji kitapda esasy algebraik sistemalar bolan toparlar, halkalar, meýdanlar we olaryň ýönekeý häsiýetleri bilen tanyşdyk. Toparlar we halkalar wajyp algebraik sistemalar bolup durýar. Olar ähli ylymlarda giňden ulanylýar. Häzirki wagtda toparlar we halkalar nazaryýetine aýratyn ylmy ugurlar hökmünde seredilýär.

Kitabyň I bölümine toparlar we halkalar nazaryýetine giriş hökmünde seretmek bolar. Onda mekdep mugallymlary üçin zerur bolan toparlar we halkalar baradaky ýönekeý maglumatlar getirilýär. Bu bölümde berilýän düşünjeler II kitabyň indiki bölümlerinde, şeýle hem, matematikanyň beýleki bölümlerinde maglumat hökmünde peýdalanyp bolar.

§1. Toparlar we bölek toparlar

1.1. Toparlar

Belli bolşy ýaly, toparlarda kesgitlenen esasy binar algebraik amalyna goşmak ýa-da köpeltmek amaly diýilýär. Topary kesgitleýän amal köpeltmek bolsa, onda bu topara **multiplikatiw**, goşmak bolsa oňa **additiw topar** diýilýär. Toparlar *nazaryýetinde kesgitlenilişi* ýaly, bu bölümde hem, esasan, multiplikatiw toparlara serederis. Multiplikatiw toparyň kesgitlemesini we oňa degişli ýönekeý häsiýetleri ýatlalyň.

1-nji kesgitleme. Eger boş bolmadyk G köplükde köpeltmek amaly kesgitlenip:

1) *köpeltmek amaly assosiatiw;*

2) *G köplükde köpeltmek amalyna ters bolan bölmek amaly kesgitlenen (G köplügiň islendik a we b elementleri, üçin $ax = b$ we $ya = b$ deňlemeleriň her biri G köplükde ýeke-täk çözüwe eýe) bolsa, onda G köplük multiplikatiw topar emele getirýär diýilýär.*

Eger G köplükde kesgitlenen köpeltmek amaly kommutatiw bolsa, onda G topara **kommutatiw** ýa-da **abel topar** diýilýär. Eger G köplügiň elementleri tükenikli bolsa, bu köplügiň emele getirýän toparyna **tükenikli**, tersine bolan ýagdaýynda oňa **tükeniksiz** topar diýilýär. Tükenikli toparyň elementleriniň sanyna onuň **tertibi** diýilýär. G toparyň tertibi $|G|$ arkaly belgilenilýär.

Toparyň kesgitlemesinden aşakdaky häsiýetler gelip çykýar:

1) *her bir G multiplikatiw toparda, çep we sag gysgaltmagy ýerine ýetirip bolýar, ýagny $ab_1 = ab_2$ ýa-da $b_1a = b_2a$ bolsa, onda $b_1 = b_2$.*

2) *her bir G multiplikatiw toparda* $\forall_{a\in G}[ae = ea = a]$ *şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk e element bar. e elemente G toparyň birlik elementi diýilýär we kä halatlarda ol* 1 *belgi bilen hem belgilenýär;*

3) *her bir G multiplikatiw toparda onuň islendik a elementine ters bolan* $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ *şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk* a^{-1} *element bardyr;*

4) *islendik m we n bitin sanlar üçin*

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

deňlikler ýerine ýetýär.

G toparda ters elementiň barlygyna görä, $ax = b$ we $ya = b$ deňlemeleriň çözüwlerini $x = a^{-1}b,\quad y = ba^{-1}$ görnüşde ýazyp bolar.

Aýdylanlary nazara alyp, toparyň 1-nji kesgitlemesine deňgüýçli bolan aşakdaky kesgitlemäni hem berip bolar.

2-nji kesgitleme. Eger boş bolmadyk G köplükde:

1) *köpeltmek amaly assosiatiw;*

2) *G köplükde köpeltmek amalyna görä birlik element bar;*

3) *köpeltmek amalyna görä G köplügiň her bir a elementine ters bolan* a^{-1} *element bar bolsa, onda bu köplüge köpeltmek amalyna görä* ***topar*** *emele getirýär diýilýär.*

2-nji kesgitlemeden peýdalanyp, berlen köplügiň köpeltmek amalyna görä topar emele getirýändigini barlamak kähalatlarda ýeňil bolýar.

Ähli položitel rasional sanlaryň köplügi, noldan tapawutly rasional sanlaryň köplügi, ähli položitel hakyky sanlaryň köplügi, noldan tapawutly hakyky sanlaryň köplügi, noldan tapawutly ähli kompleks sanlaryň köplügi multiplikatiw topara mysal bolup biler. Bu köplükleriň ählisi hem abel toparlardyr. Tükeniksiz kommutatiw däl multiplikatiw topara mysal edip, ***C*** kompleks sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli aýratyn däl kwadrat matrisalaryň emele getirýän toparyny almak bolar. Ony M_n (***C***) bilen belgiläris. Birlikden alnan n-nji derejeli kompleks kökleriň emele getirýän multiplikatiw abel topary n sany elementden durýar, ýagny onuň tertibi n-e deňdir.

1.2. Ornunagoýmalar

Ornunagoýmalaryň emele getirýän multiplikatiw topary kommutatiw däl tükenikli toparlaryň wajyp mysalydyr. Bu topary kesgitlemek üçin ilki bilen çalşyrmalara we ornunagoýmalara degişli maglumatlary ýada salalyň. Goý, n sany elementden durýan M köplük berlen bolsun. Bu köplügiň elementlerini $1,2,3,\ldots, n$-ilkinji natural sanlar bilen belgilemek bolar. Sebäbi, bizi M köplügiň her bir elementiniň tebigaty gyzyklandyrmaýar.

$1,2,3,\ldots,n$ *sanlaryň bellibir tertipde alnan islendik ýerleşdirmesine* ***n element-li çalşyrma*** *diýilýär.*

Ähli n elementli çalşyrmalaryň sany $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ululyga deň (1,§24). Eger $i_1, i_2 \ldots i_k \ldots i_s \ldots i_n$ çalşyrmada $i_k > i_s$ bolsa, ýöne i_k element i_s elementden çepde ýerleşýän bolsa, onda i_k we i_s elementlere ***tertipsizlik (inwersiýa)*** emele getirýär diýilýär.

Jübüt sanly tertipsizlik emele getirýän çalşyrmalara ***jübüt çalşyrma,*** täk sanly tertipsizlik emele getirýän çalşyrmalara ***täk çalşyrma*** diýilýär.

Berlen çalşyrmadan iki elementiň ýerini çalşyp, galan elementleri öňki ýerinde galdyryp çalşyrma alynsa, onda ol çalşyrmada ***transpozisiýa amaly*** geçirildi hasap edilýär we alnan netijä ol çalşyrmanyň ***transpozisiýasy*** diýilýär. Transpozisiýa amaly ýerine ýetirmek işine ***tansponirlemek*** diýilýär.

1-nji teorema. $2 \leq n$ *elementli çalşyrmalaryň köplüginde jübüt we täk çalşyrmalaryň sany özara deňdir we ol* $\frac{1}{2}n!$ *formula arkaly hasaplanylýar.*

Subudy. Goý, A_1 we A_2 dürli n elementli çalşyrmalar bolsun. Eger bu çalşyrmalaryň islendik şol bir iki belginiň kömegi bilen berlen elementleriniň üstünde transpozisiýa amaly geçirilse, onda özara dürli A_1' we A_2' çalşyrmalar alynýar. Hakykatdan hem, eger A_1' we A_2' çalşyrmalar dürli däl bolsady, onda A_1 we A_2 çalşyrmalar hem meňzeş bolardy. Sebäbi olary A_1' we A_2' çalşyrmalarda ters transpozisiýa amalyny geçirip almak bolar.

Eger ähli n elementli çalşyrmalaryň şol bir belgili iki elementiniň transpozisiýalaryny geçirsek, netijede $n!$ sany özara dürli ähli n elementli çalşyrmalary alarys. Ýöne bu özgertmelerde täk çalşyrmalar jübüt çalşyrmalara we tersine özgerer. Netijede, täk çalşyrmalaryň sany jübüt çalşyrmalaryň sanyna, ýagny $\frac{1}{2}n!$ baha deň bolar.►

Belli bolşy ýaly, (1,§2) transpozisiýa amalyny birnäçe gezek geçirip n elementli her bir çalşyrmadan başga bir n elementli çalşyrma geçip bolýar.

1-nji kesgitleme. $1,2,3,\ldots,n$ *elementlerden durýan köplügiň öz üstüne islendik özara birbelgili şekillenmesine n elementli ýa-da n-nji derejeli ornunagoýma diýilýär.*

Ornunagoýmalary latyn elipbisiniň $A, B, C, \ldots$ harplary bilen belgileýäris.

Eger A ornuna goýmada $i\,(i = 1,2,3,\ldots,n)$ san a_i sana şekillenýän bolsa, onda ony

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

görnüşinde ýazýarys. (1) ýazgy A ornunagoýmanyň 1-i a_1-e, 2-ni a_2-ä, 3-i a_3-e, ... , n-i a_n-e şekillendirýändigini aňladýar. Ornunagoýmalar özara birbelgili şekillenmeler bolany üçin (1) ýazgynyň 2-nji setirindäki $a_i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ sanlar özara dürlüdirler. Şeýle-de, (1) ýazgyda islendik iki sütüniň ýerlerini çalşyp bolýandygyny belläliň. Meselem,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_4 & a_5 & a_6 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \ldots & n & 1 & 2 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n & a_1 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

ýazgylar (1) ýazgynyň başga bir görnüşde berlişidir, sebäbi bu ýazgylaryň ählisinde hem i san a_i $(i=1,2,3,...,n)$ sana geçýär.

Netijede, n-nji derejeli her bir ornunagoýmany iki sany n elementli çalşyrmalaryň kömegi bilen ýazmak bolar:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix},$$

özi hem bu ýazgyda birinji setirdäki $a_1, a_2, \ldots, a_n$ çalşyrmalary erkin saýlap bolýar.

Tersine, eger käbir $1,2,3,\ldots,n$ sanlaryň emele getiren $c_1, c_2, \ldots, c_n$ çalşyrmasynyň aşagyndan bu sanlaryň emele getirýän başga bir $d_1, d_2, \ldots, d_n$ çalşyrmasyny ýazsak, onda n-nji derejeli c_i-ni d_i-e geçirýän $(i=1,2,\ldots,n)$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýmany alarys.

Her bir ornunagoýmany (1) görnüşde ýazmak mümkin. Bu ýazgyda dürli iki ornunagoýmalar biri-birinden diňe aşaky setiri bilen tapawutlanýar. Bu ýerden aşakdaky tassyklama gelip çykýar.

2-nji teorema. *n-nji derejeli ornunagoýmalaryň sany $n!$-a deň.*

Subudy. Hakykatdan hem, eger $1,2,3,\ldots,n$ sanlaryň aşagyndan gezekli-gezegine n elementli çalşyrmalary ýazyp çyksak, onda ähli mümkin bolan özara dürli ornunagoýmalary alarys. n elementli çalşyrmalaryň sany $n!$-a deň bolany üçin, n-nji derejeli ornunagoýmalaryň sany hem $n!$-a deň bolar. ►

Käbir n derejeli

$$A=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ornunagoýmany alalyň. (2) ornunagoýmanyň aşaky we ýokarky çalşyrmalary birmeňzeş ýa-da dürli jübüt-täklige eýe bolup biler. Goý, olar birmeňzeş jübüt-täklige eýe bolsun. Bu ornunagoýmany başga bir erkin alnan görnüşde ýazalyň:

$$A=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ a_{j_1} & a_{j_2} & \dots & a_{j_n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(3) görnüşde ýazylan ornunagoýmanyň hem (2) ornunagoýma bilen birmeňzeş jübüt-täklige eýe bolýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, $j_1, j_2, \dots, j_n$ çalşyrmany $i_1, i_2, \dots, i_n$ çalşyrmadan birnäçe gezek transponirläp almak bolar. Eger $i_1, i_2, \dots, i_n$ çalşyrmany $j_1, j_2, \dots, j_n$ çalşyrma geçirýän transponirlemekleriň yzygiderligi bilen bilelikde (2) ornunagoýmanyň aşaky setirinde hem degişli transponirlemegi geçirsek, ýagny i_k elementi i_t element bilen çalşyranymyzda A_{i_k} elementi a_{i_t} element bilen çalşyrsak, onda (2) ornunagoýmadan (3) ornunagoýma geçeris. Başga sözler bilen aýdanyňda, (2) ornunagoýmanyň sütünleriniň üstünde transponirlemegi yzygider geçirip, (3) ornunagoýma geçeris. Bu ýagdaýda her bir transpozisiýada aşaky setir bilen ýokarky setirdäki çalşyrmalaryň jübüt-täkligi deň üýtgär. Netijede, (2) ornunagoýmanyň jübüt-täkligi bilen (3) ornunagoýmanyň jübüt-täkligi gabat gelýär. A ornunagoýmanyň (3) ýazgysynyň erkin saýlanyp alnandygyny hasaba alsak, onda ýokardaky aýdylanlara görä, A ornunagoýmanyň islendik başga bir görnüşdäki ýazgysynyň hem jübüt-täkligi özüniň jübüt-täkligi bilen gabat gelýär.

2-nji kesgitleme. *Eger A ornunagoýmanyň ýokarky we aşaky setirleriniň emele getirýän çalşyrmalarynyň jübüt-täkligi gabat gelse, onda oňa* **jübüt**, *gabat gelmese* **täk ornunagoýma** *diýilýär.*

Bu kesgitlemä deňgüýçli bolan kesgitlemäni aşakdaky ýaly ýazyp bolar.

3-nji kesgitleme. *Eger A ornunagoýmanyň aşaky we ýokarky setirleriniň emele getirýän çalşyrmalarynyň tertipsizlikleriniň umumy jemi jübüt bolsa* **jübüt, täk** *bolsa oňa täk* **ornunagoýma** *diýilýär.*

Iki sany täk ýa-da iki sany jübüt bitin sanlaryň jemi jübüt bolany üçin, bu kesgitlemäni aşakdaky ýaly hem beýan etmek bolar: *A ornunagoýma setirleriniň tertipsizlikleriniň jübüt-täkligi gabat gelende, şonda we diňe şonda jübüt diýilýär.*

Eger A ornunagoýma (1) görnüşde ýazylyp, ýagny

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

görnüşde bolsa, onda onuň ýokardaky setiri jübüt çalşyrma bolýanlygy üçin, onuň jübüt-täkligi aşaky $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ çalşyrmanyň jübüt-täkligine baglydyr. Bu ýerden aşakdaky tassyklama gelip çykýar.

3-nji teorema. $2 \leq n$ -nji derejeli jübüt we täk ornunagoýmalaryň sany özara deň bolup, $\frac{1}{2}n!$ formula arkaly hasaplanylýar.

Subudy. Hakykatdan hem, $1,2,3,\dots,n$ çalşyrmanyň aşagyndan $\frac{1}{2}n!$ sany jübüt çalşyrmalary gezekli-gezegine ýazsak, $\frac{1}{2}n!$ sany jübüt ornunagoýmany, galan $\frac{1}{2}n!$ sany täk çalşyrmalary gezekli-gezegine ýazyp $\frac{1}{2}n!$ sany täk ornunagoýmany alarys.▶

1-nji mysal. 6-njy derejeli

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ornunagoýmanyň jübüt-täkligini barlaň.

Çözülişi. A ornunagoýmanyň ýokarky setiriniň emele getirýän çalşyrmasy 5 sany tertipsizlik, aşaky setiriniň emele getirýän çalşyrmasy bolsa 11 sany tertipsizlik emele getirýär. Bu çalşyrmalaryň tertipsizlikleriniň umumy jemi 16-a deň bolany üçin, ol jübüt ornunagoýmadyr.

Berlen ornunagoýmany

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

görnüşde ýazsak, onda onuň ýokarky setiriniň emele getirýän çalşyrmasy 0 tertipsizligi, aşaky setiriniň emele getirýän çalşyrmasy bolsa, 8 sany tertipsizligi emele getirýär.

Jogaby: jübüt ornunagoýma.

Bu mysal, şol bir ornunagoýmanyň dürli ýazgylarynda onuň umumy tertipsizliginiň jübütliginiň, täkliginiň üýtgemeýändigini, ýöne tertipsizliginiň sanynyň üýtgemeginiň mümkindigini görkezýär.

1.3. Ornunagoýmalaryň topary

Erkin alnan n-nji derejeli

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ we } B = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýmalary alalyň.

Bu A we B ornunagoýmalary yzygider ýerine ýetirip, ýagny $1 \xrightarrow{A} i_1 \xrightarrow{B} a_1$; $2 \xrightarrow{A} i_2 \xrightarrow{B} a_2; \dots; n \xrightarrow{A} i_n \xrightarrow{B} a_n$ özgertmeleri geçirip, netijede,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýmany alarys.

1-nji kesgitleme. *A we B ornunagoýmalary yzygider ýerine ýetirmek esasynda alnan C ornunagoýma A ornunagoýmanyň B ornunagoýma* **köpeltmek hasyly** *diýilýär we $C=AB$ ýaly ýazylýar.*

Meselem, eger

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ we } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ bolsa, onda } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hakykatdan hem, A ornunagoýma 1-i 2-ä şekillendirýär, B ornunagoýma bolsa 2-ni 4-e şekillendirýär. Netijede, AB ornunagoýma 1-i 4-e şekillendirýär. Bu aýdylanlary gysgaça $1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 4 \Rightarrow 1 \xrightarrow{AB} 4$ görnüşde ýazarys. Şuňa meňzeşlikde $2 \xrightarrow{A} 3 \xrightarrow{B} 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2 \xrightarrow{AB} 1$, $3 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \Rightarrow 3 \xrightarrow{AB} 2$, $4 \xleftarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 3 \Rightarrow 4 \xrightarrow{AB} 3$ bolar.

$3 \le n$-nji *derejeli ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly kommutatiw däldir.*

Hakykatdan hem,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & i_4 & i_5 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ we } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & j_4 & j_5 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýmalar üçin, $AB \ne BA$ gatnaşyk ýerine ýetýär, sebäbi $1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 2 \Rightarrow 1 \xrightarrow{AB} 2$, ýöne $1 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 1 \Rightarrow 1 \xrightarrow{BA} 1$.

Ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly assosiatiwdir.

Hakykatdan hem, goý, n-nji derejeli A,B we C ornunagoýmalar berlen bolup, A ornunagoýma erkin alnan k $(1 \le k \le n)$ elementi a_k elemente geçirýän, B ornunagoýma a_k elementi b_k elemente geçirýän, C ornunagoýma bolsa, b_k elementi c_k elemente geçirýän bolsun. Onda

$$k \xrightarrow{A} a_k \xrightarrow{B} b_k \Rightarrow k \xrightarrow{AB} b_k \text{ we } b_k \xrightarrow{C} c_k \Rightarrow k \xrightarrow{AB} b_k \xrightarrow{C} c_k \Rightarrow k \xrightarrow{(AB)C} c_k.$$

Şeýle-de,

$$a_k \xrightarrow{B} b_k \xrightarrow{C} c_k \Rightarrow a_k \xrightarrow{A(BC)} c_k \text{ we } k \xrightarrow{A} a_k \xrightarrow{BC} c_k \Rightarrow k \xrightarrow{A(BC)} c_k .$$

Bu ýerden k elementiň erkin saýlanyp alnandygyny göz öňüne tutsak, onda

$$(AB) \cdot C = A \cdot (BC),$$

deňligi alarys.

4-nji teorema. n-nji derejeli ähli ornunagoýmalaryň köplügi ornunagoýmalary köpeltmek amalyna görä topar emele getirýär.

Subudy. Hakykatdan hem, ornunagoýmalary köpeltmek amaly assosiatiw we n-nji tertipli ornunagoýmalaryň arasynda her bir elementi özüne şekillendirýän $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ ornunagoýma bar. Bu element islendik n-nji derejeli A ornunagoýma bilen $AE = EA = A$ gatnaşykda bolany üçin, ol n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köplüginde köpeltmek amalyna görä birlik element bolýar. n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köplüginde her bir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ ornunagoýma üçin, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ şerti kanagatlandyrýan $A^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ ornunagoýma bar. A^{-1}-e A ornunagoýmanyň **tersi** diýilýär.

Netijede, birinji bölümçäniň 2-nji kesgitlemesine görä, n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köplügi multiplikatiw topar emele getirýär.▶

Ähli n-nji derejeli ornunagoýmalaryň emele getirýän multiplikatiw toparyna n-nji ***derejeli simmetrik topar*** diýilýär we S_n bilen belgilenýär. S_n toparyň tertibi $n!$-a deňdir.

Indi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

görnüşli ornunagoýma seredeliň. Bu ornunagoýmada hereketsiz galýan elementleriň ornuna nokatlary goýalyň we ony gysgaça

$$\begin{pmatrix} \ldots & i & \ldots & j & \ldots \\ \ldots & j & \ldots & i & \ldots \end{pmatrix},$$

görnüşde ýazalyň. (4) Ornunagoýmany $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ toždestwolaýyn ornunagoýmanyň aşaky setirindäki çalşyrmasynyň i we j elementleriň ýerlerini çalşyp, ýagny i we j elementleriniň transpozisiýasyny geçirip almak bolar. Şuňa laýyklykda (4) ornunagoýma i we j **elementleriň transpozisiýasy** diýilýär we gysgaça (i,j) bilen belgilenýär.

5-nji teorema. *Her bir n-nji derejeli ornunagoýmany birnäçe transpozisiýalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak bolar.*

Subudy. Goý, käbir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýma berlen bolsun. Belli bolşy ýaly, n elementli her bir çalşyrmadan, birnäçe transpozisiýany geçirip, başga bir n elementli çalşyrma geçip bolýar.

Hususy ýagdaýda, $1,2,3,\dots,n$ çalşyrmadan birnäçe transpozisiýany yzygider ýerine ýetirip, $i_1, i_2, i_3,\dots,i_n$ çalşyrma geçmek bolýar. $1,2,3,\dots,n$ çalşyrmadan $i_1, i_2, i_3,\dots,i_n$ çalşyrma geçmek üçin

$$j_1 \text{ we } s_1, j_2 \text{ we } s_2, \dots, j_m \text{ we } s_m, \tag{5}$$

elementleriň transpozisiýalaryny yzygider ýerine ýetirmeli diýip güman edeliň. Onda $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ ornunagoýmadan, (5) transpozisiýalary onuň aşaky setirinde yzygider ýerine ýetirip, A ornunagoýma geçmekligiň mümkinligi aýdyň. Ýöne, islendik

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

ornunagoýmanyň aşaky çalşyrmasynda j_k we j_e elementleriň transpozisiýasyny ýerine ýetirmeklik B ornunagoýmany sagyndan $\begin{pmatrix} \dots & j_k & \dots & j_e & \dots \\ \dots & j_e & \dots & j_k & \dots \end{pmatrix}$ ornunagoýma, ýagny (j_k, j_e) transpozisiýa köpeltmeklige deňgüýçlidir. Netijede,

$$A = E(j_1, s_1)(j_2, s_2)\dots(j_m, s_m)$$

deňligi alarys. Bu deňligiň sag tarapyndaky E köpeldijini taşlap,

$$A = (j_1, s_1)(j_2, s_2)\dots(j_m, s_m)$$

subut etmeli deňligimizi alarys.►

6-njy teorema. *Transpozisiýalaryň köpeltmek hasylyna dagadylan ornunagoýmalaryň jübüt-täkligi, bu dagatmadaky transpozisiýalaryň sanynyň jübüt-täkligi bilen gabat gelýär.*

Subudy. Teoremany subut etmek üçin, k sany transpozisiýaly ornunagoýmanyň jübüt-täkliginiň k-nyň jübüt-täkligi bilen gabat gelýändigini görkezmek ýeterlik. Eger $k = 1$ bolsa, onda bu şert ýerine ýetýär, sebäbi erkin alnan *(i,j)* transpozisiýa täk çalşyrma bolýar. Ýokardaky tassyklama $k - 1$ $(k \geq 2)$ bolanda, dogry diýip güman

2. sargyt № 749

edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, onuň k üçin hem dogrulygyny subut edeliň. k we $k-1$ sanlar dürli jübüt-täklige eýe, ýagny olaryň birisi täk beýlekisi jübüt san. $(k-1)$ sanly transpozisiýa dagadylan ornunagoýmany transpozisiýa köpeltseň, onda onuň jübüt-täkligi üýtgeýär, sebäbi islendik ornunagoýmany transpozisiýa köpeltseň, onda ol onuň aşaky setiriniň emele getirýän çalşyrmasyndaky transpozisiýalarynyň sanyny üýtgedýär.▶

Indi n-nji derejeli ähli jübüt ornunagoýmalaryň köplügine seredeliň. Belli bolşy ýaly, ol köplügiň elementleriniň sany $\frac{1}{2}n!$-a deň.

7-nji teorema. *n-nji derejeli ähli jübüt ornunagoýmalaryň köplügi multiplikatiw topar emele getirýär.*

Subudy. Goý, A we B erkin alnan n-nji tertipli jübüt ornunagoýmalar bolsun. A we B ornunagoýmalary transpozisiýalaryň köpeltmek hasylyna dagadyp, AB ornunagoýmanyň transpozisiýalarynyň köpeltmek hasylyna dagatmasyny alarys, onda AB ornunagoýma, 6-njy teorema görä, jübüt ornunagoýma bolar. Netijede, jübüt ornunagoýmalaryň köplüginde köpeltmek amalynyň ýerine ýetýändigini görkezdik. n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly assosiatiw, şoňa görä-de jübüt ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly hem assosiatiwdir, sebäbi jübüt ornunagoýmalaryň köplügi ähli ornunagoýmalaryň bölegi bolýar. n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köplügindäki $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$ birlik ornunagoýma jübüt ornunagoýmadyr, netijede, ol jübüt ornunagoýmalaryň köplügine degişlidir.

Eger $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$ ornunagoýma jübüt bolsa, onda oňa ters bolan

$A^{-1}=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$ ornunagoýma hem jübütdir, netijede, ol hem jübüt ornunagoýmalaryň köplügine degişli bolýar. Bu aýdylanlara görä, jübüt ornunagoýmalaryň köplügi multiplikatiw topar emele getirýär.▶

Jübüt ornunagoýmalaryň toparyna *alamaty üýtgediji* topar diýilýär we ony A_n bilen belgileýärler. Bu toparyň tertibi $\frac{1}{2}n!$-a deňdir.

1.4. Bölek toparlar

Goý, G topar we onuň käbir H bölek köplügi berlen bolsun. Eger H bölek köplük G topary kesgitleýän amala görä topar emele getirse, onda oňa G toparyň **bölek topary** diýilýär. Bölek toparlara degişli aşakdaky teorema dogrudyr: *$G \supset H$ bölek köplügiň G toparyň bölek topary bolmagy üçin, onuň a,b elementler bilen bilelikde ab we a^{-1} elementleri hem özünde saklamagy zerur we ýeterlikdir* (1,§11).

Her bir multiplikatiw G toparyň iň bolmanda iki sany bölek topary bardyr. Olar G toparyň özüniň emele getirýän multiplikatiw topary we diňe birlik elementiň emele getirýän multiplikatiw toparlarydyr. Elbetde, toparyň başga-da bölek toparlarynyň bolmagy mümkin. Meselem, 1 we -1 elementlerden durýan multiplikatiw topar, noldan başga ähli rasional sanlaryň emele getirýän multiplikatiw toparynyň bölek toparydyr. n-nji tertipli ähli jübüt ornunagoýmalaryň emele getirýän multiplikatiw topary, n-nji derejeli simmetrik toparyň bölek toparydyr.

Her biriniň kesgitleýjisi 1-e deň bolan, P san meýdanynda berlen n-nji tertipli, matrisalar köplüginiň matrisalary köpeltmek amalyna görä topar emele getirýändigini barlamak kyn däl. Bu topar P meýdanda berlen n-nji tertipli ähli aýratyn däl matrisalaryň emele getirýän multiplikatiw toparynyň bölek topary bolýar.

Bölek toparyň wajyp mysallarynyň biri-de ***aýlawly (siklli)*** diýip atlandyrylýan bölek toparlardyr. Bu bölek topar berlen G toparyň haýsy hem bolsa bir a elementiniň derejelerinden durýar. Ony $<a>$ bilen belgiläliň.

$< a >= \{a^n \mid a \in G, n \in \boldsymbol{Z}\}$ köplügiň G multiplikatiw toparyň bölek topary bolýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem,

1) $\forall_{a^m, a^n \in < a >} (a^m a^n = a^{m+n} \in < a >)$;

2) $1 = a^0 \in < a >$;

3) $a^n \in < a > \Rightarrow a^{-n} \in < a >$.

Kesgitleme. *G toparyň a elementiniň ähli derejeleriniň köplüginden durýan $< a >$ topara G toparyň a* **elementiniň döredýän aýlawly topary** *diýilýär.*

Iki ýagdaýyň bolmagynyň mümkindigini belläliň: 1) a elementiň ähli derejeleriniň G toparyň dürli elementleri bolmagy mümkin; bu ýagdaýda $<a>$ topara tükeniksiz **tertibe eýe** diýilýär; 2) a elementiň derejeleriniň arasynda özara deňleriniň bolmagy mümkin, meselem $a^l = a^s$, bu ýerde $s \neq l$. Bu ýagdaýda $< a >$ topara **tükenikli tertibe** eýe diýilýär. Eger G topar tükenikli bolsa, onda a elementiň derejeleriniň arasynda özara deňleri hemişe bardyr. Kähalatlarda, G topar tükeniksiz bolanda hem a elementiň käbir derejeleriniň deň bolmagy mümkin. Goý, $as = a^l$, $s > l$ deňlik ýerine ýetýär diýeliň. Onda $a^{s-l} = 1$ bolar, ýagny a elementiň 1-e deň bolan položitel derejesi bar eken.

Goý, 1) $a^n = 1, n > 0$;

2) eger $a^l = 1, l > 0$ bolsa, onda $l \leq n$

şertleri kanagatlandyrýan n bar bolsun, ýagny n san $a^n = 1$ şerti kanagatlandyrýan natural görkezijileriň iň kiçisi bolsun. Bu ýagdaýda a elementiň tertibi n-e deň diýilýär.

Eger a elementiň tertibi n-e deň bolsa, onuň döredýän $< a >$ bölek aýlawly topary

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-2}, a^{n-1} \qquad (6)$$

elementlerden duryar.

Hakykatdan hem, bu elementleriň ählisi özara dürlüdir, sebäbi $a^l = a^s, 0 \le l < < s \le n-1$ bolan bolsady, onda $a^{s-l} = 1$ bolardy we netijede, a elementiň tertibi n-den kiçi bolan $s-l$ sana deň bolardy. Bu bolsa, natural n-iň $a^n = 1$ şerti kanagatlandyrýan iň kiçi dereje görkezijisidigine garşy gelýär.

Ikinji tarapdan, a elementiň n-den kiçi bolmadyk islendik başga bir derejesi (6) yzygiderligiň haýsy hem bolsa bir elementine deňdir. Hakykatdan hem, eger k san $n \le k$ şerti kanagatlandyrýan käbir bitin san bolsa, onda

$$k = nq + r, \quad 0 \le r < n \qquad (7)$$

gatnaşyk ýerine ýeter we şonuň üçin hem,

$$a^k = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = a^r.$$

Bu ýerde eger $a^k = 1$ bolsa, onda (7) deňlikde $r = 0$ bolýandygy, ýagny k sanyň n sana bölünýänligi gelip çykýar, sebäbi garşylykly ýagdaýda a-nyň tertibi r-e deň bolardy, bu bolsa $r < n$ bolýanlygy üçin mümkin däl. Şeýlelikde, (6) köplük n sany elementden duryar. Netijede, a elementiň döredýän $< a >$ aýlawly toparynyň tertibi a elementiň tertibine deň.

Her bir G toparda tertibi 1- e deň bolan diňe bir sany elementiň bardygyny we onuň birlik elementidigini belläliň. Birlik elementiň döredýän aýlawly topary diňe birlik elementden duryan bölek topar bilen gabat gelýär.

8-nji teorema. *Eger H we F bölek köplükler G toparyň bölek toparlary bolsa, onda olaryň kesişmesi bolan $H \cap F$ hem onuň bölek toparydyr.*

Hakykatdan hem, eger a we b elementler $H \cap F$ köplüge degişli bolsa, onda olar H we F toparlaryň her birine hem degişlidir. Netijede, ab we a^{-1} elementler H we F toparyň her birine degişlidir. Şonuň üçin hem ab we a^{-1} elementler $H \cap F$ köplüge-de degişlidirler. Netijede, $H \cap F$ köplük G toparyň bölek topary bolýar.▶

Subut edilen teoremany bölek toparlaryň sany tükenikli ýa-da tükeniksiz bolanda hem aýtmak bolar.

1.5. Aýlawly toparlar

Kesgitleme. *Eger G topar özüniň haýsy-da bir a elementiniň derejelerinden duryan bolsa* (özüniň haýsy hem bolsa bir $< a >$ aýlawly bölek topary bilen gabat gelse), *onda oňa* **aýlawly topar** *diýilýär.*

a elemente $< a >$ aýlawly toparyň ***döredijisi*** diýilýär. Her bir aýlawly topar abel topardyr, sebäbi,

$$a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m = a^{m+n}, \qquad m, n \in \boldsymbol{Z}$$

deňlik ýerine ýetýär.

1-nji mysal. ***Z*** bitin sanlaryň additiw topary tükeniksiz aýlawly topar emele getirýär. Onuň emele getirijisi 1 ýa-da –1 bolýar.

2-nji mysal. Birlikden alnan n-nji derejeli kökleriň emele getirýän multiplikatiw topary n-nji tertipli aýlawly topar bolýar. Hakykatdan hem, birlikden alnan n-nji derejeli kökleriň köplügi köpeltmek hasylyna görä topar emele getirýär (1, §6). Belli bolşy ýaly, birlikden alnan n-nji derejeli kök

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

formulanyň kömegi bilen hasaplanýar.

Muawryň formulasy boýunça

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

ýagny $(\varepsilon_1)^k = \varepsilon_k$ deňlik ýerine ýetýär.

Şeýlelik bilen, 1-den alnan n-nji derejeli kökleriň topary, emele getirijisi $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, bolan aýlawly topardyr.

9-njy teorema. *Her bir tükeniksiz aýlawly topar* ***Z*** *bitin sanlaryň additiw toparyna izomorfdyr.*

Subudy. Goý, $G =< a >$ tükeniksiz aýlawly topar bolsun. G toparyň her bir a^k elementine ***Z*** toparyň k elementini degişli edýän şekillenmä garalyň. Bu şekillenmäniň G toparyň ***Z*** toparyň üstüne özara birbelgili şekillenmesi bolýandygy aýdyň. Bu şekillenme izomorf şekillenme hem bolýar, sebäbi $a^k \longmapsto k$ *we* $a^s \longmapsto s$ bolýanlygyndan $a^k a^s = a^{k+s} \mapsto k + s$ gelip çykýar. ►

10-njy teorema. *Her bir n tertipli aýlawly topar* 1*-den alnan n-nji derejeli kökleriň emele getirýän multiplikatiw toparyna izomorfdyr.*

Subudy. Goý, $G =< a >$ topar n tertipli aýlawly topar bolsun. Onda ol

$$a^0 = 1, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}$$

elementlerden durýar. Birlikden alnan n-nji derejeli kökleriň emele getirýän multiplikatiw topary bolsa

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1^0 = 1, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1^3, \ldots \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_1^{n-1}$$

elementlerden durýar.

G toparyň her bir a^k elementine $< \varepsilon_1 >$ toparyň ε_1^k elementini degişli edýän şekillenmä garalyň. Bu şekillenme G toparyň 1-den alnan n-nji derejeli kökleriniň multiplikatiw toparyna izomorf şekillenmesi bolýar. Sebäbi, $a^k \longmapsto \varepsilon_1^k$ we $a^s \longmapsto \varepsilon_1^s$ bolýanlygyndan $a^k a^s = a^{k+s} \mapsto a^{k+s} = \varepsilon_1^{k+s} = \varepsilon_1^k \varepsilon_1^S$ gelip çykýar.▶

9-njy we 10-njy teoremalardan görnüşi ýaly, bitin sanlaryň additiw topary we 1-den alnan n-nji derejeli kökleriň multiplikatiw topary ähli aýlawly toparlary ýapýar.

Indi aýlawly toparyň bölek topary baradaky teoremasyny subut edeliň.

11-nji teorema *Aýlawly toparyň her bir bölek topary aýlawly topardyr.*

Subudy. Goý, $G = < a >$ aýlawly topar, H bolsa onuň käbir bölek topary bolsun. H bölek topary E birlik bölek topardan tapawutly diýip hasap edýäris. Garşylykly ýagdaýda, ol aýlawly bölek topar bolýar. H bölek toparda saklanýan a elementiň položitel derejeleriniň arasynda iň kiçi dereje görkezijilisi bardyr. Goý, bu iň kiçi položitel dereje görkezijili element a^k diýeliň. Eger $a^l \in H$ bolsa, onda l-iň k sana bölünýändigini görkezeliň. Hakykatdan hem, galyndyly bölmek teoremasyna görä, $l = kq + r, 0 \le r < k$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Eger $r > 0$ bolsa, onda H bölek toparda $a^l (a^k)^{-q} = a^{kq+r} a^{-kq} = a^r$ element bar. Bu a^k elementiň iň kiçi dereje görkezijili element edilip saýlanyp alnyşyna garşy gelýär. Netijede, $r = 0$ we l san k sana bölünýär. Diýmek, H bölek topar a^k sanyň derejelerinden durýar. Onda H bölek topar a^k emele getirijili aýlawly topar bolýar. ▶

1.6. Toparyň bölek topar boýunça dagadylyşy

Goý, G topar we onuň M we N bölek köplükleri berlen bolsun.

$MN = \{ab \mid a \in M, b \in N\}$ köplüge M we N bölek köplükleriň **köpeltmek hasyly** diýilýär.

M we N köplükleriň biriniň diňe bir elementden durmagy hem mümkin. Meselem, $M = \{a\}$, onda

$$MN = aN = \{ab \mid b \in N\}$$

bolýar. Ýagny a elementi N köplüge köpeltmek üçin, ony N köplügiň her bir elementine köpeltmek gerek.

G toparda köpeltmek amalynyň assosiatiwliginden, bu toparyň bölek köplükleriniň köpeltmek hasyllarynyň hem assosiatiwligi gelip çykýar:

$$(MN) \cdot P = M \cdot (NP).$$

Eger H köplük G toparyň bölek topary bolsa, onda $HH = H$ bolýandygyny belläliň. Hakykatdan hem, H bölek toparyň a we b elementleriniň ab köpeltmek hasyly H köplükde saklanýar, ýagny $H \cdot H \subseteq H$ gatnaşyk dogry. Ikinji bir tarapdan, $H \subseteq H \cdot H$ gatnaşyk ýerine ýetýär, sebäbi $H = He$. Netijede, $HH = H$ deňlik dogry.

Goý, H bölek topar, G toparyň erkin saýlanyp alnan bölek topary bolsun. H bölek topary peýdalanyp G toparyň $a,b,c,\dots$ elementleriniň üstüne $a\rho b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ýa-da $a\rho b \Leftrightarrow b = ah,\ h \in H$ düzgün bilen kesgitlenen ρ binar gatnaşygyny girizeliň.

ρ gatnaşygynyň ekwiwalentlik gatnaşygy bolýandygyny görkezmek kyn däl (1, §6).

Hakykatdan hem:

1) $\underset{a\in G}{\forall}\ [a\rho a]$, çünki $a = a\cdot e, e \in H$;

2) $\underset{a,b\in G}{\forall}\ [a\rho b \Rightarrow b\rho a]$, çünki $a\rho b \Leftrightarrow b = ah,\ h \in H$ bolýandygyndan $a = bh^{-1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b\rho a$ gelip çykýar;

3) $\underset{a,b,c\in G}{\forall}\ [a\rho b, b\rho c \Longrightarrow a\rho c]$, çünki $a\rho b \Leftrightarrow b = ah_1$, we $b\rho c \Leftrightarrow c = bh_2$ gatnaşyklaryň ýerine ýetýänliginden $c = bh_2 = (ah_1)h_2 = a(h_1h_2), h_1h_2 \in H$ gatnaşyk gelip çykýar.

Bilşimiz ýaly, berlen M köplükde ekwiwalentlik gatnaşygyny gurup bolsa, onda bu ekwiwalentlik gatnaşygyna görä ol köplügi ekwiwalentlik klaslaryna dagadyp bolýar. Netijede, ρ ekwiwalentlik gatnaşygy G topary ekwiwalentlik klaslaryna dagadýar. Ol dagatmanyň nähili bolup biljekdigini anyklaşdyralyň. Eger $H = G$ bolsa, dagatma diňe bir klasdan durar, sebäbi $\underset{a,b\in G}{\forall}\ [b = a(a^{-1}b)], a^{-1}b \in H$ we netijede, $a\rho b$ gatnaşygy alarys. Eger $H = E = \{e\}$ bolsa, onda ρ ekwiwalentlik gatnaşygy adaty deňlik gatnaşygyna öwrülýär we G toparyň her bir elementi bir sany ekwiwalentlik klasyny emele getirýär. G toparyň H bölek topary E we G bölek toparlardan tapawutly diýip güman edeliň. B_i-ni bu H bölek topar boýunça alnan ekwiwalentlik klaslarynyň biri we $g_i \in B_i$ diýeliň. Onda her bir $b = g_ih, h \in H$ görnüşli element B_i klasa degişli bolar, sebäbi $g_i\rho b$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Tersine, eger $b \in B_i$ bolsa, onda $g_i\rho b$ gatnaşyk dogry, şonuň üçin hem $b = g_ih,\ h \in H$ bolar. Netijede, $B_i = g_iH$ deňligi alarys. Şeýlelik bilen $E \subset H \subset G$ bolanda, ρ ekwiwalentlik gatnaşygy bilen kesgitlenen G toparyň H bölek topary boýunça alnan her bir ekwiwalentlik klasynyň, bu klasyň erkin alnan g_i elementi bilen H bölek toparyň g_iH köpeltmek hasylyna deňdigi subut edildi. Bu ekwiwalentlik klaslaryna **G toparyň H bölek topar boýunça alnan çep ýanaşyk klaslary diýilýär.** Dagatmanyň özüne bolsa, **G toparyň H bölek topar boýunça çep ýanaşyk klaslara dagatmasy** diýilýär. $B_i = g_iH$ ýanaşyk klasa g_i elementiň döredýän ýanaşyk klasy diýilýär.

B_i ýanaşyk klasda g_i elementiň erkin saýlananlygyna görä B_i ýanaşyk klas özüniň islendik elementi bilen döredilip bilner. Şonuň üçin onuň islendik elementini bu klasyň wekili hökmünde almak bolar. Ýanaşyk klaslarynyň biriniň H bölek toparyň özüniň bolýandygyny hem bellemek gerek. Bu klas e birlik, şeýle-de, islendik $h \in H$ element bilen döredilip bilner, sebäbi $hH = H$ deňlik dogry. Bu klasy eH, hH ýa-da ýöne H bilen belgileýärler.

Eger G topar tükenikli topar bolsa, onda G toparyň H bölek topar boýunça çep ýanaşyk klaslara dagatmasy aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$G = H \dotplus g_1 H \dotplus g_2 H \dotplus \ldots \dotplus g_{s-1} H = \sum_{i=1}^{S-1} g_i H \dotplus H.$$

Bu ýerde $\dotplus$ we $\sum$ belgiler çep ýanaşyk klaslaryň birleşmesini aňladýar.

G toparyň elementiniň üstünde $a\rho' b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$, ýagny $a\rho'\, b \Leftrightarrow b = ha,\ h \in H$ düzgün bilen kesgitlenen ρ' gatnaşygyny hem girizmek bolar.

Bu ýagdaýda biz, G toparyň H bölek topar boýunça alnan Hg sag ýanaşyk klasy düşünjesini alarys. G tükenikli toparyň H bölek topar boýunça sag ýanaşyk klaslara dagatmasy aşakdaky ýaly bolar:

$$G = H \dotplus Hg_1 \dotplus Hg_2 \dotplus \ldots \dotplus Hg_{s-1} = \sum_{i=1}^{S-1} Hg_i \dotplus H.$$

G toparyň H bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmasy şol bir dagatmamy? – diýen sorag tebigy ýagdaýda ýüze çykýar. Başgaça aýdylanda ρ we ρ' ekwiwalentlik gatnaşyklary dürlümi? – diýlen sorag döreýär.

Eger G topar abel topar bolsa, onda G toparyň H bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelýär, sebäbi $gH = Hg,\ g \in G$ gatnaşyk ýerine ýetýär. G abel topar bolmasa, onda H bölek topara laýyklykda kähalatlarda çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalarynyň gabat gelmegi ýa-da gelmezligi hem mümkin.

1-nji mysal. Bitin sanlaryň additiw toparynyň k natural sana kratny bolan elementlerden düzülen bölek topary boýunça çep we sag ýanaşyk klaslaryna dagatmalaryny ýazyň.

Çözülişi. Goý, G bitin sanlaryň additiw topary H bolsa k natural sana kratny bolan ähli bitin sanlaryň emele getirýän bölek topary bolsun. G topar abel topar. Şoňa görä-de, bu toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelýär. Her bir dagatma k sany ýanaşyk klasdan durýar. Ol ýanaşyk klaslar degişlilikde, 0,1,2,.., $k - 1$ elementleriň kömegi bilen döredilýär. Şeýlelikde l, $(0 \le l \le k - 1)$ sanyň kömegi bilen döredilýän çep ýanaşyk klas $l + H$ görnüşde, sag ýanaşyk klasy bolsa $H + l$ görnüşde aňlatmak bolýar.

2-nji mysal. $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli aýratyn däl kwadrat matrisalaryň emele getirýän toparynyň kesgitleýjisiniň bahasy 1-e deň bolan matrisalaryň emele getirýän bölek topary boýunça alnan çep we sag ýanaşyk klaslaryna dagatmalarynyň gabat gelýändigini görkeziň.

Çözülişi. Goý, $G_n(\boldsymbol{R})$ topar $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli aýratyn däl matrisalaryň emele getirýän topary, $Q_n(\boldsymbol{R})$ bolsa kesgitleýjisi 1-e deň bolan matrisalaryň emele getirýän bölek topary bolsun. Kesgitleýjileri deň bolan matrisalaryň köplügi çep (şeýle hem sag) ýanaşyk klaslary emele getirýär.

Hakykatdan hem, eger $B \in AQ_n(\boldsymbol{R})$, ýagny $B = AU$, $U \in Q_n(\boldsymbol{R})$ bolsa, onda $|B| = |AU| = |A| \cdot |U| = |A| \cdot 1 = |A|$ ýa-da $|B| = |A|$. Tersine, eger $|B| = |A|$ bolsa, onda $B = A(A^{-1}B) \in AQ_n(\boldsymbol{R})$, sebäbi $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = |A|^{-1} \cdot |A| = 1$, şonuň üçin hem, $A^{-1}B \in Q_n(\boldsymbol{R})$.

Netijede, $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň kesgitleýjileriniň bahalary deň bolan matrisalaryny toparlap, onuň $Q_n(\boldsymbol{R})$ bölek topary boýunça alnan çep ýa-da sag ýanaşyk klaslarynyň birini alarys.

Bu alnan mysal kommutatiw däl toparyň hem çep we sag ýanaşyk klaslaryna dagatmalarynyň gabat gelmeginiň mümkindigini görkezýär.

3-nji mysal. S_3 simmetrik toparyň ähli bölek toparlary boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalaryny tapyň. Olaryň haýsylarynyň gabat gelýändigini görkeziň.

Çözülişi. Üçünji derejeli S_3 simmetrik topar $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ornunagoýmalardan durýar.

S_3 simmetrik toparyň ähli bölek toparlaryny tapmak üçin, Kelli tablisasyny düzeliň:

$\cdot$	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	e	a_3	a_2	a_5	a_4
a_2	a_2	a_4	e	a_5	a_1	a_3
a_3	a_3	a_5	a_1	a_4	e	a_2
a_4	a_4	a_2	a_5	e	a_3	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	e

Bu tablisadan $H_1 = \{e\}$, $H_2 = \{e, a_1\}$, $H_3 = \{e, a_2\}$, $H_4 = \{e, a_5\}$, $H_5 = \{e, a_3, a_4\}$, $H_6 = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ köplükleriň S_3 toparyň bölek toparlary bolýandygyny görmek kyn däl. Meselem, H_5 köplük üçin Kelli tablisasyny düzüp, onuň bölek topar emele getirýändigine göz ýetireliň:

$\cdot$	e	a_3	a_4
e	e	a_3	a_4
a_3	a_3	a_4	e
a_4	a_4	e	a_3

Bu tablisadan görnüşi ýaly, H_5 köplükde ornunagoýmalary köpeltmek amaly kesgitlenen; ornunagoýmalary köpeltmek amalyna görä birlik element e element; bu kopligiň her bir elementiniň ornunagoýmalary köpeltmek amalyna görä tersi bar: $e^{-1} = e$, $a_3^{-1} = a_4$, $a_4^{-1} = a_3$.

Bu bölek toparlar boýunça S_3 toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalaryny düzeliň:

$$S_3 = H_1 \dotplus a_1H_1 \dotplus a_2H_1 \dotplus a_3H_1 \dotplus a_4H_1 \dotplus a_5H_1 = H_1 \dotplus H_1a_1 \dotplus H_1a_2 \dotplus H_1a_3 \dotplus H_1a_4 \dotplus H_1a_5 = \{e\} \dotplus \{a_1\} \dotplus \{a_2\} \dotplus \{a_3\} \dotplus \{a_4\} \dotplus \{a_5\};$$

$$S_3 = H_2 \dotplus a_2\,H_2 \dotplus a_3\,H_2 = \{e,a_1\} \dotplus \{a_2, a_4\} \dotplus \{a_3, a_5\};$$

$$S_3 = H_2 \dotplus H_2a_2 \dotplus H_2a_4 = \{e,a_1\} \dotplus \{a_2, a_3\} \dotplus \{a_4, a_5\};$$

$$S_3 = H_3 \dotplus a_1H_3 \dotplus a_4H_3 = \{e,a_2\} \dotplus \{a_1, a_3\} \dotplus \{a_4, a_5\};$$

$$S_3 = H_3 \dotplus H_3a_1 \dotplus H_3a_3 = \{e,a_2\} \dotplus \{a_1, a_4\} \dotplus \{a_3, a_5\};$$

$$S_3 = H_4 \dotplus a_1H_4 \dotplus a_2H_4 = \{e,a_5\} \dotplus \{a_1, a_4\} \dotplus \{a_2, a_3\};$$

$$S_3 = H_4 \dotplus H_4a_1 \dotplus H_4a_2 = \{e,a_5\} \dotplus \{a_1, a_3\} \dotplus \{a_2, a_4\};$$

$$S_3 = H_5 \dotplus a_1H_5 = \{e,a_3, a_4\} \dotplus \{a_1, a_2, a_5\};$$

$$S_3 = H_5 \dotplus H_5a_1, = \{e,a_3, a_4\} \dotplus \{a_1, a_5, a_2\};$$

$$S_3 = H_6 = \{\mathrm{e},a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}.$$

Görnüşi ýaly, H_1, H_5, H_6 bölek toparlar boýunça S_3 toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelýär, H_2, H_3, H_4 bölek toparlar boýunça S_3 toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary bolsa gabat gelmeýär.

Bu mysal, kommutatiw däl toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmasynyň dürli ýa-da meňzeş bolup biljekdigini görkezýär.

Tükenikli toparlar üçin aşakdaky tassyklama dogrudyr.

Lagranžyň teoremasy. *Her bir tükenikli toparda onuň islendik bölek toparynyň tertibi bu toparyň tertibiniň bölüjisi bolýar*.

Subudy. Goý, G tertibi n-e deň bolan tükenikli topar, H bolsa onuň tertibi k deň bolan bölek topary bolsun. G toparyň H bölek topar boýunça çep ýanaşyk klaslaryna dagatmasyna seredeliň. Ol dagatma s sany ýanaşyk klaslardan durýar diýip güman edeliň (ýanaşyk klaslaryň s sanyna G topardaky H bölek toparyň **indeksi** diýilýär we $[G;H]$ bilen belgilenýär):

$$G = H \dotplus g_1H \dotplus g_2H \dotplus \ldots \dotplus g_{s-1}H. \qquad (8)$$

H bölek toparyň k sany elementiniň barlygy üçin, her bir g_iH $(i = 1,2,...s-1)$ ýanaşyk klasyň hem k sany elementi bardyr, sebäbi eger $g_ih_1 = g_ih_2$, $h_1,h_2 \in H$ bolsady, onda $h_1 = h_2$ bolar. Netijede, (8) dagatmadan $n = ks$ deňlik gelip çykýar. ▶

Lagranžyň teoremasyndan gelip çykýan netijelere seredeliň.

1-nji netije. *G tükenikli toparyň her bir elementiniň tertibi bu toparyň tertibiniň bölüjisi bolýar.*

Hakykatdan hem, a elementiň tertibi özüniň döredýän aýlawly toparynyň tertibine deň we Lagranžyň teoremasyna laýyklykda G toparyň tertibiniň bölüjisi bolýar.

2-nji netije. *Tertibi p ýönekeý sana deň bolan her bir G tükenikli topar aýlawly topardyr.*

Hakykatdan hem, G toparyň birlikden tapawutly her bir elementiniň tertibiniň p ýönekeý sana deňligine görä, ol elementleriň her biriniň döredýän aýlawly toparlary G topar bilen gabat gelýär.

§2. Normal bölüji. Faktor-topar. Gomomorfizm

2.1. Normal bölüjiler

Ýokarda beýan edilenlerden görnüşi ýaly, toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalaryny gabat getirýän ýa-da dürli edýän bölek toparlary bardyr. Toparyň çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalaryny gabat getirýän bölek toparlary, toparlar nazaryýetinde wajyp orny eýeleýär. Şeýle bölek toparlara aýratynlykda serederis.

1-nji kesgitleme. *Eger G toparyň H bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelse, onda H bölek topara G toparyň* **normal bölüjisi** *diýilýär.*

G toparyň H bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslarynyň gabat gelmegi üçin g elementiň ýasaýan gH çep ýanaşyk klasynyň Hg sag ýanaşyk klas bilen gabat gelmeginiň zerur we ýeterlikdigi aýdyň. Şoňa görä normal bölüjini aşakdaky ýaly kesgitlemek bolar.

2-nji kesgitleme. *Eger*

$$\underset{g\in G}{\forall}\,[gH = Hg]$$

bolsa, onda G toparyň H bölek toparyna bu toparyň ***normal bölüjisi*** *diýilýär.*

Bu kesgitlemedäki $\underset{g\in G}{\forall}\,[gH = Hg]$ şert

$$\underset{h\in H}{\forall}\ \underset{g\in G}{\forall}\ \underset{h',h''\in H}{\exists}\,[gh = h'g \wedge hg = gh''] \qquad (1)$$

şerti aňladýar.

1-nji mysal. G toparyň özünden durýan we diňe birlik elementden durýan bölek toparlarynyň onuň normal bölüjisi bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. G toparyň diňe birlik elementden durýan bölek toparyny E bilen belgiläliň.

G topary G bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary, G köplükden ybarat bolan, diňe bir sany ýanaşyk klasdan durýar. G toparyň E bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalaryndaky ýanaşyk klaslar bolsa, G toparyň ähli elementlerinden düzülen bir elementli köplüklerden durýar.

2-nji mysal. Abel toparyň islendik bölek toparynyň onuň normal bölüjisi bolýandygyny görkeziň we mysallar getiriň.

Çözülişi. G abel toparyň islendik elementi üçin, $gH=Hg$ deňligiň ýerine ýetýänligine görä G abel toparyň her bir H bölek topary onuň normal bölüjisi bolýar. Hususy ýagdaýda, položitel hakyky sanlaryň emele getirýän multiplikatiw topary, noldan tapawutly ähli hakyky sanlaryň emele getirýän multiplikatiw toparynyň normal bölüjisi bolýar. Noldan tapawutly ähli rasional sanlaryň emele getirýän multiplikatiw topary, noldan tapawutly ähli hakyky sanlaryň emele getirýän multiplikatiw toparynyň normal bölüjisi bolýar.

3-nji mysal. $Q_n(\boldsymbol{R})$ toparyň $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň normal bölüjisi bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. Hakykatdan hem, elementleri hakyky sanlar bolan n-nji tertipli aýratyn däl kwadrat matrisalaryň $G_n(\boldsymbol{R})$ multiplikatiw toparynyň, kesgitleýjileri 1-e deň bolan $Q_n(\boldsymbol{R})$ bölek topary, onuň normal bölüjisi bolýar. Sebäbi, ýokarda görkezişimize görä, $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň $Q_n(\boldsymbol{R})$ bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelýär.

4-nji mysal. Ornunagoýmalarynyň A_n alamaty üýtgediji toparynyň S_n simmetrik toparynyň normal bölüjisi bolýandygyny subut ediň.

Subudy. n-nji derejeli alamaty üýtgedýän A_n topar n-nji derejeli S_n simmetrik toparyň bölek topary bolýar (§1. 7-nji teorema). Onuň normal bölüji bolýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, A_n topar $\frac{1}{2}n!$ sany elementden durýar, şonuň üçin hem her bir (çep we sag) ýanaşyk klas hem $\frac{1}{2}n!$ sany elementden durar. Şoňa görä-de, S_n toparyň A_n bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalarynyň her biri iki sany ýanaşyk klasdan durýar. Ol ýanaşyk klaslaryň biri A_n topar, beýlekisi bolsa, n-nji derejeli täk ornunagoýmalaryň köplügidir. Netijede, S_n toparyň A_n bölek topar boýunça çep we sag ýanaşyk klaslara dagatmalary gabat gelýär.

1-nji teorema. *G toparyň H bölek toparynyň onuň normal bölüjisi bolmagy üçin*

$$\underset{g\in G}{\forall}[h\in H\Rightarrow g^{-1}hg\in H] \qquad (2)$$

gatnaşygyň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlik.

Subudy. Ilki bilen zerurlyk şertini subut edeliň. Goý, G toparyň H bölek topary onuň normal bölüjisi bolsun. Onda (1) şert boýunça $\underset{g\in G}{\forall}\ \underset{h\in H}{\forall}\ \underset{h'\in H}{\forall}[hg = gh']$ gatnaşyk dogry bolar. Netijede, $\underset{g\in G}{\forall}\ \underset{h\in H}{\forall}\ \underset{h'\in H}{\forall}[g^{-1}hg = h']$, ýagny $\underset{g\in G}{\forall}[h\in H\Rightarrow g^{-1}hg\in H]$ gatnaşyk dogry. Şunuň bilen zerurlyk şert subut edildi.

Ýeterlik şertini subut edeliň. Onuň üçin $\underset{g\in G}{\forall}[h\in H\Rightarrow g^{-1}hg\in H]$ gatnaşyk ýerine ýetýär diýip güman edeliň.

Onda $\underset{g\in G}{\forall}\ \underset{h\in H}{\forall}\ \underset{h',h''\in H}{\forall}[g^{-1}hg = h' \wedge (g^{-1})^{-1}hg^{-1} = h''$ gatnaşyk, ýagny

$$\underset{g\in G}{\forall}\ \underset{h\in H}{\forall}\ \underset{h',h''\in H}{\forall}[hg = gh' \wedge gh = h''g]$$

gatnaşyk ýerine ýetýär. Netijede, 2-nji kesgitlemä laýyklykda H normal bölüji bolýar. Şeýlelikde, teoremanyň ýeterlik şerti subut edildi.▶

Eger G toparda $b = g^{-1}ag$ deňlik ýerine ýeter ýaly iň bolmanda bir sany g element bar bolsa, onda G toparyň a we b elementlerine **özara çatrymly** diýilýär. Şeýlelik bilen, (2) şert H normal bölüjiniň özüniň h elementi bilen bilelikde G toparyň h element bilen çatrymly bolan ähli elementlerini saklaýandygyny aňladýar.

(2) şerte normal bölüjiniň kesgitlemesi hökmünde hem seredilýär.

3-nji kesgitleme. *Eger G toparyň H bölek topary özüniň h elementi bilen bilelikde G toparyň h bilen çatrymly bolan ähli elementlerini özünde saklaýan bolsa, onda oňa G toparyň* **normal bölüjisi** *diýilýär.*

Bu kesgitlemäni peýdalanyp, aşakdaky teoremany ýeňil subut edip bolýar.

2-nji teorema. *G toparyň erkin alnan normal bölüjileriniň kesişmesi ýene-de G toparyň normal bölüjisi bolýar.*

Subudy. Goý, D köplük G toparyň käbir normal bölüjileriniň kesişmesi bolsun. Onda D köplük G toparyň bölek topary bolýar.

Eger $a\in D$ bolsa, onda a element kesişmeleri D köplük bolan ähli normal bölüjilere degişli bolýar. Şonuň üçin hem, G toparyň a element bilen çatrymly bolan elementleri bu normal bölüjileriň ählisinde saklanýar. Netijede bolsa, ol elementler normal bölüjileriň kesişmesi bolan D köplükde hem saklanýar.▶

2.2. Faktor-topar

Goý, G toparyň H bölek topary onuň erkin alnan normal bölüjisi bolsun. G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan her bir gH çep ýanaşyk klas, şol bir wagtyň özünde onuň sag ýanaşyk klasy hem bolýar we tersine. Şonuň üçin hem, geljekde biz olara G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klaslary diýeris. g elementiň döredýän gH ýanaşyk klasyny $\bar{g}$ bilen belgileýäris. Toparyň bölek köplüklerini köpeltmek düzgüninden peýdalanyp, G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klaslarynyň köpeltmek hasylyny kesgitläliň.

Goý, G toparyň H normal bölüjisi boýunça erkin saýlanyp alnan, $\overline{g_1} = g_1H$ we $\overline{g_2} = g_2H$ ýanaşyk klaslary berlen bolsun. Ýanaşyk klaslara G toparyň bölek köplükleri hökmünde seredip, $\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = g_1H \cdot g_2H$ köpeltmek hasylyna seredeliň. G toparyň bölek köplükleriniň köpeltmek amalynyň assosiatiwligini we $H \cdot H = H$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = g_1H \cdot g_2H = (g_1Hg_2) \cdot H = [g_1(g_2H)]H = (g_1g_2)(H \cdot H) = (g_1g_2)H,$$

ýagny

$$\overline{g_1} \cdot \overline{g_2} = \overline{g_1g_2} \tag{3}$$

deňlik dogry.

Netijede, *G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan iki ýanaşyk klasyň köpeltmek hasyly ýene-de G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klasy bolýar.*

Şeýlelikde, G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klaslaryň köplüginde köpeltmek amalyny kesgitledik.

3-nji teorema. *G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klaslaryň köplügi ol köplükde kesgitlenen köpeltmek amalyna görä topar emele getirýär.*

Bu teorema arkaly kesgitlenýän topara G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan **faktor-topary** diýilýär we G/H ýaly ýazylýar.

Subudy. Hakykatdan hem, G toparyň bölek köplüklerini köpeltmek amaly assosiatiw bolany üçin, ýanaşyk klaslary köpeltmek amaly hem assosiatiwdir. $\bar{e} = H$ ýanaşyk klas G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan ýanaşyk klaslarynyň köplüginde köpeltmek amalyna görä birlik element bolýar, sebäbi, erkin alnan $\bar{g} = gH$ ýanaşyk klas üçin, $\bar{g} \cdot \bar{e} = (gH)H = g(HH) = gH = \bar{g}$ we $\bar{g} \cdot \bar{e} = H \cdot (gH) = (Hg)H = (gH)H = g(HH) = gH = \bar{g}$, ýagny $\bar{g} \cdot \bar{e} = \bar{e} \cdot \bar{g} = \bar{g}$ deňlik dogrudyr.

Her bir $\bar{g} = gH$ ýanaşyk klasyň ýanaşyk klaslary köpeltmek amalyna görä tersi bardyr. Ol ýanaşyk klas $(\bar{g})^{-1} = \overline{g^{-1}} = g^{-1}H$ görnüşinde kesgitlenýär. Hakykatdan hem, (3) deňlige görä $\bar{g}(\bar{g})^{-1} = \bar{g}\,\overline{g^{-1}} = \overline{gg^{-1}} = \bar{e}$.

Edil şuňa meňzeş edip, $(\bar{g})^{-1}\bar{g} = \bar{e}$ deňligiň hem ýerine ýetýändigini görkezmek bolar. ▶

1-nji mysal. Bitin sanlaryň additiw toparynyň k sana kratny bolan bölek topary boýunça alnan faktor-toparyny tapyň.

Çözülişi. Goý, G bitin sanlaryň emele getirýän additiw topary, $H_k = < k >$ bolsa k sana kratny bolan bitin sanlaryň bölek topary bolsun. Onda faktor- topar G/H_k, $\bar{0} = H_k$, $\bar{1} = 1 + H_k$, $\bar{2} = 2 + H_k$, ... , $\overline{k-1} = (k-1) + H_k$ ýanaşyk klaslardan durýar.

2-nji mysal. S_n/A_n faktor-köplügiň elementlerini görkeziň.

Çözülişi. Jübüt ornunagoýmalaryň A_n topary n-nji derejeli S_n-simmetrik toparyň normal bölüjisi bolýar (§*2.4-nji mysal*) we $S_n = A_n \dotplus gA_n$, bu ýerde $g \in S_n$, ýöne $g \notin A_n$. Soňky gatnaşyga görä g täk ornunagoýma, gA_n bolsa n-nji derejeli ähli täk ornunagoýmalaryň köplügi. Şeýlelikde, S_n/A_n faktor-köplük iki sany elementden, A_n-jübüt we gA_n täk ornunagoýmalaryň köplüklerinden durýar.

3-nji mysal. $G_n(\boldsymbol{R})/Q_n(\boldsymbol{R})$ faktor-topary tapyň.

Çözülişi. $G_n(\boldsymbol{R})$ hakyky sanlar meýdanynda berlen aýratyn däl matrisalaryň topary we $Q_n(\boldsymbol{R})$ bolsa, kesgitleýjileriniň bahasy 1-e deň bolan matrisalaryň emele getirýän normal bölüjisi bolýar. Onda $G_n(\boldsymbol{R}) / Q_n(\boldsymbol{R})$ faktor-topary düzüp bolýar. Ol her bir kesgitleýjisiniň bahasy kesgitli bir a sana deň bolan ýanaşyk klaslardan durýar.

Faktor-toparyň käbir häsiýetlerine degişli teoremalary subut edeliň.

4-nji teorema. *G abel toparyň her bir G/H faktor-topary hem abel topardyr.*

Subudy. Hakykatdan hem, $\underset{a,b\in G}{\forall}[ab = ba]$ bolany üçin

$$\underset{\bar{a},\bar{b}\in G/H}{\forall}[\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\cdot b} = \overline{b\cdot a} = \bar{b}\cdot\bar{a}].$$ ▶

5-nji teorema. *Aýlawly toparyň her bir G/H faktor-topary hem aýlawlydyr.*

Subudy. Goý, $G = <g>$ topar g elementiň döredýän aýlawly topary bolsun, H bolsa onuň käbir bölek topary bolsun we aH bolsa G/H faktor-toparyň erkin saýlanyp alnan elementi bolsun. Onda $a = g^m$ bolar ýaly m bitin san tapylýar we şoňa görä-de, $aH = g^mH = (gH)^m$ bolar. Netijede, $G/H = < gH >$ bolýar. ▶

6-njy teorema. *G tükenikli toparyň G/H faktor-toparynyň tertibi G toparyň tertibiniň bölüjisi bolýar.*

Subudy. Hakykatdan hem, G/H faktor-toparyň s tertibi G toparyň H normal bölüjisiniň indeksine deň. 1.5 bölümçedäki (9) deňlige görä bolsa, s san G toparyň tertibiniň bölüjisi bolýar. ►

2.3. Toparlaryň gomomorfizmi

Toparlaryň izomorfizmi düşünjesiniň tebigy umumylaşdyrmasy toparlaryň gomomorfizmi bolýar. Toparlaryň gomomorfizmi toparyň normal bölüjisi, faktor-topar düşünjeleri bilen berk baglanyşyklydyr.

G toparyň G' toparyň üstüne φ izomorfizmi $\underset{a,b\in G}{\forall}[\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)]$ köpeltmegiň düzgünini bozmaýan, G-niň G'-iň üstüne özara birbelgili şekillenmesidir.

Eger bu kesgitlemede φ şekillenmäniň özara birbelgili bolmagyny talap etmesek, onda G toparyň G' toparyň içine (ýa-da üstüne) gomomorfizm düşünjesine gelýäris.

1-nji kesgitleme. *Eger G toparyň G' toparyň içine φ şekillenmesi*

$$\underset{a,b\in G}{\forall}[\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)] \tag{4}$$

şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda φ şekillenmä G toparyň G' toparyň **içine gomomorf şekillenmesi** *ýa-da* **gomomorfizmi** *diýilýär.*

Eger G we G' toparlar additiw toparlar bolsa, onda (4) gomomorflyk şertini

$$\underset{a,b\in G}{\forall}[\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)]$$

görnüşde ýazyp bolýar.

Toparlaryň gomomorfizminde G-multiplikatiw, G' bolsa additiw topar ýa-da tersine bolmagy hem mümkin. Bu ýagdaýlarda, degişlilikde, gomomorflyk şerti

$$\underset{a,b\in G}{\forall}[\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)+\varphi(b)] \quad \text{ýa-da} \quad \underset{a,b\in G}{\forall}[\varphi(a+b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)]$$

görnüşde kesgitlenýär.

Eger $\varphi : G\to G'$ gomomorf şekillenmesi G toparyň G' toparyň üstüne şekillenmesi bolsa, onda oňa **G toparyň G' toparyň üstüne gomomorfizmi** ýa-da **G toparyň epimorfizmi** diýilýär. Bu ýagdaýda G' topara G toparyň **gomomorf obrazy** diýilýär we $G\sim G'$ görnüşde ýazylýar.

1-nji mysal. S_n-simmetrik toparyň $G=\{1,-1\}$ multiplikatiw toparyň üstüne gomomorfizmi bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. Goý, A-jübüt ornunagoýma bolanda $\varphi(A)=1$, A täk ornunagoýma bolanda bolsa, $\varphi(A)=-1$ düzgün bilen S_n toparyň G toparyň üstüne şekillenmesi kesgitlenen bolsun. Onda bu şekillenme

$$\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

şerti kanagatlandyrýar, sebäbi jübüt ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly jübüt, täk ornunagoýmalarynyň köpeltmek hasyly täk, şeýle-de, jübüt we täk ornunagoýmalaryň köpeltmek hasyly täk ornunagoýmadyr. Netijede, φ şekillenme S_n toparyň G toparyň üstüne gomomorfizmi bolýar.

2-nji mysal. $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar köplüginde berlen aýratyn däl n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň multiplikatiw toparynyň, noldan tapawutly hakyky sanlaryň emele getirýän multiplikatiw toparynyň üstüne gomomorfizmi bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. Goý, $G_n(\boldsymbol{R})$ topar $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli aýratyn däl matrisalaryň topary, $\boldsymbol{R}^*$ bolsa noldan tapawutly hakyky sanlaryň emele getirýän multiplikatiw topary bolsun. Her bir A matrisany özüniň $|A|$ kesgitleýjisine şekillendirýän $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň $\boldsymbol{R}^*$ içine ψ şekillenmesine seredeliň. Erkin alnan $d \in \boldsymbol{R}^*$ üçin, $|D| = d$ bolýan, meselem,

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

matrisa bardyr.

Netijede, ψ – şekillenme $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň $\boldsymbol{R}^*$ toparyň üstüne birbelgili şekillenmesi bolýar.

$|AB| = |A| \cdot |B|$ deňligiň ýerine ýetýänligi üçin, ψ şekillenme $G_n(\boldsymbol{R})$ toparyň $\boldsymbol{R}^*$ toparyň üstüne gomomorfizmi bolýar.

3-nji mysal. Erkin alnan G toparyň özüniň H normal bölüjisi boýunça alnan faktor-toparynyň üstüne gomomorfizmi bolýandygyny subut ediň.

Subudy. Goý, G käbir topar we H onuň islendik normal bölüjisi bolsun. Goý, χ şekillenme G toparyň her bir g elementine G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan gH ýanaşyk klasyny degişli edýän bolsun. χ şekillenmäniň G toparyň G/H faktor-toparynyň üstüne şekillenmesi bolýandygy aýdyň. G/H faktor-toparda kesgitlenen köpeltmek amalynyň kesgitlemesinden

$$\forall_{g_1, g_2 \in G} [\chi(g_1 g_2) = g_1 g_2 H = g_1 H g_2 H = \chi(g_1)\chi(g_2)]$$

gelip çykýar.

Netijede, χ şekillenme G toparyň G/H faktor-toparynyň üstüne gomomorf şekillenmesi bolýar.

3-nji mysaldaky χ gomomorf şekillenmä G toparyň G/H toparyň üstüne **tebigy gomomorfizmi** diýilýär.

3. sargyt № 749

Indi toparlaryň gomomorf şekillenmesiniň häsiýetlerine degişli käbir teoremalary subut edeliň.

7-nji teorema. *G toparyň G' toparyň içine gomomorf şekillenmesinde G toparyň e birlik elementi G' toparyň e' birlik elementine şekillenýär.*

Subudy. Hakykatdan hem, $ee = e$ deňlikden $\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$ deňlik gelip çykýar. Ikinji tarapdan $e' \cdot \varphi(e) = \varphi(e)$ deňlik ýerine ýetýär. Netijede, $\varphi(e)\varphi(e) = e'\,\varphi(e)$ deňlikden $\varphi(e) = e'$ alynýar.▶

8-nji teorema. *Eger φ şekillenme G toparyň G' toparyň içine gomomorfizmi bolsa, onda*

$$\forall_{g\in G}\ [\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}]$$

gatnaşyk ýerine ýetýär.

Subudy. Hakykatdan hem, $e' = \varphi(e) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$ we bu ýerden

$$\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$$

deňligi alarys. ▶

9-njy teorema. *Eger φ şekillenme G toparyň G' toparyň içine gomomorfizmi bolsa, onda φ(G) köplük G' toparyň bölek topary bolýar.*

Subudy. Goý, a' we b' elementler $\varphi(G)$ köplügiň islendik elementi bolsun. Onda $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, bu ýerde $a,b \in G$ we $a' \cdot b' = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(G)$, $(a')^{-1} = [\varphi(a)]^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \varphi(G)$. Netijede, $\varphi(G)$ köplük G toparyň bölek topary bolýar.▶

2-nji kesgitleme. *Goý, φ şekillenme G toparyň G' toparyň içine gomomorf şekillenmesi bolsun. G toparyň φ gomomorf şekillenmesinde G' toparyň e' birlik elementine şekillenýän elementleriniň K toplumyna φ* **gomomorfizmiň ýadrosy** *diýilýär we K = Kerφ ýaly ýazylýar.*

10-njy teorema. *G toparyň islendik φ gomomorfiziminiň ýadrosy G toparyň normal bölüjisi bolýar.*

Subudy. Hakykatdan hem, eger G toparyň a we b elementleri $Ker\,\varphi$ ýadroda saklansa, onda $a \cdot b \in Ker\varphi$ bolýar, sebäbi $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e' \cdot e' = e'$. Eger $a \in Ker\,\varphi$, ýagny $\varphi(a) = e'$ bolsa, onda $a^{-1} \in Ker\varphi$, bolýar, sebäbi $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1} = (e')^{-1} = e'$. Netijede, $Ker\varphi$ köplük G toparyň bölek topary. Goý, a element $Ker\varphi$ köplükden erkin saýlanyp alnan element, g bolsa G toparyň islendik elementi bolsun. Onda:

$$\varphi(g^{-1}ag) = \varphi(g^{-1})\varphi(a)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\, e'\, \varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = e'.$$

Şeýlelik bilen, $Ker\varphi$ bölek topar özüniň a elementi bilen bilelikde G toparyň bu elemente çatyrymly bolan ähli elementlerini özünde saklaýar we şoňa görä-de, $Ker\varphi$ bölek topar G toparyň normal bölüjisi bolýar.▶

G toparyň G/H faktor-toparynyň üstüne gomomorf şekillenmesiniň ýadrosyny H normal bölüji düzýär.

Gomomorfizm hakynda teorema. *Goý, φ şekillenme G toparyň G' toparyň üstüne gomomorf şekillenmesi we $Ker\ \varphi = H$ bolsun. Onda G' topar G/H faktor--topara izomorf bolar, özi hem, $\chi : G \sim G/H$ - tebigy gomomorfizm bilen G/H faktor--toparyň G' topara ψ izomorfizminiň $\chi\psi$ köpeltmek hasyly φ gomomorfizmi kesgitleýär.*

Subudy. Goý, g' element G' toparyň erkin elementi, g bolsa G toparyň $g' = \varphi(g)$ şerti kanagatlandyrýan elementi bolsun. $Ker\ \varphi = H$ bolýanlygy üçin, $\underset{h\in H}{\forall}\ [\varphi(h) = e']$ gatnaşyk dogry bolar, şoňa görä-de

$$\underset{h\in H}{\forall}\ [\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = g'\, e' = g'],$$

ýagny ýanaşyk klaslaryň her bir $\bar{g} = gH$ elementi φ gomomorfizmde g' elemente şekillenýär. Ikinji tarapdan, eger $q \in G$ element φ gomomorf şekillenmede $g' \in G$ elemente şekillenýän, ýagny $\varphi(q) = g'$ bolsa, onda $[\varphi(g^{-1}q) = \varphi(g^{-1})\varphi(q) = (g')^{-1} \cdot g' = e']$ bolar, şoňa görä-de, $g^{-1}q \in H$, ýagny $g^{-1}\ q = h$, $h \in H$ gatnaşyk ýerine ýeter. Bu ýerden $q = gh \in gH = \bar{g}$ deňligi alarys. Şeýlelik bilen φ gomomorfizmde $g' \in G'$ elemente şekillenýän G toparyň ähli elementleriniň köplügi, G toparyň H normal bölüjisi boýunça alnan $\bar{g} = gH$ ýanaşyk klasyny düzýär. Her bir $\bar{g} = gH$ ýanaşyk klasy $g' \in G'$ elemente şekillendirýän şekillenmäni ψ bilen belgiläliň. Onda $\psi(\bar{g}) = \varphi(g)$ bolar. ψ şekillenmäniň G/H faktor-toparyň üstüne şekillenmesi boljakdygy aýdyň. Bu şekillenmäniň izomorf şekillenmedigini görkezeliň. Hakykatdan hem, goý, $\overline{g_1} = g_1H$ we $\overline{g_2} = g_2H$ elementler G/H faktor-toparyň erkin alnan elementleri bolsun. $\overline{g_1}\,\overline{g_2} = g_1Hg_2H = (g_1g_2)H$ bolýandygy üçin,

$$\psi(\overline{g_1}\,\overline{g_2}) = \varphi(g_1\, g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(\overline{g_1})\psi(\overline{g_2})$$

bolar.

Netijede,

$$\underset{\overline{g_1}\,\overline{g_2}\in G/H}{\forall}[\psi(\overline{g_1}\,\overline{g_2}) = \psi(\overline{g_1})\,\psi(\overline{g_2})]$$

gatnaşyk dogry. Ondan başga-da, ψ şekillenme özara birbelgili şekillenme, ýagny

$$\underset{\overline{g_1}\,\overline{g_2}\in G/H}{\forall}[\overline{g_1} \neq \overline{g_2} \Rightarrow \psi(\overline{g_1}) \neq \psi(\overline{g_2})]$$

gatnaşyk dogry, sebäbi garşylykly ýagdaýda $\psi(\overline{g_1}) = \psi(\overline{g_2}) \Longrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Longrightarrow g_1' = g_2' \Longrightarrow g_1H = g_2H \Longrightarrow \overline{g_1} = \overline{g_2}$ deňlik alnardy.

Şeýlelik bilen, ψ şekillenmäniň G/H faktor-toparynyň G' toparyň üstüne izomorf şekillenmesidigini subut etdik.

Indi $\chi\psi$ şekillenmä seredeliň. χ şekillenmäniň G toparyň G/H toparyň üstüne tebigy gomomorfizmi, ψ şekillenmäniň bolsa, G/H toparyň G' toparyň üstüne şekillenmesi bolýanlygy aýdyň. $\chi\psi = \varphi$ deňligiň ýerine ýetýändigini subut edeliň. Goý, g element G toparyň erkin alnan elementi bolsun. Tebigy gomomorfizmiň kesgitlemesine görä, $\chi(g) = \bar{g} = gH$ we ψ izomorfizmiň kesgitlemesine görä, $\psi(\bar{g}) = \varphi(g)$. Netijede, $\chi\psi(g) = \psi[\chi(g)] = \psi(\bar{g}) = \varphi(g)$, ýagny $\chi\psi(g) = \varphi(g)$ deňligi alarys.

Şeýlelik bilen

$$\forall_{g \in G} [\chi[\psi(g)] = \varphi(g)]$$

gatnaşygy alarys. Bu bolsa $\chi\psi = \varphi$ bolýandygyny aňladýar.▶

§3. Halka. Bütewülik ýaýlasy

3.1. Halka barada käbir maglumatlar

Birinji okuw kitabynda halka barada beýan edilen käbir maglumatlary ýatlalyň.

Boş bolmadyk K köplükde goşmak we köpeltmek binar amallary kesgitlenip, K köplük goşmak amalyna görä abel topar emele getirse, köpeltmek amaly bu köplükde assosiatiw we köpeltmek amaly goşmak amaly bilen distributiwlik kanuny boýunça bagly bolsa, onda K köplük goşmak we köpeltmek amalyna görä halka emele getirýär diýilýär. Eger K halkada köpeltmek amaly kommutatiw bolsa, onda oňa kommutatiw halka diýilýär.

Mysallar. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň köplügi, 1-den tapawutly käbir m sana kratny bitin sanlaryň köplügi, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlaryň köplügi, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlaryň köplügi, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlaryň köplügi, $a + b\sqrt{2}$ (bu ýerde a we b rasional sanlar), görnüşli sanlaryň köplügi goşmak we köpeltmek amallaryna görä kommutatiw halka emele getirýär.

Kommutatiw däl halkalara mysal edip, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{Q})$ halkasyny, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{R})$ halkasyny, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{C})$ halkasyny almak bolar.

P meýdanda berlen skalýar matrisa diýip, esasy diagonaly şol bir a elementden durýan, galan elementleri bolsa nollar bolan matrisa aýdylýar. $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli skalýar matrisalaryň $M_n^*(\boldsymbol{R})$ köplügi matrisalary goşmak we köpeltmek amallaryna görä kommutatiw halka emele getirýär.

Hakykatdan hem, goý,

$$Q_a = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \text{ we } Q_b = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}$$

matrisalar, $M_n^*(R)$ köplügiň erkin alnan matrisalary bolsun. Onda,

$$Q_a + Q_b = \begin{pmatrix} a+b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a+b \end{pmatrix}$$

$$Q_a - Q_b = \begin{pmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix}$$

$$Q_a \cdot Q_b = \begin{pmatrix} ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ab & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ab \end{pmatrix} = Q_b \cdot Q_a$$

matrisalar hem skalýar matrisalar bolýarlar we netijede, $M_n^*(\boldsymbol{R})$ köplüge degişli bolýar.

$M_n^*(\boldsymbol{R})$ köplükde matrisalary goşmak we köpeltmek amallarynyň assosiatiwdigini, kommutatiwdigini, şeýle-de, goşmak we köpeltmek amallarynyň distributiwlik kanuny bilen baglydygyny barlamak kyn däl. Netijede, $M_n^*(\boldsymbol{R})$ köplük matrisalary goşmak we köpeltmek amallaryna görä kommutatiw halka emele getirýär.

Kesgitleme. *Eger $a = bc$ $(a = cb)$ deňlik ýerine ýeter ýaly $c \in K$* element bar *bolsa, onda $b \in K$ elemente $a \in K$ elementiň* **çep bölüjisi (sag bölüjisi)** *diýilýär. Şeýle-de, a elemente b elementiň* **çep (sag) kratnysy** *hem diýilýär.*

Bu ýerde K käbir halka.

Eger K halka kommutatiw bolsa, onda çep bölüji (kratny) we sag bölüji (kratny) düşünjeleri gabat gelýär. Şonuň üçin hem, bu ýagdaýda ýöne «bölüji» we «kratny» diýilýär.

Eger K halkada birlik element, ýagny $\forall_{a \in K} [ae = ea = a]$ şerti kanagatlandyrýan e element ýok bolsa, onda a element öz-özüniň bölüjisi bolup bilmez. Şeýle-de, eger K halkada e birlik element ýok bolsa, onda na element (bu ýerde $a \in K$, n käbir bitin san) a elementiň kratnysy bolup bilmez. Meselem, 3-e kratny sanlaryň emele getirýän halkasynda $5 \cdot 3 = 15$ element 3-e kratny bolup bilmeýär, sebäbi 5 san berlen halkanyň elementi däl.

Eger K halkada e birlik element bar bolsa, onda islendik $a \in K$ üçin

$$na = n(ea) = \underbrace{ea + ea + ... + ea}_{n \text{ sany goşulyjy}} = \underbrace{(e + e + ... + e)}_{n \text{ sany goşulyjy}}a = nea$$

deňlikler ýerine ýetýär. Diýmek, na element a elemente kratny bolýar.

Eger K halkanyň K' bölek köplügi K halkada kesgitlenen goşmak we köpeltmek amallaryna görä halka emele getirse, onda oňa K halkanyň bölek halkasy diýilýär.

Meselem, jübüt sanlaryň köplügi $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasynyň bölek halkasy bolýar. Soňky halka bolsa, öz gezeginde $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlaryň halkasynyň bölek halkasy bolýar. Rasional sanlaryň halkasy we $a + b\sqrt{2}$, $a,b \in \boldsymbol{Q}$ görnüşli sanlaryň halkasy $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar halkasynyň bölek halkasy bolýar.

$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{Q})$ halkasy $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{R})$ halkasynyň bölek halkasy bolýar. Soňky halka bolsa, öz gezeginde, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň $M_n(\boldsymbol{C})$ halkasynyň bölek halkasy bolýar. Skalýar matrisalaryň $M_n^*(\boldsymbol{R})$ halkasy $M_n(\boldsymbol{R})$ halkanyň bölek halkasy bolýar.

Her bir K halkanyň iň bolmanda iki sany bölek halkasy bardyr, olaryň biri K halkanyň özi, beýlekisi bolsa diňe nol elementden durýan halkadyr.

K halkanyň K' bölek köplüginiň bölek halka emele getirýändigini aşakdaky teoremanyň kömegi bilen barlamak bolar (1, §12).

1-nji teorema. *K halkanyň boş bolmadyk K' bölek köplüginiň onuň bölek halkasy bolmagy üçin, K' köplük özüniň islendik a we b elementleri bilen bilelikde $a + b$ jemi, $a - b$ tapawudy we ab köpeltmek hasylyny özünde saklamagy zerur we ýeterlikdir.*

Goý, K we K' iki halka bolsun. Eger K halkany K' halkanyň üstüne şekillendirýän özara birbelgili φ şekillenme bar bolup, ol şekillenme

$$\underset{a,b \in K}{\forall} [\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \wedge \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)]$$

şertleri kanagatlandyrsa, onda K we K' halkalara özara **izomorf halkalar** diýilýär.

Bu häsiýetlere eýe bolan φ şekillenmäniň özüne bolsa *izomorf* şekillenme diýilýär.

Meselem, $M_n^*(\boldsymbol{R})$ skalýar matrisalaryň halkasy, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlaryň halkasyna izomorf, sebäbi

$$\varphi: \begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix} \to a$$

düzgün bilen kesgitlenen şekillenmäniň izomorf şekillenmedigini barlamak kyn däl.

Aşakdaky tassyklama hem dogry (1, §14).

2-nji teorema. *Eger goşmak we köpeltmek binar amallary kesgitlenen F köplük käbir K halka izomorf şekillenýän bolsa, onda F köplük hem bu kesgitlenen amallara görä halka emele getirýär.*

3.2. Birlik elementli halka

Halkanyň kesgitlemesinde köpeltmek amalyna görä e birlik elementiň bar bolmagy talap edilmeýär. Ýöne, halkada birlik element bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir (1, §10). Nol halkada, ýagny nol elementden durýan halkada, 0 element hem goşmaga hem köpeltmäge görä birlik element bolýar, sebäbi $0 + 0 = 0$ we $0 \cdot 0 = 0$ deňlikler ýerine ýetýär.

1-nji kesgitleme. *Nol däl K halkada e birlik element bar bolsa, onda oňa* **birlik elementli halka** *diýilýär.*

K halkanyň e birlik elementini hem 1 bilen belgileýäris, ýöne ony 1 san bilen toždestwolaýyn deň diýip hasap edip bolmaz. Birden uly m natural sana kratny sanlaryň emele getirýän halkasynda birlik element ýok. Hususy ýagdaýda, jübüt bitin sanlaryň halkasynda birlik element ýokdur. $\boldsymbol{Z}$ bitin, $\boldsymbol{Q}$ rasional, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlaryň halkalary birlik elementli halkalardyr. $\boldsymbol{Q}$ rasional, $\boldsymbol{R}$ hakyky, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanlarynda berlen n-nji tertipli matrisalaryň emele getirýän halkalary hem birlik elementli halkalardyr. Bu halkalaryň birlik elementi

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matrisa bolýar.

Goý, K erkin alnan e birlik elementli halka bolsun. Noldan tapawutly islendik $a \in K$ element üçin, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ we $a \cdot e = e \cdot a = a$ deňlikler dogry. Bu ýerden 0 we e elementler K halkanyň dürli elementleri bolýar, ýagny $e \neq 0$. Eger K halkada $a \in K$ elemente ters bolan a^{-1} element bar bolsa, ol ýeke-täkdir (1, §10). e birlik element öz-özüne ters bolan elementdir. $(-e)(-e) = e$ deňlikden $-e$ elementiň hem öz-özüne ters elementdigi gelip çykýar. 0 elementiň tersi ýokdur, sebäbi $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \neq$ e deňlik, islendik $a \in K$ üçin, ýerine ýetýär. Eger $a \in K$ elementiň (K halkada) tersi a^{-1} bolsa, onda a we a^{-1} elementler e birlik elementiň bölüjileri bolýar. Şoňa görä-de, aşakdaky kesgitleme kabul edilen.

2-nji kesgitleme. *K halkada a^{-1} tersi bar bolan a elemente K halkanyň* **öwrülişikli elementi** ýa-da **birligiň bölüjisi** diýilýär.

Diňe 1 we – 1 elementleriniň tersi bar bolan $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasy kommutatiw halkanyň iň bir ýönekeý mysalydyr.

3-nji teorema. *K halkanyň birlik elementiniň bölüjilerinden durýan K^* köplük köpeltmek amalyna görä topar emele getirýär.*

Subudy. Hakykatdan hem, eger a we b elementler K^* köplüge degişli bolsa, onda $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ we $(a^{-1}\, b^{-1})(ba) = (ab)(b^{-1}\, a^{-1}) = e$ bolar. Bu deňlikler a^{-1} we ab elementleriň hem e birlik elementiň bölüjileri bolýandygyny aňladýar we netijede, olar K^* köplüge degişli bolýar. e birlik element hem K^* köplükde saklanýar. Şonuň üçin hem, K^* köplük köpeltmek amalyna görä topar emele getirýär.►

K^* topara K halkanyň öwrülişikli elementleriniň ýa-da birlik elementiň bölüjileriniň emele getirýän **multiplikatiw topary** diýilýär.

3.3. Noluň bölüjileri. Bütewülik ýaýlasy

Goý, K halka bolsun. Islendik $a \in K$ element üçin, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ deňlik ýerine ýetýär. Halkanyň elementiniň bölüjisiniň kesgitlemesine görä, halkanyň her bir elementi noluň bölüjisi bolýar. Ýöne, halkalar nazaryýetinde noluň bölüjisi üçin aşakdaky kesgitleme kabul edilendir.

1-nji kesgitleme. *Eger $a \neq 0$, $b \neq 0$, ýöne $ab = 0$ bolsa, onda K halkanyň a we b elementlerine* **noluň bölüjileri** diýilýär; *a elemente* **noluň çep**, *b elemente bolsa* **sag bölüjisi** *diýilýär.*

Kommutatiw halkada noluň çep we sag bölüjisi düşünjeleri gabat gelýär. Eger m düzme natural san, meselem $m = pq$ bolsa, onda m bilen deňeşdirerli bolan bitin sanlaryň klaslarynyň emele getirýän Z_m halkasynyň noldan tapawutly C_p we C_q klaslarynyň köpeltmek hasyly C_0-nol klasa deň bolýar, ýagny $C_p \cdot C_q = C_m = C_0$ deňlik ýerine ýetýär. Netijede, C_p we C_q klaslar Z_m halkada noluň bölüjileri bolýar.

Eger $n \geq 2$ bolsa, onda n-nji tertipli

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ we } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisalar $M_n(\boldsymbol{R})$ halkada noluň bölüjileri bolýar.

2-nji kesgitleme. *Noluň bölüjilerini özünde saklamaýan kommutatiw halka* **bütewülik ýaýlasy** *diýilýär.*

Her bir san halkasy bütewülik ýaýlasy bolýar. Her bir P meýdan hem bütewülik ýaýlasy bolýar, sebäbi

$$\forall_{a,b\in p}\ [\, a\neq 0,\ ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow b=0]$$

gatnaşyk dogry.

3.4. Paýlar meýdany

Bütewülik ýaýlasynyň arasynda has köp gabat gelýäni $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasydyr. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasy $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň bölek halkasy bolýar. Bu ýerden her bir bütewülik ýaýlasy käbir meýdanyň bölek halkasy bolýarmyka diýen sorag ýüze çykýar. Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

4-nji teorema. *Her bir R bütewülik ýaýlasy üçin, ony özünde bölek halka edip saklaýan käbir Q meýdan bardyr we bu meýdanyň her bir elementi R bütewülik ýaýlasynyň käbir iki elementiniň paýyna deňdir.*

Kesgitleme. *Her bir R bütewülik ýaýlasy üçin ony özünde saklaýan, her bir elementi R bütewülik ýaýlasynyň käbir iki elementiniň paýy hökmünde kesgitlenýän P meýdana* **paýlar meýdany** *diýilýär.*

1-nji mysal. *$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň $\boldsymbol{Z}$ bütewülik ýaýlasyny özünde saklaýan paýlar meýdanyny emele getirýändigini subut ediň.*

Subudy. $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlaryň köplüginiň her bir elementini käbir iki sany bitin sanyň paýy hökmünde ýazyp bolýar. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň köplügi onuň bölegi bolýar. Şeýle-de, $\boldsymbol{Z}$ halkanyň bütewülik ýaýlasyny, $\boldsymbol{Q}$ köplügiň bolsa goşmak we köpeltmek amallaryna görä meýdan emele getirýändigini hasaba alsak, onda $\boldsymbol{Q}$ paýlar meýdany bolýar.

§4. Halkanyň idealy. Faktor-halka. Halkalaryň gomomorfizmi

4.1. Halkanyň idealy. Ideallar üstünde amallar

Halkalar nazaryýetinde ideallar diýip at alan bölek halkalar wajyp orny eýeleýär.

1-nji kesgitleme. *Eger K halkanyň boş bolmadyk I bölek köplügi K halkanyň additiw toparynyň bölek topary bolsa, islendik a ∈ I we x ∈ K elementler üçin xa (degişlilikde ax) köpeltmek hasyly I köplükde saklansa, onda I köplüge K halkanyň* **çep** (*degişlilikde*, **sag**) **idealy** *diýilýär*.

K halkanyň I bölek köplügi çep hem-de sag ideal bolsa, onda oňa K halkanyň **ikitaraplaýyn idealy** ýa-da ýöne K halkanyň **idealy** diýilýär.

Kommutatiw halkada her bir idealyň ikitaraplaýyn ideal boljakdygy aýdyň.

1-nji kesgitlemeden her bir çep idealyň, sag idealyň we ikitaraplaýyn ideallaryň K halkanyň bölek halkasy bolýandygy gelip çykýar. K halkanyň her bir idealy bölek köplük, şoňa görä-de, K halkanyň ideallarynyň köplüginde «bölegi» diýen gatnaşygy girizmek bolar.

1-nji mysal. Haýsy ideallar erkin alnan K halkanyň triwial ideallary bolýar?

Çözülişi. Her bir K halka özüniň ikitaraplaýyn idealy bolýar. Bu ideala **birlik ideal** diýip at berilýär. Her bir K halkada nol bölek halka hem K halkanyň idealy bolýar. Oňa K halkanyň **nol idealy** diýilýär we ol O bilen belgilenýär. Birlik ideal we nol ideal K halkanyň triwial ideallary bolýar.

K halkanyň K birlik idealynyň bu halkanyň islendik I idealyny özünde saklaýandygyny we O idealyň bolsa bu halkanyň islendik idealynda saklanýandygyny belläliň. Netijede, bölegi gatnaşygy manysynda, birlik ideal **iň uly ideal,** nol ideal bolsa **iň kiçi ideal** bolýar.

2-nji mysal. K erkin alnan halka, a onuň islendik elementi bolsa, onda

$Ka = \{xa \mid x \in K\}$, $aK = \{ax \mid x \in K\}$ we $\boldsymbol{m}(a) = \{x_1 ay_1 + x_2 ay_2 + \cdots + x_n ay_n \mid x_i, y_i \in K,\ i = 1,2,...,n\}$ köplükleriň, degişlilikde K halkanyň çep, sag we ikitaraplaýyn ideallary bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. $Ka = \{xa \mid x \in K\}$ köplügiň K halkanyň çep idealy bolýandygyny görkezeliň:

1) $\forall x_1 a, x_2 a \in Ka \Rightarrow x_1 a + x_2 a = (x_1 + x_2)a \in Ka$), sebäbi $x_1 + x_2 \in K$;

2) $xa \in Ka$ elemente garşylykly bolan $-xa$ element hem Ka köplüge degişli, sebäbi $-xa = (-x)a$ we $-x \in K$.

Bu şertler Ka köplügiň K halkanyň additiw toparynyň bölek topary bolýandygyny görkezýär. Islendik $xa \in Ka$ we $x' \in K$ elementler üçin, $x'(xa) = (x'x)a \in \in Ka$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Netijede, Ka köplük K halkanyň çep idealy bolýar.

Edil şeýle-de, aK köplügiň K halkanyň sag idealy bolýandygyny, $\boldsymbol{m}(a)$ köplügiň bolsa K halkanyň ikitaraplaýyn idealy bolýandygyny görkezmek bolar. Eger K halka kommutatiw bolsa, onda $aK = Ka = \boldsymbol{m}(a)$ boljakdygy aýdyň. Eger K halkada birlik element ýok bolsa, onda aK, Ka, $\boldsymbol{m}(a)$ ideallaryň her biriniň a elementi özünde saklamajakdygyny belläliň.

3-nji mysal. Goý, K käbir kommutatiw halka we a bolsa, onuň islendik elementi bolsun. Onda $\{xa + na \mid x \in K, n \in \boldsymbol{Z}\}$ köplük, K halkanyň idealy bolýar.

Bu tassyklamanyň dogrulygyna hem edil 2-nji mysaldaky ýaly göz ýetirmek bolar.

Bu **ideala *K* halkanyň *a* elementiň kömegi bilen emele getirilen baş idealy** diýilýär we (a) belginiň kömegi bilen belgilenýär. a elementi özünde saklaýan ideallaryň arasynda (a) baş ideal (köplükleriň bölegi düşünjesi manysynda) iň kiçisi bolýar.

Hakykatdan hem, a elementi saklaýan her bir ideal, a elemente kratny bolan xa elementleriň ählisini özünde saklaýar we ähli $\pm\sum a = na$ jemi hem özünde saklaýar, netijede bolsa, $xa + na$ jemleriň ählisini, ýagny (a) idealy özünde saklaýar.

Eger K halkada e birlik element bar bolsa, onda $(a) = Ka$ bolar. Hakykatdan hem, (a) idealyň kesgitlemesine görä, $Ka \subseteq (a)$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Ikinji tarapdan $xa + na = (x + n)a = x' a \in Ka$ bolar, şoňa görä-de, $(a) \subseteq Ka$ gatnaşyk dogry. Netijede, $(a) = Ka$ deňligi alarys. Meselem, $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasynyň m elementiniň emele getirýän (m) baş idealy m sana kratny bolan ähli bitin sanlardan durýar. Şonuň üçin hem,

$$(m) = m\boldsymbol{Z}.$$

K halkanyň O idealynyň K halkanyň $(0) = \{0\}$ görnüşinde kesgitlenen baş idealy bolýandygyny belläliň. Eger K halkada e birlik element bar bolsa, onda (e) element hem K halkanyň baş idealy, has takygy $(e) = K$ bolýar.

Indi bolsa K halkanyň ideallarynyň üstünde geçirilýän käbir amallara seredeliň. Onuň üçin K halkanyň ideallaryny goýy ýazma latyn setir harplary bilen belgiläliň, meselem $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \dots$.

Ideallaryň köplüginde ilki bilen ideallaryň kesişmesine seredeliň. Goý $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallar K halkanyň islendik ideallary bolsun.

1-nji teorema. *K halkanyň $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallarynyň $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$ kesişmesi hem K halkanyň idealy bolýar.*

Subudy. §1-iň 8-nji teoremasyna görä $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$ kesişme K halkanyň additiw bölek topary bolýar. Ondan başga-da, islendik $a \in \boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$ element üçin, $x \in K$ element xa we ax köpeltmek hasyllarynyň $\boldsymbol{a}$ hem-de $\boldsymbol{b}$ ideallarda saklanýandygyna görä bu köpeltmek hasyllar olaryň kesişmesi bolan $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$ köplükde hem saklanýar. Netijede, $\boldsymbol{K}$ halkanyň $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallarynyň kesişmesi hem $\boldsymbol{K}$ halkanyň idealy bolýar.▶

Ideallaryň kesişmesi amalynyň assosiatiwlik we kommutatiwlik häsiýetlerine eýedigini barlamak kyn däl.

Goý, A we B köplükler K halkanyň käbir boş bolmadyk bölek köplükleri bolsun.

2-nji kesgitleme. *$\{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ köplüge A we B köplükleriň* **jemi** *diýilýär we $A + B$ görnüşinde belgilenýär.*

Eger A bölek köplük diňe bir sany a elementden durýan bolsa, onda $A + B$ jemi $a + B$ görnüşinde ýazyp bolar.

K halkanyň elementleri goşmak amalyna görä assosiatiw we kommutatiw bolany üçin, K halkanyň bölek köplükleriniň jeminiň hem bu hasiýetlere boýun egýändiklerini barlamak kyn däl.

3-nji kesgitleme.

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in N\right\}$$

köplüge A we B bölek köplükleriň köpeltmek hasyly diýilýär we AB bilen belgilenýär.

Eger $A = \{a\}$ bolsa, onda AB köpeltmek hasyl aB ýaly ýazylýar we $aB = \{ab \mid b \in B\}$ görnüşde kesgitlenýär.

Goý, $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallar K halkanyň erkin alnan ideallary bolsun.

2-nji teorema. *K halkanyň $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallarynyň $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ jemi hem K halkanyň idealy bolýar.*

Subudy. Hakykatdan hem, $\forall(a_1 + b_1),(a_2 + b_2)\in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a' + b' \in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ gatnaşyk dogry, sebäbi $(a_1 + a_2)\in a$, $(b_1 + b_2) \in \boldsymbol{b}$.

$-(a + b) = (-a) + (-b)$ element $(a + b)\in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ elemente garşylykly element bolýar, sebäbi $-a \in \boldsymbol{a}$ we $-b \in \boldsymbol{b}$. Netijede, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ köplük K halkanyň additiw toparynyň bölek topary bolýar. Ondan başga-da, islendik $a + b \in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ element we $x \in K$ element üçin, $x(a + b) = xa + xb \in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ hem-de $(a + b)x = ax + bx \in \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ gatnaşyklar ýerine ýetýär ►

3-nji teorema. *K halkanyň $\boldsymbol{a}$ we $\boldsymbol{b}$ ideallarynyň $\boldsymbol{ab}$ köpeltmek hasyly hem K halkanyň idealy bolýar.*

Subudy. Hakykatdan hem, $\boldsymbol{ab}$ köplüge degişli bolan islendik $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ we $\sum_{j=1}^{m} a_j' b_j'$ elementleriň $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{m} a_j' b_j'$ jemi $\boldsymbol{ab}$ köpeltmek hasylyna degişli boljakdygy aýdyň. Şeýle hem, $-\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (-a_i) b_i$ element $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \boldsymbol{ab}$ elemente garşylykly element bolýar we $\boldsymbol{ab}$ köplükde saklanýar. Ondan başga-da, islendik $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \boldsymbol{ab}$ we $x \in K$ elementler üçin, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (xa_i) b_i \in \boldsymbol{ab}$ we $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i x) \in \boldsymbol{ab}$ deňlikler ýerine ýetýär.►

Şeýlelik bilen, K halkanyň ideallarynyň köplüginde goşmak we köpeltmek amallary ýerine ýetýär. Ideallary goşmak amaly assosiatiw we kommutatiw, ideallary köpeltmek amaly bolsa assosiatiwdir. Eger K halka kommutatiw halka bolsa, onda K halkanyň ideallarynyň köpeltmek hasyly hem kommutatiwdir.

4-nji teorema. *K halkanyň ideallaryny köpeltmek we goşmak amallary distributiwlik kanuny bilen baglydyr, ýagny*

$$\underset{a,bc\in K}{\forall}\ [(a+b)c = ac + bc \quad \text{we} \quad c(a+b) = ca + cb]$$

gatnaşyklar ýerine ýetýär.

4.2. Ideal boýunça deňeşdirmeler we kemeltmeler klaslary. Faktor-halka

Goý, K käbir halka, $\boldsymbol{m}$ bolsa onuň erkin alnan idealy bolsun. K additiw abel topar emele getirýär, $\boldsymbol{m}$ ideal bolsa onuň bölek topary bolýar. Abel toparyň ähli bölek toparlary onuň normal bölüjisi bolýanlygy üçin, $\boldsymbol{m}$ ideal hem K toparyň normal bölüjisi bolar. Netijede, K toparyň $\boldsymbol{m}$ normal bölüjisi boýunça alnan $K/\boldsymbol{m}$ faktor-toparyny gurup bolýar. Ol $\boldsymbol{m}$ normal bölüji boýunça K toparyň ýanaşyk klaslaryndan durýar:

$$0+\boldsymbol{m},\ a+\boldsymbol{m},\ b+\boldsymbol{m},\ c+\boldsymbol{m},\ \ldots\ .$$

$x,y \in K$ elementleriň $\boldsymbol{m}$ normal bölüji boýunça K toparyň şol bir ýanaşyk klasyna degişli bolmagy üçin, $x-y\in\boldsymbol{m}$ bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini ýatlalyň. K topar abel topar bolany üçin, $K/\boldsymbol{m}$ faktor-topar hem additiw abel topar bolýar. Biz $K/\boldsymbol{m}$ toparda köpeltmek amalyny hem kesgitläp bolýandygyny we $K/\boldsymbol{m}$ köplügiň, onda kesgitlenen goşmak we köpeltmek amallaryna görä halka emele getirýändigini görkezeris.

Onuň üçin, ilki bilen wajyp düşünjeleriň biri bolan deňeşdirme düşünjesini kesgitläliň we onuň käbir häsiýetlerini öwreneliň.

Kesgitleme. *Eger x we y elementler K additiw toparyň $\boldsymbol{m}$ bölek topary boýunça alnan şol bir ýanaşyk klasyna degişli, ýagny $x-y\in\boldsymbol{m}$ bolsa, onda $x\in K$ element, $y\in K$ element bilen $\boldsymbol{m}$ ideal boýunça ýa-da $\boldsymbol{m}$ modul boýunça* **deňeşdirerli** *diýilýär we*

$$x \equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$$

görnüşde ýazylýar. Ol x element y element bilen $\boldsymbol{m}$ modul boýunça deňeşdirerli diýip okalýar.

Netijede, $x \equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m}) \Leftrightarrow x-y\in\boldsymbol{m}$.

Eger $\boldsymbol{I}$ ideal baş ideal, ýagny $I=(\boldsymbol{m})$ bolsa, onda $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{I})$ ýazgynyň ornuna $x\equiv y(\mathrm{mod}(\boldsymbol{m}))$ ýazmaly, ýöne biz bu ýagdaýda hem $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$ diýip ýazarys. $x\not\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$ ýazgy x we y elementleriň $\boldsymbol{m}$ modul boýunça deňeşdirerli däldigini aňladýar. Deňeşdirmä berlen ýokardaky kesgitleme K köplükde binar gatnaşygy kesgitleýär we oňa **deňeşdirme gatnaşygy** diýilýär. Deňeşdirme gatnaşygy, onuň kesgitlemesine görä, K additiw toparyň $\boldsymbol{m}$ bölek topar boýunça alnan ýanaşyk klaslara dagatmasyny berýär we netijede, K köplükde kesgitlenen ekwiwalentlik gatnaşygy bolýar, ýagny ol gatnaşyk refleksiw, simmetrik we tranzatiwdir:

$$\underset{x\in K}{\forall}[x\equiv x(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})],\ \underset{x,y\in K}{\forall}[x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow y\equiv x(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})];$$

$$\underset{x,y,z\in K}{\forall}[x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\wedge y\equiv z(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow x\equiv z(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})].$$

Şeýlelik bilen, K halkada kesgitlenen deňeşdirme gatnaşygy boýunça alnan ekwiwalentlik klaslary, K toparyň $\boldsymbol{m}$ modul boýunça alnan ýanaşyk klaslary bolýar. Olara K halkanyň $\boldsymbol{m}$ idealy boýunça alnan ýa-da $\boldsymbol{m}$ moduly boýunça alnan kemeltmeler klasy diýilýär. Biz olary $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, ... arkaly belleýäris.

Deňeşdirme gatnaşygynyň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1-nji häsiýet. *Deňeşdirmäniň iki tarapyny hem islendik n bitin sana köpeldip bolýar, ýagny*

$$\underset{x,y,z\in K}{\forall}[x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow nx\equiv ny(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})]$$

gatnaşyk dogry.

Hakykatdan hem, $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Leftrightarrow x-y\in\boldsymbol{m}$. $nx-ny=n(x-y)\in\boldsymbol{m}$, netijede, $nx\equiv ny(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$. Hususy ýagdaýda, $n=-1$ bolanda, $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow -x\equiv -y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$ bolýar.

2-nji häsiýet. *Deňeşdirmäniň iki tarapyna-da islendik $z\in K$ elementi goşup bolýar, ýagny*

$$\underset{x,y,z\in K}{\forall}[x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow x+z\equiv y+z(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})]$$

gatnaşyk dogry.

Hakykatdan hem, $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Leftrightarrow x-y\in\boldsymbol{m}$. $(x+z)-(y+z)=x-y\in\boldsymbol{m}$ we netijede, $x+z\equiv y+z(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$ bolýar.

3-nji häsiýet. *Deňeşdirmäniň iki tarapyny hem islendik $z\in K$ elemente köpeldip bolýar, ýagny*

$$\underset{x,y,z\in K}{\forall}[x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Rightarrow xz\equiv yz(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\wedge zx\equiv zy(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})]$$

gatnaşyk dogry.

Hakykatdan hem, $x\equiv y(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})\Leftrightarrow x-y\in m$. $xz-yz=(x-y)z\in\boldsymbol{m}$ we $zx-zy=z(x-y)\in\boldsymbol{m}$, netijede, $xz\equiv yz(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$ we $zx\equiv zy(\mathrm{mod}\boldsymbol{m})$.

4-nji häsiýet. *Deňeşdirmeleri agzama-agza goşup we aýryp bolýar*:

$$\underset{x,y,x',y' \in K}{\forall} [x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x \pm x' \equiv y \pm x'(\bmod \boldsymbol{m})].$$

Hakykatdan hem,

$x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x + x' \equiv y + x'(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge y + x' \equiv y + y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow$ $\Rightarrow x + x' \equiv y + y'(\bmod \boldsymbol{m})$, ýagny $x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m})$, $x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x + x' \equiv y +$ $+ y'(\bmod \boldsymbol{m})$.

Soňra, $x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge - x' \equiv - y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow$ $\Rightarrow x - x' \equiv y - y'(\bmod \boldsymbol{m})$, ýagny

$x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x - x' \equiv y - y'(\bmod \boldsymbol{m})$.

5-nji häsiýet. *Deňeşdirmeleri agzama-agza köpeltmek bolýar, ýagny*

$$\underset{x,y,x',y' \in K}{\forall} [x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x x' \equiv yy'(\bmod \boldsymbol{m})]$$

gatnaşyk dogry.

Hakykatdan hem,

$x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x x' \equiv yx'(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge yx' \equiv$

$\equiv yy' (\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow x x' \equiv yy'(\bmod \boldsymbol{m})$, ýagny $x \equiv y(\bmod \boldsymbol{m}) \wedge x' \equiv y'(\bmod \boldsymbol{m}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x x' \equiv yy' (\bmod \boldsymbol{m})$.

Görnüşi ýaly, deňlikleriň üstünde geçirilýän, deňligiň iki tarapyny hem olaryň iň uly umumy bölüjisine gysgaltmak amalyndan başga ähli amallaryň deňeşdirmeleriň üstünde ýerine ýetýändigini görmek bolýar. Umumy ýagdaýda deňeşdirmäni gysgaltmak bolmaýar. Meselem, $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasynda $16 \equiv 4(\bmod 6)$ deňeşdirme dogry, ýöne $4 \not\equiv 1(\bmod 6)$ sebäbi $4 - 1 \notin (6)$.

Netijede, $16 \equiv 4(\bmod 6)$ deňeşdirmäniň iki tarapyny olaryň iň uly umumy bölüjisi bolan 4-e gysgaltmak bolmaýar.

Ýene-de $K/\boldsymbol{m}$ faktor-topara dolanyp geleliň. $K/\boldsymbol{m}$ toparyň $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, ... kemeltmeler klaslaryndan durýandygyny belläliň. Belli bolşy ýaly, her bir $\bar{a}$ klas özüniň islendik elementi bilen döredilip bilner: eger $a \in \bar{a}$ bolsa, onda $\bar{a} = a + \boldsymbol{m}$ bolar, şoňa görä-de, $\bar{a}$ klasyň islendik elementini bu klasyň wekili hasap etmek bolar.

Kemeltmeler klaslaryny goşmak (ýanaşyk klaslary goşmak) aşakdaky ýaly kesgitlenýär, ýagny eger $a \in \bar{a}$ we $b \in \bar{b}$ bolsa, onda

$$\bar{a} + \bar{b} = \{a + b \mid a \in \bar{a}, b \in \bar{b}\}$$

bolýar. Başgaça aýdylanda:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a + \boldsymbol{m}) + (b + \boldsymbol{m}) = (a + b) + \boldsymbol{m}$$

deňlikler ýerine ýetýär.

Indi bolsa $K/\boldsymbol{m}$ köplükde köpeltmek amalyny kesgitläliň.

Goý, a element $\bar{a}$ klasyň, b element bolsa $\bar{b}$ klasyň islendik elementi bolsun. $\bar{a}\,\bar{b}$ klasyň elementleri ab görnüşde, ýagny

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a+\boldsymbol{m})(b+\boldsymbol{m})=ab+m$$

bolsun diýeliň.

Bu kesgitlenen köpeltmek hasylynyň, klaslaryň wekilleriniň saýlanyp alnyşyna bagly däldigini görkezeliň. Hakykatdan hem, eger a, a' elementler $\bar{a}$ klasyň, b,b' elementler $\bar{b}$ klasyň elementleri bolsa, onda, $a\equiv a'\ (\mathrm{mod}\,\boldsymbol{m})$, $b\equiv b'(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{m})$ we 5-nji häsiýete görä, $ab\equiv a'b'\ (\mathrm{mod}\,\boldsymbol{m})$, ýagny ab hem-de $a'b'$ elementler şol bir klaslara degişli bolýarlar. Şonuň üçin hem, $ab+m=a'\,b'+\boldsymbol{m}$ we netijede, $\bar{a}\,\bar{b}$ köpeltmek hasyly $\bar{a}$ we $\bar{b}$ klaslaryň wekilleriniň saýlanyp alnyşyna bagly däl bolýar.

5-nji teorema. *K halkanyň $\boldsymbol{m}$ idealy boýunça alnan K/m kemeltmeler klaslarynyň köplügi bu köplükde kesgitlenen goşmak we köpeltmek amallaryna görä halka emele getirýär.*

Bu halka K halkanyň $\boldsymbol{m}$ ideal boýunça alnan **faktor-halkasy** diýilýär.

Subudy. $K/\boldsymbol{m}$ köplük additiw abel toparyny emele getirýär. Bu toparda kesgitlenen köpeltmek amaly assosiatiw we goşmak amaly bilen distributiwlik kanuny esasynda bagly. Hakykatdan hem,

$$\underset{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in K/\boldsymbol{m}}{\forall}\ \{(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}=[(a+\boldsymbol{m})(b+\boldsymbol{m})](c+\boldsymbol{m})=(ab+\boldsymbol{m})(c+\boldsymbol{m})=(ab)c+\boldsymbol{m}=$$
$$=a(bc)+\boldsymbol{m}=(a+\boldsymbol{m})(bc+\boldsymbol{m})=(a+\boldsymbol{m})[(b+\boldsymbol{m})(c+\boldsymbol{m})]=\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})\},$$

ýagny

$$\underset{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in K/\boldsymbol{m}}{\forall}\ [(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\cdot\bar{c})].$$

$$\underset{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in K/\boldsymbol{m}}{\forall}\ \{(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=[(a+\boldsymbol{m})+(b+\boldsymbol{m})](c+\boldsymbol{m})=[(a+b)+\boldsymbol{m}](c+\boldsymbol{m})=$$
$$=(a+b)c+\boldsymbol{m}=(ac+bc)+\boldsymbol{m}=(ac+\boldsymbol{m})+(bc+\boldsymbol{m})=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}\},$$

ýagny

$$\underset{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in K/\boldsymbol{m}}{\forall}\ [(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}],$$

edil şuňa meňzeşlikde,

$$\underset{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in K/\boldsymbol{m}}{\forall}\ [\bar{c}(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\bar{a}+\bar{c}\bar{b}]$$

deňlik subut edilýär. Netijede, $K/\boldsymbol{m}$ köplük onda kesgitlenen goşmak we köpeltmek amallaryna görä halka emele getirýär.►

1-nji mysal. K halkanyň birlik we nol ideallary boýunça alnan faktor-halkalaryny kesgitläň.

Çözülişi. Her bir K halkada K birlik ideal bar. K/K faktor-halka diňe nol elementden durýan $\{0\}$ halka bolýar, $K/\{0\}$ faktor halka bolsa, K halka izomorf bolýar.

2-nji mysal. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynyň $\boldsymbol{m} = (m)$ baş idealy boýunça alnan faktor-halkasyny kesgitläň.

Çözülişi. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynda $\boldsymbol{m} = (m)$ baş idealy saýlalyň, bu ýerde m käbir birden tapawutly san. Bu ideal m sana kratny ähli bitin sanlardan durýar. (m) ideal kemeltmeler klasynyň $\bar{o}$ klasyny aňladýar: $\bar{o} = 0 + (m) = (m)$.

m modul boýunça 1 bilen deňeşdirerli bolan ähli bitin sanlaryň köplügi kemeltmeleriň $\bar{1} = 1 + (m)$ klasyny, m modul boýunça 2 bilen deňeşdirerli bolan ähli bitin sanlaryň köplügi kemeltmeleriň $\bar{2} = 2 + (m)$ klasyny we ş.m. m modul boýunça $m - 1$ bilen deňeşdirerli bolan ähli bitin sanlaryň köplügi kemeltmeleriň $\overline{m-1} = (m-1) + (m)$ klasyny düzýär. Başga kemeltmeleriň klasy bolup bilmez, sebäbi her bir bitin san bu klaslaryň haýsy hem bolsa birine degişli bolýar. Netijede, $\boldsymbol{Z}/(m) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{m-1}\}$.

$\boldsymbol{Z}/(m)$ halkada goşmak we köpeltmek amallary aşakdaky düzgün boýunça ýerine ýetirilýär. $\bar{k} = k + (m)$ we $\bar{l} = l + (m)$ klaslary goşmak üçin, $k + l$ jemi tapmaly, eger bu jem m-den kiçi bolsa, onda $\bar{k} + \bar{l} = (k + l) + (m)$ bolar, $k + l \geq m$ bolsa, onda $k + l$ sany m-e bölüp, r galyndyny $\bar{k}$ we $\bar{l}$ klaslaryň jeminiň wekili edip almaly, ýagny $\bar{k} + \bar{l} = r + (m) = \bar{r}$ diýip almaly. Edil şeýle görnüşde $\bar{k}$ we $\bar{l}$ klaslaryň köpeltmek hasyly kesgitlenilýär: eger $kl < m$ bolsa, $\bar{k} \cdot \bar{l} = kl + (m) = \bar{k}\,\bar{l}$; eger $kl \geq m$ bosa, onda $\bar{k} \cdot \bar{l} = \bar{s} = s + (m)$, bu ýerde s san kl sany m-e bölmekden galýan galyndy. Meselem, $m = 8$ bolanda, $\bar{k} = \bar{4}$ we $\bar{l} = \bar{6}$ klaslaryň jemi $\bar{4} + \bar{6} = \overline{10} = \bar{2}$ görnüşde, köpeltmek hasyly bolsa, $\bar{4} \cdot \bar{6} = \overline{24} = \bar{0}$ görnüşde kesgitlenýär.

4.3. Halkalaryň gomomorfizmi. Gomomorfizm barada teorema

2.3 bölümdäki beýan etmelere görä, G topar bilen onuň faktor-toparynyň arasynda berk baglanyşyk bar, edil şeýle-de, halka bilen onuň faktor-halkasynyň arasynda hem berk baglanyşyk bardyr. Bu baglanyşyklary öwreneliň.

Goý, K we K' käbir halkalar bolsun.

1-nji kesgitleme. *Eger K halkanyň K' halkanyň içine $\varphi : K \to K'$ şekillenmesi*:

1) $\forall_{a,b \in K} \; [\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)]$;

2) $\forall_{a,b \in K} \; [\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)]$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa K halkanyň K' halkanyň **içine gomomorf** şekillenmesi ýa-da K halkanyň K' halkanyň **içine gomomorfizmi** diýilýär.

Eger φ gomomorf şekillenme K halkanyň K' halkanyň üstüne şekillenmesi bolsa, onda oňa K halkanyň K' halkanyň **üstüne gomomorfizmi** ýa-da K halkanyň epimorfizmi diýilýär. Bu ýagdaýda K' halka K halkanyň **gomomorf obrazy** diýilýär we $K \sim K'$ diýip ýazylýar. $\varphi : K \sim K'$ ýazgy K halkanyň K' halkanyň üstüne bolan gomomorfizmini aňladýar.

1-nji mysal. Goý, $\boldsymbol{C}$ ähli kompleks sanlaryň emele getirýän halkasy we $M_2(\boldsymbol{C})$ bolsa, kompleks sanlar meýdanynda berlen 2-nji tertipli kwadrat matrisalaryň halkasy bolsun.

$$\underset{a+bi\in C}{\forall}\left[\varphi(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\right]$$

düzgün bilen kesgitlenen $\varphi : \boldsymbol{C} \to M_2(\boldsymbol{C})$ şekillenmä seredeliň. Bu şekillenme gomomorfizmiň kesgitlemesiniň (1), (2) şertlerini kanagatlandyrýar. Hakykatdan hem:

$$\underset{a+bi,c+di\in C}{\forall}\{\varphi[(a+bi)+(c+di)]=\varphi[(a+c)+(b+d)i]=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}=\varphi(a+bi)+\varphi(c+di)\},$$

ýagny

$$\underset{a+bi,c+di\in C}{\forall}\varphi[(a+bi)+(c+di)]=[\varphi(a+bi)+\varphi(c+di)].$$

$$\underset{a+bi,c+di\in C}{\forall}\{\varphi[(a+bi)(c+di)]=\varphi[(ac-bd)+(ad+bc)i]=\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac+bd\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c\end{pmatrix}=\varphi(a+bi)\varphi(c+di)\},$$

ýagny

$$\underset{a+bi,c+di\in C}{\forall}\{\varphi[(a+bi)(c+di)]=\varphi(a+bi)\varphi(c+di)\}.$$

Netijede, φ şekillenme $\boldsymbol{C}$ halkanyň $M_2(\boldsymbol{C})$ halkanyň içine gomomorfizmi bolýar.

2-nji mysal. Goý, $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in \boldsymbol{R}\right\}$ bolsun.

Bu köplügiň martisalary goşmak we köpeltmek amalyna görä halka emele getirýändigini hiç bir kynçylyksyz barlap bolar.

$\underset{a,b\in R}{\forall}\left[\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} = a + b\sqrt{2}\right]$ düzgün bilen φ şekillenmäni kesgitläliň. φ şekillenmäniň K halkanyň R hakyky sanlaryň emele getirýän halkasynyň içine şekillenmesi bolýandygy aýdyň. φ şekillenmäniň gomomorfizmiň şertlerini kanagatlandyrýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem:

$$\underset{a,b,a_1,b_1\in \boldsymbol{R}}{\forall}\left[\varphi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ 2(b+b_1) & a+a_1 \end{pmatrix} = (a+a_1) + \right.$$

$$\left. + (b+b_1)\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right],$$

ýagny

$$\underset{a,b,a_1,b_1\in \boldsymbol{R}}{\forall}\left[\varphi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right];$$

$$\underset{a,b,a_1,b_1\in \boldsymbol{R}}{\forall}\left[\varphi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\begin{pmatrix} aa_1 + 2bb_1 & ab_1 + a_1b \\ 2(ab_1 + a_1b) & aa_1 + 2bb_1 \end{pmatrix} = \right.$$

$$\left. = (aa_1 + 2bb_1) + (ab_1 + a_1b)\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})(a_1 + b_1\sqrt{2}) = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \varphi\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right.,$$

ýagny

$$\underset{a,b,a_1,b_1\in \boldsymbol{R}}{\forall}\left[\varphi\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix}\right].$$

Şeýlelikde, φ şekillenme K halkanyň $\boldsymbol{R}$ halkanyň içine gomomorfizmi bolýar.

3-nji mysal. K halkanyň $K/\boldsymbol{m}$ halkanyň üstüne gomomorfizmi bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi. Goý, K käbir halka, $\boldsymbol{m}$ bolsa onuň erkin alnan idealy bolsun. K halkanyň $K/\boldsymbol{m}$ faktor-halkanyň içine χ şekillenmesine seredeliň. Ol şekillenmäni $\chi : a \mapsto \bar{a}$, $\bar{a} \in K/\boldsymbol{m}$, $a \in K$ düzgün bilen kesgitläliň. χ şekillenmäniň K halkanyň $K/\boldsymbol{m}$ halkanyň üstüne şekillenmesi bolýandygy aýdyň. Bu şekillenmäniň gomomorfizmiň şertlerini kanagatlandyrýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem,

$$\underset{a,b\in R}{\forall}\ [\chi(a+b) = (a+b) + \boldsymbol{m} = (a+\boldsymbol{m}) + (b+\boldsymbol{m}) = \chi(a) + \chi(b)]\ ,$$

ýagny

$$\underset{a,b\in R}{\forall}\ [\chi(ab) = \chi(a) + \chi(b)].$$

$$\underset{a,b\in R}{\forall}\ [\chi(ab) = ab + \boldsymbol{m} = (a+\boldsymbol{m})(b+\boldsymbol{m}) = \chi(a)\chi(b)],$$

ýagny

$$\underset{a,b\in R}{\forall}\ [\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)].$$

Netijede, χ şekillenme K halkanyň $K/\boldsymbol{m}$ halkanyň üstüne gomomorf şekillenmesi bolýar.

$\chi : K \sim K/\boldsymbol{m}$ şekillenmä **tebigy** ýa-da **kanonik gomomorfizm** diýilýär.

6-njy teorema. *Eger φ şekillenme K halkanyň K' halkanyň içine gomomorf şekillenmesi bolsa, onda*:

1) $\varphi(0) = 0'$;

2) $\underset{a\in R}{\forall}\ [\varphi(-a) = -\varphi(a)]$;

3) $\varphi(K)$ *köplük K' halkanyň bölek halkasy bolýar;*

4) *eger K halkada e birlik element bar bolsa, onda $\varphi(e)$ element $\varphi(K)$ halkanyň birlik elementi bolýar; eger $a \in K$ elemente K halkada a^{-1} ters element bar bolsa, onda $\varphi(K)$ halkada $\varphi(a^{-1})$ element $\varphi(a)$ elemente ters element bolýar.*

Subudy. Teoremanyň 1-nji we 2-nji tassyklamalarynyň dogrulygyna K halkanyň additiw toparyna 2.3-nji bölümçäniň 7-nji we 8-nji teoremalaryny ulanmak arkaly göz ýetirmek bolýar. 3-nji tassyklamanyň dogrulygyny subut edeliň. Onuň üçin, 2.3-nji bölümçedäki 9-njy teoremany K' halkanyň additiw toparyna ulanyp, $\varphi(K)$ köplügiň K' halkanyň additiw bölek topary bolýandygyna göz ýetirýäris. $\varphi(K)$ köplükde K' köplükde kesgitlenen köpeltmek amaly ýerine ýetýär. Hakykatdan hem, $a', b' \in \varphi(K)$ bolsa, onda $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ we $a' \cdot b' = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \in \varphi(K)$, bu ýerde $a, b \in K$. Netijede, 3.1-nji bölümçedäki 1-nji teorema görä $\varphi(K)$ köplük K' halkanyň bölek halkasy bolýar. 4-nji tassyklamanyň dogrulygyny 2.3-nji bölümçedäki 7-nji we 8-nji teoremalar arkaly subut etmek bolar.▶

2-nji kesgitleme. *Goý, φ şekillenme K halkanyň K' halkanyň içine gomomorfizmi bolsun. φ gomomorf şekillenmede K' halkanyň $0'$ elemente şekillenýän K halkanyň elementleriniň U köplügine φ* **gomomorfizmiň ýadrosy** *diýilýär we $\boldsymbol{U} = Ker\varphi$ ýaly ýazylýar.*

7-nji teorema. *K halkanyň K' halkanyň içine φ gomomorfizminiň $\boldsymbol{U} = Ker\varphi$ ýadrosy K halkanyň idealy bolýar.*

Subudy. Hakykatdan hem, K halkanyň additiw toparyna 2.3-nji bölümçäniň 10-njy teoremasyny ulanyp, $\boldsymbol{U} = Ker\varphi$ köplügiň K halkanyň additiw toparynyň bölek topary bolýandygyna göz ýetirmek bolýar. Şeýle hem, islendik $x \in K$ element üçin, $\boldsymbol{U}x \subset \boldsymbol{U}$ we $x\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{U}$ bolýar, sebäbi her bir $a \in \boldsymbol{U}$ üçin, $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = 0' \cdot \varphi(x) = 0'$ we $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x) \cdot 0' = 0'$ deňlikler ýerine ýetýär. Netijede, $\boldsymbol{U} = Ker\varphi$ bölek topar K halkanyň idealy bolýar.▶

Halkanyň gomomorfizmi baradaky teorema. *Eger φ şekillenme K halkanyň K' halkanyň üstüne gomomorfizmi we $\boldsymbol{U} = Ker\varphi$ bolsa, onda K' halka $K/\boldsymbol{U}$ faktor-halka izomorf, özi hem K/U halkanyň K' halkanyň üstüne ψ izomorfizminiň χ tebigy gomomorfizmi bilen $\chi\psi$ köpeltmek hasyly φ gomomorfizmi kesgitleýär.*

Subudy. Goý, r' element K' halkanyň erkin saýlanyp alnan elementi, r bolsa K halkanyň $\varphi(r) = r'$ şerti kanagatlandyrýan elementi bolsun. Onda

$$\underset{b\in K}{\forall}\ [b \equiv r(\operatorname{mod} \boldsymbol{U}) \Rightarrow \varphi(b) = \varphi(r) + \varphi(b - r) = \varphi(r) + 0' = \varphi(r) = r'],$$

sebäbi $b - r \in U$, netijede, $\varphi(b - r) = 0'$. Ikinji tarapdan, eger $c \in K$ element φ gomomorfizmde r' elemente şekillenýän, ýagny $\varphi(c) = r'$ bolsa, onda $\varphi(c - r) = \varphi(c) - \varphi(r) = 0'$ we şonuň üçin hem $c - r \in \boldsymbol{U}$, ýagny $c \equiv r(\operatorname{mod} \boldsymbol{U})$. Netijede, φ gomomorfizmde K halkanyň $r' \in K'$ elemente şekillenýän ähli elementleri r elementi saklaýan K halkanyň $\boldsymbol{U}$ modul boýunça alnan kemeltmeler klasyna degişli bolýar, ýagny $\bar{r} = r + \boldsymbol{U}$ klasy düzýär.

Her bir $\bar{r} = r + \boldsymbol{U}$ kemeltmeleriň klasyny $r' \in K'$ elemente şekillendirýän şekillenmäni ψ bilen belgiläliň we $\varphi(r) = r'$ bolýandygyny hem ýatlalyň. Onda $\psi(\bar{r}) = \varphi(r)$, bu ýerde r element $\bar{r}$ klasyň islendik elementi bolar. ψ şekillenmäniň $K/\boldsymbol{U}$ faktor-halkanyň K' halkanyň üstüne şekillenmesi boljakdygy aýdyň. ψ şekillenme gomomorf şekillenmedir. Hakykatdan hem, goý $\bar{r}_1 = r_1 + \boldsymbol{U}$, $\bar{r}_2 = r_2 + \boldsymbol{U}$ elementler $K/\boldsymbol{U}$ halkanyň erkin saýlanyp alnan elementleri bolsun.

Onda $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = (r_1 + r_2) + \boldsymbol{U}$, $\overline{r_1 r_2} = r_1 r_2 + \boldsymbol{U}$ we şoňa görä-de:

$$\psi(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \varphi(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \varphi(\bar{r}_1) + \varphi(\bar{r}_1) = \psi(\bar{r}_1) + \psi(\bar{r}_2);$$

$$\psi(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = \varphi(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = \varphi(\bar{r}_1) \cdot \varphi(\bar{r}_1) = \psi(\bar{r}_1) \cdot \psi(\bar{r}_2),$$

ýagny

$$\psi(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \psi(\bar{r}_1) + \psi(\bar{r}_2); \qquad \psi(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) = \psi(\bar{r}_1) \cdot \psi(\bar{r}_2).$$

Indi ψ şekillenmäniň birbelgilidigini, ýagny $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2$ bolanda, $\psi(\bar{r}_1) \neq \psi(\bar{r}_2)$ bolýandygyny subut edeliň. Eger $\psi(\bar{r}_1) = \psi(\bar{r}_2)$ bolsa, onda ψ şekillenmäniň kesgitlenişine görä, $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, ýagny $\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 0'$. Şonuň üçin hem, $\varphi(r_1 - r_2) = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 0'$ we $r_1 - r_2 \in \boldsymbol{U}$. Bu ýerden $r_1 \equiv r_2 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{U})$ we $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$. Netijede, ψ şekillenme $K/\boldsymbol{U}$ halkanyň K' halkanyň üstüne izomorf şekillenmesi bolýar.

Indi bolsa $\chi\psi$ şekillenmä seredeliň. χ şekillenme K halkanyň $K/\boldsymbol{U}$ halkanyň üstüne gomomorf şekillenmesi, ψ şekillenme bolsa $K/\boldsymbol{U}$ halkanyň K' halkanyň üstüne izomorf şekillenmesi bolany üçin, $\chi\psi$ şekillenmäniň K halkanyň K' üstüne izomorf şekillenmesi boljagy aýdyň. Indi $\chi\psi = \varphi$ bolýandygyny subut edeliň. Goý, r element K halkanyň erkin alnan elementi bolsun. χ tebigy gomomorfizmiň kesgitlenişine görä, $\chi(r) = \bar{r} = r + \boldsymbol{U}$ we ψ izomorfizmiň kesgitlenişine görä bolsa, $\psi(\bar{r}) = \varphi(r)$. Netijede,

$$\chi\psi(r) = \psi[\chi(r)] = \psi(\bar{r}) = \varphi(r),$$

ýagny

$$\chi\psi(r) = \varphi(r).$$

Şeýlelikde,

$$\underset{r\in K}{\forall}\ [\chi\psi(r) = \varphi(r)]$$

gatnaşyk ýerine ýetýär. Bu bolsa $\chi\psi = \varphi$ deňligiň ýerine ýetýändigini aňladýar.▶

§5. Baş ideallar halkasy we Ýewklid halkasy

5.1. Bütewülik ýaýlasynda bölünijilik

Halkalar teoriýasynda häsiýetleri boýunça bitin sanlar halkasyna ýeterlik ýakyn bolan halkalara seretmek maksadalaýyk hasaplanýar. Bu halkalara **baş ideallar halkasy** diýilýär. Olary öwrenmeklige başlamazdan öňürti birlik elementli bütewülik ýaýlasynda kesgitlenen bölünijilige degişli umumy maglumatlara seredeliň.

Goý, R birlik elementli bütewülik ýaýlasy bolsun. Bütewülik ýaýlasy kommutatiw halka bolany üçin, onda sag we çep bölünijilik düşünjeleri gabat gelýär we şoňa görä-de, bölünijiligiň kesgitlemesini aşakdaky ýaly bermek bolar.

1-nji kesgitleme. *Eger R bütewülik ýaýlasynyň a we b elementleri üçin, $a = bc$ deňlik ýerine ýeter ýaly R-de c element bar bolsa, onda a element b elemente* **bölünýär** *ýa-da b element a elementi* **bölýär** *diýilýär we degişlilikde, $a \,\vdots\, b$, b/a ýa-da $a \equiv 0(mod b)$ ýaly ýazylýar.*

Bu kesgitlemeden bütewülik ýaýlasyndaky bölünijiligiň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar:

1) $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\ [a \,\vdots\, b \wedge b \,\vdots\, c \Rightarrow a \,\vdots\, c]$;

2) $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\ [a \,\vdots\, c \wedge b \,\vdots\, c \Rightarrow (a + b) \,\vdots\, \mathrm{c}]$;

3) $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\ [a \,\vdots\, b \Rightarrow ac \,\vdots\, b]$;

4) $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\ [a_1 \,\vdots\, c \wedge a_2 \,\vdots\, c \wedge \ldots \wedge a_n \,\vdots\, c \Rightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \,\vdots\, c]$.

Görnüşi ýaly, bütewülik ýaýlasynda kesgitlenen bölünijiligiň bu häsiýetleri bitin sanlar halkasynda kesgitlenen bölünijiligiň häsiýetleri bilen gabat gelýär;

5) R bütewülik ýaýlasynyň her bir a elementi e birlik elementiň islendik ε bölüjisine bölünýär.

Hakykatdan hem, $a = \varepsilon(\varepsilon^{-1}a)$ we netijede, $a \,\vdots\, \varepsilon$.

6) eger $R \ni a$ element $R \ni b$ elemente bölünse, onda a element $b\varepsilon$ (ε bu ýerde birligiň bölüjisi) elemente hem bölünýär.

Hakykatdan hem, $a = bc$ deňlikden $a = b\varepsilon(\varepsilon^{-1}c)$ deňligi almak bolar, ol bolsa a elementiň $b\varepsilon$ elemente bölünýändigini aňladýar;

7) a we $a\varepsilon$ elementleriň (bu ýerde ε birligiň bölüjisi) biriniň bölüjisi beýlekisiniň hem bölüjisi bolýar.

Hakykatdan hem, $a = cg$ deňlikden $a\varepsilon = c(\varepsilon g)$ deňlik, tersine $a\varepsilon = cg$ deňlikden bolsa, $a = c(\varepsilon^{-1} g)$ deňlik alynýar. Netijede, eger c/a bolsa, onda $c/a\varepsilon$ we tersine $c/a\varepsilon$ bolsa, onda c/a bolýar.

Mundan beýläk R bütewülik ýaýlasynyň elementlerine seredenimizde umumylygy bozmazdan olary noldan tapawutly diýip hasap ederis.

2-nji kesgitleme. *Eger R bütewülik ýaýlasynyň a we b elementleri biri-biriniň bölüjisi bolsa, onda olara* **assosirlenen** *diýilýär.*

Kesgitleme boýunça

$$a = bc \text{ we } b = ad \tag{1}$$

bolýar. (1) deňliklerden $a = a(cd)$ deňlik gelip çykýar. Bu ýerden deňligiň iki tarapyny hem $a \neq 0$ elemente gysgaldyp, $cd = 1$ deňligi alarys. Netijede, c we d elementler birligiň bölüjisi bolýar. Şeýlelikde, eger a we b elementler assosirlenen bolsalar, onda $a = b\varepsilon$ (bu ýerde ε birligiň bölüjisi) deňlik ýerine ýetýär. Ikinji tarapdan ε birligiň bölüjisi nähili bolsa-da, a we $a\varepsilon$ elementler assosirlenen bolýar, sebäbi $a = (a\varepsilon)\varepsilon^{-1}$ deňlik dogry.

2-nji kesgitleme. *Eger R bütewülik ýaýlasynyň a* we *b elementleri üçin, $a = b\varepsilon$ (bu ýerde ε birligiň käbir bölüjisi) deňlik ýerine ýetse, onda olara* **assosirlenen** *diýilýär.*

Meselem, bitin sanlar halkasynda m we $-m$ sanlar assosirlenendir.

Eger a we b assosirlenen elementler (ýagny $a = bc$ we $b = ad$) bolsa, onda $(a) \subseteq (b)$ we $(b) \subseteq (a)$, netijede, $(a) = (b)$ bolar. Şeýlelikde, iki assosirlenen a we b elementler şol bir baş idealy döredýär.

Goý, a we b elementler R bütewülik ýaýlasynyň erkin alnan elementleri bolsun.

3-nji kesgitleme. *Eger a we b elementleriň her biri c elemente bölünse, onda $R \ni c$ elemente R bütewülik ýaýlasynyň a we b elementleriniň* **umumy bölüjisi** diýilýär.

5-nji häsiýete görä, R bütewülik ýaýlasynyň e birlik elementiniň ähli bölüjileri a we b elementleriň umumy bölüjileri bolýar. Ýöne a we b elementleriň bulardan başga-da umumy bölüjileriniň bolmagy mümkin.

Erkin alnan R bütewülik ýaýlasynda hemişe tertip gatnaşygyny girizip bolmaýanlygy üçin, iki sanyň iň uly umumy bölüjisi hökmünde ol sanlaryň umumy bölüjileriniň iň ulusyny almak düzgünini R bütewülik ýaýlasynda ulanyp bolmaýar. Ýöne, iki sanyň iň uly umumy bölüjisiniň beýleki kesgitlemesini, ýagny «iki sanyň iň uly umumy bölüjisi diýip, ol sanlaryň ähli umumy bölüjilerine bölünýän umumy bölüjisine aýdylýar» – diýen kesgitlemesini R bütewülik ýaýlasynda hem ulanyp bolar.

4-nji kesgitleme. *R bütewülik ýaýlasynyň a we b elementleriniň islendik umumy bölüjisine bölünýän umumy bölüjisine ol elementleriň* **iň uly umumy bölüjisi** *diýilýär.*

$d = (a,b)$ ýazgy a we b elementleriň iň uly umumy bölüjisiniň d elemente deňdigini aňladýar.

5-nji kesgitleme. *Eger a we b elementleriň birligiň bölüjisinden başga umumy bölüjisi ýok bolsa, ýagny $(a,b) = 1$ bolsa, onda a we b elementlere* **özara ýönekeý** *diýilýär.*

Goý, ε birligiň islendik bölüjisi we a bolsa R bütewülik ýaýlasynyň erkin alnan elementi bolsun. Onda $a = a\varepsilon\varepsilon^{-1}$. Bu deňlikden a element bilen assosirlenen we birligiň ähli bölüjileri a elementiň bölüjisi bolýandygy alynýar. a elementiň bu bölüjilerine **triwial bölüjileri** ýa-da **hususy däl bölüjileri** diýilýär. Eger a elementiň $a\varepsilon$ we ε elementlerden, ýagny, hususy däl bölüjilerinden başga-da bölüjileri bar bolsa, onda olara onuň hususy bölüjileri diýilýär. Meselem, $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynda $\pm 1, \pm 10$ sanlar 10 sanyň hususy däl, $\pm 2, \pm 5$ sanlar bolsa hususy bölüjileri bolýar.

6-njy kesgitleme. *Eger $a \in R$ element birligiň bölüjisi däl bolsa we hususy bölüjilere eýe bolmasa, onda oňa* **dagamaýar** *ýa-da* **ýönekeý** *diýilýär; eger $a \in R$ elementiň hususy bölüjileri bar bolsa, onda oňa* **dagaýar** *ýa-da* **düzme** *diýilýär.*

Başgaça aýdanyňda, eger a elementi $a = bc$ görnüşde b we c hususy bölüjileriň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazyp bolsa, oňa dagaýar, bolmasa dagamaýar diýilýär. Meselem, $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynda $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7$...(ýagny ýönekeý sanlar we ýönekeý sanlara garşylykly sanlar) dagamaýarlar; ± 1-den we bu sanlardan galan ähli bitin sanlar bolsa dagaýar, ýagny olar düzme sanlar bolýarlar.

Dagamaýan elementleriň aşakdaky iki häsiýetini belläliň.

1. Eger $p \in R$ element dagamaýan bolsa, onda onuň bilen assosirlenen islendik $p\varepsilon$ element hem dagamaýar.

Bu häsiýet bütewülik ýaýlasynyň 7-nji häsiýetinden gelip çykýar.

2. Eger a-islendik, p bolsa dagamaýan element R bütewülik ýaýlasynyň elementleri bolsa, onda a element p elemente bölünýär ýa-da a we p elementler özara ýönekeý.

Hakykatdan hem, eger $(a,p) = d$ bolsa, onda d birligiň bölüjisi bolmaly ýa-da $p\varepsilon$, (bu ýerde ε birligiň bölüjisi) görnüşli san bolmaly. Birinji ýagdaýda a we p özara ýönekeý elementler bolýar, ikinji ýagdaýda a element p elemente bölünýär.

5.2. Baş ideallar halkasy

Indi baş ideallar halkasyny öwrenmeklige geçeliň.

Kesgitleme. *Her bir idealy baş ideal bolýan birlik elementli bütewülik ýaýlasyna* **baş ideallar halkasy** *diýilýär.*

1-nji teorema. ***Z*** *bitin sanlaryň halkasynyň her bir idealy baş idealdyr.*

Subudy. Goý, $\boldsymbol{U}$ bitin sanlar halkasynyň käbir idealy bolsun. Eger $\boldsymbol{U}$ nol ideal bolsa, onda $\boldsymbol{U} = (0)$ bolar. Eger $\boldsymbol{U}$ ideal $c \neq 0$ elementi özünde saklaýan bolsa, onda ol $-c$ elementi hem özünde saklaýar. c we $-c$ elementleriň haýsy hem bolsa biri položitel, onda $\boldsymbol{U}$ köplük käbir natural sany özünde saklaýar. Goý, a san $\boldsymbol{U}$ köplüge degişli iň kiçi natural san bolsun. Onda $\underset{n\in Z}{\forall}\ [na \in \boldsymbol{U}]$ gatnaşyk dogry we netijede, $(a) = a\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{U}$ gatnaşygy alarys.

Tersine, $\boldsymbol{U} \subseteq (a)$ bolýandygyny hem görkezeliň.

Goý, b element $\boldsymbol{U}$ idealyň erkin alnan elementi bolsun. b sany a sana galyndyly bölüp, $b = aq + r$, $0 \leq r < a$ gatnaşygy alarys. $a \in \boldsymbol{U}$, $b \in \boldsymbol{U}$ bolany üçin, $r = b - aq \in \boldsymbol{U}$ bolar. Bu ýerden $0 \leq r < a$ şertden $r = 0$ alnar, sebäbi başga ýagdaýda a san $\boldsymbol{U}$ köplükde saklanýan iň kiçi natural san bolmaýar. Şeýlelikde, $b = aq$ deňligi aldyk, bu bolsa $b \in (a)$ bolýandygyny aňladýar. Netijede, $\boldsymbol{U} \subseteq (a)$ bolar. $(a) \subseteq \boldsymbol{U}$ we $\boldsymbol{U} \subseteq (a)$ bolany üçin, $\boldsymbol{U} = (a)$ bolýar.▶

Bu teoremadan görnüşi ýaly, ***Z*** bitin sanlaryň halkasy baş ideallar halkasy bolýar.

Her bir P meýdan baş ideallar halkasy bolýar. Sebäbi P meýdan birlik elementli bütewülik ýaýlasydyr, haçanda, $\boldsymbol{U}$ ideal P meýdanyň nol däl idealy bolsa, onda ol özüniň $a \neq 0$ elementi bilen bilelikde $aa^{-1} = e$ elementi hem özünde saklaýar. Netijede, $\boldsymbol{U} = (e)$ bolýar.

Koeffisiýentleri P meýdanyň elementleri bolan bir üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy baş ideallar halkasy bolýar.

Birlik elementli her bir bütewülik ýaýlasynyň baş ideallar halkasyny emele getirmeýändigini hem belläliň.

2-nji teorema. *Ähli ideallary baş ideallar bolan R halkanyň islendik iki a we b elementleriniň d elemente deň bolan iň uly umumy bölüjisi bardyr we ony $d = ra + sb$ görnüşinde ýazyp bolýar (bu ýerde r we s elementler R halka degişlidir).*

Subudy. Eger a we b elementleriň haýsy hem bolsa biri nola deň bolsa, onda teoremanyň dogrulygy aýdyňdyr. Goý, a we b elementler R baş ideallar halkasynyň noldan tapawutly elementleri bolsun. Olar $xa + yb,\ x,y \in R$ elementlerden durýan (a,b) idealy döredýärler. R baş ideallar halkasy bolany üçin, (a,b) ideal hem baş ideal bolmaly, ýagny käbir d elementiň kömegi bilen döredilmeli.

Şonuň üçin hem,

$$d = ra + sb, \qquad r,s \in R; \tag{2}$$

$$a = gd,\ b = hd, \qquad g,h \in R \tag{3}$$

gatnaşyklar dogry. (3) deňliklerden d elementiň a we b elementleriň umumy bölüjisidigi görünýär. (2) deňlikden bolsa d elementiň a we b elementleriň islendik umumy bölüjisine bölünýändigi gelip çykýar. Netijede, d element a we b elementleriň iň uly umumy bölüjisi bolýar.▶

2-nji teoremany peýdalanyp, baş ideallar halkasynda iki elementiň özara ýönekeý bolmak şertini berýän tassyklamany subut edeliň.

3-nji teorema. *R baş ideallar halkasynyň a we b elementleriniň özara ýönekeý bolmagy üçin, $ra + sb = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly R halkada r we s elementleriň bolmagy* **zerur** *we* **ýeterlikdir.**

Subudy. *Zerurlyk şerti.* Eger a we b elementler özara ýönekeý, ýagny $(a,b) = 1$ bolsa, onda 2-nji teorema görä $ra + sb = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly R-de r we s elementler bar.

Ýeterlik şerti. R halkada $ra + sb = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly, r we s elementler bar diýip güman edeliň. Bu deňlikden a we b elementleriň umumy bölüjisiniň diňe birligiň bölüjisiniň bolup biljekdigi gelip çykýar, netijede, a we b elementler özara ýönekeý bolýar.▶

Özara ýönekeý sanlara degişli bolan indiki teoremalary subutsyz berýäris, sebäbi olaryň subudy ýokardaky teoremalaryň subutlaryna meňzeş we ýönekeý.

4-nji teorema. *Eger baş ideallar halkasynyň a elementi bu halkanyň b we c elementleriň her biri bilen özara ýönekeý bolsa, onda ol bc köpeltmek hasyly bilen hem özara ýönekeýdir.*

5-nji teorema. *Eger $a \in R$, $b \in R$ elementleriň köpeltmek hasyly $c \in R$ elemente bölünýän, ýöne a we c elementler özara ýönekeý bolsa, onda b element c elemente bölünýär, bu ýerde R baş ideallar halkasy.*

6-njy teorema. *Eger $a \in R$ element özara ýönekeý bolan $b \in R$ we $c \in R$ elementleriň her birine bölünýän bolsa, onda ol olaryň köpeltmek hasylyna hem bölünýär, bu ýerde R baş ideallar halkasy.*

7-nji teorema. *Eger R-baş ideallar halkasy, p bolsa bu halkanyň ýönekeý elementi bolsa, onda R/(p) faktor-halka meýdan emele getirýär.*

Subudy. $R/(p)$ faktor-halkanyň $\bar{1} = 1 + (p)$ birlik elementi noldan tapawutlydyr, ýagny $\bar{0} = (p)$ elemente deň däldir. Hakykatdan hem, $\bar{1} = \bar{0}$ bolan bolsady, onda $1 \in (p)$ bolardy we netijede, $1 \vdots p$ gatnaşygy alardyk. Bu bolsa mümkin däl, sebäbi birlik dagamaýan element. Netijede, $R/(p)$ halkada iň bolmanda bir sany noldan tapawutly elementiň bardygyny görkezdik.

Indi bolsa $R/(p)$ halkada noldan tapawutly elemente bölmek amalynyň ýerine ýetýändigini görkezeliň. Ýagny $R/(p)$ halka degişli islendik $\bar{a} = a + (p) \neq \bar{0}$ we $\bar{b} = b + (p)$ elementler üçin, $\bar{a}\ \bar{x} = \bar{b}$ deňlemäniň $R/(p)$ halkada çözüwiniň bardygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, $\bar{a} \neq \bar{0}$ bolany üçin $a \not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, ýagny a element p elemente bölünmeýär. Netijede, dagamaýan elementleriň 2-nji häsiýetine görä a we p elementler özara ýönekeý, ýagny $(a,p) = 1$ bolýar. Şonuň üçin hem, 3-nji teorema görä, $ar + ps = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly R halkada r we s elementler bar. Bu ýerden $arb + psb = b$ deňligi, soňra $arb \equiv b(\mathrm{mod}\,p)$ deňeşdirmäni we netijede, $\bar{a}\ \bar{r}\bar{b} = \bar{b}$ deňligi alarys. Şeýlelik bilen, $\bar{a}\bar{x} = \bar{b}$ deňlemäniň çözüwiniň $\bar{x} = \bar{r}\bar{b}$ bolýandygyna göz ýetirdik.▶

Netije. *Eger R baş ideallaryň halkasynyň birnäçe elementleriniň köpeltmek hasyly p ∈ R ýönekeý elemente bölünse, onda ol köpeldijileriň iň bolmanda biri p sana bölünýär.*

Subudy. Goý, $a_1 a_2 \ldots a_s$ köpeltmek hasyly dagamaýan $p \in R$ elemente bölünýän, ýagny $a_1 a_2 \ldots a_s \in (p)$ bolsun (bu ýerde $a_i \in R$. $\overline{a_i} = a_i + (p)$, $i = 1,2,\ldots,s$), $\overline{a_1 a_2 \ldots a_s} = a_1 a_2 \ldots a_s + (p)$ elementlere seredeliň. R/p halkada kesgitlenen köpeltmek hasylynyň kesgitlemesine görä $\overline{a_1 a_2 \ldots a_s} = \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} \ldots \overline{a_s}$ deňlik ýerine ýetýär. Ýöne, şert boýunça $a_1 a_2 \ldots a_s \in (p)$ bolany üçin, $\overline{a_1 a_2 \ldots a_s} = \bar{0}$ we netijede, $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} \cdot \ldots \cdot \overline{a_s} = \bar{0}$ deňligi alarys. Bu ýerden 7-nji teorema görä, $R/(p)$-niň meýdan emele getirýändigini göz öňüne tutsak, käbir $m(1 \leq m \leq s)$ üçin, $\overline{a_m} = \bar{0}$ bolýandygy gelip çykýar. Ýöne, $\overline{a_m} = \bar{0}$ deňlik $a_m \in (p)$ bolýandygyny, ýagny $a_m \vdots p$ gatnaşygyň dogrulygyny aňladýar.▶

Biziň esasy maksadymyz, baş ideallar halkasynyň her bir elementini ýönekeý (dagamaýan) köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagadyp bolýandygyny görkezmek. Ol aşakdaky lemma esaslanýar.

Lemma. *R baş ideallar halkasynda*

$$\boldsymbol{U}_0 \subset \boldsymbol{U}_1 \subset \boldsymbol{U}_2 \subset \cdots \subset \boldsymbol{U}_n \subset \cdots \tag{4}$$

şerti kanagatlandyrýan ideallaryň tükeniksiz yzygiderligi ýokdur.

Subudy. Tersinden güman edeliň, ýagny ideallaryň artýan (4) tükeniksiz yzygiderligi bar diýeliň. (4) yzygiderlikdäki ähli ideallaryň birleşmesini $\boldsymbol{U}$ bilen belgiläliň. $\boldsymbol{U}$ köplük R halkanyň idealy bolar. Hakykatdan hem, eger $a \in \boldsymbol{U}$, $b \in \boldsymbol{U}$ bolsa, onda a käbir $\boldsymbol{U}_s$ idealyň we b käbir $\boldsymbol{U}_l$ idealyň elementi bolar. Şoňa görä-de, a we b elementler $\boldsymbol{U}_m$ idealyň elementleri bolýar, bu ýerde m indeks s we l indeksleriň ulusyna deňdir. Netijede, $(a + b) \in \boldsymbol{U}_m \subset \boldsymbol{U}$, $(a - b) \in \boldsymbol{U}_m \subset \boldsymbol{U}$ we islendik $r \in R$ üçin, $ar \in \boldsymbol{U}_m \subset \boldsymbol{U}$. R halkanyň baş ideallar halkasy bolýandygyna görä bolsa, $\boldsymbol{U}$ hem baş ideal bolýar. Goý, $\boldsymbol{U} = (u)$ bolsun. Onda u element käbir $\boldsymbol{U}_k$ idealyň elementi bolup, ol (4) yzygiderlikdäki ideallaryň birleşmesine degişli elementdir. $u \in \in \boldsymbol{U}_k$ bolany üçin, u element $\boldsymbol{U}_i$ (bu ýerde $i \geq k$) ideallaryň her birine hem degişlidir. Şoňa görä-de, $(u) = \boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{U}_{k+1} = \boldsymbol{U}_{k+2} = \cdots$ bolar. Bu bolsa güman etmämize garşy gelýär.▶

8-nji teorema. *R baş ideallar halkasyndaky, birligiň bölüjisi bolmaýan, her bir noldan tapawutly element ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagaýar.*

Subudy. R halkanyň her bir ýönekeý elementi üçin teorema dogry: ýönekeý element üçin teoremada gürrüňi edilýän köpeltmek hasyly diňe bir sany köpeldijiden durýar. R halkada, noldan tapawutly bolan, ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagadyp bolmaýan a element bar diýip güman edeliň. Onda a element ýönekeý däl bolar we netijede, ony $a = a_1\, a_2$ görnüşinde ýazmak bolar, bu ýerde a_1,a_2 köpeldijiler a elementiň triwial däl bölüjileridir. a_1 we a_2 elementleriň iň bolmanda birini ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagadyp bolmaz, sebäbi, garşylykly ýagdaýda a element hem ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagardy. Takyklyk üçin, a_1 elementi ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagadyp bolmaýar diýeliň. Bu ýerde a_1 elementiň hem düzmedigini hasaba alsak, onda $a_1 = a_{11} \cdot a_{12}$ bolar, bu ýerde hem a_{11} we a_{12} elementler triwial däl bölüjilerdir. Bu ýerde hem a_{11}, a_{12} elementleriň iň bolmanda birini ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolmaýar. Takyklyk üçin a_{11} elementi alalyň we onuň üçin hem ýokardaky aýdylanlary gaýtalalyň hem-de şuňa meňzeşlikde dowam etdirip her biri öň ýanyndaky elementiň hususy bölüjisi bolýan:

$$a, a_1, a_{11}, a_{111}, \ldots \tag{5}$$

tükeniksiz yzygiderligi alarys.

Eger a_{i+1} element a_i elementiň hususy bölüjisi bolsa, onda $(a_i) \subset (a_{i+1})$gatnaşyk dogrudyr, sebäbi $a_i = a_{i+1}r$, $r \in R$. Şonuň üçin hem (5) yzygiderligiň elementleriniň döredýän baş ideallary berk artýan ideallaryň:

$$(a) \subset (a_1) \subset (a_{11}) \subset (a_{111}) \subset \cdots$$

tükeniksiz yzygiderligini emele getirýär. Bu bolsa ýokardaky subut edilen lemma garşy gelýär. Netijede, güman etme nädogry.▶

Indi bolsa 8-nji teoremadaky dagatmanyň köpeldijileriň ýerleşiş tertibine we birligiň bölüjilerine çenli takyklykda ýeke-täkdigini subut edeliň.

9-njy teorema. *Eger*

$$a = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s$$

aňlatma R baş ideallar halkasynyň a elementiniň ýönekeý köpeldijileriň köpeltmek hasylyna iki dürli edilip alnan dagatmasy bolsa, onda $r = s$ *we (degişli belgilemede) köpeldijiler üçin,* $q_i = \varepsilon_i p_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ *deňlikler dogry (*ε_i *element R halkanyň birlik elementiniň käbir bölüjisidir).*

Subudy. Teoremany r boýunça matematiki induksiýany ulanyp, subut edeliň. $r = 1$ bolanda tassyklamanyň dogrulygy aýdyň. Hakykatdan hem, $a = p_1$ element ýönekeý bolany üçin, $q_1 q_2 ... q_s$ köpeltmek hasyly diňe bir sany $q_1 = p_1$ köpeldijiden durýar. Teoremany $r \geq 2$ bolanda, $r - 1$ üçin dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, onuň r üçin hem dogrudygyny görkezeliň. Goý,

$$a = p_1 p_2 \ldots p_r \quad \text{we} \quad a = q_1 q_2 \ldots q_s$$

bolsun. Onda

$$p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s \tag{6}$$

bolar. Bu deňlikden görnüşi ýaly, $q_1 q_2 \ldots q_s$ köpeltmek hasyly p_1 elemente bölünýär. Şoňa görä-de, 7-nji teoremanyň netijesi boýunça $q_1, q_2, \ldots, q_s$ köpeldijileriň iň bolmanda biri p_1-e bölünýär. Umumylygy bozmazdan q_1 element p_1-e bölünýär diýip hasap edeliň. Çünki ony $q_1, q_2, \ldots q_s$ köpeldijileriň belgilerini çalşyp hemişe gazanmak bolar. q_1 elementiň ýönekeýdigini we onuň p_1-e bölünýändigini göz öňüne tutsak, onda $q_1 = \varepsilon_1 p_1$ bolar, bu ýerde ε_1 element R halkanyň birliginiň bölüjisidir. (6) deňlikde q_1-iň ornuna $\varepsilon_1 p_1$ goýup we bu deňligiň iki tarapyny hem p_1-e gysgaldyp,

$$p_2 p_3 \ldots p_r = (\varepsilon_1 q_2) q_3 \ldots q_s$$

deňligi alarys. Ýöne, ýokardaky güman etmä görä, $r - 1 = s - 1$ we $q_2\, q_3 \ldots q_s$ köpeldijileriň degişli belgilemesinde

$$q_2' = \varepsilon_1 q_2 = \varepsilon_2' p_2, \quad q_3 = \varepsilon_3 p_3, \ldots, q_r = \varepsilon_r p_r$$

deňlikler dogry, bu ýerde $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_r$ elementler R halkanyň birlik elementiniň käbir bölüjileridir. Şoňa görä-de, $r = s$ we $q_1, q_2, \ldots, q_s$ köpeldijileriň degişli belgilemesinde

$$q_1 = \varepsilon_1 p_1, \quad q_2 = \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2' \cdot p_2, \quad q_3 = \varepsilon_3 p_3, \ldots, q_r = \varepsilon_r p_r$$

deňlikler dogry.▶

5.3. Ýewklid halkasy

Ýewklid (takmynan b.e.öň 365 – 300 ýyllar töweregi döwürlerde ýaşan)-gadymy grek matematigi. Plotonyň okuwçysy Onuň esasy işi «Başlangyçlar»-diýen kitaby bolýar. Onda elementar matematikanyň aksiomatik esasy goýlan. Häzirki mekdep geometriýasynyň mazmunynyň esasy bölegi Ýewklidiň bu işinden alnypdyr.

Ýewklid halkasy özüniň häsiýetleri boýunça bitin sanlaryň halkasyna has ýakyn hasaplanýar. Ol aşakdaky ýaly kesgitlenýär.

Kesgitleme. *Eger birlik elementli R bütewülik ýaýlasynyň noldan tapawutly elementleriniň köplügini otrisatel däl bitin sanlaryň* N^0 *köplügine şekillendirýän* $\varphi : R/\{0\} \to N^0$ *şekillenme bar bolup, ol islendik* $a, b \in R$, $b \neq 0$ *elementler üçin,*

$$a = bq + r,\ r = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \varphi(r) < \varphi(b)$$

häsiýete eýe bolsa, onda birlik elementli R bütewülik ýaýlasyna **Ýewklid halkasy** *diýilýär.*

Z bitin sanlar halkasy Ýewklid halkasy bolýar. φ şekillenme $\forall_{a \in Z, a \neq 0} [\varphi(a) = |a|]$ düzgün bilen kesgitlenýär. Koeffisiýentleri P meýdanyň elementleri bolan x bir üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy hem Ýewklid halkasy bolýar.

10-njy teorema. *Her bir R Ýewklid halkasy baş ideallar halkasy bolýar.*

Subudy. Goý, $\boldsymbol{U}$ ideal R Ýewklid halkasynyň erkin saýlanyp alnan idealy bolsun. Eger $\boldsymbol{U}$ nol ideal bolsa, onda ol $\boldsymbol{U} = (0)$ görnüşde kesgitlenýär, ýagny 0 elementiň ýasaýan baş idealy bolýar. $\boldsymbol{U}$ ideal nol idealdan tapawutly diýip hasap edeliň. $\boldsymbol{U}$ idealyň noldan tapawutly elementleriniň arasynda $\varphi(a_0) \leq \varphi(a)$ şerti kanagatlandyrýan a_0 elementiniň barlygy aýdyň, bu ýerde a element $\boldsymbol{U}$ idealyň islendik elementidir. Ýewklid halkasynyň kesgitlemesine görä, islendik $a \in \boldsymbol{U}$ element üçin R halkada $a = a_0 q + r$ deňlik ýerine ýeter ýaly, q we r elementleriň jübüti bardyr, özi hem $r \neq 0$ bolsa, onda $\varphi(r) < \varphi(a_0)$ bolar. Ýöne, a_0 elementiň şertine görä $r = a - a_0 q \in \boldsymbol{U}$ bolany üçin, $r \neq 0$ bolmak ýagdaýy aradan aýrylýar we şoňa görä-de $r = 0$ bolýar. Şeýlelikde, $a = a_0 q$ we netijede, $\boldsymbol{U}$ ideal a_0 elementiň döredýän baş idealy bolýar. ►

Her bir Ýewklid halkasynyň baş ideallar halkasy bolýanlygy sebäpli, baş ideallar halkasy subut edilen ýokardaky 8-nji we 9-njy teoremalar, Ýewklid halkasynyň islendik elementleri üçin hem dogrudyr. 10-njy tassyklama ters bolan tassyklamanyň dogry däldigini hem belläliň, sebäbi Ýewklid halkasy bolmaýan baş ideallar halkasy hem bardyr.

5.2-nji bölümçede R baş ideallar R halkasynyň islendik a we b elementleriniň iň uly umumy bölüjisiniň bardygy subut edilipdi. Ýöne ol ýerde iň uly umumy bölüjini tapmaklyga seredilmedi. Sebäbi, erkin alnan R baş ideallar halkasynyň islendik iki elementiniň iň uly umumy bölüjisini tapmaklygyň umumy usuly ýok. Ýewklid halkasynda bolsa, islendik iki elementiň iň uly umumy bölüjisini (okyja belli bolan) Ýewklidiň algoritminiň kömegi bilen tapmak bolar. Hakykatdan hem, goý, a_0 we a_1 elementler R Ýewklid halkasynyň noldan tapawutly islendik elementleri we $\varphi(a_0) > \varphi(a_1)$ bolsun. Onda Ýewklid halkasynyň kesgitlenişine görä, R halkada $a_0 = a_1, q_1 + a_2$ deňlik ýerine ýeter ýaly, q_1 we a_2 elementleriň jübüti bardyr, bu ýagdaýda $a_2 = 0$ ýa-da $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$ bolar. Eger $a_2 \neq 0$ bolsa, onda R halkada $a_1 = a_2, q_2 + a_3$ deňlik ýerine ýeter ýaly, q_2 we a_3 elementleriň jübüti bardyr, bu ýagdaýda $a_3 = 0$ ýa-da $\varphi(a_2) > \varphi(a_3)$ bolar. Eger $a_3 \neq 0$ bolsa, onda R halkada $a_2 = a_3\, q_3 + a_4$ deňlik ýerine ýeter ýaly, q_3 we a_4 elementleriň jübüti bardyr, bu ýagdaýda $a_4 = 0$ ýa-da $\varphi(a_3) > \varphi(a_4)$ bolar we ş.m.

Şeýlelikde, $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \varphi(a_3) > \cdots > \varphi(a_{s-1}) > \varphi(a_s) > \cdots$ yzygiderligi alarys. Ýöne, bu yzygider galyndyly bölmeklik tükeniksiz dowam etmez, sebäbi garşylykly ýagdaýda otrisatel däl bitin sanlaryň $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$,…,$\varphi(a_s)$, ... köplügi iň kiçi otrisatel däl sany özünde saklamazdy. Netijede, galyndyly bölmegiň käbir ädiminden soň galyndysy nola deň bolan paýy alarys:

$$a_{m-1} = a_m q_m.$$

Şeýlelikde, biz aşakdaky deňlikleri aldyk:

$$a_0 = a_1 q_1 + a_2;$$

$$a_1 = a_2 q_2 + a_3;$$

$$a_2 = a_3 q_3 + a_4;$$

$$a_{m-2} = a_{m-1} q_{m-1} + a_m\ ;$$

$$a_{m-1} = a_m q_m.$$

Soňky deňlik a_m elementiň a_{m-1} elementiň bölüjisi bolýandygyny aňladýar. Iň soňky deňligiň öň ýanyndaky deňligiň sag tarapyndaky goşulyjylaryň her biri a_m-e bölünýär, şoňa görä-de, ol deňligiň çep tarapy, ýagny a_{m-2} hem a_m-e bölünýär. Başgaça aýdanymyzda, a_m element a_{m-2} elementiň bölüjisi bolýar. Edil şeýle edip a_m elementiň a_{m-3}, a_{m-4}, ..., a_2, a_1, a_0 elementleriň hem bölüjisi bolýandygyny görkezmek bolar. Netijede, a_m element a_0 we a_1 elementleriň umumy bölüjisi bolýar. Indi bolsa, a_m elementiň a_0 we a_1 elementleriň islendik umumy bölüjisine bölünýändigini subut edeliň. Goý, b element a_0 we a_1 elementleriň erkin saýlanyp alnan umumy bölüjisi bolsun. Onda $a_0 = a_1\, q_1 + a_2$ deňlikden a_2-niň b elemente bölünýändigi gelip çykýar, $a_1 = a_2\, q_3 + a_3$ deňlikden bolsa, a_3-üň b elemente bölünýändigi we ş.m. Soňunda $a_{m-2} = a_{m-1}\, q_{m-1} + a_m$ deňlikden a_m-iň b elemente bölünýändigi gelip çykýar. Netijede, a_m element a_0 we a_1 elementleriň *iň uly umumy bölüjisi* bolýar.

II BÖLÜM BIR ÜÝTGEÝÄNLI KÖPAGZALAR

§6. Bütewülik ýaýlasynda kesgitlenen köpagzalaryň halkasy

6.1. Köpagza düşünjesi

Bu düşünje okyjy üçin nätanyş bolman, ol mekdep matematikasynda, ýokary okuw mekdepleriniň 1-nji we 2-nji okuw ýyllarynda matematika derslerinde öwrenilýär.

Matematiki analiz dersinde bir üýtgeýänli köpagza ***R*** hakyky sanlar meýdanynda berlen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \quad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

görnüşli bitin rasional funksiýa hökmünde seredilýär, bu ýerde a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 koeffisiýentler hakyky sanlardyr. Matematiki analiz dersinde hakyky üýtgeýänli köpagzalaryň üznüksizligine, grafigine, dürli tertipdäki önümlerine seredilýär. Bir üýtgeýänli köpagzalaryň ýönekeý görnüşleri (hususy ýagdaýda $f(x) = ax + b$ çyzykly funksiýa we $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ kwadrat funksiýa) orta mekdepde düýpli öwrenilýär.

Algebra dersinde bir üýtgeýänli köpagzalara algebraik deňlemeleri çözmek meselesi bilen baglylykda duş gelinýär.

Kesgitleme. *Çep tarapy bir üýtgeýänli köpagza bolan*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0) \tag{2}$$

görnüşli deňlemä ***n*-nji derejeli algebraik deňleme** *diýilýär.*

Matematiki analizden tapawutlylykda algebra dersinde bir üýtgeýänli köpagza ***C*** kompleks sanlar meýdanynda berlen kompleks üýtgeýänli bitin rasional funksiýa hökmünde seredilýär. Algebrada bir üýtgeýänli köpagza kompleks üýtgeýänli funksiýa hökmünde seretmekligiň maksadalaýyklygy, ýönekeý diýip hasap edilýän hakyky koeffisiýentli kwadrat deňlemäniň hem kompleks kökleriniň bar bolmagyndadyr. Eger derejeleri islendik bolan köpagza kompleks sanlar meýdanynda berlen bolsa, onda onuň ähli kökleri kompleks sanlar bolýar, ýagny kompleks koeffisiýentli islendik derejeli algebraik deňlemäni çözmek üçin ***C*** kompleks sanlar meýdanyndan çykmaklygyň zerurlygy bolmaýar.

Köpagzany kompleks üýtgeýänli funksiýa hökmünde kesgitlemeklik san koeffisiýentli algebraik deňlemeleri çözmeklige we derňemeklige doly mümkinçilik berýän hem bolsa, köpagza has doly seretmek üçin ýeterlik däldir. Sebäbi, biz diňe bir san elementli däl-de, abstrakt algebraik sistemalar (halkalar, meýdanlar, çyzykly giňişlikler) bilen hem tanyş. Şoňa görä-de, koeffisiýentleri we x üýtgeýän ululygyň alýan bahasy hem abstrakt sistemalaryň elementleri bolan (2) görnüşli deňlemeleriň çözüwlerini gözlemegiň we olary derňemekligiň meseleleriniň ýüze çykmaklygy tebigydyr.

Abstrakt sistemalarda berlen deňlemelere biz eýýäm duş geldik, meselem, kwadrat matrisalaryň halkasynda berlen $AX - B = 0$ görnüşli deňlemä, m modul boýunça alnan kemeltmeler halkasynda berlen deňlemelere, meselem, $5x^3 \equiv 3(\bmod 11)$ deňeşdirmä $\bar{5}x^3 - \bar{3} = \bar{0}$ görnüşli deňleme hökmünde seretmek bolar, bu ýerde $\bar{0}, \bar{3}, \bar{5} \in Z/(11)$. Bu deňlemäniň çözüwi $x = \bar{3}$ kemeltmeler klasy bolýar.

Koeffisiýentleri erkin halka degişli bolan köpagzalar san koeffisiýentli köpagzalardan häsiýetleri boýunça düýpgöter tapawutlanýar. Meselem, koeffisiýentleri $\boldsymbol{Z}/(2)$ halka degişli bolan $\bar{1}x^2 + \bar{1}x$ köpagza x üýtgeýäniň ornuna bu halka degişli islendik bahany goýanymyzda hem $\bar{0}$ bahany alýar. Iň bolmanda bir koeffisiýenti noldan tapawutly bolan we san halkasynda berlen köpagza beýle häsiýete eýe däldir, ýagny x üýtgeýäniň islendik bahasynda, iň bolmanda bir koeffisiýenti noldan tapawutly bolan köpagza nola öwrülmeýär.

Eger erkin alnan abstrakt halkada köpagza funksiýa hökmünde seretsek, onda düýpli kynçylyga duçar bolarys. Meselem, $\boldsymbol{Z}/(2)$ halkada berlen $\bar{1}x^4$ we $\bar{1}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{1}x$ köpagzalar biri-birinden tapawutlanmaýarlar. Sebäbi, $\underset{x \in Z/(2)}{\forall} [\bar{1}x^2 + \bar{1}x = \bar{0}]$.

Bu bölümçede köpagzalara, köpagzalaryň funksional kesgitlemesinden tapawutlanýan, algebraik kesgitleme bereris. Bu kesgitleme diňe bir san koeffisiýentli köpagzalar üçin ýerlikli bolman, eýsem, käbir abstrakt sistemalarda berlen köpagzalar üçin hem ýerlikli bolar.

6.2. Esasy kesgitlemeler

Ilki bilen köpagzany kesgitlemek üçin gerek boljak käbir düşünjeleri girizeliň.

Goý, K erkin alnan birlik elementli bütewülik ýaýlasy, R bolsa onuň birlik elementli bölek halkasy bolsun, başgaça aýdanymyzda, K halka R halkanyň giňeltmesi bolsun.

K halkada R halka degişli bolmadyk käbir x elementi alalyň: $x \in K/R$. Bu elementiň kömegi bilen R halkanyň giňeltmesi bolan we x elementi saklaýan $R[x]$ minimal halkany gurmak bolar. Bu ýerde minimallyk «$R[x]$ halka ýokardaky häsiýetli islendik halkanyň bölegi bolýar» - diýen çaklamamyz dogrudyr. $R[x]$ halka R halka x elementi **birleşdirip (çatyp)** alnan halka ýa-da R halkanyň **ýönekeý giňeltmesi** diýilýär.

1-nji kesgitleme. *Eger R halkada*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3)$$

deňlik ýerine ýeter ýaly, iň bolmanda biri noldan tapawutly bolan, a_0, a_1, a_2,…, a_n elementler bar bolsa, onda $x \in K$ elemente R halka görä **algebraik** *diýilýär. R halka görä algebraik däl elemente bolsa R halka görä* **transendent** *diýilýär.*

$x \in K/R$ elementiň transendentligi (3) deňligiň diňe a_0, a_1, a_2,…, a_n elementleriň ählisi birwagtda nola deň bolan ýagdaýynda ýerine ýetýändigini aňladýar.

Islendik $a \in R$ elementiň R halka görä algebraik element bolýandygyny hem belläliň, sebäbi

$$1 \cdot a + (-a) = 0$$

deňlik dogry, bu ýerde $1, (-a) \in R$.

2-nji kesgitleme. *Eger x element R halka görä algebraik bolsa, onda x elementi R halka birleşdirip alnan R[x] halka R halkanyň* **ýönekeý algebraik giňeltmesi**, *x element R halka görä transendent bolsa, onda R[x] halka R halkanyň* **ýönekeý transendent giňeltmesi** *diýilýär.*

1-nji mysal. $\frac{1}{10} \in \boldsymbol{Q}$ sanyň $\boldsymbol{Z}$ halka görä algebraik bolýandygyny görkeziň. $\boldsymbol{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ halkanyň elementlerini kesgitläň.

Çözülişi. $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasyna we onuň giňeltmesi bolan $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar halkasyna seredeliň. $\frac{1}{10} \in \boldsymbol{Q}$ element $\boldsymbol{Z}$ halka görä algebraik bolýar, sebäbi

$$10 \cdot \frac{1}{10} + (-1) = 0$$

deňlik dogry bolar ýaly, -1; $10 \in \boldsymbol{Z}$ elementler bar. $\boldsymbol{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ halka $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynyň ýönekeý algebraik giňeltmesi bolýar. Bu halkanyň ähli elementleriniň tükenikli onluk droblardan durýanlygyny görkezmek kyn däl (şol sanda bitin sanlar hem bu halkanyň elementleri bolýar).

2-nji mysal. $\sqrt[3]{2}$, e (natural logarifmanyň esasy) sanlaryň haýsysy $\boldsymbol{Q}$ halka görä algebraik bolýar?

Çözülişi. $\boldsymbol{Q}$ halka $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlaryň emele getirýän bütewülik ýaýlasynyň bölek halkasy bolýar. $\sqrt[3]{2} \in \boldsymbol{R}$ san $\boldsymbol{Q}$ halkada algebraik bolýar, sebäbi

$$1 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 + (-2) = 0, \quad 1, -2 \in \boldsymbol{Q}.$$

$e \in R$ san $\boldsymbol{Q}$ halkada transendent bolýar, sebäbi $a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_1 e + a_0 = 0$ deňlik ýerine ýeter ýaly $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\ a_n$ iň bolmanda biri noldan tapawutly bolan rasional sanlar ýok.

Jogaby. $\sqrt[3]{2}$ - algebraik, e - transendent.

$\boldsymbol{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $\boldsymbol{Q}[e]$ halkalar, degişlilikde, $\boldsymbol{Q}$ halkanyň algebraik, transendent giňeltmesi bolýar.

Ýokarda getirilen maglumatlar esasynda bir üýtgeýänli köpagza algebraik kesgitleme berip bolar.

3-nji kesgitleme. *Goý, R-birlik elementli bütewülik ýaýlasy, x bolsa R-de transendent bolan käbir element bolsun. R halkada berlen* **bir üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy** *diýip,* $R[x]$ *ýönekeý transendent giňeltmä aýdylýar; bu halkanyň elementlerine R-de berlen* **x üýtgeýänli köpagzalar** *diýilýär. Bir üýtgeýänli köpagza* $f(x)$, $g(x)$ *ýaly bellenilýär.*

Kesgitlemä görä köpagzalar, üstünde gönüden-göni goşmak we köpeltmek amallaryny geçirip bolýan matematiki obýekt hökmünde ýüze çykýar. Köpagzalar halkasynda kesgitlenen amallar kommutatiw halkanyň amallarynyň häsiýetlerine (assosiatiwlik, kommutatiwlik, distributiwlik, nol elementiň bolmagy we ş.m.) eýedir.

Bu kesgitlemäniň, köpagzanyň (1) görnüşi bilen umumylygy ýok ýaly görünýän hem bolsa, olaryň arasyndaky baglanyşyk gös-göni ýüze çykýar.

1-nji teorema. *R halkada berlen islendik* $f(x)$ *köpagzany*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{4}$$

görnüşde aňlatmak bolar, bu ýerde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

Subudy. Ilkibaşda, (4) görnüşli elementleriň üstünde geçirilýän goşmak we köpeltmek amallaryna $R[x]$ halkada kesgitlenen amallar hökmünde seredip boljakdygyny belläliň. Teoremany subut etmek üçin $R[x]$ halkanyň islendik elementiniň (4) görnüşdedigini görkezmeli. $R[x]$ halka, R halkany bölek halka edip saklaýanlygy üçin hem-de x elementi hem özünde saklaýanlygy üçin, (4) görnüşli ähli elementleri-de özünde saklaýar. Şoňa görä-de, $R[x]$-iň minimallyk häsiýetinden peýdalanyp, bu halkada başga hiç hili elementiň ýokdugyny subut etmek ýeterlik. Şonuň üçin hem, öz gezeginde (4) görnüşli elementleriň toplumynyň, R bölek halkany we x elementi özünde saklaýan halkany emele getirýändigine göz ýetirmeli.

(4) görnüşli elementleriň jeminiň we köpeltmek hasylynyň ýene-de (4) görnüşli elementlerdigi gös-göni barlanýar.

Goý,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in R \ (i = 0,1,\ldots,n);$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_j \in R \ (j = 0,1,\ldots,m)$$

bolsun. Onda halkada kesgitlenen amallaryň häsiýetlerinden peýdalanyp (takyklyk üçin $n \geq m$ diýeliň),

$$f(x) + g(x) = d_n x^n + d_{n-1} x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0, \tag{5}$$

bu ýerde $d_k = a_k + b_k, \quad k = 0, 1, ..., m, ..., n; \; k > m \Rightarrow b_k = 0$
we

$$f(x) g(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots + c_1 x + c_0, \tag{6}$$

bu ýerde

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k;$$

$$k = 0,1,\ldots, n + m; \; k - j > n \Rightarrow a_{k-j} = 0; \; j > m \Longrightarrow b_j = 0$$

deňlikleri alarys. Görşümiz ýaly $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ aňlatmalar hem (4) görnüşlidir, sebäbi

$$\bigwedge_{i=0}^{n} [a_i \in R] \wedge \bigwedge_{j=0}^{m} [b_j \in R] \Rightarrow \bigwedge_{k=0}^{n} [d_k \in R] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n+m} [c_k \in R].$$

Şeýlelikde, $R[x]$ köplükde goşmak we köpeltmek amallary kesgitlenilýär.

Bu amallaryň häsiýetleri barada aýdanymyzda, bu amallaryň assosiatiwdigini, kommutatiwdigini, distributiwdigini barlap oturmagyň zerurlygy ýok, sebäbi $R[x]$ halkada olar ýerine ýetýär. $R[x]$ halkanyň (4) görnüşli elementleriniň arasynda nol elementiň, birlik elementiň we (4) görnüşli elemente garşylykly elementiň bolup biljekdigi aýdyň.

Şeýlelik bilen, (4) görnüşli elementiň toplumy $R[x]$ halkanyň bölek halkasyny emele getirýär. Şeýle-de, bu bölek halka $R[x]$ minimal halka bilen gabat gelýär, sebäbi ol R halkanyň ähli elementlerini we x elementi özünde saklaýar (x elementiň $R[x]$ halka degişliligi R halkanyň birlik elementli halkadygyndan gelip çykýar: $x = 1 \cdot x + 0$).

Bu bolsa, her bir köpagzany, ýagny $R[x]$ halkanyň her bir elementini (4) görnüşde ýazyp bolýandygyny aňladýar.▶

Köpagzanyň (4) görnüşde aňladylyşy ýeke-täkmi?- diýen sorag ýüze çykýar. Eger käbir şertleşikleri girizmesek, onda bu aňladyş ýeke-täk bolup bilmez. Meselem, $f(x) = x^2 - 1 \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzany $f(x) = -1 + x^2$; $f(x) = 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^3 + x^2 - 1$;

$f(x) = x^2 + 0 \cdot x - 1$; $f(x) = 3x^2 - 2x^2 - 1$ we ş.m. görnüşde aňladyp bolar.

Şeýle oňaýsyzlyklardan gaça durmak üçin, köpagzanyň (4) görnüşde aňlatmasynyň aşakdaky talaplara boýun egmegini şertleşeliň: 1) goşulyjylaryň arasynda «meňzeşi», ýagny x üýtgeýäniň meňzeş derejeli goşulyjylary bolmaly däl; 2) goşulyjylar x üýtgeýäniň derejeleri boýunça bir birlik kemelýän tertipde bolmaly; 3) ilkinji goşulyjy noldan tapawutly, ýagny $a_n \neq 0$ bolmaly; $i < n$ bolanda a_i koeffisiýentleriň nola deň bolmagy hem mümkin.

Bu talaplara boýun egýän köpagzanyň (4) görnüşde aňladylyşyna onuň **kanonik aňlatmasy** diýilýär. Ähli goşulyjylary nol bolan köpagza nol köpagza, onuň kanonik aňlatmasy 0 ýazgy hasap edilýär.

Indi (4) aňladylyşynyň ýeke-täkdigini subut etse bolar.

2-nji teorema. *R halkada berlen her bir köpagzanyň kanonik aňlatmasy ýeke-täkdir.*

Subudy. Eger berlen köpagza nol köpagza bolsa, onda onuň kanonik aňlatmasynyň ýeke-täkligi aýdyň. Goý, $f(x) \neq 0$ bolsun we onuň

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{7}$$

$$f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \tag{8}$$

iki sany kanonik aňlatmasy bar diýip güman edeliň. Takyklyk üçin $n \geq m$ diýeliň. Onda (7) aňladylyşdan (8) aňladylyşy agzama-agza aýryp alarys:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m - b_m) x^m + \ldots + (a_1 - b_1) x + \\ + (a_0 - b_0) = 0\,. \tag{9}$$

Bu deňlikde x elementiň R halkada transendent elementdigini hasaba alsak, onda (9) deňlikdäki ahli goşulyjylar nola deň bolmaly; ikinji tarapdan $a_n \neq 0$ bolmaly. Şeýlelik bilen, $n = m$ we $a_k - b_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,n$ bolar. Bu bolsa, $f(x)$ köpagzanyň (7) we (8) kanonik aňlatmalarynyň gabat gelýändigini aňladýar.▶

4-nji kesgitleme. Kanonik formada berlen nol däl

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ (a_n \neq 0)$$

köpagzanyň $a_k x^k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$*goşulyjylaryna onuň k-njy agzasy (k-derejeli agzasy),* a_k *bolsa k-njy agzanyň koeffisiýenti,* a_0*-elemente* $f(x)$ *köpagzanyň azat agzasy diýilýär. n-nji derejeli agza (iň uly derejeli agza) baş agza, onuň* a_n *koeffisiýentine baş koeffisiýent, bu agzanyň derejesine bolsa* $f(x)$ **köpagzanyň derejesi** diýilýär.

$f(x)$ köpagzanyň derejesi *degf* ýaly belgilenýär, *degf* = *n*.

Nolunjy derejeli islendik köpagza $f(x) = a_0$ $(a_0 \in R,\ a_0 \neq 0)$ görnüşli kanonik aňladylyşa eýedir; nolunjy derejeli köpagza hemişelik hem diýilýär. R halkanyň islendik noldan tapawutly elementlerine nolunjy derejeli köpagza hökmünde seredip boljakdygy aýdyň. $0 \in R$ elementi hem konstant hasaplap bolar, oňa R halkada berlen nol köpagza hökmünde seredilýär. Köpagzanyň baş agzasyna we köpagzanyň derejesine berlen kesgitlemäni nol köpagza ulanmak bolmaýar, ýagny nol köpagzanyň derejesi ýok hasaplanýar.

Köpagzanyň ýeke-täk bir usul bilen kanonik formada berlişi, $R[x]$ halkanyň elementleri bolýan iki köpagzanyň deň bolmagy üçin olaryň derejeleriniň we degişli agzalarynyň koeffisiýentleriniň deň bolmagynyň zerur we ýeterlikdigini aňladýar. Başgaça aýdanymyzda, eger

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ (a_n \neq 0);$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,\ (b_m \neq 0)$$

bolsa, onda

$$[f(x) = g(x)] \equiv [n = m] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k].$$

Hususy ýagdaýda

$$[f(x) \equiv 0] \equiv [a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0].$$

(5) gatnaşykdan gönüden-göni görnüşi ýaly, iki köpagzanyň jeminiň derejesi (ol köpagzalaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda) olaryň uly derejelisiniň derejesinden geçmeýär, ýagny $deg(f + g) \leq max\{degf,\ degg\}$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Hakykatdan hem, eger $degf = n > m = degg$ bolsa, onda $\deg(f + g) = n =$ $= \max\{degf, degg\}$ bolýar.

Derejeleri n-e deň bolan iki sany deň derejeli köpagzalaryň baş agzalarynyň koeffisiýentleri özara garşylykly elementler bolsa, onda $deg\ (f + g) < n$, ýagny

$$a_n + b_n = 0 \Rightarrow \deg(f + g) < max\{degf,\ degg\}$$

gatnaşyk dogry bolýar.

Iki köpagzanyň köpeltmek hasylynyň derejesini kesgitlemek üçin, öňünden käbir bellikleri edeliň.

Eger R birlik elementli halka bolmasa, onda 1-nji teorema dogry bolmaz. Meselem, goý, R bitin jübüt sanlaryň emele getirýän bütewülik ýaýlasy x bolsa, onda transendent element bolsun. Onda $R[x]$ halkada kanonik formada ýazyp bolmaýan köpagzalar bar, meselem, $f(x) = x$ köpagzany $x \in R[x]$ bolsa-da, R halkanyň elementleriniň (koeffisiýentleriniň) üsti bilen (4) görnüşde, ýagny ony koeffisiýentleri jübüt san bolan köpagza görnüşinde ýazyp bolmaýar.

Öz gezeginde x element R-de transendent bolman algebraik bolsa, onda 2-nji teorema dogry bolmaýar. Meselem, $\boldsymbol{Q}$ halkada algebraik bolan $x = \sqrt[3]{2}$ element üçin,

$$x^7 + 3x^4 + 2x^3 - 4 = x^4(x^3 - 2 + 5) + 2(x^3 - 2) = 5x^4 = 5x(x^3 - 2) +$$
$$+ 10x = 10x$$

deňlikleri almak bolar. Bu deňlikler bolsa, $f(x) = 10x \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzanyň $\boldsymbol{Q}[x]$ halkadan başga-da $5x^4$; $x^7 + 3x^4 + 2x^3 - 4$ we ş.m. kanonik aňladylyşynyň bardygyny görkezýär.

Bu edilen bellikler $R[x]$ köpagzalaryň halkasyny gurmak üçin, R-iň birlik elementli halka we x elementiň R-de transendent bolmagynyň zerurdygyny aňladýar. Şeýle-de, R-iň bütewülik ýaýlasy bolmalydygynyň zerurlygyny aşakdaky teorema görkezýär.

3-nji teorema. $R[x]$ - *köpagzalaryň halkasy bütewülik ýaýlasyny emele getirýär.*

Subudy. $R[x]$-iň kommutatiw halkadygy mälim, şonuň üçin onuň noluň bölüjilerini özünde saklamaýandygyny görkezmek ýeterlik.

Goý, $f(x)$, $g(x)$ köpagzalar noldan tapawutly köpagzalar bolup, olar degişlilikde, a_n we b_m baş koeffisiýentlere eýe bolsun. Onda (6) gatnaşyga görä $f(x)\,g(x)$ köpagza $c_{n+m} = a_n\, b_m$ baş koeffisiýente eýe bolýar. $a_n, b_m \in R$ we R-iň noluň bölüjisini özünde saklamaýanlygyny, şeýle-de, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ bolmalydygyny hasaba alsak, onda $c_{n+m} \neq 0$ bolar we $f(x)\,g(x)$ nol köpagza däldir, ýagny

$$f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)\,g(x) \neq 0$$

gatnaşyk dogrudyr.►

Netije. *Noldan tapawutly iki köpagzanyň köpeltmek hasylynyň derejesi ol köpagzalaryň derejeleriniň jemine deňdir*:

$$deg(fg) = degf + degg. \tag{10}$$

$R[x]$ halka $a \in R$ elementleri hem özünde saklaýanlygy üçin, $R[x]$ halkada diňe bir köpagzalary goşmak we köpeltmek amallary kesgitlenmän, eýsem, köpagzalary R halkanyň elementlerine köpeltmek amaly hem kesgitlenendir. Ony hasaba alyp $R[x]$ halkanyň çyzykly giňişlik we çyzykly algebra emele getirýändigini barlamak kyn däl. Şonuň üçin hem, R-de kesgitlenen köpagzalaryň algebrasy barada aýtmak bolar.

6.3. Köpagzalaryň funksional görnüşde kesgitlenişi

Goý, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ köpagza birlik elementli R bütewülik ýaýlasynda berlen, C bolsa R halkanyň giňeltmesi bolan käbir kommutatiw halka bolsun. C halkada α, a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_{n-1}, a_n elementleriň üstünde goşmak we köpeltmek amallarynyň kesgitlenenligine görä, C halkanyň erkin α elementi üçin

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_n \alpha + a_0 \tag{11}$$

aňlatma mana eýedir.

(11) aňlatma $f(\alpha)$ bilen belgilenýär we oňa $f(x)$ köpagzanyň $x = \alpha$ bolandaky (ýa-da «α nokatdaky») **bahasy** diýilýär. $f(\alpha)$ elementiň C halkanyň elementi bol-

jakdygy aýdyň: $f(\alpha) \in C$. Bu düzgün boýunça her bir $\alpha \in C$ elemente ýeke-täk bir $f(\alpha) \in C$ element degişli edilýär. Funksiýanyň umumy kesgitlemesini ulanyp aşakdaky tassyklamalary aýdyp bileris.

4-nji teorema. *Eger $f(x)$ köpagza R bütewülik ýaýlasynda berlen erkin alnan köpagza, C bolsa R-iň giňeltmesi bolýan käbir kommutatiw halka bolsa, onda her bir $\alpha \in C$ elemente kesgitli bir $f(\alpha) \in C$ elementi degişli edip, $\varphi_f(\alpha) = f(\alpha)$ düzgün bilen kesgitlenen $\varphi_f : C \to C$ funksiýany almak bolar.*

Köpagzany kesgitleýän φ_f funksiýa **polinomial funksiýa** diýilýär.

1-nji mysal. Polinomial funksiýalara mysal getiriň.

Çözülişi. 1. Eger $R = \boldsymbol{Z}$, $C = \boldsymbol{R}$ bolsa, onda φ_f funksiýa hakyky üýtgeýänli bitin koeffisiýentli köpagza hökmünde seretmek bolar.

2. $R = \boldsymbol{C}$, $C = \boldsymbol{C}$ bolsa, onda φ_f funksiýa bilen kesgitlenen $f(x)$ köpagza kompleks üýtgeýänli we kompleks koeffisiýentli köpagza bolar.

Köpagzanyň funksional kesgitlemesiniň doly we gutarnykly bolmagy üçin, funksiýa hökmünde seredilýän köpagzalaryň köpeltmek hasylynyň we jeminiň ýene-de köpagzalary kesgitleýän funksiýa bolýandygyna göz ýetirmeli.

Belli bolşy ýaly, $\varphi : X \to Y$ we $\psi : X \to Y$ funksiýalaryň jemi (köpeltmek hasyly)

$$\underset{x \in X}{\forall}\, [\chi(x)] = \varphi(x) + \psi(x)], \quad \left(\underset{x \in X}{\forall}\, [\chi(x) = \varphi(x)\psi(x)]\right)$$

düzgün bilen kesgitlenýän $\chi : X \to Y$ funksiýa bolmaly.

Goý, $f(x)$, $g(x)$ köpagzalar R halkada berlen we $s(x) = f(x) + g(x)$, $p(x) = f(x)$ $g(x)$, degişlilikde, bu köpagzalaryň jemi we köpeltmek hasyly bolsun.

Eger C halka R halkanyň islendik kommutatiw giňeltmesi bolsa, onda $\varphi_f : C \to C$, $\varphi_g : C \to C$, $\varphi_s : C \to C$, $\varphi_p : C \to C$ funksiýalara seretmek bolar.

$$\varphi_s = \varphi_f + \varphi_g, \;\; \varphi_p = \varphi_f \varphi_g \tag{12}$$

bolýandygyny görkezeliň. Şonuň üçin aşakdaky tassyklamanyň dogrulygyny subut edeliň.

5-nji teorema. *Goý,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

R bütewülik ýaýlasynda berlen köpagzalar, $s(x) = f(x) + g(x)$, $p(x) = f(x)g(x)$ we C halka R-iň erkin alnan kommutatiw giňeltmesi bolsun, onda

$$\underset{\alpha \in C}{\forall}\, [s(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)], \qquad \underset{\alpha \in C}{\forall}\, [p(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)] \tag{13}$$

gatnaşyklar dogrudyr.

Subudy. (5) we (6) gatnaşyklara görä

$$s(x) = \sum_{k=0}^{l}(a_k + b_k)x, \quad l = max\{n,m\};$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{bu ýerde} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

köpagzalary alarys. Erkin alnan $\alpha \in C$ üçin,

$$s(\alpha) = \sum_{k=0}^{l}(a_k + b_k)\alpha^k, \quad p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \alpha^k.$$

Ikinji tarapdan

$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k, \quad g(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} b_k \alpha^k$$

bolýandygyny we C halkanyň kommutatiwligini hasaba alyp,

$$f(\alpha) + g(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \alpha^k = \sum_{k=0}^{l}(a_k + b_k)\alpha^k = s(\alpha);$$

$$f(\alpha)\, g(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j \alpha^j = \sum_{k=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big)\alpha^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \alpha^k = p(\alpha)$$

deňlikleri alarys. Bu deňlikler bolsa, (13) gatnaşyklaryň dogrulygyny aňladýar.▶

Indi bolsa, köpagzalaryň deňligi baradaky soraga geçeliň. $R[x]$ halkanyň

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \quad \text{we} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

köpagzalary üçin,

$$[f(x) = g(x)\,] \equiv [m = n] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k]$$

gatnaşyk ýerine ýetýär. Eger

$$\forall_{x \in X} \; [\varphi(x) = \psi(x)],$$

ýagny $x \in X$ üçin, $\varphi : X \to Y$ we $\psi : X \to Y$ funksiýalaryň bahalary deň bolsa, onda olara deň funksiýalar diýilýär.

Netijede, C köplük R halkanyň erkin alnan kommutatiw giňeltmesi bolan ýagdaýynda, algebraik we funksional görnüşde kesgitlenen köpagzalaryň deňligi aşakdaky gatnaşykda bolýar:

$$\forall_{\alpha \in C} \; [f(\alpha) = g(\alpha)] \Leftrightarrow [m = n] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k] \tag{14}$$

ekwiwalensiýa dogrudyr.

Eger $C = R$ bolanda (14) deňlik dogry bolsa, onda ol C islendik bolanda hem dogry bolýar. Şonuň üçin hem (14) deňgüýçliligi

$$\underset{\alpha \in R}{\forall} [f(\alpha) = g(\alpha)] \Leftrightarrow [m = n] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k] \tag{15}$$

görnüşde ýazmak bolar.

(15) tassyklamanyň R erkin alnan birlik elementli bütewülik ýaýlasy üçin dogry däldigini belläliň. Meselem, R halka $m = 2$ modul boýunça alnan $\boldsymbol{Z}/(2) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ kemeltmeleriň halkasy bolsun. Onda $f(x) = x^2 + x$ (ýagny $f(x) = \bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{0}$) we $g(x) = \bar{0}$ köpagzalar üçin, $\boldsymbol{Z}/(2)$ halkada $f(\bar{0}) = \bar{0} = g(\bar{0})$; $f(\bar{1}) = \bar{1}+\bar{1} = \bar{0} = g(\bar{1})$, ýagny $\underset{\alpha \in Z/(2)}{\forall} [f(\alpha) = g(\alpha)]$ bolar. Ýöne, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar deň däl, ýagny (14) ekwiwalensiýanyň sag tarapy ýalan.

Şeýle bolsa-da, (15) ekwiwalensiýa ýerine ýeter ýaly, ýagny köpagzalaryň algebraik we funksional deňligi ýerine ýeter ýaly, R bütewülik ýaýlasynyň boýun egmeli şertini görkezmek bolar:

Elbetde,

$$[m = n] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k] \Rightarrow \underset{\alpha \in R}{\forall} [f(\alpha) = g(\alpha)]$$

implikasiýanyň çynlygy aýdyň. Şonuň üçin hem, meseläni bu tassyklama ters bolan

$$\underset{\alpha \in R}{\forall} [f(\alpha) = g(\alpha)] \Longrightarrow [m = n] \wedge \bigwedge_{k=0}^{n} [a_k = b_k]$$

implikasiýany çyn edýän şerti gözlemeklige syrykdyrmak bolar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{l} a_k x^k \quad \text{we} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

köpagzalaryň deňligi, olaryň tapawudy bolan

$$f(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{l} d_k x^k = q(x)$$

köpagzanyň nol-köpagza bolmagyna deňgüýçlidir. Netijede,

$$[f(x) = g(x)] \equiv [q(x) = 0] \equiv [deg q \leq 0] \wedge [d_0 = 0] \tag{16}$$

gatnaşyklary alarys. Ikinji bir tarapdan,

$$\underset{\alpha \in R}{\forall} [q(\alpha) = 0] \Leftrightarrow \underset{\alpha \in R}{\forall} [f(\alpha) = g(\alpha)] \tag{17}$$

(16) we (17) gatnaşyklardan peýdalanyp, (15) ekwiwalensiýanyň ornuna

$$\underset{\alpha\in R}{\forall}\ [q(\alpha)=0] \Leftrightarrow [degq \le 0] \wedge [d_0 = 0] \qquad (18)$$

ekwiwalensiýany subut etmek bolar.

Şeýlelik bilen, (18) şertiň dogrulygy (15) şertiň dogrulygyny aňladýar.

§7. Köpagzalaryň bölünijilik teoriýasy

7.1. Meýdanda berlen köpagzalar

Biz şu wagta çenli R bütewülik ýaýlasynda berlen köpagzalaryň halkasyna seretdik. Indi bütewülik ýaýlasynyň meýdan bolmagyny, ýagny R-de islendik $R \ni a \neq 0$ elementiň a^{-1} tersiniň hem bolmagyny talap ederis. Başgaça aýdanymyzda,

$$\underset{a,b\in R}{\forall}\ [a \neq 0 \Rightarrow \underset{c\in R}{\exists}(ac = b)]$$

pikiraýtmanyň çyn bolmagy talap edilýär.

Şeýle-de, indiki beýan etmelerimizde köpagzalara P meýdanda serederis. Islendik meýdan birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirýänligi üçin, §6-da alnan ähli netijeler meýdanda berlen köpagzalar üçin hem güýjünde galýar. Hususy ýagdaýda, P meýdanda berlen ähli köpagzalaryň toplumy köpagzalary goşmak we köpeltmek amallaryna görä birlik elementi $P[x]$ bütewülik ýaýlasyny emele getirýär.

Elementar algebrada, matematiki analizde, funksiýalar teoriýasynda we matematikanyň ulanylýan ýerlerinde san meýdanynda berlen köpagzalar aýratyn orun eýeleýär. San meýdanynda berlen köpagzalaryň algebraik we funksional kesgitlenilişi deňgüýçlidir, şoňa görä-de, köpagzalary we olaryň häsiýetlerini san meýdanynda öwrenmeklik ýeňil düşýär.

P meýdanda berlen köpagzalaryň $P[x]$ halkasy hem meýdan emele getirýär diýip pikir etmek nädogrudyr. Sebäbi, $P[x]$ halkanyň nolunjy derejeli köpagzalaryndan başga hiç bir köpagzasynyň tersi ýokdur. Hakykatdan hem, $degf \ge 1$ şerti kanagatlandyryýan islendik $f(x) \in P[x]$ köpagza üçin, $f(x) \cdot g(x) = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly, $g(x)$ köpagza $P[x]$ halkada ýokdur, sebäbi $deg(fg) = degf + degg$ deňlik dogry we $g(x)$ köpagza nolunjy derejeli köpagza bolup bilmez. Bu ýerden $f(x)g(x) \neq 1$ alynýar. Bu bolsa derejesi noldan uly köpagzanyň $P[x]$ halkada tersiniň ýokdugyny aňladýar. $P[x]$ halkanyň nolunjy derejeli köpagzalaryň (P meýdanyň elementleri bolany üçin), nol köpagzadan başgasynyň tersi bardyr, özi hem olar nolunjy derejeli köpagzalardyr. Başgaça aýdanymyzda, $P[x]$ bütewülik ýaýlasynyň birlik elementiniň bölüjileri diňe nolunjy derejeli köpagzalardyr.

Şeýlelikde, $P[x]$ halkanyň özi tutuşlygyna meýdan emele getirmeýär, şeýle-de, onuň nolunjy derejeli däl iň bolmanda bir köpagzany özünde saklaýan islendik bölek halkasy hem meýdan emele getirýän däldir.

Bu aýdylanlardan $P[x]$ halkada noldan tapawutly köpagza bölmek amalynyň ýerine ýetmeýändigi gelip çykýar. Ýöne, bitin sanlar halkasynda kesgitlenen galyndyly bölmek amalyna meňzeş edip, $P[x]$ halkada hem galyndyly bölmek gatnaşygyny girizmek bolar.

7.2. Köpagzalaryň halkasynyň Ýewklid halkasyny emele getirişi

$P[x]$ köpagzalar halkasynyň (P - meýdan) Ýewklid halkasyny emele getirýändigini subut etmek üçin, Ýewklid halkasynyň kesgitlemesine görä, aşakdaky şertleriň ýerine ýetýändigini görkezmeli:

1) $P[x]$ - birlik elementli bütewülik ýaýlasy;

2) $\forall_{f(x), g(x) \in p[x]} \ \exists_{q(x), r(x) \in p[x]} \ [f(x) = g(x)q(x) + r(x)],$ (1)

($r(x) = 0$ ýa-da $\varphi(r(x)) < \varphi(g(x))$) şert bilen galyndyly bölmegi kesgitleýän

$$\varphi : P[x]/\{0\} \to N^0 \ \left(N^0 = N \cup \{0\}\right)$$

şekillenme bar.

$P[x]$ halkanyň birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirýändigini §6-da subut etdik. $\varphi : P[x]/\{0\} \to N^0$ şekillenmäni bolsa, her bir noldan tapawutly $f(x) \in \in P[x]$ köpagza onuň derejesini degişli edip, ýagny

$$\varphi(f(x)) = degf \in N^0$$

düzgün bilen kesgitleýäris.

$P[x]$ halkada ýokardaky kesgitlenen φ şekillenmä laýyklykda galyndyly bölmegiň ýerine ýetýändigini görkezmek galýar. Başgaça aýdanymyzda, $P[x]$ halkanyň islendik $f(x)$ we $g(x) \neq 0$ köpagzalary üçin

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{2}$$

deňlik ýerine ýeter ýaly, $q(x)$ we $r(x)$ köpagzalaryň $P[x]$ halkada bardygyny görkezmeli. Özi hem, $r(x) = 0$ ýa-da $degr < degg$ bolmaly.

(2) deňlikde $f(x)$ köpagza **bölüniji**, $g(x)$ köpagza **bölüji**, $q(x)$ köpagza **doly däl paý,** $r(x)$ köpagza bolsa **galyndy** diýilýär.

1-nji mysal. 1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ köpagzany $g(x) = x^2 + 1$ köpagza;

2) $g(x) = x^2 + 1$ köpagzany $f(x) = x^3 - 3x + 1$ köpagza galyndyly bölüň.

Çözülişi. 1) $x^3 - 3x + 1 = (x^2 + 1)x + (-4x + 1)$ deňlik $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölmegi aňladýar, bu ýerde $q(x) = x$, $r(x) = -4x + 1$, $degr < degg$ bolýar;

2) $g(x)$ köpagza hem $f(x)$ köpagza galyndyly bölünýär, bu ýagdaýda $q_1(x) = 0$, $r_1(x) = x^2 + 1$ bolar, ýagny

$$x^2 + 1 = (x^3 - 3x + 1) \cdot 0 + x^2 + 1.$$

1-nji teorema. *$P[x]$ halkanyň erkin alnan $f(x)$ köpagzasy, bu halkanyň noldan tapawutly islendik $g(x)$ köpagzasyna galyndyly bölünýär, doly däl paý bilen galyndy $P[x]$ halka degişli we birbelgili kesgitlenýär.*

Subudy. Ilki bilen galyndyly bölmegiň mümkindigini, ýagny $P[x]$ halkada (2) deňlik ýerine ýeter ýaly, $q(x)$ paýyň we $r(x)$ galyndynyň bardygyny görkezeliň. Goý,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

bolsun. Eger $f(x) = 0$ bolsa, onda $q(x) = 0$ we $r(x) = 0$ boljakdygy aýdyň. Goý, indi $n = degf < degg = m$ bolsun, onda $q(x) = 0$, $f(x) = r(x)$ diýip kabul etmek bolar. Netijede, $n \geq m \geq 0$ bolan ýagdaýa seretmeklik galýar. Bu ýagdaýda teoremanyň subudyny n-e görä matematiki induksiýa usulyny ulanyp, subut edeliň. $n = 0$ bolanda $m = 0$, $f(x) = a_0$, $g(x) = b_0 \neq 0$-y alarys. Şoňa görä-de, $q(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$, $r(x) = 0$ bolar. $\dfrac{a_0}{b_0} \epsilon P$ bolany üçin, $q(x)\ \epsilon\ P[x]$ boljagy aýdyň. Indi teoremany derejesi n-den kiçi köpagzalar üçin dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, onuň n-nji derejeli köpagza üçin hem dogrulygyny subut edeliň. Şonuň üçin

$$p(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} g(x) x^{n-m}$$

köpagza seredeliň ($a_n \neq 0$ we $b_m \neq 0$). $\dfrac{a_n}{b_m} g(x) x^{n-m}$ köpagzanyň baş agzasy $a_n\, x^n$-e deň. Şoňa görä-de, $degp < n$ we induktiw güman etmä laýyklykda $p(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölmek bolýar:

$$p(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x);\ q_1(x), r_1(x) \epsilon P[x];\ degr_1 < degg.$$

Netijede,

$$f(x) - \frac{a_n}{b_m} g(x) x^{n-m} = g(x) q_1(x) + r_1(x)$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x), r(x) = r_1(x),\ q(x) = q_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

deňlik alynýar. $q(x)$, $r(x)$ köpagzalaryň $P[x]$ halka degişlidigi we $degr = degr_1 <$ $< degg$ bolýandygy düşnükli. Bu ýerden $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölmegiň mümkindigi görünýär.

Teoremany doly subut etmek üçin, $q(x)$ paýyň we $r(x)$ galyndynyň ýeke-täkdigini görkezmek ýeterlik. Onuň üçin tersinden güman edeliň, ýagny

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),\ degr < degg;$$

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),\ degr_1 < degg$$

bolýar diýeliň. Birinji deňlikden ikinji deňligi aýryp alarys:

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \tag{3}$$

Şert boýunça $g(x) \neq 0$. Eger $r(x) \neq r_1(x)$ bolýar diýip güman etsek, onda $q(x) \neq q_1(x)$ bolar, sebäbi $P[x]$ halkada noluň bölüjileri ýok. Ýöne bu ýagdaýda garşylyga geleris, sebäbi (3) deňligiň sag tarapyndaky köpagzalaryň her biriniň derejesi $g(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi we netijede, olaryň tapawutlarynyň derejesi (3) deňligiň çep tarapyndaky köpagzalaryň derejesinden kiçi bolar. Şeýlelikde, (3) deňlik diňe $r(x) = r_1(x)$ we $q(x) = q_1(x)$ bolanda mümkin. Bu bolsa $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza bölmekden ýetýän paýyň we galyndynyň $P[x]$ halkada ýeke-täkdigini aňladýar.►

Bu teoremanyň netijesi hökmünde aşakdaky wajyp tassyklamany almak bolar.

2-nji teorema. *P meýdanda berlen P[x] köpagzalaryň halkasy Ýewklid halkasyny emele getirýär.*

Eger R birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirip, meýdan emele getirmeýän bolsa, onda umumy ýagdaýda $P[x]$ halkada galyndyly bölmegi ýerine ýetirip bolmaýar. Meselem, $Z[x]$ halkada $f(x) = x^2 + 1$ köpagzany $g(x) = 3x - 1$ köpagza galyndyly bölüp bolmaýar, sebäbi $x^2 + 1 = (3x - 1)q(x) + r(x)$ deňlik ýerine ýeter ýaly, $Z[x]$ halkada $q(x)$ we $r(x)$ ($degr < 1$) köpagzalar ýok. Indiki beýan etmelerimizde köpagzalar halkasyna erkin alnan bütewülik ýaýlasynda seretmän, eýsem, diňe köpagzalar meýdanlarda berlen hasap ederis.

7.3. Galyndyly bölmegiň ýerine ýetirilişi. Gorneriň shemasy

Iki köpagzany biri-birine galyndyly bölmek düzgüni 1-nji teoremany subut etmek usulyna esaslanýar. Ýagny ilki bilen bölüniji bolan $f(x)$ köpagzadan $\frac{a_n}{b_m}g(x)x^{n-m}$ köpagzany aýryp alarys, bu ýerde $g(x)$ köpagza bölüji, a_n we b_m degişlilikde, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň baş koeffisiýentleridir. Soňra alnan tapawut köpagzada hem edil $f(x)$ köpagzadaky ýaly özgertmäni geçireris: eger $c_l x^l$ köpagzanyň baş agzasy we $l \geq m$ bolsa, onda ondan $\frac{c_l}{b_m} x^{l-m} g(x)$ köpagzany aýrarys we ş.m. dowam etdireris. Bu iş tapawutda derejesi m-den kiçi bolan köpagza alynýança dowam etdirilýär. Tapawutda derejesi m-den kiçi bolan köpagzany bolsa hökman alarys, sebäbi bölünijiniň derejesi her gezekde iň bolmanda bir birlik kiçelýär. Bu ýol bilen tapylan köpagza $r(x)$ köpagzadyr, $q(x)$ köpagza bolsa $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}, \ldots, \frac{c_l}{b_m} x^{l-m}, \ldots$ goşulyjylaryň jeminden durar.

1-nji mysal. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$ köpagzany $g(x) = x^2 - 2$ köpagza 1-nji teoremanyň subudyna esaslanyp, galyndyly, bölüň.

Çözülişi. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 2$ bolanda,

$g_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x)$ tapawudy tapalyň:

$$g_1(x) = (x^4 - 2x^3 + x - 1) - x^2(x^2 - 2) = -2x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

Soňra şoňa meňzeşlikde, $g_2(x) = g_1(x) - \frac{c_l}{b_m} x^{l-m} g(x) = (-2x^3 + 2x^2 + x - 1) - (-2x)(x^2 - 2) = 2x^2 - 3x - 1$ tapawudy alarys. Ondan soňra, edil ýokardakylara meňzeşlikde, $g_3(x) = (2x^2 - 3x - 1) - 2(x^2 - 2) = -3x + 3$ tapawudy alarys.

Görnüşi ýaly, $g_3(x)$ köpagzanyň derejesi $g(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçidir. Netijede, $r(x) = g_3(x) = -3x + 3$, $q(x) = x^2 + (-2x) + 2 = x^2 - 2x + 2$ we şoňa görä-de,

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 2) + (-3x + 3).$$

Bu galyndyly bölmegi adaty görnüşde aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\begin{array}{r|l}
-\;\; x^4 - 2x^3 + x - 1 & \;x^2 - 2 \\
x^4 - 2x^2 \qquad\quad & \overline{x^2 - 2x + 2 = q(x)} \\
\hline
-\;\; -2x^3 + 2x^2 + x - 1 & \\
-2x^3 + 4x \qquad\quad & \\
\hline
-\;\; 2x^2 - 3x - 1 & \\
2x^2 - 4 \qquad & \\
\hline
-3x + 3 = r(x) &
\end{array}$$

1-nji teorema laýyklykda $r(x)$ galyndy we $q(x)$ doly däl paý ýeke-täk usulda kesgitlenýär. Şoňa görä-de, olary tapmaklyga **näbelli koeffisiýentler usulyny hem** ulanmak bolar.

Bu usuly ýokardaky mysalda görkezeliň. Bize belli bolşy ýaly,

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = (x^2 - 2)q(x) + r(x) \qquad (4)$$

deňlik ýerine ýeter ýaly, $q(x)$ we $r(x)$ köpagzalar bardyr, özi hem $q(x)$ köpagzanyň derejesi $(n-m)$-e, biziň mysalymyzda 2-ä deň, $r(x)$ galyndynyň derejesi bolsa m-den geçmeýär, biziň ýagdaýymyzda 1-den geçmeýär. Şeýlelikde, $q(x)$ we $r(x)$ köpagzalary aşakdaky ýaly kanonik görnüşde ýazyp bolýar:

$$q(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0, \quad r(x) = B_1x + B_0,$$

bu ýerde A_2, A_1, A_0, B_0, B_1 häzirlikçe näbelli koeffisiýentlerdir. Bu aňlatmalaryň bahalaryny (4) deňlikde goýup alarys:

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 = (x^2 - 2)(A_2x^2 + A_1x + A_0) + B_1x + B_0.$$

Köpagzanyň kanonik formasynyň ýeke-täkdigini hasaba alyp, deňligiň iki tarapyndaky köpagzalaryň x üýtgeýäne görä degişli derejeleriniň koeffisiýentlerini deňeşdirip,

$$A_2 = 1, A_1 = -2, \quad -2A_2 + A_0 = 0, \quad -2A_1 + B_1 = 1, \quad -2A_0 + B_0 = -1$$

deňleme sistemasyny almak bolar. Bu deňleme sistemasyny çözüp alarys:

$$A_2 = 1, \quad A_1 = -2, \quad A_0 = 2, \quad B_1 = -3, \quad B_0 = 3,$$

ýagny garaşylýan $q(x) = x^2 - 2x + 2$ paýy we $r(x) = -3x + 3$ galyndyny aldyk.

Umumy ýagdaýda, näbelli koeffisiýentli $q(x)$ köpagzanyň derejesini $(n-m)$-e, $r(x)$ galyndynyň derejesini bolsa $(m-1)$-e deň edip almaly.

Galyndyly bölmegi iki setirli matrisalaryň üstünde ýönekeý özgertmeleri geçirip hem ýerine ýetirip bolar [13]. Şonuň üçin $f(x)$ we $g(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini matrisany iki setirinde aşakdaky ýaly edip ýerleşdireris:

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_{m-1} & a_m & a_{m-1} & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Alnan matrisanyň ikinji setirindäki $b_i (i = m, m-1, \ldots, 1, 0)$ koeffisiýentleri $-\dfrac{a_n}{b_m}$-e köpeldip, soňra köpeltmek hasyllaryny, degişlilikde, a_n, a_{n-1}, a_{n-2},... ,a_m koeffisiýentlere goşup,

$$\begin{pmatrix} a'_{n-1} & a'_{n-2} & \cdots & a'_{n-m-1} & \cdots & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

matrisany alarys. Alnan bu matrisanyň ikinji setirini $-\dfrac{a'_{n-i}}{b_m}$ - e köpeldip, köpeltmek hasylyny degişlilikde, $a'_{n-1}, a'_{n-2}, \ldots, a'_{n-m-1}, a'_{n-m-2}$ koeffisiýentlere goşup,

$$\begin{pmatrix} a''_{n-2} & a''_{n-3} & \cdots & a''_{n-m-1} & a''_{n-m-1} & \cdots & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

matrisany alarys we ş.m. bu özgertmeleriň yzygiderligini tä matrisanyň birinji setirindäki koeffisiýentler ikinji setirdäki b_{m-1} koeffisiýentiň gabat ýokarsyndaky koeffisiýentine çenli nola öwrülýänçä dowam etdireris.

Netijede,

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{m-1} & r_{m-2} & \cdots & r_1 & r_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

matrisa alynýar. Bu matrisanyň birinji setiri $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza bölmekden galýan $r(x) = r_{m-1}x^{m-1} + r_{m-2}x^{m-2} + \ldots + r_1x + r_0$ galyndynyň koeffisiýentlerini berýär. $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölmekden ýetýän paýyň koeffisiýentleri

$\frac{a_n}{b_m}, \frac{a'_{n-1}}{b_m}, \frac{a''_{n-2}}{b_m}, \ldots$ köpeldijiler bolar.

Bu usuly ýokardaky mysalda ulanyp görkezeliň. Şonuň üçin $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 2$ köpagzalaryň koeffisiýentlerini, degişlilikde, aşakdaky ýaly edip matrisanyň birinji, ikinji setirlerinde ýerleşdireliň we degişli özgertmeleri geçirip alarys:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\cdot(-1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\cdot(2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\cdot(-2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Netijede, garaşylýan $r(x) = -3x + 3$ galyndy we $q(x) = x^2 - 2x + 2$ paý alynýar.

Galyndyly bölmegiň näbelli koeffisiýentler usulyny $g(x) = x - \alpha$ çyzykly ikagza üçin ulanmak oňaýly bolýar.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 =$$
$$= (x - \alpha)(A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1x + A_0) + r. \qquad (5)$$

Bu ýagdaýda galyndynyň nolunjy derejeli köpagza, ýagny P meýdanyň elementi bolýandygyna üns bereliň.

(5) deňligiň iki tarapyndaky köpagzalaryň koeffisiýentlerini deňeşdirip alarys:

$$\begin{aligned} a_n &= A_{n-1}, \\ a_{n-1} &= A_{n-2} - \alpha A_{n-1}, \\ a_{n-2} &= A_{n-3} - \alpha A_{n-2}, \\ &\overline{\qquad\qquad\qquad} \\ a_1 &= A_0 - \alpha A_1, \\ a_0 &= r - \alpha A_0. \end{aligned}$$

Bu ýerden

$$A_{n-1} = a_n,$$
$$A_{n-2} = \alpha A_{n-1} + a_{n-1},$$
$$A_{n-3} = \alpha A_{n-2} + a_{n-2} \qquad (6)$$
$$\overline{}$$
$$A_0 = \alpha A_1 + a_1,$$
$$r = \alpha A_0 + a_0$$

deňlikler alynýar.

(6) deňlikler $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ köpagzany $x - \alpha$ ikagza galyndyly bölmegi **Gorneriň shemasy** arkaly ýerine ýetirmekligiň mümkindigini görkezýär. Ol usuly tablisa görnüşinde aşakdaky ýaly görkezip bolýar:

	a_n	a_{n-1}	…	a_k	…	a_1	a_0
α	$A_{n-1}= a_n$	$A_{n-2}= \alpha A_{n-1} + a_{n-1}$	…	$A_{k-1}= \alpha A_k + a_k$	…	$A_0= \alpha A_1 + a_1$	$r = \alpha A_0 + a_0$

Tablisadan görnüşi ýaly, paýyň baş koeffisiýenti $f(x)$ köpagzanyň baş koeffisiýentine deňlenýär, galan A_{n-2}, A_{n-3}, A_{n-4},...,A_1, A_0, r näbelli koeffisiýentler bolsa tablisadaky

$$A_k = \alpha A_{k+1} + a_{k+1}$$

formulanyň kömegi bilen tapylýar.

2-nji mysal. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ köpagzany $g(x) = x - 2$ ikagza Gorneriň shemasyndan peýdalanyp, galyndyly bölüň.

Çözülişi. Şerte görä, $a_4 = 1,\ a_3 = 0,\ a_2 = -3,\ a_1 = 2,\ a_0 = -1,\ \alpha = 2.$

Tablisany düzeliň:

	1	0	– 3	2	– 1
2	1	1 · 2 + 0 = 2	2 · 2 +(– 3)= 1	1 · 2 + 2 = 4	4 · 2 + (– 1) = 7

Görnüşi ýaly, galyndyly bölmekden ýetýän doly däl paý $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 4$ köpagza, galyndy bolsa $r = 7$-nolunjy derejeli köpagzadyr.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ köpagzany $g(x) = x - \alpha$ ikagza galyndyly bölmegiň matrisa usulyny Gorneriň shemasy bilen deňeşdirmek arkaly olaryň dürli görnüşde ýazylan, ýöne şol bir hasaplamalardygyny görmek bolar. Hakykatdan hem,

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}_{\cdot a_n = A_{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha A_{n-1} + a_{n-1} = A_{n-2} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}_{\cdot A_{n-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha A_{n-2} + a_{n-2} = A_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}_{\cdot A_{n-3}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha A_k + a_k = A_{k-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}_{\cdot A_{k-1}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha A_1 + a_1 = A_0 & \alpha_0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} A_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha A_0 + a_0 = r \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

özgertmeleri geçirip, netijede, özgertmelerdäki deňliklerden garaşylýan tablisany alarys:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
α	$A_{n-1} = a_n$	$A_{n-2} = \alpha A_{n-1} + a_{n-1}$	$\cdots$	$A_{k-1} = \alpha A_k + a_k$	$\cdots$	$A_0 = \alpha A_1 + a_1$	$r = \alpha A_0 + a_0$

Şeýlelikde, galyndyly bölmekligiň matrisa usulyna käbir manyda Gorneriň shemasynyň umumylaşdyrmasy hökmünde seretmek bolar. Mysal hökmünde, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ köpagzany $g(x) = x^2 - b_1 x - b_0$ köpagza galyndyly bölmeklige seredeliň. Ony

$$f(x) = g(x)(A_{n-2}\, x^{n-2} + A_{n-3}\, x^{n-3} + \ldots + A_1 x + A_0) + r_1 x + r_0$$

görnüşde göz öňüne getirip we matrisalar üstünde käbir özgertmeleri geçirip, $A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_1, A_0, r_1, r_0$ näbelli koeffisiýentleri tapalyň:

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}_{\cdot a_n = A_{n-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 A_{n-2} + a_{n-1} = A_{n-3} & b_0 A_{n-2} + a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}_{\cdot A_{n-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 A_{n-3} + b_0 A_{n-2} + a_{n-2} = A_{n-4} & b_0 A_{n-3} + a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 - b_1 & -b_0 & \end{pmatrix}_{\cdot A_{n-4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} b_1A_{n-4}+b_0A_{n-3}+a_{n-3}=A_{n-5} & b_0A_{n-4}+a_{n-4} & a_{n-5} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}_{\cdot A_{n-5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dots\Rightarrow\begin{pmatrix} b_1A_{k-1}+b_0A_k+a_k=A_{k-2} & b_0A_{k-1}+a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}_{\cdot A_{k-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dots\Rightarrow\begin{pmatrix} b_1A_1+b_0A_2+a_2=A_0 & b_0A_1+a_1 & a_0 \\ 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}_{\cdot A_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & b_1A_0+b_0A_1+a_1=r_0 & b_0A_0+a_0=r \\ 1 & -b_1 & -b_0 \end{pmatrix}.$$

Netijede, Gorneriň shemasynyň käbir umumylaşdyrmasy bolan aşakdaky tablisany alarys:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...
b_1 b_0	$A_{n-2}=a_n$	$A_{n-3}=b_1A_{n-2}+a_{n-1}$	$A_{n-4}=b_1A_{n-3}+b_0A_{n-2}+a_{n-2}$	...

a_k	...	a_1	a_0
$A_{k-2}=b_1A_{k-1}+b_0A_k+a_k$	...	$r_1=b_1A_0+b_0A_1+a_1$	$r_0=b_0A_0+a_0$

3-nji mysal. $f(x)=x^6-x^4+3x^2-2x+3$ köpagzany $g(x)=x^2-2x+3$ köpagza galyndyly bölüň.

Çözülişi.

	1	0	-1	0	3	-2	3
2 -3	1	2	0	-6	-9	-2	30

Netijede, $q(x)=x^4+2x^3-6x-9$, $r(x)=-2x+30$ bolar.

Ýokardaky tablisadan peýdalanyp, $g(x)$ bölüjiniň koeffisiýenti birlige deň bolmadyk ýagdaýynda hem, $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölmek bolar. Onuň üçin $g(x)$ köpagzanyň baş agzasynyň koeffisiýentini birlige getirip, bölmekligi ýerine ýetireris we $q(x)$ paýy $g(x)$ köpagzanyň baş koeffisiýentiniň tersine köpeldip, alarys, galyndyny bolsa, ikinji setirden gönüden-gönü alarys.

4-nji mysal. Köpagzany $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ köpagzany $g(x) = 2x^2 - x - 1$ köpagza galyndyly bölüň.

Çözülişi.

	1	-3	-2	3	-1
$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{19}{8}$
$\frac{1}{2}$					

Netijede, $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{11}{8}$, $\quad r(x) = \frac{3}{8}x - \frac{19}{8}$.

Gorneriň shemasyny galyndyly bölmekde tapylan paýy, ýene-de haýsy hem bolsa bir çyzykly ikagza bölmekde ulanmaklyk maksadalaýykdyr. Şonuň üçin paýyň koeffisiýentlerini her gezek gaýtadan ýazyp oturmagyň geregi bolmaýar, ýagny bir galyndyly bölmegiň ahyry indiki galyndyly bölmekligiň başlangyjy bolýar.

5-nji mysal. $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ köpagzany $x - 2$ köpagza galyndyly bölmekden ýeten paýy $x - 2$ köpagza galyndyly bölüň.

Çözülişi. Gorneriň shemasy boýunça hasaplamalaryň tablisasyny aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

	1	0	-3	2	-1
2	1	2	1	4	7
2	1	4	9	22	

Bu tablisanyň ikinji setiri $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ köpagzany $x - 2$ köpagza galyndyly bölmekden ýetýän paýyň $x^3 + 2x^2 + x + 4$ köpagza, galyndynyň 7-ä deňligini aňladýar. Onuň üçünji setiri bolsa $x^3 + 2x^2 + x + 4$ köpagzany $x - 2$ köpagza galyndyly bölmekden ýetýän paýyň $x^2 + 4x + 9$-*a*, galyndynyň bolsa 22-ä deňdigini görkezýär.

Ýokardaky mysalda $f(x)$ köpagza $x - \alpha$ ikagza galyndyly bölmek netijesinde alynýan galyndynyň $f(x)$ köpagzanyň $x = \alpha$ bolandaky bahasyna, ýagny $f(\alpha)$ deňdigini barlamak kyn däl. Bu tassyklama umumy ýagdaýda hem dogrudyr.

3-nji teorema. *(Bezunyň teoremasy). P meýdanyň islendik α elementi üçin $f(x) \in P[x]$ köpagzany $x - \alpha$ ikagza galyndyly bölmekden galýan galyndy $f(\alpha)$ deňdir.*

Subudy. $f(x)$ köpagzany $x - \alpha$ ikagza galyndyly bölüp alarys:

$$f(x) = (x - \alpha)\,q(x) + r, \tag{7}$$

bu ýerde $r = \text{const}$ bolýar, sebäbi onuň derejesi $x - \alpha$ köpagzanyň derejesinden kiçi bolmaly. Köpagzalaryň deňligine görä islendik $x \in P$ üçin (7) deňlik dogry deňlik bolýar. Şoňa görä-de, $x = \alpha$ diýip alsak, onda $f(\alpha) = r$ deňligi alarys.▶

Öň ýokarda belleýşimiz ýaly, Gorneriň shemasyndan peýdalanyp, köpagzany çyzykly ikagza galyndyly bölmegi birnäçe gezek geçirmeklik oňaýly bolýar. Bu hili bölmeklikden peýdalanyp, $f(x)$ köpagzany $x - \alpha$ ikagzanyň derejeleri boýunça dagatmaklygy ýeňil alyp bolýar.

Goý, $f(x)$ köpagza P meýdanda berlen n-nji derejeli köpagza, α bolsa bu meýdanyň elementi bolsun. $f(x)$ köpagzany $x - \alpha$ galyndyly bölüp,

$$f(x) = (x - \alpha)f_1(x) + c_0 \tag{8}$$

deňligi alarys, bu ýerde $f_1(x) \in P[x]$ derejesi $(n - 1)$-e deň bolan köpagzadyr, $c_0 \in P$. Eger $n > 1$ bolsa, onda edil ýokardaka meňzeşlikde

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x - \alpha)f_2(x) + c_1, \\ f_2(x) &= (x - \alpha)f_3(x) + c_2, \\ &\overline{} \\ f_{n-1}(x) &= (x - \alpha)f_n(x) + c_{n-1} \end{aligned} \tag{9}$$

deňlikleri alarys. $f_n(x)$ köpagzanyň nolunjy derejeli köpagza boljakdygy düşnükli; $f_n(x) = c_n$ diýeliň. (9) we (8) deňliklerden $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-2}(x), f_{n-1}(x)$ köpagzalary yzygider ýok etmek esasynda,

$$f(x) = c_n(x - \alpha)^n + c_{n-1}(x - \alpha)^{n-1} + \ldots + c_1(x - \alpha) + c_0 \tag{10}$$

dagatma alynýar.

Şeýlelikde, biz P meýdanda berlen n-nji derejeli $f(x)$ köpagzany P meýdanda şol öňki derejeli, ýöne indi $y = (x - \alpha)$ üýtgeýänli köpagza görnüşinde aňlatdyk. Onuň $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ koeffisiýentleri α-nyň we $f(x)$ köpagzanyň $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffisiýentleriň üsti bilen birbelgili aňladylýar. Has takygy c_0 galyndy $f(x)$ köpagzany $x - \alpha$ bölmekden, c_1 galyndy $f_1(x)$ köpagzany $x - \alpha$ bölmekden we ş.m. c_{n-1} galyndy bolsa, $f_{n-1}(x)$ köpagzany $x - \alpha$ bölmekden alýar. c_n koeffisiýent bolsa, (8), (9) yzygider galyndyly bölmekdäki iň soňky paýdyr.

6-njy mysal. Berlen $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ köpagzany $x - 1$ ikagzanyň derejeleri boýunça dagadyň.

Çözülişi. $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ köpagzany $x - 1$ köpagzanyň derejeleri boýunça dagatmak üçin, Gorneriň shemasyndan peýdalanyp, aşakdaky tablisany düzýäris:

	1	0	-3	1	-2	1
1	1	1	-2	-1	-3	$\boxed{-2}$
1	1	2	0	-1	$\boxed{-4}$	
1	1	3	3	$\boxed{2}$		
1	1	4	$\boxed{7}$			
1	1	$\boxed{5}$				
1	$\boxed{1}$					

Bu tablisanyň ikinji, üçünji, dördünji, bäşinji, altynjy we iň soňky setirinden, degişlilikde, $c_0 = -2$, $c_1 = -4$, $c_2 = 2$, $c_3 = 7$, $c_4 = 5$ we $c_5 = 1$ bahalary alarys. Onda (10) formula görä

$$f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 4(x-1) - 2$$

dagatma alynýar.

7.4. Köpagzalaryň bölünijiligi. $P[x]$ halkanyň ideallary

Biz $P[x]$ halkanyň erkin alnan $f(x)$ köpagzasynyň, bu halkanyň noldan tapawutly islendik $g(x)$ köpagzasyna galyndyly bölünýändigine göz ýetirdik. Bölmekligiň galyndysyz bolýan ýagdaýy gyzyklydyr. Bu ýagdaýda $f(x)$ köpagza $g(x)$ köpagza bölünýär diýilýär.

Şeýlelikde, eger $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza böleniňde $r(x)$ galyndy nola deň bolsa, ýagny $P[x]$ halkada

$$f(x) = g(x)q(x) \tag{11}$$

deňlik ýerine ýeter ýaly $q(x)$ köpagza bar bolsa, onda $f(x) \in P[x]$ köpagza $g(x) \in P[x]$ köpagza (galyndysyz) **bölünýär** diýilýär we $f(x) ⋮ g(x)$ ýaly ýazylýar.

Eger $f(x)$ köpagza $g(x)$ köpagza bölünýän bolsa, onda $g(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzany **bölýär** hem diýilýär we ol $g(x)/f(x)$ görnüşde ýazylýar. Şeýle-de bu ýagdaýda $g(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň **bölüjisi** hem diýilýär.

1-nji teorema görä, $q(x)$ paý birbelgili kesgitlenýär. Nol köpagzanyň islendik noldan tapawutly köpagza bölünýändigini belläliň, özi hem bu ýagdaýda paý ýene-de nol köpagza deňdir. Eger bölüniji nola deň bolmasa, onda paý hem nol däldir. Bu aýdylanlardan ugur alyp, geljekde serediljek ähli köpagzalary noldan tapawutly diýip hasap ederis.

Öň belleýşimiz ýaly, $P[x]$ halka meýdan emele getirmeýär we oňa degişli köpagzalar umumy ýagdaýda biri-birine bölünmeýär. Ýöne käbir ýagdaýda bölmekligiň ýerine ýetmegi mümkin (edil bitin sanlar halkasyndaky ýaly). Köpagzanyň köpagza bölünýän ýagdaýyna seretmekligiň zerurlygynyň ýüze çykmagy ýöne ýerden däl. Köpeltmek hasylyna dagadylan köpagzalary derňemek we onuň bilen bagly meseleleri çözmek, köpagzanyň köpeldijilere dagadylmadyk ýagdaýy bilen deňeşdireniňde, has ýeňil bolýar. Hususy ýagdaýda, ony algebraik deňlemeleriň köklerini tapmaklykda ulanmak oňaýly.

$P[x]$ halkada köpagzalaryň bölünijilik häsiýetlerini gönüden-göni erkin alnan bütewülik ýaýlasynyň bölünijilik häsiýetlerinden almak bolar. Özi hem, $P[x]$ halkada birligiň bölüjileriniň diňe noldan tapawutly hemişelikleriň bolup biljekdigini ýatdan çykarmaly däldir:

1) $\forall_{f(x),g(x),h(x)\in P[x]} [f(x) \vdots g(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \Rightarrow f(x) \vdots h(x)];$

2) $\forall_{f(x),h(x)\in P[x]} [f(x) \vdots h(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \Rightarrow (f(x)+g(x)) \vdots h(x) \wedge (f(x)-g(x)) \vdots h(x)];$

3) $\forall_{f(x),h(x)\in P[x]} [f(x) \vdots h(x)] \Rightarrow \forall_{g(x)\in P[x]} [f(x)g(x) \vdots h(x)];$

4) $\forall_{h(x),f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x)\in P[x]} [f_1(x) \vdots h(x) \wedge f_2(x) \vdots h(x) \wedge \ldots \wedge f_m(x) \vdots h(x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall_{g_1(x),g_2(x),\ldots,g_m(x)\in P[x]} [(f_1(x)\, g_1(x) + f_2(x)\, g_2(x) + \cdots + f_m(x) g_m(x)) \vdots h(x)];$

5) $\forall_{f(x)\in P[x]} \ \forall_{C\in P/\{0\}} [f(x) \vdots c];$

6) $\forall_{f(x),g(x)\in P[x]} \ \forall_{C\in P/\{0\}} [f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x) \vdots cg(x)]$.

Belli bolşy ýaly, bütewülik ýaýlasynyň iki elementiniň assosirlenen bolmagy üçin, olar biri-birine bölünmelidir, başgaça aýdylanda, olar birligiň bölüjileri bolýan köpeldijiler bilen tapawutlanmalydyr. Hususy ýagdaýda, eger $P[x]$ halkanyň $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalary noldan tapawutly hemişelik bilen tapawutlanýan, ýagny

$$f(x) = cg(x) \text{ ýa-da } g(x) = \frac{1}{c} f(x) = c'f(x)$$

bolsa, onda olara **assosirlenen** diýilýär. Bu ýagdaýda $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalara diňe hemişelik köpeldiji bilen tapawutlanýar ýa-da olara **hemişelik köpeldijä çenli takyklyk bilen gabat gelýär** diýilýär.

Köpagzalar köplüginde girizilen bu assosirlenme gatnaşygynyň refleksiwlik, simmetriklik we tranzatiwlik häsiýetlerine eýedigine, ýagny ekwiwalentlik gatnaşygyny emele getirýändigine göz ýetirmek kyn däl. Eger assosirlenen köpagzalary biri-birinden tapawutlandyrmasaň, ýagny olary assosirlenen köpagzalaryň bir klasyna degişli etseň, onda $f(x) \vdots g(x)$-bölünijilik gatnaşygyna $P[x]$ halkada berlen berk däl tertip gatnaşygy hökmünde seretseň bolar. Sebäbi, bu gatnaşyk refleksiw ($f(x) \vdots cf(x)$), tranzatiw (1-nji häsiýete seret) we antisimmetrik, hakykatdanam,

$$f(x) \vdots c_1 g(x) \wedge g(x) \vdots c_2 f(x) \Rightarrow f(x) = cg(x),$$

ýagny eger $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar ýa-da olar bilen assosirlenen köpagzalar biri-birine bölünse, onda $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar assosirlenen takyklykda biri-biri bilen gabat gelýändir.

Indi $P[x]$ halkada ideallary gurmak meselesine seredeliň. Kommutatiw halkada kesgitlenen idealyň umumy kesgitlemesine laýyklykda, eger $P[x]$ halkanyň elementlerinden durýan boş bolmadyk $\mathcal{J}$ köplük goşmak amalyna görä topar emele getirse we

$$\underset{f(x)\in\mathcal{J}}{\forall} \ \underset{g(x)\in P[x]}{\forall} [f(x)g(x) \in \mathcal{J}] \qquad (12)$$

bolsa, onda $\mathcal{J}$ köplüge $P[x]$ halkanyň idealyny emele getirýär diýilýär.

Her biri halkanyň käbir elementiniň kömegi bilen döredilýän baş ideallary ideallaryň arasynda aýratyn orun eýeleýär. $P[x]$ halkanyň $f(x)$ elementiniň kömegi bilen döredilen birlik elementli baş ideal $f(x)$ köpagza kratny bolan köpagzalaryň köplüginden durýar we (f) bilen belgilenýär. Eger birlik elementli bütewülik ýaýlasynyň ähli ideallary baş ideallar bolsa, onda oňa baş ideallar halkasy diýilýär *(4.2-nji bölümçä seret).* Şeýle halkalar bölünijilik nazaryýetiniň esasyny düzýän birnäçe häsiýetlere eýedir.

$P[x]$ halkanyň baş ideallar halkasyny emele getirýändigini görkezeliň.

4-nji teorema. *Erkin alnan P meýdanda berlen* $P[x]$ *köpagzalaryň halkasynyň ähli ideallary baş ideallardyr.*

Subudy. Köpagzalaryň $P[x]$ halkasynyň birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirýändigi üçin, onuň islendik baş idealy $(f) = U\{f(x)\,g(x)\}$ görnüşde bolar, bu ýerde $f(x)$ köpagza $P[x]$ halkanyň saýlanyp alnan, $g(x)$ bolsa, onuň erkin alnan köpagzasydyr. Başga sözler bilen aýdanyňda, $f(x)$ köpagza bilen döredilen (f) ideal $P[x]$ halkanyň $f(x)$ köpagza bölünýän ähli köpagzalaryndan durýar. Teoremany subut etmek üçin, $P[x]$ halkanyň islendik $\mathcal{J}$ idealy üçin, $\mathcal{J} = (f)$ deňlik ýerine ýeter ýaly, $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň tapylýandygyny subut etmeli.

$\mathcal{J} = \{0\}$ bolan ýagdaýynda teorema dogry, sebäbi $\mathcal{J} = (0)$ ($\mathcal{J}$ ideal nol köpagzanyň kömegi bilen döredilen baş ideal bolýar). Goý, indi $\mathcal{J} \neq \{0\}$ bolsun. $f(x)$ bilen $\mathcal{J}$ köplügiň iň kiçi derejä eýe bolan käbir köpagzasyny belgiläliň. Şeýle köpagza $\mathcal{J}$ köplükde bar, sebäbi köpagzanyň derejesi otrisatel däl bitin san, netijede, noldan tapawutly köpagzalaryň islendik toplumynda derejesi iň kiçi bolan iň bolmanda bir sany köpagza bardyr. $f(x) \in \mathcal{J}$ we $\mathcal{J}$ ideal bolany üçin, islendik $g(x) \in P[x]$ üçin, $f(x)g(x) \in \mathcal{J}$, ýagny $(f) \subseteq \mathcal{J}$ gatnaşygy alarys.

Teoremany dolulygyna subut etmek üçin, $(f) = \mathcal{I}$, ýagny islendik $s(x) \in \mathcal{I}$ köpagzany $s(x) = f(x)q(x)$ görnüşde ýazyp bolýandygyny görkezmek galýar, bu ýerde $q(x) \in P[x]$. Şonuň üçin $s(x)$ köpagzany $f(x)$ köpagza galyndyly bölüp, $s(x) = f(x) \cdot \cdot\, q(x) + r(x)$ deňligi alarys, bu ýerde

$$deg r < deg f \text{ ýa-da } r(x) = 0 \tag{13}$$

$s(x) \in \mathcal{I}$ we $f(x)q(x) \in \mathcal{I}$ bolany üçin, $r(x) = s(x) - f(x)q(x) \in \mathcal{I}$ bolmaly. Onda $r(x) = 0$ bolýandygy düşnükli, sebäbi $\mathcal{I}$ köplükdäki noldan tapawutly köpagzalaryň arasynda derejesi $f(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi köpagza bolmaly däl. Netijede, (13) gatnaşyga laýyklykda, $s(x) = f(x)q(x)$ deňligi alarys.▶

7.5. Iň uly umumy bölüji. Ýewklidiň algoritmi

5.2-nji bölümçede biz bütewülik ýaýlasynyň elementleri üçin umumy bölüji we iň uly umumy bölüji düşünjelerine umumy kesgitleme beripdik. Şol kesgitlemelerden peýdalanyp, $P[x]$ halkanyň (P – meýdan) elementleri üçin umumy bölüji we iň uly umumy bölüji düşünjelerine kesgitleme bereliň.

1-nji kesgitleme. *Eger d(x) köpagza f(x) köpagzanyň we g(x) köpagzanyň bölüjisi bolsa, onda oňa ol köpagzalaryň* **umumy bölüjisi** *diýilýär*.

2-nji kesgitleme. *f(x) we g(x) köpagzalaryň islendik umumy bölüjisine bölünýän umumy bölüjisine, ol köpagzalaryň* **iň uly umumy bölüjisi** *(IUUB) diýilýär we (f,g) arkaly belgilenýär.*

Bu kesgitlemeleri köpagzalaryň sany $m(m > 2)$ bolanda hem, umumylaşdyryp boljagy tebigydyr.

$P[x]$ halkanyň (P – meýdan) islendik elementi P meýdanyň noldan tapawutly elementine bölünýär, şoňa görä-de P meýdanyň noldan tapawutly elementleri P meýdanyň noldan tapawutly islendik iki köpagzasynyň umumy bölüjisi bolýar. Şeýle-de, iki köpagzanyň IUUB-si birbelgili kesgitlenmeýär. Eger $d(x)$ berlen köpagzanyň IUUB-si bolsa, onda $cd(x)$, $c \in P/\{0\}$ köpagza hem ol köpagzalaryň IUUB-sidir.

Ýöne, hemişelik köpeldijä çenli takyklykda, berlen köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi birbelgili kesgitlenýär. Hakykatdan hem, eger $d(x)$ we $d_1(x)$ köpagzalar berlen iki köpagzanyň iň uly umumy bölüjisi bolsa, onda $d(x)$ köpagza $d_1(x)$ köpagza galyndysyz bölünmeli, sebäbi $d(x)$ köpagza berlen köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi, şeýle-de, $d_1(x)$ köpagza $d(x)$ köpagza bölünmeli, sebäbi $d_1(x)$ köpagza hem berlen köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi. Bu bolsa $d(x)$ we $d_1(x)$ köpagzalaryň assosirlenendigini aňladýar, ýagny $d_1(x) = cd(x)$, $c \in P/\{0\}$ deňligiň dogrudygyny aňladýar.

3-nji kesgitleme. Eger $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ *köpagzalaryň her bir umumy bölüjisi noldan tapawutly hemişelik, ýagny nolunjy derejeli köpagza bolsa, onda* $f(x)$ *we* $g(x)$ *köpagzalara* **özara ýönekeý köpagzalar** *diýilýär.*

$f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň özara ýönekeý bolmagy üçin, $(f,g) = 1$ bolmagynyň zerur we ýeterlikdigi düşnükli. Bu şert köpagzalaryň her bir umumy bölüjisiniň birligiň bölüjileri bolmalydygyny aňladýar.

Köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi baradaky esasy tassyklama aşakdaky ýaly beýan edilýär.

5-nji teorema. *Islendik iki* $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ *köpagzalar üçin,* $P[x]$ *halkada* $d(x)$ *iň uly umumy bölüji bardyr, özi hem* $d(x)$ *köpagzany*

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x) \tag{14}$$

görnüşde aňladyp bolýar, bu ýerde $u(x)$ *we* $v(x)$ *köpagzalar* $P[x]$ *halkanyň käbir köpagzalarydyr.*

Bu teoremanyň subudy, $P[x]$-iň baş ideallarynyň halkasy bolýandygyny hasaba alsak, gös-göni §5.2-de subut edilen 2-nji teoremadan gelip çykýar.

Netije. $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ *köpagzalaryň özara ýönekeý bolmagy üçin.*

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1 \tag{15}$$

deňlik ýerine ýeter ýaly, $P[x]$ *halkada* $u(x)$ *we* $v(x)$ *köpagzalaryň bar bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Bu alnan netijeden özara ýönekeý köpagzalara degişli birnäçe ýönekeý, emma wajyp häsiýetler gelip çykýar . Olaryň käbirlerini beýan edeliň:

1) $\underset{f(x),g(x),h(x)\in P[x]}{\forall} [(f,g) = 1 \wedge (f,h) = 1 \Rightarrow (f,gh) = 1];$

2) $\underset{f(x),g(x),h(x)\in P[x]}{\forall} [f(x)\, g(x) \,\vdots\, h(x) \wedge (f,h) = 1 \Rightarrow g(x) \,\vdots\, h(x)]$;

3) $\underset{f(x),g(x),h(x)\in P[x]}{\forall} [f(x) \,\vdots\, g(x) \wedge f(x) \,\vdots\, h(x) \wedge (g,h) = 1 \Rightarrow f(x) \,\vdots\, g(x)h(x)].$

Bu häsiýetler Ýewklid halkasy üçin subut edilen §5- däki 3-nji, 4-nji , 5-nji umumy teoremalardan gelip çykýar.

Indi iki köpagzanyň iň uly umumy bölünijisini tapmaklygyň iki usulyna seredeliň.

$P[x]$ halka Ýewklid halkasy bolany üçin, ol halkada iki köpagzanyň iň uly umumy bölünijisini galyndyly bölmegi yzygider ýerine ýetirip, ýagny Ýewklidiň algoritminiň kömegi bilen tapmak bolar. Bu algoritm umumy ýagdaýda 5.3-nji bölümçede beýan edilipdi. Indi ony biz köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisini tapmaklyga ulanarys.

Goý, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar berlen, özi hem $deg f \geq deg g$ bolsun. Aşakdaky deňlikler bilen berilýän galyndyly bölmegiň yzygiderligini ýerine ýetireliň:

$$\begin{array}{c} f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \\ g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\ r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \\ \hline r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\, q_n(x) + r_n(x), \\ r_{n-1}(x) = r_n(x)\, q_{n+1}(x). \end{array} \tag{16}$$

Bu ýerde biz käbir tükenikli ädimden soň $r_{n+1}(x)$ galyndynyň nola deň bolýandygyny göz öňüne tutduk. Hakykatdan hem, (16) galyndyly bölmegiň yzygiderliginde käbir ädimden soň galyndy nola deň bolar, sebäbi $r_1(x)$ köpagzanyň derejesi $g(x)$ köpagzanyň derejesinden, $r_2(x)$ köpagzanyň derejesi $r_1(x)$ köpagzanyň derejesinden we umuman aýdanymyzda $r_k(x)$ köpagzanyň derejesi $r_{k-1}(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçidir. Bu haýsy hem bolsa, bir $r_k(x)$ galyndynyň nola deň boljakdygyny ýa-da onuň derejesiniň nola deň boljakdygyny aňladýar. Eger $deg r_k = 0$ bolsa, onda $r_{k+1}(x) = 0$ bolar, sebäbi islendik köpagza nolunjy derejeli köpagza galyndysyz bölünýär. Ähli ýagdaýlarda hem köpagzalar üçin, Ýewklidiň algoritminde galyndyly bölmek tükenikli ädimden soň tamamlanýar. Sebäbi, $g(x)$ köpagzanyň derejesi m-e deň bolsa, onda $r_1(x)$ galyndynyň derejesi $(m - 1)$-den uly bolup bilmez, şoňa görä-de, (16) yzygiderlikde ädimleriň sany m-den geçmeýär.

1-nji mysal. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $g(x) = x^3 - 1$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisini tapyň.

Çözülişi. Bu köpagzalara Ýewklidiň algoritmini ulanyp, aşakdaky deňlikleri alarys:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^3 - 1)\cdot 1 + (-3x^2 + 3x) & q_1(x) = 1, r_1(x) = -3x^2 + 3x; \\ x^3 - 1 = (-3x^2 + 3x)\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + (x - 1) & q_2(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, r_2(x) = x - 1; \\ -3x^2 + 3x = (x - 1)(-3x) & q_3(x) = -3x,\ r_3(x) = 0. \end{array}$$

14.3-nji bölümçede beýan edilen Ýewklidiň algoritmine görä, (16) deňliklerde noldan tapawutly iň soňky galyndy $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi bolýar. Biziň mysalymyzda $x - 1$ berlen köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisidir.

Ýokardaky deňlikleri gysgaça aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\begin{array}{l|l} -\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{\underline{x^3-1}} & \dfrac{x^3-1}{1=q_1(x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\dfrac{x^3-1}{\underline{x^3-x^2}} & \dfrac{-3x^2+3x=r_1(x)}{-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=q_2(x)} \end{array}$$

$$-\dfrac{x^2-1}{\underline{x^2-x}}$$

$$\begin{array}{l|l} -\dfrac{-3x^2+3x}{\underline{-3x^2+3x}} & \dfrac{x-1=r_2(x)}{-3x=q_3(x)} \longrightarrow (f,g)=x-1 \\ \quad 0=r_3(x) & \end{array}$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, $(f,g)=x-1$.

Iki köpagzanyň iň uly umumy bölüjisiniň hemişelik köpeldijä çenli takyklykda birbelgili kesgitlenýändigi üçin, Ýewklidiň algoritminden peýdalanyp, olaryň iň uly umumy bölünijisini tapmaklygyň yzygiderliginde diňe bitin koeffisiýentli köpagzalar bilen işlemeklige gelip bolýar. Şonuň üçin yzygiderligiň käbir ädimlerinde (gerek ýerinde) bölünijini ýa-da bölüjini, olaryň baş koeffisiýentleri deň bolar ýaly sana köpeltmeli. Biz bölünijini ýa-da bölüjini sana köpeldenimizde, tapawutlandyrmak üçin, onuň aşagyny iki çyzyk bilen çyzýarys. Bu aýdylanlary mysalda görkezeliň.

2-nji mysal. $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ we $g(x)=4x^3+3x^2+2x+1$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisini tapyň.

Çözülişi.

$$\begin{array}{l|l} \underline{\underline{x^4+x^3+x^2+x+1}} & \\ -\dfrac{4x^4+4x^3+4x^2+4x+4}{\underline{4x^4+3x^3+2x^2+x}} & \dfrac{4x^3+3x^2+2x+1}{x+1=q_1(x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad \underline{\underline{x^3+2x^2+3x+4}} \\ \qquad -\dfrac{4x^3+8x^2+12x+16}{\underline{4x^3+3x^2+2x+1}} \\ \qquad\qquad \underline{\underline{5x^2+10x+15}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -\dfrac{4x^3+3x^2+2x+1}{\underline{4x^3+8x^2+12x}} & \dfrac{x^2+2x+3=r_1(x)}{4x-5=q_2(x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad -\dfrac{-5x^2-10x+1}{\underline{-5x^2-10x-15}} \\ \qquad\qquad \underline{\underline{16}} \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^2+2x+3 \\ x^2+2x+3 \end{array} & 1 = r_2(x) \longrightarrow (f,g)=1. \\ \cline{2-2}
\hline
0 & x^2+2x+3 = q_3(x)
\end{array}
$$

Görnüşi ýaly, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi 1-e deň, ýagny olar özara ýönekeý köpagzalar.

Iki köpagzanyň iň uly umumy bölüjisini tapmaklyga galyndyly bölmegiň matrisa usulyny ulanmak bilen netijä çalt gelmek bolar. Ony ýokardaky mysalda görkezeliň:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(-4)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 & -15 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{:(-5)} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\cdot(-4)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -10 & 1 \end{pmatrix}^{\cdot 5} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}_{:16} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{-1} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{-2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{-3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Bu ýerden $(f,g) = 1$ bolýandygyny alarys. Ýokardaky yzygiderligi matrisanyň haýsy hem bolsa bir setirinde tutuşlygyna nollar alynýança dowam etmeli, şonda beýleki setirde noluň öň ýanyndaky galyndy emele gelýär.

Kähalatlarda iki sany däl-de birnäçe köpagzalaryň meselem, $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisini tapmaly bolýar. Bu ýagdaýda ilki bilen

$d_1(x) = (f_1, f_2)$-ni tapýarys; soňra $d_2(x) = (d_1, f_3)$; $d_3(x) = (d_2, f_4)$;...;

$d_{k-1}(x) = (d_{k-2}, f_k)$; $d_k(x) = (d_{k-1}, f_{k+1})$; ... ; $d_{n-1}(x) = (d_{n-2}, f_n)$ köpagzalary tapýarys.

Netijede, $d_{n-1}(x)$ köpagza berlen, $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi bolýar. Hakykatdan hem, $f_k(x)$ köpagzalaryň ählisi hem $d_{n-1}(x)$ köpagza bölünýär (bu ýerde $k = 1,2,3,...,n$), sebäbi $f_k(x) \vdots d_{k-1}(x)$; $d_{k-1}(x) \vdots d_k(x)$; $d_k(x) \vdots d_{k+1}(x)$;... ; $d_{n-2}(x) \vdots d_{n-1}(x)$. Şeýlelikde, $d_{n-1}(x)$ köpagza $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x)$ köpagzalaryň umumy bölüjisi bolýar. Eger käbir $d(x)$ köpagza bu köpagzalaryň umumy bölüjisi bolsa, onda ol $d_1(x)$, $d_2(x),\ldots,d_{n-1}(x)$ köpagzalaryň hem bölüjisi bolýar. Bu tassyklama $d_1 = (f_1, f_2)$, $d_2 = (d_1, f_3),\ldots,d_{n-1} = (d_{n-2}, f_n)$ deňliklerden we iň uly umumy bölüjiniň kesgitlemesinden gelip çykýar. Şeýlelik bilen, $d_{n-1}(x)$ köpagza $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots,f_n(x)$ köpagzalaryň islendik umumy bölüjisine bölünýän umumy bölüjisi bolýar.

Eger $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots,$ $f_n(x)$ köpagzalaryň haýsy hem bolsa ikisi özara ýönekeý bolsa, onda $f_i(x)$ $(i = 1,2,...,n)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisiniň hem bire deň boljakdygy düşnüklidir.

Ýewklidiň algoritminiň kömegi bilen berlen $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ köpagzalar üçin, (14) deňligi kanagatlandyrýan $P[x]$ halka degişli $u(x)$ we $v(x)$ köpagzalary hem tapyp bolýar.

$d(x) = r_n(x)$ bolany üçin, (16) deňliklerden (ýazgylary gysgaltmak üçin köpagzalaryň belgilerindäki x harpy taşlap ýazýarys)

$$d = r_{n-2} - r_{n-1} q_n \tag{17}$$

deňligi alarys. Şuňa meňzeşlikde,

$$r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1},$$
$$r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3} q_{n-2} \tag{18}$$

deňlikleri alarys. Umumy ýagdaýda

$$r_{n-k} = r_{n-k-2} - r_{n-k-1} q_{n-k} \tag{19}$$

deňligi alýarys, bu ýerde $k = 1,2,3,...,n-1$, özi hem r_{-1} - e f, r_0- a bolsa g köpagza hökmünde seretmeli.

(17) deňlikde r_{n-1} - iň bahasyny goýup,

$$d = (r_{n-2} - r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}) q_n = - r_{n-3} q_n + r_{n-2} (1 + q_n q_{n-1})$$

aňlatmany alarys. Şeýlelikde,

$$d = - r_{n-3} q_n + r_{n-2} (1 + q_n q_{n-1}) \tag{20}$$

deňlik alynýar. Edil şeýle edip, r_{n-2} - ni ýok etmek bolar:

$$\begin{aligned} d &= - r_{n-3} q_n + (r_{n-4} - r_{n-3} q_{n-2})(1 + q_n q_{n-1}) = r_{n-4}(1 + q_n q_{n-1}) - \\ &- r_{n-3}[q_n + q_{n-2}(1 + q_n q_{n-1})]. \end{aligned} \tag{21}$$

Soňra r_{n-3} -i, r_{n-4} - i, ... ýok edip, her bir ädimde d köpagzanyň r_{k-1}, r_k galyndylaryň we q_i paýlaryň üsti bilen aňlatmasyny alarys. r_k galyndylary ýok etmek yzygiderligi d köpagzanyň aňlatmasynda $r_{-1} = f$ we $r_0 = g$ köpagzalar peýda bolanda bes edilýär. Netijede,

$$d = fu + gv \tag{22}$$

aňlatma alynýar, bu ýerde u we v köpagzalar $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1$ köpagzalaryň üsti bilen aňladylan käbir köpagzalardyr. (22) deňligiň alnyşyndan $u(x)$ we $v(x)$ köpagzalaryň $P[x]$ halka degişli boljaklygy aýdyňdyr.

$P[x]$ halkada elementleriň iň kiçi umumy kratnysyny hem kesgitlemek bolar.

4-nji kesgitleme. *Eger $s(x) \vdots f(x) \wedge s(x) \vdots g(x)$ bolsa, onda $s(x) \in P[x]$ köpagza $f(x), g(x) \in P[x]$ köpagzalaryň* **umumy kratnysy** *diýilýär; $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň islendik umumy kratnysyny bölýän umumy kratnysyna, bu köpagzalaryň* **iň kiçi umumy kratnysy** *(IKUK) diýilýär; $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň kiçi umumy kratnysy $[f,g]$ bilen belgilenýär.*

6-njy teorema. *Noldan tapawutly $f(x)$ we $g(x) \in P[x]$ köpagzalar üçin $P[x]$ halkada iň kiçi umumy kratny bardyr we ol hemişelik köpeldijä çenli takyklykda birbelgili kesgitlenýär.*

Subudy. $q(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{(f,g)}$ köpagza seredeliň. Bu ýerde, (f,g) köpagza $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisidir, şoňa görä-de ol olaryň her birini bölýär. Onda $q(x) = \dfrac{f(x)}{(f,g)}g(x)$ we $q(x) = \dfrac{g(x)}{(f,g)}f(x)$ deňliklerden görnüşi ýaly, $q(x) \in P[x]$ köpagza $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň umumy kratnysy bolýar.

Eger $s(x)$ köpagza $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň $q(x)$ köpagzadan tapawutly islendik umumy kratnysy bolsa, onda $s(x) \vdots f(x)$ we $s(x) \vdots g(x)$ gatnaşyklar dogry bolar. Şoňa görä-de, $s(x) = s_1(x) f(x)$ deňlik ýerine ýeter, özi hem

$$\frac{s_1(x)f(x)}{g(x)} = p(x) \in P[x].$$

$f(x)$ we $g(x)$ köpagzalary $f(x) = (f,g)f_1(x)$, $g(x) = (f,g)g_1(x)$ görnüşinde aňladalyň, bu ýerde $f_1(x)$, $g_1(x) \in P[x]$, özi hem $(f_1, g_1) = 1$; hakykatdan hem, 5-nji teorema we onuň netijesine görä alarys:

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = (f,g) \Rightarrow f_1(x)u(x) + g_1(x)v(x) = 1.$$

Indi $p(x)$ köpagzany

$$p(x) = \frac{s_1(x)f_1(x)(f,g)}{g_1(x)(f,g)} = \frac{s_1(x)f_1(x)}{g_1(x)}$$

görnüşde aňladalyň. Bu ýerde $f_1(x)$ we $g_1(x)$ köpagzalar özara ýönekeý bolany üçin, $s_1(x) \vdots g_1(x)$ gatnaşyk dogrudyr. $\dfrac{s_1(x)}{g_1(x)} = t(x) \in P[x]$ bellenişigi girizip, $s_1(x) = g_1(x)\, t(x)$ deňligi alarys. Bu ýerden bolsa

$$s(x) = s_1(x)f(x) = f(x)g_1(x)t(x) = \frac{f(x)g(x)t(x)}{(f,g)} = q(x)t(x),$$

ýagny $s(x) \vdots q(x)$ gatnaşygy alarys. Şeýlelikde, $q(x)$ köpagza $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň kiçi umumy kratnysy bolýar, ýagny $q(x) = [f,g]$. Eger $q_1(x)$ köpagza bu köpagzalaryň başga bir iň kiçi umumy kratnysy bolsa, onda $q(x) \vdots q_1(x)$ we $q_1(x) \vdots q(x)$ bolar, ýagny $q_1(x)$ we $q(x)$ köpagzalar $P[x]$ halkanyň assosirlenen köpagzalary bolýar we şoňa görä-de, olar biri-birinden diňe hemişelik köpeldiji bilen tapawutlanýar.

Birnäçe köpagzalaryň *IKUK*-ny tapmaklyk işi hem, ol köpagzalaryň *IUUB*-niň tapylyşy ýaly ýerine ýetirilýär.

7.6. Getirilmeýän köpagzalar

$P[x]$ bütewülik ýaýlasynyň haýsy elementleriniň dagamaýandygyna, ýagny ýönekeýdigine seredeliň. Umumy kesgitlemä görä, eger bütewülik ýaýlasynyň elementi birligiň bölüjisi bolmasa we triwial däl bölüjilere eýe bolmasa, onda oňa bütewülik ýaýlasynda **dagamaýar** ýa-da **ýönekeý** diýilýär. Bu kesgitlemäni P meýdanda berlen köpagzalaryň halkasy üçin formirläliň. $P[x]$ halkada dagamaýan köpagzalara P meýdanda getirilmeýär diýilýär.

1-nji kesgitleme. *Eger hemişelik däl $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň hemişelikden tapawutly we $P[x]$ halkada $cf(x)$ (c = const) görnüşli köpagzalardan başga bölüjisi bolmasa, onda oňa $P[x]$ halkada (P meýdanda)* **getirilmeýär** *diýilýär.*

Başgaça aýdylanda, eger $degf \geq 1$ we $f(x) = g(x)s(x)$ (bu ýerde $g(x), s(x) \in P[x]$) deňlikden $degg = 0 \vee degf = 0$ gelip çykýan bolsa, onda $f(x) \in P[x]$ köpagza P meýdanda getirilmeýär ýa-da ýönekeý diýilýär.

$P[x]$ bütewülik ýaýlasynyň **düzme elementlerine getirilýän köpagzalar** diýip aýdýarys. Getirilýän köpagza aşakdaky ýaly kesgitleme bermek bolar.

2-nji kesgitleme. *Eger $degf > 1$ we $P[x]$ halkada $f(x) = g(x)s(x)$ deňlik ýerine ýeter ýaly, derejeleri birden kiçi bolmadyk $g(x)$ we $s(x)$ köpagzalar bar bolsa, onda $f(x) \in P[x]$ köpagza $P[x]$ halkada (P meýdanda)* **getirilýär** *diýilýär.*

$f(x) = g(x)s(x)$ deňlikden $degf = degg + degs$ deňligiň gelip çykýandygy üçin,

$$degg \geq 1 \wedge degs \geq 1 \equiv degg < degf \wedge degs < degf \qquad (23)$$

gatnaşyk dogrudyr.

1-nji we 2-nji kesgitlemelere görä $P[x]$ halkanyň derejesi noldan uly islendik köpagza bu halkada getirilýän ýa-da getirilmeýän bolup biler.

Berlen köpagzanyň getirilýänliginiň ýa-da getirilmeýänliginiň otnositel düşünjedigini we ol köpagzanyň haýsy P meýdanda berilýändigine baglydygyny bellemek gerek. Islendik $f(x) \in P[x]$ köpagzany Δ meýdanda berlen diýip, hasap etmek bolar, bu ýerde Δ meýdan P meýdanyň erkin alnan islendik giňeltmesidir. Eger $f(x) \in P[x]$ köpagza P meýdanda getirilýän bolsa, onda ol Δ meýdanda hem getirilýändir. Ýöne $f(x) \in P[x]$ köpagza P meýdanda getirilmeýän bolsa, onda ol köpagzanyň P meýdanyň käbir Δ giňeltmesinde getirilýän bolmagy hem mümkin.

1-nji mysal. $x^2 + 1$ köpagzanyň $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalara dagatmasyny tapyň. Onuň $\boldsymbol{Q}$ rasional, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanlarynda getirilmeýändigini görkeziň.

Çözülişi. $x^2 + 1$ köpagza $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda getirilýän köpagzalara

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

görnüşde dagaýar.

Eger x^2+1 köpagza $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanlarynda getirilmeýän bolsa, onda ol $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda hem getirilmeýär. Şoňa görä-de, onuň $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýändigini görkezeliň. Şonuň üçin tersinden gümän edeliň, ýagny $x^2+1=(ax+b)(cx+d)$ dagatma mümkin diýeliň, bu ýerde a,b,c,d-hakyky sanlar we $a\neq 0$, $c\neq 0$. $x=-\dfrac{b}{a}$ diýeliň, onda $\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2+1=0$, ýagny $a^2+b^2=0$ deňligi alarys. Bu deňlik $a\neq 0$ bolany üçin, dogry däldir. Alnan garşylyk $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda $x^2+1=(ax+b)(cx+d)$ dagatmanyň mümkin däldigini aňladýar.

2-nji mysal. x^2-2 köpagza san meýdanlarynyň haýsysynda getirilýär?

Çözülişi. x^2-2 köpagza rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär. Hakykatdan hem, tersinden güman etsek, onda $x^2-2=(ax+b)(cx+d)$,($a,b,c,d\in\boldsymbol{Q}$ $a\neq 0$, $c\neq 0$) deňlik ýerine ýetýär. Bu deňlikde $x=\sqrt{2}$ diýip alarys:

$$0=(a\sqrt{2}+b)\ (c\sqrt{2}+d).$$

Bu ýerden $2ac+bd+(bc+ad)\sqrt{2}=0$ deňligi we ondan $\begin{cases}2ac+bd=0,\\ ad+bc=0\end{cases}$ deňlemeler sistemasyny alarys. Bu sistemada b-ni ýok etsek, onda $a(2c^2-d^2)=0$ deňligi alarys. Bu ýerde $a\neq 0$ hasaba alsak, onda $\left(\dfrac{d}{c}\right)^2=2$ deňligi alarys, $\left(\dfrac{d}{s}\right)\in\boldsymbol{Q}.$ Rasional sanyň kwadraty 2-ä deň diýen garşylyga geldik. Bu garşylyk gümän etmämiziň nädogrudygyny «x^2-2 köpagza rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär» diýen tassyklamanyň bolsa, dogrulygyny aňladýar.

Nolunjy derejeli köpagzalar üçin getirilýän we getirilmeýän düşünjeleri ulanarlyk däldir; olar köpagzalaryň bölünijilik nazaryýetinde, bitin sanlar halkasyndaky bölünijiligiň ± 1 elementleriniň oýnaýan roluny oýnaýar.

Birinji derejeli köpagzalar barada aýdanymyzda olar üçin aşakdaky teorema dogrudyr.

7-nji teorema. *Islendik P meýdanda berlen birinji derejeli köpagza $P[x]$ halkada getirilýän däldir.*

Eger köpagzalaryň köpeltmek hasylynyň derejeleriniň köpeldijileriniň derejeleriniň jemine deňdigini hasaba alsak, bu tassyklama aýdyň bolar.

Erkin alnan birlik elementli bütewülik ýaýlasynda ýönekeý elementleriniň umumy häsiýetleriniň käbirini $P[x]$ halkanyň getirilmeýän elementleri üçin beýan edeliň.

1) *eger $p(x)$ köpagza P meýdanda getirilmeýän bolsa, onda $cp(x)$ köpagza hem P meýdanda getirilýän däldir, bu ýerde $c\in P/\{0\}$.*

2) *eger $p(x)$ köpagza P meýdanda getirilmeýän köpagza we $f(x)$ bolsa $P[x]$ hal-*

ka degişli islendik köpagza bolsa, onda $f(x)$ köpagza ýa-ha $p(x)$ köpagza bölünýändir ýa-da ol onuň bilen özara ýönekeýdir.

3) *eger getirilmeýän $p(x) \in P[x]$ köpagza getirilmeýän $q(x) \in P[x]$ köpagza bölünýän bolsa, onda bu köpagzalar hemişelik köpeldijä çenli takyklykda gabat gelýärler.*

Bu häsiýetleriň ilkinji ikisini subut etmekligiň zerurlygy ýok, sebäbi olar 5.1-nji bölümçede subut edilen ýönekeý elementlere degişli 1-2-nji häsiýetleriň $P[x]$ halkanyň elementleri üçin, ulanyşy bolýar. 3-nji häsiýeti esaslandyrmak üçin bolsa, aşakdakylary belläliň.

Şert boýunça $p(x)$ we $q(x)$ köpagzalar derejesi noldan tapawutly bolan umumy bölüjä eýe we şoňa görä-de olar özara ýönekeý däldirler. $p(x)$ köpagza getirilmeýän köpagza bolany üçin, $q(x)$ köpagza 2-nji häsiýete görä, oňa hökman bölünmeli. Netijede, $p(x)$ we $q(x)$ köpagzalar biri-birine bölüner we şoňa görä-de olar assosirlenen (ýagny biri-birinden nolunjy derejeli köpagza bilen tapawutlanýar) köpagzalar bolýar.

Ýokardaky aýdylanlardan belli bolşy ýaly, köpagzalaryň getirilýänligi ýa-da getirilmeýänligi onuň haýsy san meýdanynda seredilýändigine bagly eken. Mundan tapawutlylykda, köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi köpagzalaryň haýsy san meýdanynda seredilýändigine bagly bolmazdan kesgitlenýär. Meselem, $f(x) = x^2 + 1$ we $g(x) = x^2 - 2$ köpagzalar $\boldsymbol{Q}[x]$, $\boldsymbol{R}[x]$ we $\boldsymbol{C}[x]$ halkalarda hem özara ýönekeýdirler.

$f(x)$ köpagzanyň $g(x)$ köpagza bölünmegi ýa-da bölünmezligi hem ol köpagzalaryň seredilýän meýdanlaryna bagly däldir.

7.7. Köpagzalaryň kanonik dagatmasy

Bitin sanlaryň bölünijilik nazaryýetinde islendik bitin sanyň (0-dan, 1-den we – 1-den tapawutly) ýönekeý sanlaryň köpeltmek hasylyna ýeke-täk usulda dagamaklygy baradaky teorema esasy orun eýeleýär. Bu tassyklama **arifmetikanyň esasy teoremasy** diýip ýörite at berildi. Şuňa meňzeş tassyklama köpagzalar üçin hem ýerine ýetýär.

8-nji teorema. *P meýdanda berlen, derejesi noldan tapawutly islendik $f(x)$ köpagzany*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_i(x) \tag{24}$$

görnüşde P meýdanda getirilmeýän $p_k(x)$ köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagadyp bolýar. (24) dagatma hemişelik köpeldijä we $p_k(x)$ köpagzalaryň belgilenişine çenli takyklykda ýeke-täkdir.

Subudy. Goý, $f(x)$ köpagzanyň derejesi n natural sana deň bolsun. Eger $f(x)$ köpagzanyň özi getirilmeýän köpagza bolsa, onda (24) dagatma diňe bir sany köpeldijiden durar, onuň $f(x)$ köpagzanyň özi boljakdygy düşnükli. Eger $f(x)$ köpagza getirilýän bolsa, onda ol derejesi 0-dan uly we n-den kiçi köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagar. Ol köpeldijileriň içinde getirilýäni bar bolsa, onda ol hem derejesi bu köpagzanyň derejesinden kiçi bolan hemişelik däl köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagar. Eger bu köpeldijileriň arasynda hem getirilýäni bar bolsa, onda ol hem hemişelik däl köpeldijilere dagar we ş.m. dowam eder. Ýöne bu yzygiderlik tükeniksiz dowam edip bilmez, sebäbi dagatmadaky köpagzalaryň derejeleriniň jemi n-e deň bolmaly, şoňa görä-de x-a bagly bolan köpeldijileriň sany n-den geçip bilmez.

Eger bitin sanlaryň ýönekeý köpeldijilere dagatmasyna diňe položitel bitin sanlar köplüginde seretsek, onda ol dagatma birbelgili kesgitlenýär. Ýöne ähli bitin sanlaryň köplüginde birbelgili köpeldijileriň alamatlaryna çenli takyklykda kesgitlenýär, meselem, $-6 = 2 \cdot (-3) = (-2) \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5 = (-2)(-5)$ we ş.m. Edil şuňa meňzeş ýagdaý köpagzalar halkasyna hem mahsusdyr.

Eger

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_i(x)$$

$f(x)$ köpagzanyň getirilmeýän köpeldijilere dagatmasy we $c_1, c_2, \dots c_i \in P$ elementleriň köpeltmek hasyly 1-e deň bolsa, onda

$$f(x) = [c_1 p_1(x)][c_2 p_2(x)]\dots[c_i p_i(x)]$$

hem $f(x)$ köpagzanyň dagatmasy bolýar.

Indi (24) dagatmanyň ýeke-täkligini subut edeliň. Onuň üçin, $f(x) \in P[x]$ köpagzany

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_i(x) = q_1(x)q_2(x)\dots q_t(x) \qquad (*)$$

iki dürli görnüşde ýazalyň. (*) deňligiň diňe $c_k p_k(x) = q_l(x)$ ($k = 1,2,\dots,i$; $l = 1,2,\dots,t$) we $i = t$ bolanda dogrulygyny, $f(x)$ köpagzanyň derejesi boýunça matematiki induksiýa usulyny ulanyp, görkezeliň. $f(x)$ köpagzanyň derejesi 1-e deň bolanda (*) deňlik $p_1(x) = q_1(x)$ görnüşde bolup dogry deňlik bolýar. $f(x)$ köpagzanyň derejesi n-den kiçi bolanda (*) deňlige degişli tassyklama dogry diýip güman edeliň we bu güman etmeden peýdalanyp, tassyklamanyň $f(x)$ köpagzanyň derejesi n-e deň bolanda hem dogrulygyny görkezeliň.

$f(x)$ köpagza, (*) deňlikden görnüşi ýaly, $p_1(x)$ köpagza bölünýär, şeýle-de, $p_1(x)$ köpagza $q_1(x)\ q_2(x)\dots\ q_t(x)$ köpeltmek hasylyny hem bölýär. Eger $q_1(x)\ q_2(x)\dots$ $q_t(x)$ köpeltmek hasyly $p_1(x)$ getirilmeýän köpagza bölünýän bolsa, onda bu köpeltmek hasylyny düzýän köpeldijileriň iň bolmanda biri $p_1(x)$ köpagza bölüner, anyklyk üçin $q_1(x)$ köpeldiji $p_1(x)$ köpagza bölünýär diýeliň. Onda, 3-nji häsiýete görä

$$q_1(x) = c_1 p_1(x)$$

deňlik ýerine ýeter. Bu bahany (*) deňlikde goýup we onuň iki tarapyny hem $p_1(x)$-a gysgaldyp alarys:

$$p_2(x)p_3(x)\dots p_i(x) = [c_1 q_2(x)]q_3(x)\dots q_t(x).$$

Bu köpeltmek hasyllarynyň emele getirýän köpagzalarynyň derejesi $f(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi, onda induksiýanyň güman etmesine görä $i-1=t-1$ we

$$c_1 q_2(x) = c_2' p_2(x), q_3(x) = c_3 p_3(x), \dots, q_t(x) = c_t p_t(x),$$

ýagny $i=t$ we $q_2(x) = (c_1^{-1}c_2')p_2(x), q_3(x) = c_3 p_3(x), \dots, q_t(x) = c_t p_t(x)$ deňlikler dogry bolar. Indi $c_1^{-1}c_2' = c_2$ diýip, $q_1(x) = c_1 p_1(x)$ deňligi göz öňüne tutup, (*) deňligiň diňe $i=t$ we $q_k(x) = c_k p_k(x)(k = 1, 2, ..., t)$ bolanda dogrulygyna göz ýetirýäris.

(24)-nji dagatma $f(x)$ köpagzanyň P meýdanda (ýa-da $P[x]$ halkada) **getirilmeýän köpeldijilere dagatmasy** diýilýär.

Netije. *P meýdanda berlen derejesi noldan tapawutly islendik köpagzany*

$$f(x) = [p_1(x)]^{k_1}[p_2(x)]^{k_2}\dots[p_m(x)]^{k_m}, \tag{25}$$

görnüşde aňladyp bolýar, bu ýerde $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)$ *jübüt-jübütden özara ýönekeý bolan we P meýdanda getirilmeýän köpagzalardyr. Bu aňlatma hemişelik köpeldijä we köpeldijileriň belgilenişine çenli takyklykda ýeke-täkdir.*

(25) aňlatma $f(x)$ köpagzanyň P meýdanda ($P[x]$ halkada) **kanonik dargatmasy** diýilýär.

(25) aňlatmany gönüden-göni (24) aňlatmanyň sag tarapyndaky getirilmeýän $p_k(x)(k = 1, 2, ..., i)$ köpeldijileriniň käbiriniň gaýtalanmagynyň (assosirlenen bolmagynyň) mümkinligini göz öňüne tutup almak bolar.

Kesgitleme. *Eger* $f(x)$ *köpagzanyň* $f(x) = [p_1(x)]^{k_1}[p_2(x)]^{k_2}\dots[p_m(x)]^{k_m}$ *dagatmasyna getirilmeýän* $p_j(x)$ *köpagza* k_j *dereje görkeziji bilen girýän bolsa, onda oňa* $f(x)$ *köpagzanyň* $\boldsymbol{k_j}$ **kratnylyga eýe bolan köpeldijisi** *diýilýär. Kratnylygy birden uly köpeldijilere köpagzanyň* **kratny köpeldijileri** *diýilýär.*

Bu kesgitlemäni, ulanmasy oňaýly bolar ýaly edip, başgaça hem beýan etmek bolar: eger $f(x)$ köpagza $[p_j(x)]^{k_j}$ köpagza bölünýän, ýöne $[p_j(x)]^{k_j+1}$ köpagza bölünmeýän bolsa, onda getirilmeýän $p_j(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň k_j **kratnylyga eýe bolan köpeldijisi** diýilýär.

1-nji mysal. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ köpagzany $\boldsymbol{Q}[x]$ halkada getirilmeýän köpeldijilere dagadyň.

Çözülişi. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(x - 1)(x + 3) = (x - 1)^2 (x + 3)$ boljakdygy aýdyň. Netijede, $f(x)$ köpagzanyň dagatmasy dürli iki sany getirilmeýän köpeldijilerden durýar, olaryň birinjisi kratnylygy ikä deň bolan $p_1(x) = x - 1$ köpagza, ikinjisi bolsa kratnylygy bire deň bolan $p_2(x) = x + 3$ köpagzadyr. Bu dagatma $\boldsymbol{Q}$ meýdanyň islendik Δ giňeltmesinde hem üýtgemeýär, sebäbi $p_1(x)$ we $p_2(x)$ köpagzalar birinji derejeli köpagzalardyr, şoňa görä-de, olar islendik meýdanda getirilýän däldirler.

2-nji mysal. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ köpagzanyň $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda we onuň giňeltmelerinde getirilmeýän köpagzalara dagatmasyny tapyň we getirilmeýän köpagzalaryň kratnylygyny kesgitläň.

Çözülişi. $f(x) = (x^2 - 2)^2$ boljakdygy aýdyň. Bu aňlatma $f(x)$ köpagzanyň $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyndaky kanonik dagatmasydyr. Görnüşi ýaly, $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilmeýän $x^2 - 2$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň kanonik dagatmasyna 2 kratnylyk bilen girýär. Bu köpagzanyň $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda we onuň islendik giňeltmesinde kanonik dagatmasy

$$f(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2$$

görnüşde bolýar, bu ýerde getirilmeýän köpagzalaryň ikisiniň hem kratnylygy ikä deň.

Indi köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisini, arifmetikada edilişi ýaly, getirilmeýän köpeldijilere dagadyp tapyp bolýandygyny subut edeliň. Onuň üçin, P meýdanda berlen $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň her bir umumy bölüjisiniň hem $f(x)$ köpagzanyň, hem $g(x)$ köpagzanyň kanonik dagatmasyna girýän getirilmeýän köpagzalaryň bolýandygyndan peýdalanýarys.

9-njy teorema. *Eger $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar P meýdanda getirilmeýän köpagzalara dagadylan bolsa, onda olaryň iň uly umumy bölüjisi hem $f(x)$ köpagzanyň, hem $g(x)$ dagatmasyna girýän getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyndan durýar.*

Bu tassyklama görä, umumy bölüji $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň kanonik dagatmalaryna käbir kratnylyk bilen girýän bolsa, onda ol köpeldiji (f,g) köpagzanyň dagatmasyna $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň dagatmalaryndaky kiçi kratnylyk bilen girýär diýip düşünilýär.

Subudy. $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar $d_1(x), d_2(x), \ldots, d_r(x)$ umumy getirilmeýän köpeldijilere eýe diýip, güman edeliň. Onda $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň getirilmeýän köpeldijilere dagatmalaryny

$$f(x) = d_1(x)d_2(x)\dots d_r(x)p_{r+1}(x)\dots p_l(x),$$
$$g(x) = d_1(x)d_2(x)\dots d_r(x)q_{r+1}(x)\dots q_m(x),$$

görnüşde ýazmak bolar. $d(x) = d_1(x)d_2(x)\dots d_r(x)$ köpagzanyň $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň umumy bölüjisi boljakdygy aýdyň. Bu köpeldiji $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi hem bolýar. Hakykatdan hem, $d'(x)$ köpagza $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň erkin alnan umumy bölüjisi bolsa, onda onuň P meýdanda getirilmeýän köpeldijilere dagatmasynyň

$$d'(x) = d_{i_1}(x)d_{i_2}(x)\dots d_{i_s}(x)$$

görnüşde boljakdygy düşnükli, bu ýerde $d_{i_1}(x), d_{i_2}(x), \dots, d_{i_s}(x)$ köpagzalar $d_1(x)$, $d_2(x)$, …, $d_r(x)$ köpagzalaryň käbiridir. Netijede, $d(x)$ köpagza $d'(x)$ köpagza bölünýär we şoňa görä-de, iň uly umumy bölüji bolýar.

Eger $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň dagatmalarynda umumy getirilmeýän köpagza ýok bolsa, onda olar özara ýönekeý bolýar. Hakykatdan hem, bu köpagzalar derejesi noldan tapawutly bolan $d(x)$ iň uly umumy bölüjä eýe bolan bolsady, onda 8-nji teorema görä olar iň bolmanda bir sany umumy getirilmeýän köpeldijä eýe bolardy. Bu bolsa şerte garşy gelýär.

9-njy teoremany köpagzalaryň sanynyň köp bolan ýagdaýy üçin hem umumylaşdyrmak bolar.

3-nji mysal. $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ köpagzalary $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän köpeldijilere kanonik dagadyp, olaryň *IUUB*-ni tapyň.

Çözülişi.

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 3), g(x) = (x - 1)^3.$$

9-njy teorema görä $(f, g) = (x - 1)^2$, ýagny $(f, g) = x^2 - 2x + 1$ bolar.

§8. Köpagzalaryň kökleri

8.1. Kök düşünjesi. Kratny kökler

Goý, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ köpagza P meýdanda berlen, Δ bolsa, P meýdanyň erkin alnan käbir giňeltmesi bolsun (hususy ýagdaýda, $\Delta = P$ bolmagy hem mümkin). Biziň bilşimiz ýaly, islendik $\alpha \in \Delta$ üçin, $x = \alpha$ bolanda $f(x)$ köpagzanyň bahasyny hasaplamak bolar, ýagny

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 \in \Delta.$$

Bizi, esasan hem, $f(\alpha)$-nyň bahasynyň P meýdanyň noluna deň bolan ýagdaýy gyzyklandyrýar.

1-nji kesgitleme. *$f(x) \in P[x]$ köpagzanyň* **köki** *diýip, P meýdanyň käbir Δ giňeltmesiniň $f(\alpha) = 0$ deňligi kanagatlandyrýan α elementine aýdylýar.*

$f(x)$ köpagzanyň köki diýip, ony nol baha eýe edýän x ütgeýäniň bahalaryna hem aýdylýar.

1-nji teorema. *$\alpha \in P$ elementiň $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň köki bolmagy üçin $x - \alpha$ ikagzanyň $f(x)$ köpagzanyň bölüjisi bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. Bezunyň teoremasyna görä, *(7.3-nji bölümçä seret)* $f(x)$ köpagza $x - \alpha$ ikagza bölmekden galýan galyndy $f(\alpha)$ deňdir. Netijede, $f(x)$ köpagzanyň $x - \alpha$ bölünmegi üçin, $f(\alpha) = 0$ bolmagy, ýagny α-nyň $f(x)$ köpagzanyň köki bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremadan peýdalanyp, birinji kesgitlemä deňgüýçli bolan, aşakdaky ýaly kesgitlemäni bermek bolar.

2-nji kesgitleme. *Eger $P[x] \ni f(x)$ köpagza $x - \alpha$ ikagza bölünse, onda $\alpha \in \Delta \supset P$ elemente $f(x)$ köpagzanyň* **köki** *diýilýär.*

Bu kesgitlemäni köpagzanyň kratny kökleri üçin umumylaşdyrmak bolar.

3-nji kesgitleme. *Eger $f(x) \in P[x]$ köpagza $(x - \alpha)^k$ bölünip, $(x - \alpha)^{k+1}$ köpagza bölünmese, onda $\alpha \in \Delta \supset P$ elemente $f(x)$ köpagzanyň k kratnylyga eýe bolan köki diýilýär.*

Kratnylygy bire deň bolan köklere **ýönekeý kökler,** kratnylygy 2 we ondan uly bolan köklere **kratny kökler** diýilýär.

Eger $f(x)$ köpagza nol köpagza bolsa, onda islendik $\alpha \in P$ element onuň köki bolýar, özi hem onuň kratnylygyny kesgitlemek mümkin däl, sebäbi nol köpagza $(x - \alpha)^m$ köpagza m islendik natural san bolanda hem bölünýär. Eger $f(x) \neq 0$ bolsa, onda islendik $\alpha \in \Delta \supset P$ kök kesgitli bir ($k \leq deg f$) kratnylyga eýe bolýar, sebäbi $f(x)$ köpagza $x - \alpha$ bölünýär, ýöne $(x - \alpha)^m$ -e, $m > deg f$ bolanda bölünmeýär.

$\alpha \in \Delta \supset P$ köküň $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň k kratnylyga eýe bolan köki bolmagy üçin,

$$f(x) = (x - \alpha)^k g(x) \tag{1}$$

bolmagy zerur we ýeterlik, bu ýerde $g(x)$ kökleri α sandan tapawutly bolan P meýdanda berlen köpagzadyr, özi hem $deg g = deg f - k$.

1-nji mysal. 1) $f(x) = x^n$; 2) $f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8$ köpagzanyň rasional kökleriniň kratnylygyny kesgitläň.

Çözülişi. 1) $f(x) = x^n$ köpagza $\boldsymbol{Q}$ meýdanda kratnylygy n - e deň bolan $\alpha = 0$ köke eýedir, sebäbi $f(x)$ köpagza $(x - 0)^n$ - e bölünýär we $(x - 0)^{n+1}$-e bölünmeýär;

2) $f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8$ köpagzany $f(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3$ görnüşde aňlatmak bolar. Bu aňlatmadan görnüşi ýaly, $x = 1$ köküň kratnylygy 2-ä, $x = 2$ köküň kratnylygy bolsa, 3-e deňdir.

8.2. Köpagzanyň kökleriniň sany. Interpolýasion köpagza

Goý, $f(x)$ *köpagza* P meýdanda berlen n-nji derejeli köpagza, Δ bolsa P meýdanyň erkin alnan giňeltmesi bolsun. $\alpha_1 \in \Delta$ element $f(x)$ köpagzanyň k_1 kratnylyga, $\alpha_2 \in \Delta$ element $f(x)$ köpagzanyň k_2 kratnylyga we ş.m. $\alpha_m \in \Delta$ bolsa, $f(x)$ köpagzanyň k_m kratnylyga eýe bolan köki, özi hem $i \neq j$ bolanda, $\alpha_i \neq \alpha_j$ bolsun. Onda (1) deňlige görä

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} g_1(x) \qquad (2)$$

deňligi ýazmak bolar, bu ýerde $g_1(x)$ köpagza $x - \alpha_1$ ikagza bölünmeýär. Şert boýunça $f(x)$ köpagza $(x - \alpha_2)^{k_2}$ bölünmeli (ýöne ol $(x - \alpha_2)^{k_2+1}$ - e bölünmeýär), şeýle-de, $(x - \alpha_1)^{k_1}$ we $(x - \alpha_2)^{k_2}$ köpagzalar özara ýönekeý, onda (2) deňlikden $g_1(x)$ köpagzanyň $(x - \alpha_2)^{k_2}$ köpagza bölünýänligi (ýöne $(x - \alpha_2)^{k_2+1}$ - e bölünmeýär) gelip çykýar, ýagny

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} g_2(x)$$

deňlik dogry, bu ýerde $g_2(x)$ köpagza α_1 we α_2 köklere eýe däldir. Ýokardaka meňzeş pikirýöretmeleri dowam etdirip,

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m} g_m(x) \qquad (3)$$

deňligi alarys, bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ elementleriň hiç biri-de $g_m(x)$ köpagzanyň köki däldir.

(3) deňlikden görnüşi ýaly,

$deg f = k_1 + k_2 + \dots + k_m + deg g_m$, ýagny $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$ gatnaşyk dogry.

Şeýlelik bilen, Δ meýdanda $f(x)$ köpagzanyň kökleriniň sanynyň, hatda kökleriniň kratnylygyny hasaba alsakda, onuň derejesinden geçmeýändigine göz ýetirdik, ýagny aşakdaky tassyklamany subut etdik.

2-nji teorema. *P meýdanda berlen $f(x)$ köpagzanyň ähli kökleriniň sany onuň derejesinden geçmeýär.*

2-nji teoremanyň hiç bir köke eýe bolmadyk nolunjy derejeli köpagza üçin hem dogrulygyny belläliň.

Netije. *Eger derejesi n-den geçmeýän $f(x) \in P[x]$ köpagza $n + 1$ sany köke eýe bolsa, onda $f(x)$ nol köpagzadyr.*

Başgaça, derejesi n-den geçmeýän $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ köpagzalar P meýdanyň dürli $n + 1$ sany nokadynda birmeňzeş bahalary alsalar, onda olar deňdirler.

Şeýlelik bilen, n-nji derejeli köpagza $n + 1$ sany nokatdaky bahasy bilen doly kesgitlenýär.

3-nji teorema. *$n+1$ sany dürli $\alpha_j \in P$ nokatda, degişlilikde, $\beta_j \in P$ $(j = 1,2, ,..., n+1)$ bahalara eýe bolýan, derejesi n-den geçmeýän bir we diňe bir sany $f(x) \in P[x]$ köpagza bardyr.*

Subudy. Teoremanyň şertindäki häsiýete eýe bolan iň bolmanda bir sany köpagzanyň bardygyna göz ýetirmek ýeterlik. Oňa gözlenilýän köpagzany takyk gurmak esasynda göz ýetireris. Şonuň üçin

$$f(x) = \frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\dots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}\beta_1 +$$

$$+\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\dots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}\beta_j + \dots +$$

$$+\frac{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{j-1})(x-\alpha_{j+1})\dots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_j-\alpha_1)\dots(\alpha_j-\alpha_{j-1})(\alpha_j-\alpha_{j+1})\dots(\alpha_j-\alpha_{n+1})}\beta_j + \dots +$$

$$+\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\dots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}\beta_{n+1} \qquad (4)$$

köpagza seredeliň. (4) jemiň ähli agzalary P meýdanda berlen n-nji derejeli köpagza bolýar. Bu jemiň j-nji agzasy $x = \alpha_j$ bolanda β_j- e, $x = \alpha_i$ $(i \neq j)$ bolanda bolsa, nola öwrülýär. Netijede, $f(x)$ derejesi n-den geçmeýän we $f(\alpha_j) = \beta_j$ $(j = 1,2,\dots,n+1)$ şerti kanagatlandyrýan, ýagny biziň gözleýän köpagzamyz bolar.

(4) köpagza **Lagranžyň interpolýasion köpagzasy** diýilýär. Ol käbir $n+1$ sany bahasy berlende, interpolýasion köpagza diýip atlandyrylýan, köpagzany gurmaklyk meselesini çözýär.

Mysal. $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ bolanda, degişlilikde, 0,1,0, – 1 bahalara eýe bolýan, derejesi 3-den geçmeýän, $\boldsymbol{Q}$ meýdanda kesgitlenýän köpagzany guruň.

Çözülişi. (4) formula esasynda alarys:

$$f(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}\cdot 0 + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}\cdot 1 +$$

$$+\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}\cdot 0 + \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}\cdot(-1) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}x + 1.$$

Şu ýerde ýokardaky subut edilen 2-nji teoremanyň we onuň netijesiniň P-niň birlik elementli bütewülik ýaýlasy (meýdan bolmagy hökman däl) bolan ýagdaýynda dogry bolýandygyny belläliň. Ol noluň bölüjilerini özünde saklaýan köpagzalar halkasy üçin dogry däldir. Meselem, $\boldsymbol{Z}/(16)$ halkada berlen $f(x) = \bar{1}x^2$ köpagzanyň dürli 4 sany köküniň barlygyny barlamak kyn däl: $\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}$.

8.3. Köpagzanyň kökleriniň barlygy. Dagatma meýdany

Öňki bölümçede köpagzanyň kökleriniň sanynyň onuň derejesinden geçmeýändigini anyklaşdyrdyk. Ýöne erkin alnan, derejesi noldan tapawutly köpagzanyň iň bolmanda bir sany köki nähili ýagdaýda bolup biler diýen sorag ýüze çykýar.

Özüniň berlen meýdanynda ýekeje-de köki bolmadyk köpagzalara isledigiňçe mysallary getirmek bolar, meselem, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda berlen $f(x) = 3x^2 - 1$ köpagzanyň ýekeje-de rasional köki ýokdur; $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen $g(x) = x^2 + 1$ köpagza hakyky köke eýe däldir we ş.m. Ýöne bu köpagzalaryň her biri, seredilýän meýdanlaryň käbir giňeltmesinde, köke eýedir: $f(x) = 3x^2 - 1$ köpagza $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in \boldsymbol{R}$ köklere, $g(x) = x^2 + 1$ köpagza bolsa $\pm i \in \boldsymbol{C}$ köklere eýedir.

4-nji teorema (Kroneker). *Eger $f(x)$ derejesi noldan tapawutly bolan P meýdanda berlen islendik köpagza bolsa, onda $f(x)$ köpagzanyň käbir köküni özünde saklaýan P meýdanyň K giňeltmesi bardyr.*

Subudy. Goý, $p(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň P meýdanda getirilmeýän köpeldijileriň biri bolsun, (eger $f(x)$ köpagzanyň özi $P[x]$ halkada getirilmeýän bolsa, onda $p(x) = f(x)$ bolar). Onda $f(x) = p(x)s(x)$ bolar. Teoremanyň tassyklamasynyň $p(x)$ üçin ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlik. $p(x)$ elementiň döredýän $P[x]$ halkadaky (p) baş idealyna seredeliň we $K = P[x]/(p)$ faktor-halkany düzeliň. $P[x]$ baş ideallar halkasy, (p) bolsa $p(x)$ ýönekeý elementiň döredýän baş idealy bolany üçin, K meýdan emele getirýär (5.2-nji bölümçedäki 6-njy teorema seret). Bu meýdan (p) modul boýunça alnan kemeltmeler klaslaryndan durýar. Biziň ýagdaýymyzda kemeltmeler klasynyň wekilleri $h(x) \in P[x]$ köpagzany $p(x)$ köpagza bölmekden galýan ähli galyndylaryndan durýar, ýagny $P[x]$ halkanyň derejesi $deg p - 1$ sandan geçmeýän köpagzalaryndan durýar. Bu meýdan ähli $\bar{c}$ hemişelikleri özünde saklaýar, bu ýerde $c \in P$ we şoňa görä-de ol P meýdanyň giňeltmesi bolýar. Hakykatdan hem, şu giňeltmede $p(x)$ köpagzanyň köki bardyr, ol kök $\bar{x} \in K$ element bolýar. Hakykatdan hem, eger $g(x)$ köpagza $K[x]$ halkanyň erkin alnan köpagzasy bolsa, onda $g(\bar{x})$ köpagzany almak üçin, $g(x)$ köpagzany $p(x)$ köpagza galyndyly bölmekden galýan galyndyny almak ýeterlik. Bu düzgüni $p(x)$ köpagza üçin ulanyp, $p(\bar{x}) = 0$ deňligi alarys. Şeýlelikde, K giňeltmede $p(x)$ köpagzanyň, netijede, $f(x)$ köpagzanyň eýe bardygyna göz ýetirdik.

5-nji teorema. *Derejesi $deg f \geq 1$ şerti kanagatlandyrýan islendik $f(x) \in P[x]$ köpagza üçin, $f(x)$ köpagzany $L[x]$ halkada çyzykly köpeldijilere dagadyp bolýan, P meýdanyň L giňeltmesi bardyr.*

Başgaça aýdylanda, $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyndaky ähli getirilmeýän köpagzalaryň derejesi 1-e deň bolar ýaly, P meýdanyň L giňeltmesi bardyr.

Subudy. Goý, $degf = n$ bolsun. Kronekeriň teoremasyna görä, $f(x)$ köpagza α_1 köke eýe bolar ýaly, P meýdanyň K_1 giňeltmesi bar. Şoňa görä-de,

$$f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x),\ f_1(x) \in K_1[x] \tag{5}$$

baglanyşygy almak bolar, bu ýerde $degf_1 = n - 1$. Indi Kronekeriň teoremasyny K_1 meýdan we $f_1(x)$ (eger $degf_1 \geq 2$ bolsa) köpagza ulanyp, K_1 meýdanyň K_2 giňeltmesini alarys. Bu giňeltmede α_2 element $f(x)$ köpagzanyň köki bolar we onuň dagatmasy

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)f_2(x), \quad f_2(x) \in K_2[x],\ degf_2 = n - 2$$

görnüşde bolar.

Bu yzygiderligi P meýdanyň $K_3, K_4, \ldots, K_n$ giňeltmeleriniň, degişlilikde, bu giňeltmelere degişli bolan $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ köklerini we $f(x)$ köpagzanyň $f_3(x), f_4(x), \ldots, f_n(x)$ bölüjilerini almak netijesinde dowam etmek bolar. Bu yzygiderligiň käbir $K_i, (i < n)$ giňeltmesinde $f(x)$ köpagzanyň birden köp köküniň bolmagy mümkin; bu ýagdaýda $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyna çyzykly köpeldijiler kökleriň sanyna görä girer.

Şeýlelikde, n-den köp bolmadyk ädimde $degf_n = 0$, ýagny $f_n = c \in K_n$ deňligi alarys. Netijede, K_n meýdan P meýdanyň gözlenilýän L giňeltmesi bolar, säbäbi $K_n[x]$ halkada

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n), \tag{6}$$

dagatma dogry bolar.

1-nji kesgitleme. *Eger $f(x)$ köpagza $L[x]$ halkada çyzykly köpeldijilere dagaýan bolsa, onda L meýdana $f(x)$ köpagzanyň* **dagatma meýdany** *diýilýär.*

1-nji mysal. $f(x) = x^4 - 2 \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzanyň dagatma meýdanyny tapyň.

Çözülişi. $f(x) = x^4 - 2 \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagza rasional sanlar meýdanynda köpeldijilere dagamaýar. Onuň $K_1 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ meýdandaky dagatmasy

$$x^4 - 2 = (x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$$

görnüşde bolýar. Ony bu K_1 meýdanda başga hili dagadyp bolmaýar. Ýöne, $R[x]$ halkada ($K_2 = \boldsymbol{R}$) onuň dagatmasy

$$x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2})$$

görnüşe eýe.

Bu halkalara görä has giňräk bolan $K_3 = \boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda kesgitlenen $\boldsymbol{C}[x]$ köpagzalaryň halkasyna geçip,

$$x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2})$$

dagatmany alarys. Bu dagatmada ähli köpeldijiler çyzykly bolany üçin, $\boldsymbol{C}$ meýdan $x^4 - 2$ köpagzalaryň dagatma meýdany bolar.

$f(x)$ köpagzanyň çyzykly köpeldijilere (6) görnüşde dagatmasyndan birnäçe netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. *Derejesi n-e deň bolan $f(x) \in P[x]$ köpagza özüniň dagatma meýdanynda n sany köke eýedir.*

Derejesi n-e deň bolan $f(x)$ köpagza P meýdanyň hiç bir giňeltmesinde n - den köp köke eýe bolup bilmez, şoňa görä-de, köpagzanyň dagatma meýdany onuň ähli köklerini özünde saklaýar, diýip aýdyp bolar.

2-nji netije. *Dagatma meýdanynda $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ köpagzanyň kanonik dagatmasy*

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m}, (k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n) \tag{7}$$

görnüşe eýedir, bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sanlar $f(x)$ köpagzanyň jübüt-jübütden dürli kökleridir.

Subudy. (6) dagatma özünde meňzeş köpeldijileri saklamagy mümkin, şoňa görä-de ony

$$f(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m}, (k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n) \tag{8}$$

görnüşde ýazmak bolýar, bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ sanlar $f(x)$ köpagzanyň jübüt-jübütden dürli kökleridir. Şoňa görä-de, $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_m$ köpeldijiler hem jübüt-jübütden dürli getirilmeýän köpagzalar, ýagny (8) aňlatma $f(x)$ köpagzanyň kanonik dagatmasy bolar. Bu ýerdäki c hemişeligi kesgitlemek üçin, (8) deňligiň iki tarapyndaky x^n - iň koeffisiýentlerini deňeşdirmek ýeterlik. Netijede, $c = a_n$ deňligi alarys.

(6) aňlatmanyň iki tarapyndaky köpagzalaryň koeffisiýentlerini jübüt-jübütden deňeşdirip, $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri bilen onuň dagatma meýdanyndaky kökleriniň arasyndaky baglanyşygy kesgitleýän formulany alarys.

6-njy teorema (Wiýetiň teoremasy). *Eger $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sanlar $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ köpagzanyň kökleri bolsa, onda*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \cdots + \alpha_1 \alpha_n + \alpha_2 \alpha_3 + \cdots + \alpha_2 \alpha_n + \cdots + \alpha_{n-1} \alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k + \cdots + \alpha_{n-k+1} \alpha_{n-k+2} \ldots \alpha_n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \tag{9}$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

deňlikler dogrudyr.

(9) formulalary subut etmek üçin

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots (x - \alpha_n)$$

deňligiň sag tarapyndaky köpeltmek amalyny ýerine ýetirip, alnan köpagzanyň koeffisiýentlerini, onuň çep tarapyndaky köpagzanyň, degişli koeffisiýentleri bilen deňeşdirmek ýeterlik.

(9) deňliklere **Wiýetiň formulalary** diýilýär.

2-nji mysal. $f(x) = x^n - 1$ köpagzanyň dagatma meýdanyny kesgitläp, onuň köklerine görä Wiýetiň formulalaryny ýazyň.

Çözülişi. $f(x) = x^n - 1$ köpagzanyň dagatma meýdany $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany bolýar. Bu köpagzanyň kökleri birlikden alnan n-nji derejeli kökleriň bahasyna deňdir: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$, bu ýerde ε_k kökler $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ formula bilen kesgitlenýär. Wiýetiň formulalary bu köpagza üçin aşakdaky görnüşde bolar:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} = 0, \\ \varepsilon_0 \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} = 0, \\ \overline{\phantom{\varepsilon_0 \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} = 0}} \; . \\ \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} = (-1)^{n+1} \end{array}$$

Köpagzanyň berlen P meýdany seredilýän köpagzanyň dagatma meýdany bolmagy mümkin. Ýöne, köpagzalaryň berlen P meýdanynyň bu meýdanda kesgitlenen ähli köpagzalaryň dagatma meýdany bolan ýagdaýy has köp gyzyklanma döredýär. Ol meýdana algebraik ýapyk meýdan diýip aýdylýar.

2-nji kesgitleme. Eger P meýdan islendik $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň dagatma meýdany bolsa, onda P meýdana **algebraik ýapyk meýdan** diýilýär.

$\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany algebraik ýapyk meýdanyň mysalydyr. Bu tassyklamany §13-de subut edip görkezeris.

8.4. Köpagzanyň önümi

Matematiki analiz dersinde hakyky koeffisiýentli islendik

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{10}$$

köpagza hakyky sanlar meýdanynda kesgitlenen funksiýa hökmünde garap, ondan önüm alýarlar. Alnan önüm hem köpagza bolup, indi onuň derejesi $(n-1)$- e deň bolar:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 \tag{11}$$

$f(x)$ köpagza erkin alnan P meýdanda berlende oňa P meýdanda ýa-da onuň giňeltmesinde kesgitlenen funksiýa hökmünde seretmek bolar. Ýöne, matematiki analiz dersinde seredilişi ýaly, predel düşünjesinden peýdalanyp, her bir meýdanda berlen köpagzanyň önümini kesgitläp bolmaýar. Şoňa görä-de, erkin alnan meýdanda berlen köpagzalar üçin önüm düşünjesini formal görnüşde, ýagny $f(x)$ köpagza haýsy meýdanda berilse-de (11) köpagzany (10) köpagzanyň önümi hökmünde kesgitläris.

Kesgitleme. $P[x] \ni f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ **köpagzanyň önümi** *diýip,*

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

köpagza aýdylýar. Nolunjy derejeli köpagzalarynyň önümi hem köpagza bolup, ol nol köpagza hökmünde kabul edilýär.

Bu kesgitlemeden P meýdanda berlen köpagzanyň önüminiň hem köpagza bolýandygy gelip çykýar. Hakykatdan hem, (11) formuladan görnüşi ýaly, $f'(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini käbir natural sana köpeltmek ýa-da şonça gezek goşmak esasynda almak bolar, ýagny $f'(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri $f(x)$ köpagzanyň degişli koeffisiýentlerine kratny element bolýar, şonuň üçin hem olar P meýdana degişlidirler.

Belli bolşy ýaly, hakyky sanlar meýdanynda berlen köpagzalar üçin differensirlemegiň aşakdaky düzgünleri ýerine ýetýär:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \tag{12}$$

$$[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \tag{13}$$

Hususy ýagdaýda,

$$[cf(x)]' = cf'(x) \qquad (c\text{-hemişelik san}) \tag{14}$$

$$\{[f(x)]^k\}' = k[f(x)]^{k-1} f'(x), \quad k \in N \tag{15}$$

gatnaşyklar dogrudyr.

Ýokardaky (12),(13),(14) deňlikler erkin alnan meýdanda berlen köpagzalar üçin hem dogrudyr. Hakykatdan hem, (12) we (13) deňlikler P meýdanda gurlan $P[x]$ halkanyň käbir köpagzalarynyň arasyndaky baglanyşygy aňladýar. Bu deňlikler P meýdana bagly däldirler. Mysal hökmünde (12) deňlige seredeliň. Eger $P[x]$ köpagzalar halkasynyň

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

köpagzalary berlen we $n > m$ bolsa, onda

$$f(x) + g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + (a_m + b_m)x^m + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

deňlik ýerine ýetýär. (11) formula bilen kesgitlenen düzgün esasynda bu jemden alnan önüm

$$na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + m(a_m + b_m)x^{m-1} + \dots + (a_1 + b_1) =$$

$$= [na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + ma_m x^{m-1} + \dots + a_1] + [mb_m x^{m-1} + \dots + b_1]$$

görnüşde kesgitlenýär we munda (12) deňlik alynýar. $n = m$ we $n < m$ ýagdaýlary hem şeýle subut edilýär.

Algebrada $f(x)$ köpagzanyň ikinji, üçünji, ... , k-njy tertipli önümlerine hem seredilýär we olar, degişlilikde, $f''(x)$, $f'''(x)$,…, $f^{(k)}(x)$ belgileriň kömegi bilen ýazylýar. Eger $f(x)$ köpagzanyň derejesi n-e deň bolsa, onda $f^{(n)}(x) = n!\, a_n$; eger $k > n$ bolsa, onda $f^{(k)}(x) = 0$ boljakdygy aýdyň.

8.5. Kratny köpeldijileri bölüp almak

Öňki bölümçelerde P meýdanda berlen islendik getirilýän köpagzany, bu meýdanda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmasynyň

$$f(x) = [p_1(x)]^{k_1}[p_2(x)]^{k_2}\dots[p_l(x)]^{k_l}, \tag{16}$$

görnüşde ýeke-täk usul bilen kesgitlenýändigine göz ýetiripdik.

Eger berlen $f(x)$ köpagzanyň (16) görnüşli aňlatmasy berlen bolsa, onda onuň häsiýetlerini öwrenmek, köklerini gözlemek işi birnäçe esse ýeňilleşer. Sebäbi, bu ýagdaýda derejeleri berlen köpagzanyň derejesinden has kiçi bolan getirilmeýän köpagzalara seretmeklik ýeterlik bolýar. Ýöne, häzirlikçe köpagzalary getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmagyň umumy düzgüni ýok. Mundan başga-da, umumy ýagdaýda bu mesele, berlen köpagzanyň köklerini tapmak meselesi bilen deňgüýçli bolup durýar. Şeýle bolsa-da, käbir ýagdaýlarda köpagzalary köpeldijilere dagatmagyň umumy düzgünini kesgitläp bolýar. Ýöne, bu ýagdaýda köpagzalaryň köpeldijilere dagatmasy (16) dagatma ýaly doly bolmazlygy mümkin.

(16) dagatmadaky getirilmeýän köpagzalaryň arasyndan ilki bilen kratnylygy bire deň bolan $p_i(x)$ köpagzalary saýlap, olaryň köpeltmek hasylyny $\varphi_1(x)$ bilen belgiläliň:

$$\varphi_1(x) = p_{i_1}(x)p_{i_2}(x)\dots p_{i_s}(x).$$

Indi bolsa kratnylygy 2-ä deň bolan, ýagny (16) dagatma 2-nji dereje bilen girýän $p_j(x)$ köpagzalaryň köpeltmek hasylyny emele getireliň:

$$\varphi_2(x) = p_{j_1}(x)p_{j_2}(x)\dots p_{j_r}(x).$$

$\varphi_2(x)$ köpagzanyň (16) dagatma girýän kratnylygy 2-ä deň bolan köpagzalaryň kwadratlarynyň däl-de, özleriniň köpeltmek hasylyndan durýandygyny bellemek gerek. Sebäbi (16) dagatma $[\varphi_2(x)]^2$-a girer. Edil şuňa meňzeşlikde (16) dagatma girýän kratnylygy 3-e deň bolan getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyny $\varphi_3(x)$ bilen belgileýäris we şuňa meňzeşlikde (16) dagatmany

$$f(x) = \varphi_1(x)[\varphi_2(x)]^2[\varphi_m(x)]^3\ldots[\varphi_m(x)]^m$$

görnüşde ýa-da gysgaça

$$f = \varphi_1\varphi_2^2\varphi_3^3\ldots\varphi_m^m \tag{17}$$

görnüşde ýazýarys.

Eger (16) dagatmada kratnylygy k sana deň bolan ($k < m$) köpeldiji ýok bolsa, onda ony $\varphi_k(x) = 1$ diýip almaly.

(17) dagatmanyň diňe $f(x)$ köpagzanyň kratny köpeldijileriniň bar bolan ýagdaýynda mümkindigini hem bellemek gerek. Garşylykly ýagdaýda $f(x) = \varphi_1(x)$ bolar we hiç bir dagatma alynmaz.

1-nji mysal. $f(x) = x^{13} - 5x^{12} + 6x^{11} + 4x^{10} - 9x^9 + 5x^8 - 6x^7 - 4x^6 + 8x^5$ köpagza hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagadylan bolsun:

$$f(x) = x^5(x-2)^3(x^2+1)(x+1)^2(x-1). \tag{*}$$

Onuň kratny köpeldijilere dagatmasyny ýazyň.

Çözülişi. $f(x) = x^{13} - 5x^{12} + 6x^{11} + 4x^{10} - 9x^9 + 5x^8 - 6x^7 - 4x^6 + 8x^5$ köpagzanyň (*) dagatmasyna görä alarys:

$$\varphi_1(x) = (x^2+1)(x-1) = x^3 - x^2 + x - 1;$$
$$\varphi_2(x) = x + 1;$$
$$\varphi_3(x) = x - 2;$$
$$\varphi_4(x) = 1;$$
$$\varphi_5(x) = x.$$

Onda, $f(x) = \varphi_1(x)\,[\varphi_2(x)]^2\,[\varphi_3(x)]^3\,[\varphi_4(x)]^4\,[\varphi_5(x)]^5 = (x^3 - x^2 + x - 1)\,(x+1)^2\,(x-2)^3\,x^5$ dagatma alynýar.

Bu mysaldan görnüşi ýaly, $f(x)$ köpagza 13-nji derejeli köpagza, ýöne $\varphi_k(x)$ köpagzalaryň derejesi 3-den geçmeýär. Netijede, $f(x)$ köpagzanyň $\varphi_k(x)$ köpagzalaryň köpeltmek hasylyna bu dagatmasyndan peýdalanyp, onuň ähli köklerini tapmaklyga mümkinçilik alarys.

8. sargyt № 749

Köpagzany (17) görnüşde aňlatmaklyga bu köpagzanyň kratny köpeldijilerini bölüp almak diýilýär.

7-nji teorema. *Eger P meýdanda getirilmeýän* $q(x)$ *köpagza* $f(x)$ *köpagzanyň dagatmasyna* $2 \leq k$ *kratnylygy bilen girse, onda ol köpagza* $f'(x)$ *önümiň dagatmasyna* $k-1$ *kratnylyk bilen girýär. Eger* $q(x)$ *köpagza* $f(x)$ *köpagzanyň kratnylygy bire deň bolan köpeldijisi bolsa, onda ol* $f'(x)$ *önümiň getirilmeýän köpagzalara dagatmasyna girmeýär.*

Subudy. Eger $q(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyna $2 \leq k$ kratnylyk bilen girýän bolsa, onda $f(x) = [q(x)]^k\ \varphi(x)$ bolar, bu ýerde $\varphi(x)$ köpagza getirilmeýän $q(x)$ köpagza bölünmeýän köpagzadyr, şoňa görä-de, ol $q(x)$ bilen özara ýönekeýdir.

(12) we (13) düzgünler esasynda alarys:

$$f'(x) = k[q(x)]^{k-1} \cdot q'(x)\varphi(x) + [q(x)]^k \varphi'(x) =$$
$$= [q(x)]^{k-1}[kq'(x)\varphi(x) + q(x)^k \varphi'(x)].$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, $f'(x)$ önüm $[q(x)]^{k-1}$ - e galyndysyz bölünýär. $q(x)$ köpagzanyň $f'(x)$ köpagzanyň dagatmasyna $k-1$ kratnylyk bilen girýändigini subut etmek üçin,

$$\psi(x) = kq'(x)\ \varphi(x) + q(x)\ \varphi'(x)$$

köpagzanyň $q(x)$ köpagza bölünmeýändigini görkezmeli. Eger $\psi(x)$ köpagza $q(x)$ köpagza bölünýän bolsady, onda

$$q'(x)\ \varphi(x) = \frac{1}{k}\ [\psi(x) - q(x)\ \varphi'(x)]$$

köpagza $q(x)$-a bölünerdi. Ýöne, $\varphi(x)$ köpagza bilen $q(x)$ köpagza özara ýönekeý bolany üçin, $q'(x)$ köpagza $q(x)$ köpagza bölünmeli bolar. Bu bolsa mümkin däl, sebäbi $q'(x)$ köpagzanyň derejesi $q(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi.

Eger $q(x)$ köpagzanyň kratnylygy bire deň bolsa, onda

$$f'(x) = q'(x)\ \varphi(x) + q(x)\ \varphi'(x)$$

bolar. Ýokardaky pikirýöretmelere görä, $f'(x)$ köpagzanyň $q(x)$ köpagza bölünmeýändigi görünýär. Bu bolsa $q(x)$ köpagzanyň $f'(x)$ köpagzanyň berlen P meýdanyndaky dagatmasyna girmeýändigini aňladýar. ►

Netije. *Berlen* $f(x)$ *köpagzanyň kratny köpeldijileriniň bolmazlygy üçin onuň* $f'(x)$ *önüm bilen özara ýönekeý bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. Eger $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyna girýän ähli getirilmeýän köpagzalaryň kratnylygy bire deň bolsa, onda $f'(x)$ önümiň getirilmeýän köpagzalara dagatmasynda bu köpeldijileriň biri-de girmez, ýagny bu dagatmada $f(x)$ we $f'(x)$ köpagzalaryň umumy bölüjisi ýok. Şoňa görä-de 7-nji bölümçäniň 9-njy teoremasy boýunça $(f,f')=1$. Eger $f(x)$ köpagza iň bolmanda bir sany $q(x)$ kratny köpeldijä eýe bolsady, onda (f,f') köpagza $q(x)$ köpagza bölünerdi we şoňa görä-de ol hemişelige deň bolup bilmez.

2-nji mysal. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ köpagzany kratny köpeldijilere dagadyp bolmaýandygyny görkeziň.

Çözülişi. $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Ýewklidiň algoritmine görä alarys:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad \underline{\underline{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}} & 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
-\begin{array}{l} 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \\ \underline{4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x} \end{array} & x + 1 = q_1(x) \\
\qquad\quad \underline{\underline{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}} & \\
\qquad -\begin{array}{l} 4x^3 + 8x^2 + 12x + 16 \\ \underline{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \end{array} & \\
\qquad\qquad\quad \underline{\underline{5x^2 + 10x + 15}} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ \underline{4x^3 + 8x^2 + 12x} \end{array} & x^2 + 2x + 3 = r_1(x) \\ \cline{2-2}
& 4x - 5 = q_2(x) \\
\qquad -\begin{array}{l} -5x^2 - 10x + 1 \\ \underline{-5x^2 - 10x - 15} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\underline{16}} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r} x^2 + 2x + 3 \\ \underline{x^2 + 2x + 3} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 = r_2(x) \longrightarrow (f,g) = 1. \\ \hline x^2 + 2x + 3 = q_3(x) \end{array}
\end{array}
$$

Netijede, $(f,f') = 1$. Bu bolsa ýokardaky teoremanyň netijesine görä, $f(x)$ köpagzanyň kratny köpeldijilere eýe däldigini aňladýar.

Kratny köpeldijileri bar bolan her bir köpagzany berlen meýdanda

$$f(x) = \varphi_1(x)[\varphi_2(x)]^2[\varphi_3(x)]^3\ldots[\varphi_m(x)]^m$$

görnüşde aňladyp bolýandygy belli. Öňde goýlan mesele, $f(x)$ köpagzanyň kanonik ýazgysyndan peýdalanyp, $\varphi_2,\varphi_3,\ldots,\varphi_m$ köpagzalary tapmakdyr.

$\varphi_1(x)$ köpagzanyň $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyna kratnylygy bire deň bolan köpeldiji bolup girýänligi üçin, 7-nji teorema görä bu köpagzany düzýän köpeldijileriň hiç biri hem $f'(x)$ önümiň dagatmasyna girmez. $\varphi_2(x)$ köpagza $f(x)$ köpagzanyň dagatmasyna kratnylygy 2-ä deň bolan köpeldiji hökmünde girýänligi üçin, ol $f'(x)$

önümiň dagatmasyna kratnylygy 1-e deň bolan köpeldiji bolup girer. Edil şuňa meňzeşlikde, eger $f(x)$ köpagza $[\varphi_k(x)]^k$ köpeldijä eýe bolsa, onda $f'(x)$ önüm $[\varphi_k(x)]^{k-1}$ köpeldijä eýe bolar.

Netijede, aşakdaky ýaly ýazgy alynýar:

$$f' = \varphi_2\varphi_3^2\ldots\varphi_m^{m-1}\psi_1,$$

bu ýerde $\psi_1(x)$ köpagza, $\varphi_2, \varphi_3,\ldots,\varphi_m$ köpagzalara bölünmeýär. Onda 7-nji bölümçedäki 9-njy teorema görä, (f,f') - iň uly umumy bölüji $f(x)$ we $f'(x)$ köpagzalaryň ikisine-de girýän umumy köpeldijileriň köpeltmek hasylyndan durýar:

$$d_1 = (f,f') = \varphi_2\varphi_3^2\ldots\varphi_m^{m-1}.$$

Indi d_1' önümi tapalyň: $d_1' = \varphi_3\varphi_4^2\ldots\varphi_m^{m-2}\psi_2$, bu ýerde ψ_2 köpagza φ_i - e $(i=3,$ $,\ldots,m)$ bölünmeýär. Onda

$$d_2 = (d_1,d_1') = \varphi_3\varphi_4^2\ldots\varphi_m^{m-2}$$

deňlik alynýar. Edil şoňa meňzeşlikde:

$$d_3 = (d_2,d_2') = \varphi_4\varphi_5^2\ldots\varphi_m^{m-3},$$

$$d_{m-2} = (d_{m-3},d'_{m-3}) = \varphi_{m-1}\varphi_m^2,$$

$$d_{m-1} = (d_{m-1},d'_{m-2}) = \varphi_m,$$

$$d_m = (d_{m-1},d'_{m-1}) = 1, \tag{18}$$

hasaplamalary geçirýäris. Bu ýerde $d_1,d_2,\ldots, d_m$ köpagzalar gerek bolmajak ψ_j köpeldijileri özlerinde saklamaýarlar. Ýöne, her bir φ_i köpeldijini aýratynlykda tapmak gerek. Şonuň üçin f köpagzany d_1 -e bölýäris, netijede,

$$q_1 = \frac{f}{d_1} = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_m \tag{19}$$

deňlik alynýar. Şuňa meňzeşlikde:

$$q_2 = \frac{d_1}{d_2} = \varphi_2\,\varphi_3\,\ldots\,\varphi_m,$$

$$q_3 = \frac{d_2}{d_3} = \varphi_3\,\varphi_4\,\ldots\,\varphi_m,$$

$$q_{m-1} = \frac{d_{m-2}}{d_{m-1}} = \varphi_{m-1}\,\varphi_m,$$

$$q_m = \frac{d_{m-1}}{d_m} = \varphi_m \tag{20}$$

deňlikleri alarys. (19) we (20) deňliklerden bolsa, gözlenýän φ_k köpeldijiler alynýar:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{q_2}, \varphi_2 = \frac{q_2}{q_3}, \ldots, \varphi_{m-1} = \frac{q_{m-1}}{q_m}, \varphi_m = q_m. \qquad (21)$$

Şunlukda aşakdaky netijä gelindi.

P meýdanda berlen islendik köpagzanyň kratny köpeldijilerini tükenikli sany rasional özgertmeleri geçirmek esasynda bölüp almak bolar.

Bilşimiz ýaly köpagzanyň önümi, köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisi bu köpagzalaryň haýsy meýdanynda berilýändigine bagly bolman, olar diňe seredilýän köpagzalaryň koeffisiýentlerine bagly bolýar. Şoňa görä-de, (18), (19), (20), (21) formulalaryň netijeleri hem seredilýän köpagzalaryň diňe koeffisiýentlerine baglydyr. Şeýlelik bilen, köpagzanyň berlen meýdandaky (17) dagatmasy (16) dagatmadan tapawutlylykda, bu köpagzanyň haýsy *P* meýdanynda seredilýändigine bagly däldir.

3-nji mysal. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ köpagzanyň kratny köpeldijilerini bölüp alyň.

Çözülişi. Ilki bilen $d_i(x)$ köpagzalary tapýarys; $d_1(x)$ köpagza $f(x)$ we $f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjisidir. Ýewklidiň algoritminden peýdalanyp, $d_1(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ köpagzany alarys. Soňra $d_1'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$, $d_2(x) = (d_1, d_1')$ bolan $d_2(x) = x^2 + 2x + 1$; $d_2'(x) = 2x + 2$ bolýandygy üçin, $d_3(x) = (d_2, d_2') = x + 1$; $d_3' = 1$ we şoňa görä-de $d_4(x) = 1$ deňligi alarys.

$q_j(x)$ köpagzalary tapalyň:

$$q_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = x^2 - x - 2; \; q_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = x^2 - x - 2;$$

$$q_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = x + 1; \; q_4(x) = d_3(x) = x + 1.$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$ köpeldijiler aşakdaky görnüşde tapylýar:

$$\varphi_1(x) = \frac{q_1(x)}{q_2(x)} = 1; \; \varphi_2(x) = \frac{q_2(x)}{q_3(x)} = x - 2;$$

$$\varphi_3(x) = \frac{q_3(x)}{q_4(x)} = 1; \; \varphi_4(x) = q_4(x) = x + 1.$$

Gutarnykly ýagdaýda $f(x) = \varphi_1(x), \varphi_2^2(x), \varphi_3^3(x), \varphi_4^4(x)$, ýagny $f(x) = (x - 2)^2 (x + 1)^4$ dagatmany alarys.

Köpagzanyň kökleriniň kratnylygyny kesgitlemegiň ýene-de bir usulyna seredeliň.

$f(x)$ köpagzanyň α köküniň kratnylygy kesgitlenende (8.1-nji böümçedäki 3-nji kesgitlemä seret) ony $x-\alpha$ ikagza yzygider bölüp, $f(x)$ köpagzanyň $(x-\alpha)^k$ köpagza bölünýän, emma $(x-\alpha)^{k+1}$ köpagza bölünmeýän ýagdaýynda bu köküň kratnylygy k sana deň diýip alyndy.

4-nji mysal. $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ köpagzanyň $\alpha = 2$ köküniň kratnylygyny kesgitläň.

Çözülişi. Gorneriň shemasyndan peýdalanyp, $f(x)$ köpagzany $x-2$ ikagza galyndyly bölýäris:

	1	0	– 6	– 4	9	12	4
2	1	2	– 2	– 8	– 7	– 2	0
2	1	4	6	4	1	0	
2	1	6	18	40	81		

Görnüşi ýaly, $f(x)$ köpagza $(x-2)^2$ köpagza bölünýär, ýöne $(x-2)^3$ köpagza bölünmeýär. Netijede, $\alpha = 2$ köküň kratnylygy ikä deň bolýar.

Köp ýagdaýlarda köküň kratnylygyny kesgitlemegiň aşakdaky nyşanyny ulanmak amatly bolýar.

8-nji teorema. $f(x)$ köpagzanyň α köküniň k kratnylyga eýe bolmagy üçin

$$f(\alpha)=f'(\alpha)= \dots =f^{(k-1)}(\alpha)=0;\, f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \tag{22}$$

bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy. *Zerurlyk şerti.* Goý, α kök $f(x)$ köpagzanyň k kratnyly köki bolsun. Bu bolsa, $x-\alpha$ ikagzanyň $f(x)$ köpagzanyň k kratnylyga eýe bolan getirilmeýän köpeldijisi bolýandygyny aňladýar. Onda 7-nji teorema görä, $x-\alpha$ ikagza $f'(x)$ köpagzanyň kratnylygy $(k-1)$-e deň bolan getirilmeýän köpeldijisi bolýar, ýagny α kök $f'(x)$ köpagzanyň $(k-1)$ kratnyly köki. Edil şuňa meňzeşlikde, α köküň $f''(x)$ köpagzanyň $(k-2)$ kratnyly, $f'''(x)$ köpagzanyň $(k-3)$ kratnyly we ş.m., $f^{k-1}(x)$ köpagzanyň 1 kratnyly köküdigini görkezmek bolar. $f^{(k)}(x)$ köpagza bolsa, bu köpeldijini özünde saklamaz, şoňa görä-de Bezunyň teoremasyna laýyklykda, $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$ bolar. Şeýlelik bilen, (22) şertiň ýerine ýetýändigi alynýar.

Ýeterlik şerti. Goý (22) şert ýerine ýetýän bolsun. Onda α san $f(x)$ köpagzanyň köki bolýar. Bu köküň kratnylygyny l bilen belgiläliň we $l=k$ bolýandygyny görkezeliň. Eger α köküň kratnylygy l-e deň bolsa, onda

$$f(\alpha)=f'(\alpha)= \dots =f^{(l-1)}(\alpha)=0;\, f^{(l)}(\alpha)\neq 0 \tag{23}$$

bolar. Eger $l < k$ bolan bolsa-dy, onda (22) şerte görä $f^{(l)}(\alpha) = 0$ bolardy. Bu bolsa (23) şertdäki $f^{(l)}(\alpha) \neq 0$ şerte garşy gelýär. Edil şuňa meňzeşlikde $l > k$ bolmaýandygyny hem görkezmek bolar. Netijede, $l = k$. Teorema doly subut edildi .

5-nji mysal. Önümi ulanyp, $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ köpagzanyň $\alpha = 2$ köküniň kratnylygyny kesgitläň.

Çözülişi. Şerte görä $f(2) = 0$, $f'(x) = 6(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2)$. Gorneriň shemasyndan peýdalanyp, $f'(2)$-ni tapalyň:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}.$$

Bezunyň teoremasyna görä $f'(2) = 0$.

$f''(x) = 6\,(5x^4 - 12x^2 - 4x + 3)$ bolany üçin, $f''(2) = 162 \neq 0$.

Onda ýokardaky nyşana görä $\alpha = 2$ köküň kratnylygy 2-ä deň.

Görşümiz ýaly, berlen köpagzanyň köki belli bolsa, onda onuň kratnylygyny kesgitlemek kyn däl. Şoňa görä-de, amaly mysallarda kratny kökleri bar bolan köpagzalary derňemek işini, berlen köpagzany özüne görä derejesi kiçi bolan köpagzalara getirip derňemeklik oňaýly bolýar. Ony hemişe berlen köpagzanyň kratny köpeldijilerini bölüp almak netijesinde ýerine ýetirmek bolar.

6-njy mysal. Ýene-de $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ köpagza serediliň. $(f,f') = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ bolýandygy belli (3-nji mysala seret). Bu $f(x)$ köpagzanyň kratny köpeldijileriniň bardygyny aňladýar. Olardan dynmak üçin, $f(x)$ köpagzasyny (f,f') köpagza bölüp, $g(x) = x^2 - x - 2$ köpagzany alarys. Bu köpagzanyň kökleri $f(x)$ köpagzanyň kökleri bolýar. Bu ýerde $g(x)$ köpagza kwadrat üçagza bolany üçin, onuň köklerini aňsatlyk bilen tapmak bolar: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$. Indi bolsa bu kökleriň kratnylygyny kesgitläris. Ýokarda $\alpha_1 = 2$ köküň kratnylygynyň ikä deňligi görkezilipdi. Ýönekeý hasaplamalar $\alpha_2 = -1$ köküň $f(x)$ köpagzanyň kratnylygy dörde deň bolan köki bolýandygyny görkezýär.

§9. Rasional droblaryň meýdany

9.1. Rasional droblar

Islendik bütewülik ýaýlasyny käbir meýdana «ýerleşdirip» bolýandygy görkezilipdi. Has takygy, R bütewülik ýaýlasynyň elementlerini özünde saklar ýaly edip Q meýdany gurmak bolýar, ol meýdanyň elementlerine R bütewülik ýaýlasyndan alnan iki elementiň paýy hökmünde seredilýär. Bu ýagdaýda Q meýdana R bütewülik ýaýlasynda gurlan **paýlar meýdany** diýilýär.

$P[x]$ köpagzalar halkasy bütewülik ýaýlasyny emele getirýändigi üçin oňa degişli paýlar meýdanyny gurmak bolar.

1-nji teorema. Islendik P meýdan üçin her bir elementini

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ (bu ýerde } f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0) \tag{1}$$

görnüşli paý hökmünde aňladyp bolýan we P meýdanda gurlan $P[x]$ halkany özünde saklaýan ýeke-täk (izomorfizme çenli takyklykda) $P(x)$ meýdan bardyr. $P(x)$ meýdana P meýdanda gurlan **rasional droblaryň meýdany** diýilýär, onuň her bir elementine bolsa, P meýdanda gurlan **rasional drob** diýilýär.

$P(x)$ meýdanyň elementi hökmünde kesgitlenen (1) görnüşli paýa aýratyn alnan $f(x)$ we $g(x)$ elementleriň jübütiniň paýy hökmünde seretmän, tutuş bir paýlaryň klasy hökmünde seretmeklik göz öňünde tutulandyr. Bu ýagdaýda, iki paýyň deňligi

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \equiv f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x) \tag{2}$$

deňgüýçliligiň kömegi bilen kesgitlenýär. Şoňa görä-de (1) görnüşli rasional droby (2) gatnaşygy göz öňünde tutup, birnäçe usul bilen aňlatmak bolar. Biz $\frac{f(x)}{g(x)}$ rasional droby alanymyzda, ony saklaýan klasyň wekilleriniň arasyndan $(f,g) = 1$ şerti kanagatlandyrýanyny saýlap alarys. Beýle görnüşli paý **gysgalmaýandyr.**

Eger rasional drob $\frac{f(x)}{g(x)}$ paýyň kömegi bilen aňladylan bolsa, onda $f(x)$ köpagza bu paýyň **sanawjysy**, $g(x)$ köpagza bolsa, onuň **maýdalawjysy** diýilýär. $P(x)$ meýdanyň bölek halkasy bolan $P[x]$ halkanyň $f(x)$ elementini maýdalawjysy 1-e deň bolan rasional drob hökmünde alarys:

$$f(x) = \frac{f(x)}{1}.$$

$P(x)$ meýdanyň elementleriniň üstünde amallar aşakdaky düzgünler esasynda ýerine ýetirilýär:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}, \ g_1(x) \neq 0, \ g_2(x) \neq 0; \tag{3}$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} - \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}, \ g_1(x) \neq 0, \ g_2(x) \neq 0; \tag{4}$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g(x)}, \ g_1(x) \neq 0, \ g_2(x) \neq 0; \tag{5}$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}:\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)g_2(x)}{g_1(x)f_2(x)},\ g_1(x)\neq 0,\ g_2(x)\neq 0, f_2(x)\neq 0. \tag{6}$$

Rasional droblaryň üstünde geçirilýän amallaryň häsiýetlerine seretmegiň zerurlygy ýok, sebäbi ol häsiýetler islendik meýdanda kesgitlenen amallaryň häsiýetlerine meňzeş. Ýöne şu ýerde rasional droblary

$$\underset{\substack{f(x),g(x),s(x)\in P[x],\\ g(x)\neq 0, s(x)\neq 0}}{\forall} \frac{f(x)s(x)}{g(x)s(x)}=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{7}$$

deňligi ulanyp, gysgaldyp bolýandygyny belläp geçmek gerek.

9.2. Rasional droblaryň funksiýa hökmünde kesgitlenilişi

6.4-nji bölümçede P meýdanda gurlan köpagza P meýdanda kesgitlenen funksiýa hökmünde seredilipdi. Käbir şertleşikleri girizip, rasional droblara hem P meýdanda berlen funksiýa hökmünde seretmek bolar.

Goý, $f(x)$, $g(x)$ köpagzalar P meýdanda gurlan $P[x]$ halkanyň elementleri bolsun. Erkin alnan $\alpha \in P$ elemente bu köpagzalaryň $f(\alpha), g(\alpha)\in P$ bahalary degişli edeliň. Eger $g(\alpha)\neq 0$ bolsa, onda $f(\alpha)$ we $g(\alpha)$ bilen kesgitlenen $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ paý P meýdanyň kesgitli bir elementi bolar, $g(x)$ köpagzanyň P meýdana degişli kökleriniň toplumyny K_g bilen belgiläliň ($K_g=\emptyset$ bolmagy hem mümkin). Onda

$$\underset{\alpha\in P/K_g}{\forall}\left[\varphi(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\right]$$

şert bilen kesgitlenýän $\varphi : P/K_g \to P$ funksiýany gurmak bolar.

Bu funksiýa matematiki analiz dersindäki drob-rasional funksiýanyň kesgitlenişi ýaly kesgitlenýär.

9.3. Rasional droblaryň ýönekeý droblara dagadylyşy

Bu bölümçede matematiki analiz dersinde wajyp hasaplanýan (hususy ýagdaýda integral hasaplamalary geçirmekde ulanylýan), ýöne algebranyň düşünjeleri esasynda kesgitlenilýän soraga serederis. Bu soragyň jogaby köpagzalaryň getirilmeýän köpeldijilere dagadylyşy bilen gönüden-göni baglanyşyklydyr.

1-nji kesgitleme. *Eger $f(x)$ köpagzanyň derejesi $g(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi bolsa, onda $\frac{f(x)}{g(x)}$ rasional droba* **dogry rasional drob** *diýilýär. Garşylykly ýagdaýda oňa* **nädogry rasional drob** *diýilýär.*

Meselem, $\dfrac{x-1}{x^2+1}$, $\dfrac{1}{x+5}$ dogry, $\dfrac{x-1}{x+1}$, $\dfrac{x^3}{x^2-2x+2}$ droblar bolsa, nädogry rasional droblardyr.

Dogry rasional drobuň kesgitlemesi arifmetikada seredilýän dogry drobuň kesgitlemesine çalymdaşdyr. Köpagzanyň derejesi sanyň absolýut ululygynyň wezipesini ýerine ýetirýär. Arifmetikada dogry droblaryň jeminiň nädogry drob bolýan ýagdaýlaryna hem duş gelinýär. $\left(\text{meselem, } \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}\right)$ ýöne rasional droblarda bu ýagdaýyň bolmaýandygyny aşakdaky lemma tassyklaýar.

1-nji lemma. *Dogry rasional droblaryň jemi ýene-de dogry rasional drobdyr.*

Subudy. Lemmany iki sany goşulyjy üçin subut etmek ýeterlik bolar.

Goý,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

bolsun, özi hem $deg f_1 < deg g_1$ we $deg f_2 < deg g_2$ bolsun. Onda

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)g_2(x)+f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

deňligi alarys. Bu ýagdaýda, $f(x)$ köpagzanyň derejesiniň $g(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçidigini subut etmek gerek. Şonuň üçin,

$$deg\ (f_1g_2+f_2g_1)<deg\ (g_1g_2)$$

bolýandygyna göz ýetirmek ýeterlik. Bu deňsizlik hakykatdan hem ýerine ýetýär, sebäbi:

$$[deg f_1 < deg g_1 \Rightarrow deg(f_1\, g_2) < deg(g_1\, g_2)] \wedge$$
$$[deg f_2 < deg g_2 \Rightarrow deg(f_2\, g_1) < deg(g_2\, g_1)].$$ ▶

2-nji kesgitleme. *Eger* $g(x)$ *köpagza P meýdanda getirilmeýän köpagza bolsa, onda* $\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k}$ *görnüşli droba* **ýönekeý drob** *diýilýär, bu ýerde* $f(x)$ *köpagza* $P[x]$ *halka degişli we onuň derejesi* $g(x)$ *köpagzanyň derejesinden kiçi, k bolsa natural san.*

Bu kesgitlemeden gönüden-göni ýönekeý droblaryň dogry drob bolýandygy gelip çykýar.

1-nji mysal. $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ rasional drob esasy san meýdanlarynyň haýsynda ýönekeý, haýsysynda bolsa ýönekeý däl rasional drob bolýar?

Çözülişi. $\frac{x-1}{x^2+1}$ rasional drob $\boldsymbol{Q}$ rasional, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanlarynda ýönekeý rasional drob bolýar, sebäbi ol dogry drob, şeýle-de, x^2+1 köpagza $\boldsymbol{Q}$-da we $\boldsymbol{R}$-de getirilmeýär. Bu rasional drob $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda ýönekeý drob bolmaýar, sebäbi x^2+1 köpagza $\boldsymbol{C}$-de getirilýär:

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

2-nji mysal. Ähli san meýdanlarynda ýönekeý rasional drob bolýan rasional droba mysal getiriň.

Çözülişi. $\frac{1}{x+5}$ rasional drob islendik san meýdanynda ýönekeý drob bolýar, sebäbi $x+5$ köpagza islendik san meýdanynda getirilmeýär we $\frac{1}{x+5}$ dogry rasional drob.

3-nji mysal. $\frac{x^2+1}{x-1^3}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ rasional droblaryň ýönekeý droblar bolmaýandygyny düşündiriň.

Çözülişi. $\frac{x^2+1}{x-1^3}$ drob ýönekeý drob däl, sebäbi $x-1$ köpagzanyň derejesi x^2+1 köpagzanyň derejesinden kiçi; $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ rasional drobda sanawjydaky we maýdalawjydaky köpagzalarynyň derejeleri deň, ýagny ol nädogry drob.

Indi bolsa, berlen meýdanda islendik dogry rasional droby ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňlatmak meselesine seredeliň.

Ilki bilen nädogry droblary ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny belläliň, sebäbi 1-nji lemma görä dogry droblaryň jemi nädogry drob bolmaýar. Dogry droblar barada aýdanymyzda bolsa, olary hemişe ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňlatmak mümkin.

2-nji lemma. *Eger $g_1(x)$ we $g_2(x)$ köpagzalar P meýdanda berlen özara ýönekeý köpagzalar we $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ bu meýdanda berlen dogry rasional drob bolsa, onda*

$P(x)$ meýdanda

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \blacktriangleright$$

deňlik ýerine ýeter ýaly we $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ droblar dogry drob bolar ýaly $f_1(x)$ we $f_2(x)$ köpagzalar bardyr.

Subudy. 7.5-nji bölümçedäki 5-nji teorema görä, özara ýönekeý $g_1(x)$ we $g_2(x)$ köpagzalar üçin $P[x]$ halkada

$$g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1$$

deňlik ýerine ýeter ýaly, $u(x)$ we $v(x)$ köpagzalary tapmak mümkin. Şoňa görä-de,

$$f(x)g_1(x)u(x) + f(x)g_2(x)v(x) = f(x) \tag{8}$$

deňlik dogry bolar.

$f(x)\ u(x)$ köpagzany $g_2(x)$ köpagza galyndyly böleliň:

$f(x)u(x) = g_2(x)u_1(x) + f_2(x)$, özi hem $\deg f_2 < \deg g_2$. Bu aňlatmanyň bahasyny (8) deňlikde goýup alarys:

$$f_2(x)g_1(x) + g_2(x)[u_1(x)g_1(x) + f(x)v(x)] = f(x)$$

we $f_1(x) = u_1(x)\ g_1(x) + f(x)\ v(x)$ belgilenişigi girizip, $f_2(x)\ g_1(x) + f_1(x)\ g_2(x) = f(x)$ deňligi alarys. Alnan deňligi $g_1(x)\ g_2(x)$ köpeltmek hasylyna bölüp, gutarnykly ýagdaýda,

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}) = \frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

deňligi alarys. $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ drob dogry drob, sebäbi $\deg f_2 < \deg g_2$. Şeýle-de, $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ drob hem dogry drob, sebäbi ony iki dogry drobuň jemine dagadyp bolýar:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{-f_2(x)}{g_2(x)}.$$ ►

Netije. Eger $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *köpagzalar P meýdanda berlen jübüt-jübütden özara ýönekeý köpagzalar we* $\dfrac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)...g_m(x)}$ *bu meýdanda berlen dogry rasional drob bolsa, onda P(x) meýdanda*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)...g_m(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_m(x)}{g_m(x)} \tag{9}$$

deňlik ýerine ýeter ýaly $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ *köpagzalar bardyr, özi hem (9) deňligiň sag tarapyndaky ähli droblar dogry rasional droblardyr.*

Subudy. Tassyklamanyň subudyny m boýunça matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, geçireliň. Şeýle-de, (9) dagatma $(m - 1)$ sany, özara jübüt-jübütden ýönekeý bolan $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{m-1}(x) g_m(x)$ köpagzalar üçin dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, (9) dagatmanyň m sany özara jübüt-jübütden ýönekeý bolan köpagzalary üçin dogrudygyny subut edeliň. Eger

$g_m(x)$ köpagza $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{m-1}(x)$ köpagzalaryň her biri bilen özara ýönekeý bolsa, onda ol olaryň köpeltmek hasyly bilen hem, özara ýönekeýdir *(7.5-nji bölümçä seret)*, şoňa görä-de 2-nji lemma laýyklykda

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_{m-1}(x)g_m(x)} = \frac{s(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_{m-1}(x)} + \frac{f_m(x)}{g_m(x)}$$

deňligi alarys. Induksiýanyň güman etmesine görä, soňky deňligiň sag tarapyndaky birinji goşulyjysy (9) görnüşdäki dagadylyşa eýedir. Şonuň üçin hem, gutarnykly ýagdaýda,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_{m-1}(x)g_m(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots + \frac{f_{m-1}(x)}{g_{m-1}(x)} + \frac{f_m(x)}{g_m(x)}$$

deňligi alýarys. ►

3-nji lemma. *P meýdanda berlen islendik* $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$ *görnüşli dogry droby, bu meýdanda birinji goşulyjysy ýönekeý drob bolan iki sany dogry rasional drobuň*

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{f_1(x)}{[g(x)]^k} + \frac{s_1(x)}{[g(x)]^{k-1}} \qquad (10)$$

jemi görnüşinde aňladyp bolýar, bu ýerde $g(x)$ *köpagza P meýdanda getirilmeýän köpagza, k bolsa erkin alnan natural san.*

Subudy. $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölüp,

$$f(x) = g(x)s_1(x) + f_1(x), \;\; deg f_1 < deg g$$

gatnaşygy alarys. Soňra

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{g(x)s_1(x) + f_1(x)}{[g(x)]^k} = \frac{f_1(x)}{[g(x)]^k} + \frac{s_1(x)}{[g(x)]^{k-1}}$$

deňligi alýarys. Birinji goşulyjyny emele getirýän rasional drob ýönekeý drob bolýar, sebäbi $g(x)$ köpagza P meýdanda getirilmeýär we onuň derejesi $f_1(x)$ köpagzanyň derejesinden uly. Indiki goşulyjy hem 1-nji lemma görä dogry rasional drobdyr:

$$\frac{s_1(x)}{[g(x)]^{k-1}} = \frac{f(x)}{[g(x)]^k} + \frac{-f_1(x)}{[g(x)]^k}.$$

Netije. *P meýdanda berlen islendik* $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$ *dogry droby, bu meýdanda berlen ýönekeý droblaryň*

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f_3(x)}{[g(x)]^3} + \cdots + \frac{f_k(x)}{[g(x)]^k} \qquad (11)$$

deňlik bilen kesgitlenen jemi görnüşinde aňlatmak bolýar, bu ýerde g(x) köpagza P meýdanda getirilmeýän köpagza, k bolsa erkin alnan natural san.

Bu tassyklamanyň subudyny geçirmek üçin induksiýa usulyny *k* üçin ulanmak ýeterlik.

1-nji teorema. *P meýdanda berlen islendik dogry droby bu meýdanda berlen ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňlatmak bolýar.*

Subudy. Goý, $\frac{f(x)}{g(x)}$ dogry rasional drob berlen bolsun. Eger $g(x)$ köpagza P meýdanda getirilmeýän bolsa, onda bu drobuň özi ýönekeý drobdyr. Eger $g(x)$ köpagza P meýdanda getirilýän bolsa, onda onuň getirilmeýän köpagzalara kanonik dagatmasy

$$g(x) = [g_1(x)]^{k_1}[g_2(x)]^{k_2}\dots[g_m(x)]^{k_m} \tag{12}$$

görnüşde bolýar. Bu deňlikdäki $[g_i(x)]^{k_i} (i = 1, 2, \dots, m)$ köpagzalar özara ýönekeýdirler, sebäbi olar umumy getirilmeýän köpeldijä eýe däldir. Şonuň üçin hem, 2-nji lemmanyň netijesini ulanyp,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{[g_1(x)]^{k_1}[g_2(x)]^{k_2}\dots[g_m(x)]^{k_m}} = \frac{f_1(x)}{[g_1(x)]^{k_1}} + \frac{f_2(x)}{[g_2(x)]^{k_2}} + \dots + \frac{f_m(x)}{[g_m(x)]^{k_m}} \tag{13}$$

dagatmany alýarys, özi hem bu dagatmanyň sag tarapyndaky ähli droblar dogry droblardyr.

3-nji lemmanyň netijesine görä, islendik $\frac{f_1(x)}{[g_1(x)]^{k_1}}$ dogry droby (11) formula laýyklykda ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde ýazmak bolýar:

$$\frac{f_1(x)}{[g_1(x)]^{k_1}} = \frac{f_{11}(x)}{g_1(x)} + \frac{f_{12}(x)}{[g_1(x)]^2} + \dots + \frac{f_{1k_1}(x)}{[g_1(x)]^{k_1}}.$$

Edil şoňa meňzeşlikde

$$\frac{f_2(x)}{[g_2(x)]^{k_2}} = \frac{f_{21}(x)}{g_2(x)} + \frac{f_{22}(x)}{[g_2(x)]^2} + \dots + \frac{f_{2k_2}(x)}{g_2(x)^{k_2}},$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{14}$$
$$\frac{f_m(x)}{[g_m(x)]^{k_m}} = \frac{f_{m1}(x)}{g_m(x)} + \frac{f_{m2}(x)}{[g_m(x)]^2} + \dots + \frac{f_{mk_m}(x)}{[g_m(x)]^{k_m}}$$

dagatmalar alynýar.

(14) formuladaky bahalary (13) formulada ornuna goýup, $\frac{f(x)}{g(x)}$ drobuň P meýdanda ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňladylan

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{[g_1(x)]^{k_1}[g_2(x)]^{k_2}\cdots[g_m(x)]^{k_m}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{f_{ij}(x)}{[g_i(x)]^j} \tag{15}$$

dagatmasy alynýar we ol gözlenýän aňlatmadyr. ►

2-nji teorema. *Berlen meýdanda dogry rasional drobuň ýönekeý droblara dagatmasy ýeke-täkdir.*

Subudy. Tersinden güman edip, berlen meýdanda $\frac{f(x)}{g(x)}$ dogry droby ýönekeý droblara iki usul bilen dagatmak mümkin diýeliň. Bu bolsa berlen iki dagatmalardaky goşulyjylaryň ählisiniň jübüt-jübütden birmeňzeş däldigini aňladýar. Bir dagatmadan beýlekisini agzama-agza aýryp, deňligiň bir tarapynda nol, beýleki tarapynda bolsa, ýönekeý droblaryň algebraik jemini alýarys. Eger olaryň arasynda özara garşylyklary bar bolsa, olary aýryp taşlaýarys. Ýöne berlen dagatmalary dürli diýip güman edenimiz üçin, olaryň ählisi özara ýok bolup gitmez. Meňzeş maýdalawjyly iki ýönekeý drobuň jeminiň ýene-de ýönekeý drob emele getirýändigini hem ýatlalyň. Galan ýönekeý droblary toparlanymyzdan soňra olaryň maýdalawjylary

$$g_1(x),[g_1(x)]^2,\ldots,[g_1(x)]^{n_1},g_2(x),[g_2(x)]^2,\ldots,[g_2(x)]^{n_2},\ldots,g_k(x),[g_k(x)]^2,\ldots,[g_k(x)]^{n_k}$$

görnüşde bolar, bu ýerde $g_i(x)$ köpagzalar berlen meýdanda getirilmeýän dürli köpagzalardyr.

Alnan deňligi

$$[g_1(x)]^{n_1-1}[g_2(x)]^{n_2}\ldots[g_k(x)]^{n_k}$$

köpagza köpeldýäris. Onda jemiň $[g_1(x)]^{n_1}$ maýdalawja eýe bolan agzalaryndan başga ähli agzalary köpagza öwrüler. Netijede,

$$\frac{p(x)[g_1(x)]^{n_1-1}[g_2(x)]^{n_2}\ldots[g_k(x)]^{n_k}}{[g_1(x)]^{n_1}}+q(x)=0 \tag{16}$$

deňlik alynýar, bu ýerde $q(x)$ käbir köpagza, $p(x)$ köpagza bolsa $[g_1(x)]^{n_1}$ maýdalawjyly ýönekeý drobuň sanawjysy $(p, g_1)=1$ bolýanlygy görünýär. $[g_1(x)]^{n_1-1}$ -e gysgaltmadan soňra

$$p(x)[g_2(x)]^{n_2}\ldots[g_k(x)]^{n_k}=-q(x)g_1(x) \tag{17}$$

deňligi alýarys. Ýöne, (17) deňlik alynýan garşylygy görkezýär. Hakykatdan hem, bu deňligiň sag tarapy $g_1(x)$ getirilmeýän köpagza bölünýär, ýöne onuň çep tarapy oňa bölünmeýär, sebäbi $g_1(x)$ köpagza $p(x)$, $g_2(x),\ldots,g_k(x)$ köpagzalar bilen özara ýönekeý, şoňa görä-de olaryň köpeltmek hasyly bilen hem özara ýönekeýdir. Şeýlelikde, $\frac{f(x)}{g(x)}$ dogry droby iki usul bilen ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňladyp bolýar diýen güman etmämiz garşylyga getirdi. Alnan garşylyk teoremany subut edýär. ►

1-nji we 2-nji teoremalar drob-rasional funksiýalary ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde dagatmanyň näbelli koeffisiýentler usulynyň teoretiki esasy bolup durýarlar. Bu usul $g(x)$ maýdalawjynyň (12) görnüşde getirilmeýän köpeldijilere kanonik dagatmasyny bilip, onuň (15) görnüşli ýönekeý droblara dagatmasyny ýazmakdan ybaratdyr. Bu droblaryň maýdalawjylary belli, onuň $f_{ij}(x)$ sanawjylary barada aýdanymyzda bolsa, olary degişli $g_1(x)$ köpagzalaryň derejelerinden bir dereje kiçi näbelli koeffisiýentleriň kömegi bilen ýazylan köpagzalar hökmünde göz öňünde getirmeli (garşylykly ýagdaýda olar ýönekeý drob bolmazdy). Soňra deňligiň iki tarapyny hem şol bir maýdalawja getirip, sanawjylarda emele gelen köpagzalary x-yň derejeleri boýunça deňeşdirip, näbelli koeffisiýentleri taparys. 2-nji teorema laýyklykda bu näbelli koeffisiýentler hemişe birbelgili kesgitlenýärler.

5-nji mysal. $\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$ droby hakyky sanlar meýdanynda ýönekeý droblaryň jemine dagadyň.

Çözülişi. Bu ýerde $g_1(x) = x + 1, k_1 = 2, g_2(x) = x^2 + 1, k_2 = 1$. (15) formula görä,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

deňligi ýazmak bolar. Bu ýerden

$$x = (A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + (A+B+C)$$

deňligi alýarys. Alnan deňlikdäki x-yň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňeşdirip, $A + C = 0$; $A + B + 2C + D = 0$; $A + C + 2D = 1$; $A + B + D = 0$ çyzykly deňlemeler sistemasyny aldyk. Bu sistemany çözüp, $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{2}$ bahalar netijesinde,

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

deňligi alarys.

(15) formulany diňe maýdalawjydaky köpagzanyň getirilmeýän köpagzalara (12) formuladaky kanonik dagatmasy görnüşinde ulanyp bilýäris. Ýöne, beýle dagatmanyň umumy usuly häzirlikçe ýok. Netijede, biz dogry droblary ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde dagatmak meselesini köpagzany dagatmak meselesine getirdik.

Ýokarda belleýşimiz ýaly, diňe dogry rasional droblary ýönekeý droblaryň jemine dagatmak mümkin. Nädogry rasional droblar barada aýdanymyzda bolsa, aşakdaky tassyklama dogry.

3-nji teorema. *Islendik* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *nädogry droby käbir köpagza bilen dogry drobuň jemi görnüşinde aňlatmak mümkin.*

Subudy. $f(x)$ köpagzany $g(x)$ köpagza galyndyly bölüp,

$f(x) = g(x)s(x) + f_1(x)$, $degf_1 < degg$ gatnaşygy alarys. Bu deňligi $g(x)$ köpagza bölüp,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{f_1(x)}{g(x)} \tag{18}$$

deňligi aldyk, bu ýerde $s(x)$ käbir köpagza, $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ bolsa, dogry rasional drob. ►

$s(x)$ köpagza $\frac{f(x)}{g(x)}$ rasional drobuň **bitin bölegi**, nädogry drobuň (18) görnüşde aňladylyşyna bolsa, **bitin bölegiň bölünip alnyşy** diýilýär.

6-njy mysal. $\frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}$ - rasional droby köpagza bilen dogry drobuň jemi görnüşinde ýazyň.

Çözülişi. x^3 köpagzany $x^2 - 2x + 2$ köpagza galyndyly bölüp, $\frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}$ rasional droby $\frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} = x + 2 + \frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2}$ görnüşde aňlatmak bolar. Görnüşi ýaly, berlen rasional drobuň bitin bölegi $x + 2$ köpagza, drob bölegi bolsa, $\frac{2x - 4}{x^2 - 2x + 2}$ dogry drob bolýar.

Ýokarda görkezilenleri jemläp aýtsak, P meýdanda berlen islendik rasional droby bu meýdanda berlen käbir köpagza bilen (ol köpagzanyň nol köpagza bolmagy mümkin) ýönekeý droblaryň jemi görnüşinde aňlatmak bolar.

III BÖLÜM KÖP ÜÝTGEÝÄNLI KÖPAGZALAR

§10. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy

10.1. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasynyň gurluşy

Kitabyň II bölüminde köpagza düşünjesine we bir üýtgeýänli köpagzalaryň häsiýetlerine seredildi. Bu düşünjäniň tebigy we wajyp umumylaşdyrmasy *köp üýtgeýänli* köpagza düşünjesidir. Bu düşünjäni bir üýtgeýänli köpagzalaryň nazaryýetine daýanyp öwreneris.

n üýtgeýänli köpagzalar halkasynyň umumy ýagdaýdaky kesgitlemesine iki üýtgeýänli köpagzalaryň halkasynyň gurluşynda serederis.

Goý, R-birlik elementli bütewülik ýaýlasy, $R[x]$ bolsa R bütewülik ýaýlasynda gurlan bir x üýtgeýänli ähli köpagzalaryň toplumy bolsun. Belli bolşy ýaly *(6.2-nji bölümçä seret)*, $R[x]$ halkanyň özi hem birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirýär. Netijede, $R[x]$ bütewülik ýaýlasynda bir üýtgeýänli (üýtgeýän ululygy y bilen belgileýäris) köpagzalaryň halkasyny gurup bolar. Elementleri

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) \tag{1}$$

görnüşde bolan $R[x][y]$ halkany gurýarys. (1) aňlatmada $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\cdots$,$a_1(x)$, $a_0(x) \in R[x]$ köpagzalar y üýtgeýäne görä berlen köpagzanyň koeffisiýentleridir.

§6-nyň 3-nji teoremasyna görä, $R[x][y]$ bütewülik ýaýlasyny emele getirýär. Onuň elementleriniň gurluşyny anyklaşdyralyň. Şu maksat bilen, $a_j(x) \in R[x]$ $(j = 0,1,...,n)$ koeffisiýentleri kanonik görnüşde ýazalyň:

$$\begin{gathered}
a_0(x) = a_{m_0 0}x^{m_0} + a_{m_0-1,0}x^{m_0-1} - 1 + \cdots + a_{10}x + a_{00}, \\
a_1(x) = a_{m_1,1}x^{m_1} + a_{m_1-1,1}x^{m_1-1} + \cdots + a_{1,1}x + a_{0,1}, \\
\overline{} \\
a_{n-1}(x) = a_{m_{n-1},n-1}x^{m_{n-1}} + a_{m_{n-1}-1,n-1}x^{m_{n-1}-1} + \cdots + a_{1,n-1}x + a_{0,n-1}, \\
a_n(x) = a_{m_n,n}x_{m_n} + a_{m_n-1,n}x^{m_n-1} + \cdots + a_{1,n}x + a_{0,n}.
\end{gathered} \tag{2}$$

(1) aňlatmada (2) deňlikler bilen kesgitlenen bahalary goýup we $R[x][y]$ halkada kesgitlenen amallaryň häsiýetlerinden peýdalanyp, ($R[x]$ halkanyň R$[x][y]$ halkanyň bölek halkasy bolýandygyny) hasaba alarys:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m_j} a_{ij}x^i y^j, \qquad a_{ij} \in R$$

aňlatmany, ýagny agzalary $a_{\mu\gamma}x^{\mu}y^{\gamma}$, $a_{\mu\gamma} \in R$, μ we γ käbir otrisatel däl bitin san görnüşde aňladylýan tükenikli jemi alýarys. Tersine,

$$\sum_{\mu,\gamma} a_{\mu\gamma}x^{\mu}y^{\gamma}, \quad a_{\mu\gamma} \in R, \quad \mu,\gamma \in Z \tag{3}$$

görnüşli erkin alnan tükenikli jeme $R[x][y]$ halkanyň elementi hökmünde seretmek bolar. Sebäbi, her bir $a_{\mu\gamma}x^{\mu}y^{\gamma}$ görnüşli goşulyjy y üýtgeýäne görä $a_{\mu\gamma}x^{\mu} \in R[x]$ koeffisiýentli biragzadyr, ýagny $R[x][y]$ halka degişlidir. Onda, (3) jem hem $R[x][y]$ halkanyň elementi bolýar. Şeýlelik bilen, $R[x][y]$ köplük (3) görnüşli ähli mümkin bolan jemleriň toplumyndan durýar.

$a_{\mu\gamma}x^{\mu}y^{\gamma}$ we $a_{\mu\gamma}x^{\mu}y^{\gamma}$ ýazgylaryň şol bir aňlatmany berýändigini belläliň. Bu bolsa $R[x][y] = R[y][x]$ bolýar diýip netije çykarmaklyga mümkinçilik berýär. Ol öz gezeginde $R[x][y]$ ýazgynyň ornuna $R[x,y]$ ýa-da $R[y,x]$ belgini ulanmaklygyň mümkindigini aňladýar.

$R[x,y]$ bütewülik ýaýlasyna R bütewülik ýaýlasynda berlen iki x,y üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy diýilýär. Onuň her bir elementine bolsa, R bütewülik ýaýlasynda berlen x,y üýtgeýänli köpagza diýilýär.

Mysal üçin, $f(x,y) = 3x^2y - 5xy^3 + x^7 - 1 + x^3y^3 + 2y - 7xy^4$ köpagzany $\boldsymbol{Q}$ halkada y üýtgeýäne görä köpagza edip ýazalyň:

$$f(x,y) = -7xy^4 + (x^3 - 5x)y^3 + (3x^2 + 2)y + (x^7 - 1).$$

Ýokarda getirilen kesgitlemäni umumylaşdyralyň.

1-nji kesgitleme. *$R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}]$ bütewülik ýaýlasynda x_n üýtgeýäne görä,*

$$R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n] = R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}][x_n] \tag{4}$$

düzgün esasynda kesgitlenýän köpagzalaryň halkasyna, R bütewülik ýaýlasynda berlen $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$ üýtgeýänlere görä köpagzalaryň emele getirýän $R[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]$ halkasy diýilýär.

Ýazgylary gysgaltmak üçin, $R[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ ýazgynyň ornuna $R[x_1:x_n]$ ýazgyny ulanarys.

1-nji teorema. *R bütewülik ýaýlasynda berlen $R[x_1:x_n]$ köpagzalaryň halkasy bütewülik ýaýlasyny emele getirýär.*

Subudy. $n = 1$ bolanda teorema dogry (§6. 3-nji teorema seret). $n = m$ bolanda bu tassyklama dogry diýip güman edeliň we $R[x_1 : x_{m+1}]$ halka seredeliň.

1-nji kesgitlemä görä, $R[x_1 : x_{m+1}]$ köplük $R_m = R[x_1 : x_m]$ bütewülik ýaýlasynda x_{m+1} üýtgeýäne görä köpagzalaryň halkasyny emele getirýär. Induksiýa görä R_m bütewülik ýaýlasyny emele getirýär. Şonuň üçin hem 3-nji teoremany (§12) ýene bir gezek ulanyp, $R_m[x_{m+1}] = R[x_1 : x_{m+1}]$ bütewülik ýaýlasyny emele getirýär diýen netijä gelmek bolýar.

Induksiýanyň düzgünine laýyklykda, n islendik natural san bolanda $R[x_1 : x_n]$ bütewülik ýaýlasydyr. ►

2-nji teorema. *$R[x_1 : x_n]$ halkanyň her bir f elementini*

$$f = \sum_{i=1}^{N} A_1 x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \cdots x_n^{k_{n-i}} \quad A_i \in R, k_{ji} \in N \cup \{0\} \tag{5}$$

tükenikli jem görnüşinde aňladyp bolýar. Tersine, erkin alnan(5) görnüşli her bir jem $R[x_1 : x_n]$ halkanyň elementi bolýar.

Subudy. n boýunça matematiki induksiýa usulyndan peýdalanýarys. $n = 1$ bolanda, teoremanyň tassyklamasy dogry (§6,1-nji teorema). $n = m$ üçin, teoremany dogry diýip güman edeliň. 1-nji kesgitlemä görä, her bir $f \in R[x_1 : x_{m+1}]$ element $R[x_1 : x_m]$ bütewülik ýaýlasynda berlen x_{m+1} üýtgeýäne görä köpagzadyr we şoňa görä, ony

$$f = \sum_{j=0}^{l} a_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) x_{m+1}^j,$$

$$a_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in, [x_1 : x_m] \; (j = 0, 1, \ldots, l) \tag{6}$$

görnüşde aňladyp bolýar.

Induksiýanyň güman etmesine görä, her bir $a_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ köpagzany tükenikli jem görnüşinde aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$a_j(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(j)} x_1^{k_{1i}^{(j)}} x_2^{k_{2i}^{(j)}} \ldots x_m^{k_{mi}^{(j)}}. \tag{7}$$

$A_i^{(j)} \in R, k_{si}^{(j)} \in N \cup \{0\} (i = 1, 2, \ldots, N_j;\ s = 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, l)$. (6) deňlikde (7) aňlatmany ornuna goýup we degişli amallary ýerine ýetirip,

$$f = \sum_{r=1}^{N} B_r x_1^{k_{1r}} x_2^{k_{2r}} \ldots x_m^{k_{mr}} \; x_{m+1}^{k_{(m+1)r}} \tag{8}$$

görnüşdäki tükenikli jemi alýarys, bu jemde $B_r \in R$ ($r = 1, 2, \ldots, N$), sebäbi her bir B_r käbir$A_i^{(j)}$-e deň.

Tersine, (8) görnüşli her bir jem $R[x_1 : x_{m+1}]$ halkanyň elementidir, sebäbi onuň her bir $B_r \; x_1^{k_1 r} x_2^{k_2 r} \ldots x_m^{k_{mr}} x_{m+1}^{k_{(m+1)r}}$ goşulyjysyna $B_r x_1^{k_1 r} x_2^{k_2 r} \ldots x_m^{k_m r} \in R[x_1 : x_n]$ koeffisiýentli x_{m+1} üýtgeýäne görä köpagza hökmünde seretmek bolar, ýagny her bir goşulyjysy we tutuş (8)-nji jem $R[x_1 : x_{m+1}]$ halka degişli bolar.

Şeýlelikde, teoremanyň tassyklamasynyň $n = m + 1$ bolanda dogrudygyny subut etdik. Onda induksiýanyň düzgünine görä, teorema islendik n natural san üçin hem dogrudyr. ►

Bu teorema $R[x_1:x_n]$ halkanyň elementleriniň gurluşyny kesgitleýär.

2-nji kesgitleme. *$R[x_1:x_n]$ halkanyň her bir elementine R bütewülik ýaýlasynda berlen, n sany* $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ **üýtgeýänli köpagza** *diýilýär. Ol köpagzalar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ we ş.m. görnüşlerde belgilenilýär.*

2-nji teorema laýyklykda, $R[x_1:x_n]$ halkanyň elementi bolan islendik köpagzany

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{N} A_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \ldots x_n^{k_{ni}}, \quad A_i \in R,\, k_{ij} \in N \cup \{0\} \tag{9}$$

görnüşde aňladyp bolýar.

Her bir $A_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \ldots x_n^{k_{ni}}$, goşulyja $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň **agzasy**, A_i bolsa ol agzanyň **koeffisiýenti** diýilýär. Diňe koeffisiýentleri bilen tapawutlanýan agzalara **meňzeş agzalar** diýilýär, meselem, $A\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ we $B\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ meňzeş agzalardyr. $A\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ goşulyjynyň bahasy x_j^{kj} üýtgeýänleriň ýerleşiş tertibine bagly däldir, ýagny $A\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, $A\, x_2^{k_2} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, $A\, x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} x_1^{k_1}$ we ş.m. ýazgylar şol bir zady aňladýarlar. Şoňa görä-de, $R[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, $R[x_2,x_1,\ldots,x_n]$, $R[x_2,x_n,\ldots,x_1]$ we ş.m. ýazgylar hem, dürli görnüşde ýazylan R bütewülik ýaýlasynda berlen $x_1,x_2,\ldots,x_n$ üýtgeýänli köpagzalaryň $R[x_1:x_n]$ halkasyny aňladýar.

$R[x_1:x_n]$ halkanyň elementleri bolan köpagzalaryň üstünde goşmak, köpeltmek amallary halkada hereket edýän distributiwlik kanuny esasynda ýerine ýetirilýär. Iki (we ondan köp) meňzeş agzalar goşulanda,

$$A\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} + B\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = (A + B) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

düzgünden peýdalanýarlar, bu ýerde $A \in R$, $B \in R \Rightarrow (A + B) \in R$.

Köpagzalaryň agzalaryny köpeltmek

$$(A\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}) \cdot (B\, x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}) = A \cdot B\, x_1^{l_1+k_1} x_2^{l_2+k_2} \ldots x_n^{l_n+k_n}$$

düzgün boýunça ýerine ýetirilýär. Özi hem, $A \in R \wedge B \in R \Rightarrow AB \in R$.

10.2. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň dürli görnüşde berlişi

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň (9) görnüşdäki ýazgysynda meňzeş agzalar ýok diýip hasap edilýär. Köpagzanyň bu berlişine onuň **kanonik görnüşi** diýilýär.

Köpagzanyň kanonik görnüşiniň wajyp aýratynlygy onuň ýeke-täkligidir (agzalarynyň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda). Bu ýeke-täklige eger kanonik görnüşde berlen $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ we $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzalar deň bolsalar, onda $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň her bir agzasy $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň agzasy we tersine $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň her bir agzasy $f(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ köpagzanyň agzasy bolýar diýip düşünmeli.

3-nji teorema. *Islendik $f(x_1,x_2,\dots, x_n) \in R[x_1:x_n]$ köpagzany diňe bir usul bilen kanonik görnüşde aňladyp bolýar (agzalaryň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda).*

Subudy. Ilki bilen köpagzanyň hususy haly bolan $\theta\,(x_1,x_2,\dots, x_n)$ nol köpagzanyň kanonik ýazgysynyň ýeke-täkdigini görkezeliň. Induksiýa boýunça $n = 1$ bolanda, bu häsiýet ýerine ýetýär *(6.2-nji bölümçä seret)*. $n = m$ bolanda, tassyklama dogry diýip güman edeliň. $\theta(x_1, x_2,\dots,x_m, x_{m+1}) \in R[x_1:x_{m+1}]$ köpagzany kanonik görnüşde aňlatmak üçin, ony $R[x_1:x_m]$ bütewülik ýaýlasynda x_{m+1} üýtgeýäne görä,

$$\theta(x_1,x_2,\dots,x_m,x_{m+1}) = \sum_{i=0}^{N} a_i\,(x_1,x_2,\dots,x_m)x_{m+1}^{i}$$

görnüşde ýazýarys.

Bir üýtgeýänli köpagzalaryň häsiýetlerine görä, nol köpagzanyň ähli koeffisiýentleri onuň berlen halkasynyň nollaryna deň bolmaly, ýagny

$$\underset{i}{\forall}\,[a_i\,(x_1,x_2,\dots,x_m) = \theta(x_1,x_2,\dots,x_m)]$$

Induksiýanyň güman etmesine görä, $a_i(x_1, x_2,\dots, x_m)$ $(i = 0,1,\dots,n)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri R bütewülik ýaýlasynyň noluna deň bolmaly. Onda $\theta(x_1,x_2,\dots, x_m, x_{m+1})$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleriniň nola deň boljakdygy düşnükli.

Indi umumy ýagdaýa geçeliň. Eger $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ we $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzalar kanonik görnüşde aňladylan, şeýle-de $f(x_1, x_2,\dots, x_n) = g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ bolsa, onda $f(x_1, x_2,\dots, x_n) - g(x_1, x_2,\dots, x_n) = \theta(x_1, x_2,\dots, x_n)$ bolar. Bu bolsa $f(x_1, x_2,\dots, x_n) - g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleriniň nola deňligini aňladýar. Bu köpagzalaryň her biriniň kanonik ýazgysynda meňzeş agzalar ýok, nollar bolsa diňe deň koeffisiýentli meňzeş agzalary biri-birinden aýyrmak esasynda alynýanlygy üçin, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň her bir agzasy $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň agzasy we tersine, $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň her bir agzasy $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzasynyň agzasy bolýar. ►

Ýokarda aýdylanlar esasynda, halkanyň nol köpagzasyny ýöne 0 bilen belgiläris.

Kesgitleme. *Köpagzanyň $A\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$* **agzasynyň derejesi** *diýip, $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ jeme aýdylýar. $k_i (i = 1,2,\dots, n)$ sana bu agzanyň x_i* **üýgeýäniniň derejesi** *diýilýär. Köpagzanyň iň uly derejeli agzasynyň derejesine bu* **köpagzanyň derejesi**, *iň uly derejeli agzalara bolsa, onuň* **baş agzalary** *diýilýär.*

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, köpagzanyň birnäçe baş agzasynyň bolmagy mümkin. Meselem,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2^3x_3^2 + x_1^4x_2x_3 + 2x_1^2x_2^2x_3 - x_1^2x_2^3 - 2x_1^3 + 5x_1x_3^3 + 6 + x_1^2x_2x_3^2 \quad (10)$$

köpagzanyň dürli iki sany baş agzasy bar. Olar $2x_1x_2^3x_3^2$ we $x_1^4x_2x_3$ agzalar, bu agzalaryň her biriniň derejesi 6-a deň. Netijede, berlen köpagzanyň derejesi hem 6-a deňdir.

$R[x_1{:}x_n]$ halkanyň ýeke-täk elementine, ýagny nol köpagza dereje düşünjesini ulanyp bolmaýanlygy aýdyň. $R[x_1{:}x_n]$ halkanyň hem nolunjy derejeli köpagzasy hökmünde R bütewülik ýaýlasynyň noldan tapawutly bolan elementlerini alarys, olara 0 bilen bilelikde **hemişelik (konstanta)** diýilýär.

Edil bir üýtgeýänli köpagzalaryň derejesini belgileýşimiz ýaly, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň derejesini hem $degf$ bilen belgiläris. $degf = 0$ ýazgy öňki manysyny saklaýar: $f \neq 0$ we $f = \text{const}$.

Eger berlen köpagzanyň ähli agzalarynyň derejesi şol bir l sana deň bolsa, onda oňa *birjynsly köpagza* ýa-da *forma* diýilýär. *Islendik köpagzany dürli derejeli birjynsly köpagzalaryň jemi görnüşinde ýazyp bolýar.*

$R[x_1{:}x_n]$ halkada, edil $R[x]$ halkadaky ýaly, iki köpagzanyň jeminiň derejesi olaryň her biriniň derejesinden geçmeýär. Köpagzalaryň köpeltmek hasylynyň derejesine degişli aşakdaky tassyklama dogrudyr.

4-nji teorema. *Eger* $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ *we* $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ *köpagzalar* $R[x_1{:}x_n]$ *halkanyň noldan tapawutly köpagzalary bolsa, onda*

$$deg(fg) = degf + degg \tag{11}$$

deňlik dogry. Bu ýerde R bütewülik ýaýlasydyr.

Subudy. a) *ilki bilen berlen köpagza birjynsly bolan ýagdaýyna seredeliň. Goý,*

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} A_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \dots x_n^{k_{ni}}, \tag{12}$$

l derejeli birjynsly köpagza, ýagny

$$\underset{i}{\forall}\,[k_{1i} + k_{2i} + \dots + k_{ni} = l]$$

we

$$g(x_1, x_2,\dots, x_n) = \sum_{j=1}^{N} B_j x_1^{k'_{1j}} x_2^{k'_{2j}} \dots x_n^{k'_{nj}}, \tag{13}$$

bolsa m derejeli birjynsly köpagza, ýagny $\underset{j}{\forall}\,[k_{1j}' + k_{2j}' + \dots + k_{nj}' = m]$ bolsun. Özi hem (12) we (13) aňlatmalar kanonik görnüşde berlen, ýagny olarda meňzeş agzalar ýok diýip hasap edeliň. $f(x_1, x_2,\dots, x_n)\, g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň her bir agzasy $c_{ij} x_1^{k_{1i}+k_{1j}'} x_2^{k_{2i}+k'_{2j}} \dots x_n^{k_{ni}+k'_{nj}}$ görnüşde bolar we onuň derejesi $l + m$ jeme deňdir, sebäbi

$$\underset{i,j}{\forall}\,(k_{1i} + k_{1j}') + (k_{2i} + k_{2j}') + \dots + (k_{ni} + k_{nj}') = l + m$$

özi hem $f(x_1, x_2,\dots, x_n)\, g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagza noldan tapawutly. Şeýlelik bilen, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)\, g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpeltmek hasyly derejesi $l + m = degf + degg$ bolan birjynsly köpagzadyr. Onda (11) gatnaşyk dogry bolýar.

b) eger $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ we $g(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ köpagzalar 0-dan tapawutly erkin alnan köpagzalar bolsa, onda olary dürli derejeli birjynsly köpagzalaryň jemi görnüşinde ýazmak bolýar:

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \varphi_{l_1}(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \varphi_{l_2}(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \cdots + \varphi_{l_s}(x_1, x_2,\ldots, x_n),$$

$$g(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \psi_{m_1}(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \psi_{m_2}(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \cdots + \psi_{m_r}(x_1, x_2,\ldots, x_n).$$

Bu ýerde φ_{l_i} we φ_{m_j} derejeleri degişlilikde l_i we m_j sanlara deň bolan birjynsly köpagzalardyr. Şunlukda, $\max\{l_1,l_2,\ldots,l_s\} = degf$, $\max\{m_1,m_2,\ldots,m_r\} = degg$ boljakdygy aýdyň.

Goý, takyklyk üçin $l_1 = degf$ we $m_1 = degg$ diýeliň; netijede $l_i < l_1$ $(i = 2,3,...,s)$, $m_j < m_1 (j = 2,3,...,r)$ bolar.

Berlen köpagzalaryň köpeltmek hasylyny

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)\, g(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \varphi_{l_1}(x_1, x_2,\ldots, x_n)\, \psi_{m_1}(x_1, x_2,\ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{i,j(i\neq 1,\, j\neq 1)} \varphi_{l_i}(x_1, x_2,\ldots, x_n)\, \psi_{m_j}(x_1, x_2,\ldots, x_n) \tag{14}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $\sum\limits_{i,j(i\neq 1,\, j\neq 1)}$ ýazgy $i,j(i = 2,3,\ldots,s;\, j = 2,3,\ldots,r)$ jübütleriň bahalaryndaky jemi aňladýar.

(14) jemiň birinji agzasy derejesi $l_1 + m_1 = degf + degg$ bolan birjynsly köpagzany aňladýanlygy düşnükli. Bu jemiň galan agzalary bolsa, derejeleri $l_i + m_j <$ $< degf + degg$ şerti kanagatlandyrýan birjynsly köpagzalardyr (sebäbi, i,j indeksleriň iň bolmanda biri 1-den tapawutly $l_i < degf \vee m_j < degg$).

Netijede, $deg(fg) = l_1 + m_1 = degf + degg$. ►

Netije. *$R[x_1{:}x_n]$ halkada birligiň bölüjileri diňe noldan tapawutly hemişelikler bolup biler.*

Subudy. $R[x_1{:}x_n]$ halkanyň birlik elementiniň bire deň boljakdygy düşnükli $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)\, g(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 1$ deňlikden $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \neq 0$, $g(x_1, x_2,\ldots, x_n) \neq 0$, $deg(fg) = 0$ gatnaşyklar gelip çykýar. $deg(fg) = degf + degg$ bolany üçin, $deg(fg) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow degf = 0 \wedge degg = 0$ gatnaşyk dogry, ýagny birligiň bölüjileri diňe noldan tapawutly hemişelikler bolup biler. ►

Ýokardaky aýdylanlardan belli bolşy ýaly, köpüýtgeýänli köpagzalaryň derejesi düşünjesi, onuň agzalaryny bellibir tertipde ýazmak üçin ýeterlik bolmaýar. Şoňa görä-de, köpagzalaryň agzalaryny bellibir tertipde ýazmak üçin, olaryň başga bir häsiýetlerinden peýdalanmaly bolýar. Şeýle häsiýetleriň has köp ulanylýanlarynyň biri-de **leksikografiki (sözlük düzgüni)** diýip atlandyrylýan düzgündir. Leksikografiki söz grek sözi bolan «leksikon» we «grafos») diýen sözden gelip çykyp, sözlük ýazmak diýen manyny berýär. Belli bolşy ýaly, sözlükde sözler harplaryň elipbide geliş tertibi boýunça tertipleşdirilýär, ýagny sözlükde iki sözüň haýsysynyň öň gelmelidigini kesgitlemek üçin, ilki olaryň birinji harplarynyň elipbide ýerleşiş tertibi deňeşdirilýär, haýsy sözüň birinji harpy elipbide öň gelse, onda şol söz hem sözlükde öň ýazylýar, eger seredilýän sözleriň birinji harplary meňzeş bolsa, onda olaryň ikinji harplaryny deňeşdirmeklige geçýärler we ş.m. degişli orundaky harplar dürli bolýança dowam etdirilýär we deňeşdirilýän harplaryň haýsysy elipbide öň gelse, onda şol harpy saklaýan sözi sözlükde beýleki sözden öň ýazýarlar. Sözleriň ornuna köpagzalaryň agzalaryny deňeşdiren mahalymyzda elipbidäki birinji harpyň ornuny x_1 üýtgeýän, ikinji harpyň ornuny x_2 üýtgeýän we ş.m. i-nji harpyň ornuny x_i üýtgeýän tutýar. Bu ýagdaýda x_i üýtgeýänleriniň derejelerini deňeşdirip, köpagzanyň agzalaryny tertipleşdireris, ýagny köpagzanyň agzalarynyň ýazylyş tertibini kesgitläris.

Berlen köpagzanyň erkin alnan

$$T_1 = Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}, \tag{15}$$

$$T_2 = Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}, \tag{16}$$

iki agzasyna seredeliň. Bu ikagza özara meňzeş bolmasa, onda degişli üýtgeýänleriň ählisiniň k_i we l_i derejeleri özara deň bolmaz, ýagny $i = 1,2,\ldots, p-1$ bolanda, $k_i = l_i$ bolýan, ýöne, $k_p \neq l_p$ bolýan iň bolmanda bir sany p $(1 \leq p \leq n)$ natural san bar. Eger $k_p > l_p$ bolsa, onda (15) agza (16) agzadan **ýokary agza,** (16) agza bolsa (15) agzadan **pes agza** diýilýär.

Görşümiz ýaly, köpagzanyň özara meňzeş bolmadyk islendik iki agzasynyň biri beýlekisinden ýokary bolýar. Bu agzalaryň arasynda kesgitlenen «ýokary» gatnaşygy tranzitiwlik häsiýetine eýe: eger T_1 agza T_2 agzadan ýokary we T_2 agza T_3 agzadan ýokary bolsa, onda T_1 agza T_3 agzadan ýokary bolýar. Bu gatnaşygyň antirefleksiw we antisimmetrikdigine düşünmek kyn däl. Netijede, bu gatnaşyk köpagzalaryň agzalarynyň köplüginde çyzykly berk tertip gatnaşygyny kesgitleýär. Şeýlelikde, kanonik görnüşde berlen islendik köpagzanyň agzalaryny ýokary agzasy pes agzasyndan öňde geler ýaly edip, ýazyp bolýar. Köpagzanyň agzalarynyň şeýle görnüşde tertipleşdirilişine onuň **leksikografiki ýazylyşy** (tertipleşdirilişi) diýilýär.

Meselem, (10) köpagzany leksikografiki tertipde aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4x_2x_3 - 2x_1^3 - 2x_1^2x_2^3 + 2x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^2 + 5x_1x_3^3 + 6.$$

Köpagzanyň leksikografiki ýazgysyndaky iň ilkinji duran agzasyna onuň **iň ýokary** agzasy diýip aýdarys. Köpagzanyň iň ýokary agzasyna degişli lemmany subut edeliň.

Lemma. *Iki köpagzanyň iň ýokary agzalarynyň köpeltmek hasyly bu köpagzalaryň köpeltmek hasylynyň iň ýokary agzasyna deňdir.*

Subudy. Erkin saýlanyp alnan, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ we $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzalaryň agzalaryny leksikografiki ýerleşdireliň:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = Ax_1^{k_1}x_1^{k_2}\dots x_n^{k_n} + Bx_1^{l_1}x_1^{l_2}\dots x_n^{l_n} + \cdots + Dx_1^{m_1}x_1^{m_2}\dots x_n^{m_n},$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = Lx_1^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} + Mx_1^{\beta_1}x_1^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n} + \cdots + Kx_1^{\gamma_1}x_1^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n}.$$

Ilki bilen, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzany islendik $S = cx_1^{w_1}x_1^{w_2}\dots x_n^{w_n}$ görnüşli agza köpeldenimizde alnan köpagzanyň agzalarynyň leksikografiki ýerleşişiniň bozulmaýandygyny belläliň, säbäbi, bu ýagdaýda $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň ähli agzalarynda her bir x_i üýtgeýäniň derejesi birwagtyň özünde şol bir $w_i (i = 1,2,\dots,n)$ san artýar.

$f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň her bir agzasyny ilki bilen $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň birinji agzasyna köpeldip, soňra $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň her bir agzasyny $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň ikinji agzasyna köpeldip we ş.m. edip, $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ we $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzalaryň köpeltmek hasylyny emele getireris. Ýokarda belleýşimiz ýaly, bu ýagdaýda hem, köpeltmekligiň her bir ädiminde köpeltmek hasylynda agzalaryň leksikografiki ýerleşdirilişi bozulmaýar. Netijede, köpeltmek hasylynyň iň ýokary agzasyny $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň iň ýokary agzasyny $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň agzalaryna köpeltmek hasyllarynyň arasyndan gözlemeli bolýar, ýagny

$$LAx_1^{\alpha_1+k_1}x_1^{\alpha_2+k_2}\dots x_n^{\alpha_n+k_n};\quad MAx_1^{\beta_1+k_1}x_1^{\beta_2+k_2}\dots x_n^{\beta_n+k_n};\dots;KAx_1^{\gamma_1+k_1}x_1^{\gamma_2+k_2}\dots x_n^{\gamma_n+k_n}$$

agzalaryň arasyndan gözlemeli.Ýöne, bu agzalar $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň leksikografiki ýazylyşynyň tertibinde ýerleşdirilen, şonuň üçin hem, olaryň arasynda iň ýokary agza $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň iň ýokary agzasyny $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň iň ýokary agzasyna köpeldilip alnan agza, ýagny

$$LAx_1^{\alpha_1+k_1}x_1^{\alpha_2+k_2}\dots x_n^{\alpha_n+k_n}$$

agza bolýar. Bu agza $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagza bilen $g(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň köpeltmek hasylynyň iň ýokary agzasy bolýar. ▶

Köhalatlarda köpagzanyň agzalaryny tertipleşdirmegiň leksikografiki düzgüninden peýdalanman, ony haýsy hem bolsa bir üýtgeýäniň derejeleri boýunça tertipleşdireris, ýagny (6) görnüşde aňladarys. Umumy ýagdaýda R halkada berlen $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ köpagzanyň $x_p (1 \le p \le n)$ üýtgeýäniň derejeleri boýunça agzalarynyň tertipleşdirmesini aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = A_s(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},x_{p+1},\dots,x_n)x_p^s +$$
$$+ A_{s-1}(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},x_{p+1},\dots,x_n)x_p^{s-1} + \cdots + A_0(x_1,x_2,\dots,x_{p-1},x_{p+1},\dots,x_n)$$

bu ýerde $A_i(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_n)(i=0,1,\ldots,s)$ koeffisiýentler R halkada berlen $(n-1)$ sany $x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_n$ üýtgeýänli köpagzalardyr.

10.3. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň funksional görnüşde berlişi

Edil bir üýtgeýänli köpagzalarda we bir üýtgeýänli rasional droblarda edilişi ýaly, n sany üýtgeýänli $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ köpagzany hem funksional görnüşde bermek bolar, şeýle-de, onuň algebraik we funksional berlişiniň arasyndaky baglanyşygy kesgitlemek bolar.

Her bir $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in R\,[x_1{:}x_n]$ köpagza bahasy

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\in R}\ [\varphi_f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)] \tag{17}$$

düzgün bilen kesgitlenen

$$\varphi_f : R^n \to R \tag{18}$$

funksiýany degişli edeliň, bu ýerde $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ element R halkanyň elementi bolup, ol kanonik görnüşde berlen $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ köpagzada x_1-iň ornuna $\alpha_1 \in R$ elementi, x_2-niň ornuna $\alpha_2 \in R$ elementi we ş.m. x_n-iň ornuna $\alpha_n \in R$ elementi goýup we degişli köpeltmek we goşmak amallaryny ýerine ýetirip alynýar.

5-nji teorema. *Eger R häsiýetlendirijisi* 0*-a deň bolan bütewülik ýaýlasy bolsa, onda $R[x_1:x_n]$ halka* (17) *we* (18) *gatnaşyklar bilen kesgitlenen ähli funksiýalaryň toplumyna izomorfdyr.*

Subudy. Her bir $f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in R[x_1{:}x_n]$ köpagza (17)-(18) şertler bilen kesgitlenen käbir φ_f funksiýany degişli edeliň. Bu $f \to \varphi_f$ degişliligiň amallary öňküligine üýtgetmän saklaýandygyny, ýagny

$$\forall_{f,g\in R[x_1:x_n]}\ [f \to \varphi_f, g \to \varphi_g \Rightarrow f+g \longrightarrow \varphi_f+\varphi_g \wedge fg \longrightarrow \varphi_f\varphi_g]$$

gatnaşyklaryň ýerine ýetýändigini barlamak kyn däl.

Hakykatdan hem, eger $s(x_1, x_2,\ldots, x_n) = f(x_1, x_2,\ldots, x_n) + g(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ bolsa, onda

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in R}\ [s(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) + g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)]$$

boljakdygy düşnükli. Onda (17) gatnaşyga görä, $\varphi_s = \varphi_f + \varphi_g$ ýa-da $f + g \longrightarrow \varphi_f + \varphi_g$ bolar. Köpagzalaryň köpeltmek hasyly bolan ýagdaýa hem edil şunuň ýaly seredilýär. Şeýlelik bilen, $f \to \varphi_f$ şekillenmäniň gomomorf şekillenmedigi görkezildi.

Bu şekillenmäniň izomorf şekillenmedigini görkezmek üçin, onuň özara birbelgili şekillenmedigini anyklamak galýar. $f \to \varphi_f$ şekillenmäniň birbelgili kesgitlenýändigi (17) gatnaşykdan gönüden-göni alynýar. Şonuň üçin hem,

$$\varphi_f = \varphi_g \Rightarrow [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{19}$$

bolýandygyny görkezmek ýeterlik. (19) implikasiýanyň çep tarapyndaky deňlige funksional deňlik manyda düşünmeli, ýagny

$\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in R} [\varphi_f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \varphi_g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)]$gatnaşyk görnüşinde göz öňüne getirmeli, onuň sag tarapyndaky deňlige bolsa $R[x_1:x_n]$ halkanyň elementleriniň deňligi hökmünde düşünmeli.

$$[\varphi_f = \varphi_g] \equiv [\varphi_f - \varphi_g = 0] \equiv [\varphi_{f-g} = 0], [f = g] \equiv [f - g = 0]$$

bolany üçin, (19) implikasiýa $\varphi_q = 0 \Rightarrow q = 0$, ýagny

$$\forall_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in R} [q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = 0 \Rightarrow q(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0] \tag{20}$$

implikasiýa deňgüýçlidir, bu ýerde $f - g = q$.

(20) gatnaşyk bilen kesgitlenen implikasiýany induksiýa usuly bilen subut ederis. $n = 1$ bolanda bu implikasiýanyň dogrudygy 6.4-nji bölümçede subut edildi. Bu implikasiýany $(n - 1)$ sany üýtgeýänli köpagza üçin, dogry diýip güman edeliň we ondan peýdalanyp, onuň n sany üýtgeýänli köpagza üçin hem dogrulygyny görkezeliň. Şonuň üçin $q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzany onuň haýsy hem bolsa bir meselem, x_n üýtgeýäne görä tertipleşdireliň. Onda, ony aşakdaky ýaly ýazmak mümkin:

$$q(x_1, x_2,\ldots, x_n) = A_i (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\, x_n^i + A_{i-1} (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\, x_n^{i-1} +$$
$$+ A_1 (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\, x_n + \ldots + A_0 (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}), \tag{21}$$

bu ýerde $A_j (x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$ koeffisiýentler $(n - 1)$ sany üýtgeýänli köpagzalar bolup, özi hem bu köpagzalaryň koeffisiýentleri $q(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$ köpagzanyň agzalaryny x_n üýtgeýäniň derejelerine görä tertipleşdirmezden öňki $q(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})$ köpagzalaryň koeffisiýentlerinden durýar.

Eger $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ üýtgeýänlere, degişlilikde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ bahalary daksak, onda (21) aňlatma R halkada berlen x_n üýtgeýäne görä bir üýtgeýänli köpagza hökmünde seretmek bolar. Şertleşişimiz boýunça ol toždestwolaýyn nola deň, onda §6-nyň 8-nji teoremasyna görä, onuň ähli koeffisiýentleri nola deňdir, ýagny

$$A_i (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) = 0 \quad (i = 0,1,2,\ldots,l).$$

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ elementleriň R halkanyň erkin elementlerdigini we (20) implikasiýanyň $(n - 1)$ sany üýtgeýänli köpagzalar üçin dogry diýip güman etmämizi hem hasaba alsak, onda $A_j (x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ köpagzalaryň koeffisiýentleri nola deň diýip netije çykarsak bolar. Ýöne, bu koeffisiýentler bir wagtyň özünde R halkada berlen $q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň hem koeffisiýentleri bolýar. Netijede, $q(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri nola deňdir.

Biz (20) implikasiýanyň ($n-1$) sany üýtgeýänli köpagza üçin dogrulygyndan, onuň n sany üýtgeýänli köpagza üçin hem dogrulygyny görkezdik. Netijede, ol islendik n natural san üçin hem dogrudyr.

10.4. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasynda bölünijilik

Biz ýokarda köp üýtgeýänli köpagzalaryň bir üýtgeýänli köpagzalaryň häsiýetlerine meňzeş bolan häsiýetlerine seretdik. Indi, köp üýtgeýänli köpagzalaryň özlerine mahsus bolan häsiýetlerine seretmeklige geçýäris. Köp üýtgeýänli köpagzalaryň bölünijilik nazaryýetiniň bir üýtgeýänli köpagzalaryň bölünijilik nazaryýetinden ýeterlik derejede tapawutlanýandygyny aýtmak gerek.

Elbetde, bölünijiligiň kesgitlemesi, bölünijilik gatnaşygynyň umumy häsiýetleri, getirilmeýän köpagza düşünjesi we onuň häsiýetleri bir üýtgeýänli köpagzalaryň halkasyndan, hiç hili üýtgedilmän, köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasyna geçirilýär, sebäbi olar islendik bütewülik ýaýlasyna mahsus.

Şoňa görä-de, ýokardaky agzalan kesgitlemeleri we düşünjeleri köp üýtgeýänli köpagzalar halkasyna tutuşlygyna geçirýäris. Şonuň üçin bir üýtgeýänli köpagzadaky ýaly, esasy R bütewülik ýaýlasyny meýdan diýip hasap edýäris (ony P bilen belgiläris). Bu bolsa 4-nji teoremanyň netijesini aşakdaky tassyklama bilen dolup bolýandygyny aňladýar. *$P[x_1:x_n]$ halkada birligiň bölüjileri noldan tapawutly hemişeliklerdir, ýagny diňe P meýdanyň elementleridir.*

Ýazgylary ýönekeýleşdirmek maksady bilen aşakdaky kesgitlemelerde $P[x_1:x_n]$ halkany P_n bilen belgiläris.

1-nji kesgitleme. *Eger $f,g \in P_n$, $g \neq 0$ köpagzalar üçin, $f = gs$ deňlik ýerine ýeter ýaly $s \in P_n$ köpagza bar bolsa, onda f köpagza g köpagza* **bölünýär** *diýilýär we $f \vdots g$ görnüşde ýazylýar. g köpagza bolsa f köpagzanyň* **bölüjisi** *diýilýär.*

Köpagzalaryň P_n halkasynda bölünijilik gatnaşygy aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. $\forall_{f,g,h \in p_n} [f \vdots g \wedge g \vdots h \Rightarrow f \vdots h];$

2. $\forall_{f,g,h \in p_n} [f \vdots h \wedge g \vdots h \Rightarrow (f+g) \vdots h \wedge (f-g) \vdots h];$

3. $\forall_{f,h \in p_n} [f \vdots h \Rightarrow \forall_{g \in p_n} [fg \vdots h]];$

4. $\forall_{h, f_1,\ldots, f_n \in p_n} [f_1 \vdots h \wedge f_2 \vdots h \wedge \ldots \wedge f_m \vdots h \Rightarrow \forall_{g_1, g_2,\ldots, g_n \in p_n} [(f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_m g_m) \vdots h];$

5. $\forall_{f \in p_n} \forall_{c \in P/\{0\}} [f \vdots c];$

6. $\forall_{f,h \in p_n} \forall_{c \in P/\{0\}} [f \vdots g \Rightarrow f \vdots cg].$

2-nji kesgitleme. *Eger* $deg p \geq 1$ *we* $\underset{u,v \in P_n}{\forall} [p = uv \Rightarrow deg u = 0 \vee deg v = 0]$ *bolsa, onda* $p \in P_n$ *köpagza P meýdanda* **getirilmeýär** *diýilýär. Eger* $deg q > 1$ *we* $\underset{u,v \in P_n}{\exists} [q = uv \wedge deg u \geq 1 \wedge deg v \geq 1]$ *bolsa, onda* $q \in P_n$ *köpagza P meýdanda* **getirilýär** diýilýär.

Getirilmeýän köpagzalaryň ýönekeý häsiýetlerine seredeliň:

1. *Eger p köpagza P meýdanda getirilmeýän bolsa, onda onuň bilen assosirlenen islendik cp köpagza hem P meýdanda getirilmeýär.*

2. *Eger p we q köpagzalar P meýdanda getirilmeýän köpagzalar we* $p \vdots q$ *bolsa, onda p we q köpagzalar özara assosirlenendirler.*

3. *Islendik birinji derejeli* $p \in P_n$ *köpagza P meýdanda getirilmeýär.*

Şunuň bilen, $R[x]$ we $R[x_1 : x_n]$ $(n \geq 2)$ halkalarda kesgitlenen meňzeşliklere seredip gutardyk. $R[x_1 : x_n]$ halkanyň häsiýetleriniň özüne mahsuslygy, halka $2 \leq n$ *bolanda* $R[x_1 : x_n]$ *baş ideallar halkasy, şeýle-de Ýewklid halkasy bolmaýar*. Şoňa görä-de, 5.2-5.3 ýa-da 7.5.-7.7-nji bölümçelerdäki alnan netijeleri gönüden-göni bu halka geçirmek mümkin däl.

$R[x_1 : x_n]$ halkanyň ähli ideallarynyň baş ideallar däldigine göz ýetirmek üçin, mysala seredeliň. Goý, $n = 2$ bolsun, $\boldsymbol{R}[x,y]$ bolsa $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen, ähli $f(x,y)$ köpagzalaryň emele getirýän halkasy diýeliň. Azat agzalary nola deň bolan $f(x,y) \in \boldsymbol{R}[x,y]$ köpagzalaryň toplumyny I bilen belgiläliň. I köplügiň ideal emele getirýändigi düşnükli, sebäbi, islendik $f(x,y) \in \boldsymbol{R}[x,y]$, $g(x,y) \in I$ köpagzalar üçin, $f(x,y)\ g(x,y) \in I$ gatnaşyk ýerine ýetýär. I ideal baş ideal däldir. Hakykatdan hem, islendik birlik elementli halkada bolşy ýaly, $\boldsymbol{R}[x,y]$ halkanyň hem her bir baş idealy käbir $s(x,y) \in \boldsymbol{R}[x,y]$ element bilen döredilýär, ýagny

$$I = \underset{f(x,y) \in R[x,y]}{\forall} \{s(x,y)\, f(x,y)\}$$

görnüşe eýe. Bu ýerde $s(x,y)$ saýlanyp alnan, $f(x,y)$ bolsa, $\boldsymbol{R}[x,y]$ halkanyň erkin alnan elementleri. Emma, I ideal $\boldsymbol{R}[x,y]$ halkanyň takyk alnan $s(x,y)$ köpagzasynyň kömegi bilen döredilmeýär, sebäbi, eger $deg s = 0$ bolsa, onda $I = \boldsymbol{R}[x,y]$ bolar, ýagny I baş ideal däl, eger $deg s \geq 1$ bolsa, onda I idealyň ähli elementleri, hemişeliklerden tapawutly bolup, $s(x,y)$ köpagza kratny bolmaly, bu şert ýerine ýetmeýär (meselem, $u = x + y$, $v = x - y$ köpagzalar ideala degişli, ýöne $(u,v) = 1$. Alnan garşylyk I idealyň baş ideal bolmaýandygyny görkezýär.

Bu pikir ýöretmäni hiç bir üýtgewsiz $n > 2$ bolan ýagdaýyndaky islendik $P[x_1 : x_n]$ halka üçin hem aýtmak bolar.

Şeýlelik bilen, köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy baş ideallar halkasyny emele getirmeýär. Şoňa görä-de, ol Ýewklid halkasy hem bolup bilmez, sebäbi her bir Ýewklid halkasy baş ideallar halkasydyr *(5.3-nji bölümçä seret)*. Bu bolsa, §7-de seredilen $P[x]$ halkada ýerine ýetýän Ýewklidiň algoritmini we ondan gelip çykýan netijelerini köp üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy üçin ýaýradyp bolmaýandygyny aňladýar.

$P[x]$ halkanyň esasy netijeleriniň biri bolan islendik köpagzany ýeke-täk usul bilen getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmaklygyň mümkinligi $n \geq 2$ bolan $P[x_1 : x_n]$ halkada hem öz güýjüni saklaýar.

Erkin alnan $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P[x_1 : x_n]$ köpagzany bu halkada getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmagyň mümkinligi ýönekeý subut edilýär. Ýöne, bu dagatmanyň ýeke-täkliginiň subudyna ýeterlik güýç sarp etmeli bolýar. Şonuň üçin hem olara aýratynlykda serederis.

6-njy teorema. *P meýdanda berlen derejesi noldan tapawutly islendik $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzany bu meýdanda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmak mümkin.*

Subudy. $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň derejesine matematiki induksiýa usulyny ulanarys. Eger $deg f = 1$ bolsa ,onda $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagza $P[x_1 : x_n]$ halkada getirilmeýän köpagza bolýar, şoňa görä-de, ony bir sany köpeldijili «köpeltmek hasyly» görnüşinde göz öňüne getirmek bolar.Teoremanyň tassyklamasyny derejesi $1 \leq deg f < m$ şerti kanagatlandyrýan $f(x_1,x_2,\ldots, x_n) \in P[x_1 : x_n]$ köpagza üçin dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, teoremanyň tassyklamasynyň m-nji derejeli köpagza üçin hem dogrulygyny görkezeliň.

Goý, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagza P meýdanyň erkin alnan m-nji derejeli köpagzasy bolsun. Eger ol P meýdanda getirilmeýän bolsa, onda onuň üçin teorema dogry (edil $deg f = 1$ bolandaky ýaly). Eger $f(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ köpagza P meýdanda getirilýän bolsa, onda

$$f(x_1,x_2,\ldots, x_n) = g(x_1,x_2,\ldots,x_n).\ s(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ deg g < deg f = m,\ deg s < deg f = m$$

şertleri kanagatlandyrýan $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $s(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P[x_1 : x_n]$ köpagzalar bardyr. Induksiýanyň güman etmesine görä, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $s(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzalaryň her birini P meýdanda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagadyp bolýar. Netijede, olaryň köpeltmek hasyly bolan $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzany hem P meýdanda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmak bolýar.▶

Indi $P[x_1 : x_n]$ halkada köpagzalaryň getirilmeýän köpagzalara dagatmasynyň ýeke-täkligi baradaky soraga geçeliň. Onuň üçin ilki bilen, dagatmanyň ýeke-täkligine birligiň bölüjisi bolýan köpeldijä çenli we köpeldijileriň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda düşünmekligi şertleşeliň. Indiki beýan etmelerimizde getirilmeýän köpagzalar diýen adalganyň ornuna ýönekeý element adalgany hem ulanarys. $P[x_1 : x_n]$ halkany induktiw kesgitlänimiz üçin *(10.1-nji bölümçä seret)*, indiki tassyklamanyň dogrulygyny bir üýtgeýänli köpagzalar halkasy üçin subut etmek bilen çäkleneris.

7-nji teorema. *Eger S noldan we birligiň bölüjilerinden başga islendik elementini ýönekeý köpeldijilere birbelgili dagadyp bolýan, birlik elementli bütewülik ýaýlasyny emele getirýän bolsa, onda S bütewülik ýaýlasynda berlen bir üýtgeýänli köpagzalaryň* $S[x]$ *halkasy hem şu häsiýete eýedir.*

Köpagzalaryň ýeke-täk bir usul bilen getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmasy baradaky tassyklama 7-nji teoremadan gelip çykýar.

Netije. Derejesi noldan tapawutly bolan islendik $f(x_1,x_2,\dots,x_n) \in P[x_1 : x_n]$ köpagza ýeke-täk usul bilen getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagaýar (hemişelik köpeldijä we köpeldijileriň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda).

Subudy. 7-nji teoremany dogry diýip hasap ederis. Netijäniň tassyklamasyny subut etmek üçin bolsa, n-e görä induksiýany ulanarys. $n = 1$ bolanda bu tassyklama dogry *(7.7-nji bölümçä seret)*. Eger ol $n = k \geq 1$ üçin dogry, ýagny birlik elementli $P[x_1 : x_k]$ bütewülik ýaýlasynda dogry bolsa, onda 7-nji teorema görä, ol $P[x_1 : x_k]$ bütewülik ýaýlasynda berlen x_{k+1} üýtgeýänli köpagzalaryň $P[x_1 : x_k][x_{k+1}] = P[x_1 : x_{k+1}]$ halkasynda hem ýerine ýetýär. Şunlukda, subut edilýän netijäniň tassyklamasy islendik n natural san bolanda dogry bolýar. ►

Şeýlelik bilen, köpagzalaryň ýeke-täk bir usul bilen getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmak meselesi 7-nji teoremany subut etmeklige getirildi. Ony subut etmek üçin bolsa, ilki bilen birnäçe goşmaça tassyklamalary subut ederis.

Bu bölümçede S bilen, noldan we birligiň bölüjilerinden başga, islendik elementini ýönekeý köpeldijilere birbelgili dagadyp bolýan, birlik elementli bütewülik ýaýlasyny belgileýäris. Onda öňden belli maglumatlara görä, aşakdaky tassyklama dogry bolýar.

1-nji lemma. *Noldan tapawutly* $a_1,a_2,\dots,a_n \in S$ *elementleriň islendik tükenikli sistemasynyň, birligiň bölüjisine çenli takyklykda, iň uly umumy bölüjisi ýeke-täkdir.*

3-nji kesgitleme. *Eger noldan tapawutly* $f(x) \in S[x]$ *köpagzanyň koeffisiýentleriniň iň uly umumy bölüjisi bire deň bolsa, onda oňa S-e görä primitiw diýilýär.*

2-nji lemma. $S[x]$ *halkadan alnan islendik iki primitiw köpagzanyň köpeltmek hasyly ýene-de primitiw köpagzadyr.*

Subudy. Goý, $f(x)$, $g(x) \in S[x]$ köpagzalar primitiw köpagzalar bolsun:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Tersinden güman edeliň, ýagny $q(x) = f(x)g(x)$ köpagza S-e görä primitiw bolmasyn. Bu bolsa $q(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň IUUB-siniň birligiň bölüjisi bolmaýan we şoňa görä-de, ýönekeý köpeldijilere dagaýan d elemente deňdigini aňladýar. Goý, p şeýle köpeldijileriň biri bolsun. $f(x)$ primitiw köpagzanyň koeffisiýentleriniň hiç biri hem p elemente bölünmeýär. Goý, p elemente bölünmeýän koeffisiýentleriniň arasynda iň kiçi indekslisi a_k bolsun. Edil şeýle edip, p elemente bölünmeýän b_j koeffisiýentleriň arasynda iň kiçi indekslisini b_l diýip kesgitläliň. $q(x)$ köpagzanyň x^{k+1} üýtgeýäne degişli C_{k+1} koeffisiýentine seredeliň:

$$C_{k+l} = \sum_{i+j=k+l} a_i b_j.$$

Bu jemde diňe bir sany $a_k\, b_l$ goşulyjy p elemente bölünmeýär we galan goşulyjylar p elemente bölünýär, sebäbi olarda ýa-ha i indeks k sandan kiçi ýa-da j indeks l-den kiçidir (hemişe bolşy ýaly, $i > n$ bolanda $a_i = 0$, $j > m$ bolanda bolsa $b_j = 0$). Ýöne, bu ýagdaýda C_{k+1} koeffisiýent p sana bölünmez, bu bolsa biziň güman etmämize garşy gelýär.

Goý, T köplük S bütewülik ýaýlasynda berlen paýlar meýdany bolsun. T meýdanda berlen $T[x]$ köpagzalaryň halkasyna, ýagny her bir $\varphi(x)$ köpagzasyny

$$\varphi(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0};\ a_i, b_i \in S(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (22)$$

görnüşde aňladyp bolýan köpagzalaryň halkasyna seredeliň.

$T[x]$ halkada (§7-niň 8-nji teoremasyna görä) derejesi noldan uly her bir köpagzany getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna birbelgili dagadyp bolýar. $T[x]$ halkadan $S[x]$ halka geçmek üçin, her bir $\varphi(x) \in T[x]$ köpagza aşakdaky düzgün bilen käbir $f_\varphi(x) \in S[x]$ primitiw köpagzany degişli edeliň.

Goý, $\varphi(x)$ noldan tapawutly köpagza $T[x]$ halkanyň (22) görnüşde aňladyp bolýan köpagzasy bolsun. $\varphi(x)$ köpagzany $b = b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n \in S$ elemente köpeldip, $S[x]$ halka degişli bolýan $\varphi(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriň iň uly umumy bölüjisini a bilen belgiläliň. Onda

$$f_\varphi(x) = \frac{b\varphi(x)}{a} \qquad (23)$$

köpagza $S[x]$ halkada primitiw köpagza bolýar. Oňa $\varphi(x) \in T[x]$ köpagza degişli edilen diýilýär.

3-nji lemma. *$\varphi(x) \mapsto f_\varphi(x)$ degişlilik birligiň bölüjisine çenli takyklykda özara birbelgili kesgitlenendir. Başgaça aýdylanda, her bir noldan tapawutly $\varphi(x) \in T[x]$ köpagza degişli edilen $f_\varphi(x) \in S[x]$ köpagza S halkanyň birliginiň bölüjisine çenli takyklykda kesgitlenendir; şol bir $f_\varphi(x) = f_\psi(x) \in S[x]$ primitiw köpagza degişli edilýän $\varphi(x)$, $\psi(x) \in T[x]$ iki köpagza, $T[x]$ halkanyň birliginiň bölüjisine çenli takyklykda gabat gelýär.*

10. sargyt № 749

Subudy. *a*) (23) formuladan görnüşi ýaly, $f_\varphi(x)$ köpagzanyň birbelgili kesgitlenmeýänligi $b\varphi(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň iň uly umumy bölüjisi bolan a-nyň birbelgili kesgitlenmeýanligi bilen baglydyr. Sebäbi, S halkanyň elementleriniň iň uly umumy bölüjisi S halkanyň birliginiň bölüjisine çenli takyklykda kesgitlenýär, onda bu $f_\varphi(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri üçin hem dogrudyr.

b) goý, $\varphi(x)$, $\psi(x)$-köpagzalar $T[x]$ halkanyň noldan tapawutly köpagzalary, $f_\varphi(x)=\frac{b}{a}\varphi(x)$, $f_\psi(x)=\frac{d}{c}\psi(x)$ köpagzalar bolsa, olara degişli edilen $S[x]$ halkanyň primitiw köpagzalary bolsun. Eger $f_\varphi(x)=f_\psi(x)$ bolsa, onda

$$\frac{b}{a}\varphi(x)=\frac{d}{c}\psi(x)\Rightarrow\varphi(x)=\frac{ad}{bc}\psi(x)$$

bolar. $\frac{ad}{bc}$ element $T[x]$ halkanyň birliginiň bölüjisi bolany üçin, noldan tapawutly, şoňa görä-de a,b,c,d elementler S halkanyň noldan tapawutly elementleri bolýar. ►

4-nji lemma. $\omega(x)\in T[x]$ *köpagzanyň* $T[x]$ *halkada getirilýän bolmagy üçin* $f_\omega(x)\in S[x]$ *köpagzanyň S halkada getirilýän bolmagy zerur we ýeterlik, özi hem* $\omega(x)$ *getirilýän bolanda,* $\omega(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)\Leftrightarrow f_\omega(x)=f_\varphi(x)f_\psi(x)$ *(degişli birlikleriň bölüjilerine çenli takyklykda) gatnaşyk ýerine ýetýär.*

Subudy. Goý, $\omega(x)\in T[x]$ we $\omega(x)=\varphi(x).\ \psi(x)$ bolsun. (23) düzgün boýunça $f_\varphi(x)=\frac{b}{a}\varphi(x)$, $f_\psi(x)=\frac{d}{c}\psi(x)$ deňlikler dogry. Bu ýerden $\omega(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=$ $=\frac{a}{b}f_\varphi(x)\cdot\frac{c}{d}f_\psi(x)=\frac{ac}{bd}f_\varphi(x)f_\psi(x)$, ýagny $\omega(x)=\frac{ac}{bd}f_\varphi(x)f_\psi(x)$ deňligi alarys. Ikinji tarapdan, (23) düzgün boýunça

$$f_\omega(x)=\frac{q}{p}\,\omega(x)=\frac{qac}{pbd}f_\varphi(x)f_\psi(x). \tag{24}$$

2-nji lemma görä, $S[x]$ halkada $f_\varphi(x)\cdot f_\psi(x)$ köpagza primitiw köpagzadyr. $f_w(x)$ köpagza hem $S[x]$ halkada primitiw. Onda (24) deňlikden $\frac{qac}{pbd}=\xi$ elementiň S halkanyň elementi bolýandygy gelip çykýar, özi hem ol bu halkanyň birliginiň bölüjisi bolýar. Hakykatdan hem, ξ gysgalmaýan drob bolup bilmez, sebäbi $j=\frac{l}{m}$, $(l,m)=1$, $m\neq 1$ bolan ýagdaýynda $f_\varphi(x)\,f_\psi(x)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri m elemente bölünerdi, bu bolsa, $f_\varphi(x)\,f_\psi(x)$ köpagzanyň primitiwligine garşy gelýär, netijede, $\xi\in S$. Primitiw köpagzanyň ähli koeffisiýentleri ξ-ge bölünýän bolsa, onda ξ- birligiň bölüjisi bolýar. Şeýlelik bilen, $f_\omega(x)$ köpagza $f_\varphi(x)\,f_\psi(x)$ köpagza bilen gabat gelýär (S halkanyň birliginiň bölüjisine çenli takyklykda).

Goý, tersine $f_\omega(x)=f_\varphi(x)\,f_\psi(x)$ bolsun, onda $\frac{q}{p}(x)=\frac{ad}{bc}\,\varphi(x)\psi(x)$ ýa-da $\omega(x)=$

$= \dfrac{pbd}{qac}\varphi(x)\psi(x)$, ýagny $\omega(x) = \varphi(x)\psi(x)$ deňlik $T[x]$ halkanyň birliginiň bölüjisine çenli takyklykda ýerine ýetýär.

Şunlukda,

$$\omega(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \Leftrightarrow f_{\omega}(x) = f_{\varphi}(x)\, f_{\psi}(x) \tag{25}$$

gatnaşygyň dogrulygy görkezildi. Indi, $\omega(x)$ köpagzanyň T halkada getirilýän bolmagy üçin, $f_{\omega}(x)$ köpagzanyň S halkada getirilýän bolmagynyň zerur we ýeterlikdigi düşnükli boldy, sebäbi (23) düzgüne görä $degf_{\varphi} = deg\varphi$, $degf_{\psi} = deg\psi$ deňlik ýerine ýetýär we şoňa görä-de, $T[x]$ halkada $\omega(x)$ köpagzanyň derejesi noldan tapawutly köpeldijilere dagatmak mümkinçiligi, $f_{\omega}(x)$ köpagzanyň $S[x]$ halkada derejesi noldan tapawutly köpeldijilere dagamak mümkinçiligine deňgüýçli bolýar.

Eger $deg\omega > 1 \Leftrightarrow degf_{\omega} > 1$ gatnaşygy hasaba alsak, onda (25) gatnaşykdan, $\omega(x)$ köpagzanyň $T\,[x]$ halkada getirilmeýän köpagza bolmagy üçin, $f_{\omega}(x)$ köpagzanyň $S[x]$ halkada getirilmeýän bolmagy zerur we ýeterlikdir. ►

Ýokardaky aýdylanlardan peýdalanyp, 7-nji teoremany subut edip bolýar.

Subudy. 1. Ilki bilen, noldan tapawutly we birligiň bölüjisi bolmaýan islendik $f(x)$ primitiw köpagzanyň $S[x]$ halkada getirilmeýän (ýönekeý) köpeldijilere birbelgili dagaýandygyny görkezeliň. Eger $deg\,f = 0$ bolsa, onda $f(x) = a \in S$. Teoremanyň şertine görä, $a \in S$ islendik hemişelik ($a \neq 0$ we birligiň bölüjisi däl) ýönekeý köpeldijilere birbelgili dagaýar. Onda bu ýagdaýda teorema dogry. Eger $deg\,f \geq 1$ bolsa, onda $T[x]$ halkadan $f(x) = f_{\varphi}(x)$ şerti kanagatlandyrýan $\varphi(x)$ köpagzany alalyň. Şeýle köpagza 3-nji lemma görä bar we ýeke-täkdir (birligiň bölüjisine çenli we köpeldijileriň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda). 4-nji lemma görä bolsa, bu dagatma $f(x)$ köpagzanyň $S[x]$ halkadaky ýeke-täk usul bilen dagatmasyna gabat gelýär. Şonuň bilen, primitiw köpagza bolan ýagdaýynda, teoremanyň tassyklamasy subut edildi.

2. Eger $f(x) \neq 0$ bolan $f(x) \in S[x]$ köpagza primitiw bolmasa, onda ony $f(x) = dg(x)$ görnüşinde aňlatmak bolar, bu ýerde d element $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň iň uly umumy bölüjisi, $g(x)$ köpagza bolsa S-e görä primitiw. $d \in S$ elementiň ýönekeý köpeldijilere dagatmasynyň birbelgili kesgitlenýänligi teoremanyň şertinden gelip çykýar. $g(x)$ köpagzanyň getirilmeýän köpeldijilere dagatmasynyň birbelgililigi bolsa, teoremanyň subudynyň 1 bölüminde görkezildi. ►

$n \geq 2$ bolanda, $P[x_1 : x_n]$ halkada kesgitlenen bölünijilik gatnaşygy bir üýtgeýänli köpagzalar halkasynda kesgitlenen bölünijilik gatnaşygyndan düýpgöter tapawutlanýar. Meselem, 8.3-nji bölümçeden belli bolşy ýaly, islendik P meýdan üçin we bu meýdanda getirilmeýän, derejesi ikiden uly bolan islendik $f(x)$ köpagzanyň (P meýdanyň käbir giňeltmesi bolýan) dagatma meýdany bardyr. Köp üýtgeýänli köpagzalar halkasynda bolsa beýle zat bolup bilmeýär. Meselem, $f(x,y) = x^m + y$ köpagza islendik meýdanda getirilmeýär.

§11. Simmetrik köpagzalar

11.1. Simmetrik köpagzalaryň kesgitlenişi we ýönekeý häsiýetleri

Köp üýtgeýänli köpagzalaryň wajyp görnüşiniň biri-de simmetrik köpagzalar diýip atlandyrylýan köp üýtgeýänli köpagzalaryň toplumydyr.

Kesgitleme. *Eger* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *üýtgeýänleriň (bu ýerde* $i_j (j = 1,2,\ldots,k \le n$ *indeksler* $\{1,2,\ldots,n\}$ *köplükden alnan jübüt-jübütden dürli elementlerdir) islendik orunçalyşmasynda* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *köpagza deň bolan köpagza alynsa, onda* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *köpagza* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *üýtgeýänlere görä simmetrik köpagza diýilýär. Eger* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *köpagza* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *üýtgeýänleriň ählisine görä simmetrik bolsa, onda oňa* **simmetrik köpagza** *diýilýär.*

Islendik hemişelige, ýagny P meýdanyň elementine $P[x_1 : x_n]$ halkada simmetrik köpagza hökmünde seretmek bolýar.

1-nji mysal. Simmetrik we simmetrik däl köpagzalara mysallar getiriň.

Çözülişi. $f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x_1,x_2) = x_1x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + x_1^2x_2 + 5$ köpagzalar simmetrik köpagzalardyr, sebäbi $f_1(x_2,x_1) = x_2^2 + x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 = f_1(x_1,x_2)$; $f_2(x_2,x_1) = x_2x_1^2 + 3x_2x_1 - 2x_2 - 2x_1 + x_2^2x_1 + 5 = x_1x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 +$ $+ x_1^2x_2 + 5 = f_2(x_1,x_2)$.

$f_3(x_1,x_2,x_3) = 2x_2^2 + x_2x_1 + x_2x_3$ köpagza x_1 we x_3 üýtgeýänlere görä simmetrik, ýöne x_2, x_3 üýtgeýänlere görä simmetrik däl. Şonuň üçin hem, bu köpagza simmetrik köpagza däldir.

Biz Wiýetiň teoremasyny öwrenmek bilen simmetrik köpagzalaryň wajyp mysallaryna gabat gelipdik *(14.3-nji bölümçä seret)*. Eger $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots +$ $+ a_1x + a_0$ köpagzanyň köklerini $x_1,x_2,\ldots,x_n$ bilen belgilesek, onda Wiýetiň teoremasyny aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2},$$

$$\overline{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_0.$$

Bu formulalaryň çep tarapyny, degişlilikde, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ bilen belgiläp aşakdaky deňlikleri alarys:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ \delta_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\rule{6cm}{0.4pt} \\ \delta_n &= x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Eger $x_1, x_2, \ldots, x_n$ köklere üýtgeýänler hökmünde seretsek, onda $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ bu üýtgeýänlere görä simmetrik köpagza bolýar. (1) köpagzalara **ýönekeý simmetrik** köpagzalar diýilýär.

Indi bolsa, simmetrik köpagzalaryň käbir häsiýetlerine seredeliň:

1. *P meýdanda berlen n üýtgeýänli simmetrik köpagzalaryň jemi, tapawudy we köpeltmek hasyly ýene-de bu meýdanda kesgitlenen simmetrik köpagzadyr.*

2. *P meýdanda berlen n üýtgeýänli ähli simmetrik köpagzalaryň köplügi* $P[x_1 : x_n]$ *bitewülik ýaýlasynyň bölek halkasy bolýar.*

Bu häsiýet gönüden-göni birinji häsiýetden gelip çykýar. Simmetrik köpagzalaryň emele getirýän bölek halkasynyň hem birlik elementli bitewülik ýaýlasyny emele getirýändigi düşnükli.

3. *Eger* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *simmetrik köpagza*

$$Mx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_i^{l_i}\ldots x_j^{l_j}\ldots x_n^{l_n} \tag{2}$$

agzany özünde saklaýan bolsa, onda ol $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *dereje görkezijileriň çalşyrmalarynyň kömegi bilen emele getirilen ähli* (2) *görnüşli agzalary hem özünde saklaýar.*

Subudy. Belli bolşy ýaly *(1.2-nji bölümçä seret)*, derejeleriň emele getirýän islendik çalşyrmasyny $l_1, l_2, \ldots, l_n$ çalşyrmanyň üstünde tükenikli gezek transpozisiýa amalyny geçirip almak bolar. Onda (2) agzanyň derejeleriniň islendik ikisiniň üstünde transpozisiýa amalyny geçirip, alnan agzanyň $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ simmetrik köpagzanyň agzasy bolýandygyny görkezmek ýeterlik. (2) agzanyň, meselem l_i we l_j derejeleriniň ýerini çalşyp,

$$Mx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_i^{l_j}\ldots x_j^{l_i}\ldots x_n^{l_n} \tag{3}$$

agzany alarys. Simmetrik köpagzanyň kegitlemesine görä,

$f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ deňlik dogry. Ýöne, bu köpagzalaryň ikinjisi (3) agzany özünde saklaýar, sebäbi ony $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ köpagzanyň (2) agzasyndan x_i we x_j näbellileriň ornuny çalşyp almak bolýar. Şonuň üçin hem, köpagzalaryň kanonik görnüşde ýazylyşynyň ýeke-täkligini hasaba alsak, onda berlen simmetrik köpagza (3) agzany hem özünde saklaýar. ►

4. *Eger*

$$Ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_i^{l_i}x_{i+1}^{l_{i+1}}\dots x_n^{l_n} \tag{4}$$

agza berlen simmetrik köpagzanyň iň ýokary agzasy bolsa, onda $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ *deňsizlik ýerine ýetýär.*

Subudy. Tersinden güman edeliň, ýagny käbir i üçin $l_i < l_{i+1}$ deňsizlik ýerine ýetýär diýeliň. 3-nji häsiýet esasynda, berlen simmetrik köpagza (4) agza bilen bilelikde

$$Ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_i^{l_{i+1}}x_{i+1}^{l_i}\dots x_n^{l_n} \tag{5}$$

agzany hem özünde saklaýar.

Ýöne, $l_{i+1} > l_i$ deňsizlik (5) agzanyň (4) agzadan ýokary agza bolýandygyny görkezýär, ýagny (4) agza berlen simmetrik köpagzanyň iň ýokary agzasy bolmaýar. Bu bolsa tassyklamanyň şertine garşy gelýär, alnan garşylyk bolsa biziň güman etmämiziň nädogrudygyny aňladýar. ▶

11.2. Simmetrik köpagzalar baradaky esasy teorema

Indiki subut etjek teoremamyz hem algebranyň esasy teoremalaryň biri hasaplanýar.

1-nji teorema. *P meýdanda berlen n üýtgeýänli islendik* $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *simmetrik köpagzany* $x_1,x_2,\dots,x_n$ *üýtgeýänli* $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n$ *ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladyp bolýar.*

Subudy. Teoremanyň subudyna başlamazdan öňürti käbir bellikleri edeliň:

1) berlen n üýtgeýänli simmetrik köpagzada derejesi kesgitli bir l sana deň bolan dürli agzalaryň sany tükeniklidir. Ol san, l sany n elementli tertipleşen otrisatel däl goşulyjylaryň jemi görnüşinde ýazyp boljak usullaryň sanyndan uly däldir. Meselem, $l = 5$, $n = 2$ bolanda, $5 = 0 + 5$; $5 = 1 + 4$; $5 = 2 + 3$; $5 = 3 + 2$; $5 = 4 + 1$; $5 = 5 + 0$ mümkinçilikleri alarys;

2) teoremany birjynsly simmetrik köpagzalar üçin subut etmek ýeterlik, sebäbi islendik simmetrik köpagzany birjynsly simmetrik köpagzalaryň jemi görnüşinde ýazyp bolýar. Hakykatdan hem, öň belleýşimiz ýaly, erkin alnan köpagza dürli derejeli birjynsly köpagzalaryň jeminden durýar. Eger berlen köpagza simmetrik köpagza bolsa, onda ony düzýän birjynsly köpagzalar hem simmetrikdir. Sebäbi $x_1,x_2,\dots, x_n$ üýtgeýänleriň islendik orunçalyşmasynda birjynsly simmetrik köpagzanyň hiç bir agzasynyň derejesi üýtgemeýär. Bu bolsa, simmetrik köpagzada üýtgeýänleriň islendik orunçalyşmasynda onuň birjynsly bölekleriniň üýtgewsiz galýandygyny aňladýar;

3) islendik simmetrik köpagzanyň iň ýokary $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ agzasyny $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ ýönekeý simmetrik köpagzalaryň iň ýokary agzalarynyň käbir köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolýar. Ony almak üçin,

$$\delta_1^{l_1-l_2}\delta_2^{l_2-l_3}\ldots\delta_{l_{n-1}}^{l_{n-1}-l_n}\delta_{l_n}^{l_n} \tag{6}$$

köpeltmek hasylyna seredeliň. Simmetrik köpagzalaryň 4-nji häsiýetine görä ähli $l_1-l_2, l_2-l_3,\ldots,l_n$ dereje görkezijiler otrisatel däl, şoňa görä-de, (6) köpeltmek hasyly $x_1,x_2,\ldots,x_n$ üýtgeýänlere görä köpagza bolýar. 10.2-nji bölümçede seredilen lemma görä, bu köpagzanyň iň ýokary agzasy $\delta_1^{l_1-l_2},\delta_2^{l_2-l_3},\ldots,\delta_{n-1}^{l_{n-1}-l_n},\delta_n^{l_n}$ köpagzalaryň iň ýokarky agzalarynyň köpeltmek hasylyna deň. Çünki $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ köpagzalaryň, degişlilikde, iň ýokary agzalary $x_1; x_1x_2,\ldots;\ x_1x_2\ldots x_{n-1};\ x_1\ x_2\ldots x_{n-1}\ x_n$ bolup, (6) köpeltmek hasylyň iň ýokary agzasy

$$x_1^{l_1-l_2}(x_1x_2)^{l_2-l_3}\ldots(x_1x_2\ldots x_{n-1})^{l_{n-1}-l_n}(x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n)^{l_n}$$

bolýar, ýagny $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ agza bilen gabat gelýär.

Agzalan belliklerden soň teoremany subut etmek kyn bolmaz.

2-nji bellikden soň seredilýän $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzany birjynsly diýip hasap etmek bolar, onuň derejesi m-e deň diýeliň. Goý, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň iň ýokary agzasy

$$Ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n} \tag{7}$$

görnüşde bolsun.

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\delta_1^{l_1-l_2}\delta_2^{l_2-l_3}\ldots\delta_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\delta_n^{l_n}$$

simmetrik köpagzany guralyň. 3-nji bellige görä, bu köpagzanyň iň ýokary agzasy (7) aňlatma deň. Ondan başga-da, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ birjynsly köpagza, sebäbi onuň $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ ähli köpeldijileri birjynsly köpagza. $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ we $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzalar şol bir iň ýokary agza eýe bolany üçin, olaryň derejeleri deň.

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

köpagza seredeliň. $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň hem m derejeli birjynsly köpagza boljakdygy düşnükli. Ýöne, bu köpagza indi ähli mümkin bolan m derejeli agzalary özünde saklamaýar. Hakykatdan hem, $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagza (7) görnüşli agzany özünde saklamaýar, sebäbi olar $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tapawutda biri-biri bilen gysgalyp gidýär. Şeýle hem, bu tapawutda (7) görnüşde ýazylan iň ýokary agzanyň $l_1,l_2,\ldots,l_n$ derejeleriniň orunçalşyrylmasynyň kömegi bilen ýasalýan ähli agzalary hem biri-biri bilen gysgalyp gidýär. Sebäbi, 11.1-nji bölümçedäki 3-nji häsiýete görä, bu agzalaryň ählisi hem $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ we $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzalaryň düzümine girýär.

Indi, $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň (7) görnüşli agzalardan başga agzalary özünde saklaýandygy düşnükli boldy. Goý, $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň iň ýokary agzasy

$$Bx_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \tag{8}$$

görnüşde bolsun.

$$g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = B\delta_1^{m_1-m_2}\delta_2^{m_2-m_3}\ldots\delta_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}\delta_n^{m_n}$$

köpagzany gurup, $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) - g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ deňlik bilen,

(7) we (8) agzalaryň hiç birini özünde saklamaýan, ýöne olardan pes agzalary özünde saklamagy mümkin bolan *m* derejeli $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ birjynsly simmetrik köpagzany alarys. 1-nji bellige görä, *m* derejeli agzalaryň köplügi tükenikli bolany üçin, bu yzygiderligi dowam edip, käbir ädimden soň *m* derejeli agzalaryň hiç birini hem saklamaýan, nola deň bolan

$$f_{k+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) - g_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

tapawudy alarys. Onda alnan

$$\begin{aligned} f_1 &= f - g, \\ f_2 &= f_1 - g_1, \\ &\overline{\qquad\qquad} \\ f_k &= f_{k-1} - g_{k-1}, \\ 0 &= f_k - g_k \end{aligned}$$

tapawutlardan

$$f = g + g_1 + \cdots + g_{k-1} + g_k$$

deňlik gelip çykýar. $g,g_1,\ldots,g_{k-1}, g_k$ köpagzalaryň her biri bolsa, $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ ýönekeý simmetrik köpagzalaryň köpeltmek hasylyndan emele gelýändigi üçin, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagza $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ üýtgeýänlere görä köpagza bolýar, ýagny

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n) \tag{9}$$

deňlik ýerine ýetýär.

$\varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ köpagzanyň koeffisiýentleri $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üstünde goşmak, köpeltmek amallaryny ýerine ýetirip alynýandygy üçin, olar hem *P* meýdanyň elementleri bolýar. ▶

Teoremanyň subudyna görä, $\varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ köpagzanyň koeffisiýentleri diňe bir *P* meýdanyň elementleri bolman, eýsem, olar $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzany döredýän *P* meýdanynyň bölek halkasy bolýandygyny hem belläliň. Bu ýerden bolsa, meselem, eger $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň koeffisiýentleri bitin san bolsa, onda $\varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň hem bitin san bolmalydygy gelip çykýar.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik köpagzanyň (9) görnüşde aňladylyşynyň ýeke-täkligi baradaky teorema hem dogrudyr.

2-nji teorema. *Simmetrik köpagzanyň ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladylyşy ýeke-täkdir.*

Subudy. Teoremany tersinden güman edip subut edeliň. Ýagny $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P[x_1 : x_n]$ simmetrik köpagzany iki usulda ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladyp bolýar diýeliň:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n),$$
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_2(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

$\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \varphi_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) - \varphi_2(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ tapawudy iki hili göz öňüne getirsek bolar:

1) bu tapawudy P meýdanda berlen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ üýtgeýänlere bagly $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ köpagza görnüşinde, ýagny

$$A_i \delta_1^{k_{1i}} \delta_2^{k_{2i}} \dots \delta_n^{k_{ni}}, \quad A_i \in P \tag{10}$$

görnüşdäki dürli agzalaryň jemi görnüşinde göz öňüne getirmek bolar. Güman etmämiz boýunça φ_1 we φ_2 köpagzalar dürli bolmaly. Şonuň üçin hem φ köpagza noldan tapawutly, ýagny A_i koeffisiýentleriň arasynda noldan tapawutlysy bar;

2) bu tapawuda $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ köpagzanyň ähli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ üýtgeýänlerini $x_1, x_2, \dots, x_n$ üýtgeýänler arkaly aňladyp, alnan P meýdanda berlen $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ köpagza hökmünde seretmek, ýagny ony

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_n, x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \dots, x_1x_2 \dots x_n)$$

görnüşde göz öňüne getirmek bolar. Bu köpagzalar $P[x_1 : x_n]$ halkanyň nol elementine deň, sebäbi φ_1 we φ_2 köpagzalaryň $\delta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ üýtgeýänlerini $x_1, x_2, \dots, x_n$ arkaly aňladanymyzda olaryň ikisi hem $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ köpagza öwrülýärler.

Eger $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ tapawudy ýokardaky ýaly iki hili göz öňüne getirmäniň her birinde garşylyga gelsek, onda teoremany subut etdigimiz bolýar. Şonuň üçin, $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ köpagzanyň A_i noldan tapawutly koeffisiýentleriniň barlygyndan $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ köpagzanyň hem noldan tapawutly koeffisiýentleriniň barlygynyň gelip çykýandygyny görkezmek ýeterlik.

Goý, $A\delta_1^{k_1} \delta_2^{k_2} \dots \delta_n^{k_n}$ agza $\varphi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ köpagzanyň noldan tapawutly agzalarynyň biri bolsun. Bu agzada ähli $\delta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ üýtgeýänleriň ornuna olaryň $x_1, x_2, \dots, x_n$ üýtgeýänleriň üsti bilen aňlatmasyny goýsak, onda käbir $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ köpagzany alarys. Bu köpagzanyň iň ýokary agzasy köpeldijileriň iň ýokary agzalarynyň köpeltmek hasylyna

$$Ax_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\ldots(x_1x_2\ldots x_{n-1})^{k_{n-1}}(x_1x_2\ldots x)^{k_n} = Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}, \text{ bu ýerde}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n, \\ m_2 &= k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1} + k_n, \\ &\rule{10cm}{0.4pt} \\ m_{n-1} &= k_{n-1} + k_n, \\ m_n &= k_n \end{aligned} \tag{11}$$

deň bolar. (11) deňliklerden görnüşi ýaly, diňe bir $k_1,k_2,\ldots,k_n$ dereje görkezijiler $m_1,m_2,\ldots,m_n$ dereje görkezijileri birbelgili kesgitlemän, eýsem, $m_1,m_2,\ldots,m_n$ dereje görkezijiler hem $k_1,k_2,\ldots,k_n$ dereje görkezijileri birbelgili kesgitleýär, sebäbi

$$k_j = m_j - m_{j+1} (j = 1,2,\ldots,n-1) \text{ we } k_n = m_n.$$

Indi $\varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$ köpagzanyň noldan tapawutly (10) görnüşli dürli agzalarynyň, noldan tapawutly dürli ýokary agzaly $x_1,x_2,\ldots,x_n$ üýtgeýänli köpagza öwrülýändigi düşnükli. Bu ýokary agzalaryň arasynda iň ýokarkysy $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň noldan tapawutly iň ýokary agzasy bolýar. Ol $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň kanonik aňlatmasyna hem iň ýokary agza bolup girýär. Şoňa görä-de, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq 0$ bolar. ►

Esasy teoremanyň subudy konstruktiw häsiýete eýe, şonuň üçin hem ony simmetrik köpagzalary ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmak meselesini çözmekde ulanyp bolar.

Simmetrik köpagzalaryň ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmasynyň ýeke-täkligini göz öňüne tutsak (2-nji teorema), onda ol aňlatmany tapmak üçin, näbelli koeffisiýentler usulyndan hem peýdalanmak bolar.

Mysal. ***Q*** meýdanda

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 5$$

simmetrik köpagzany ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladyň.

Çözülişi. Bu köpagzany dürli derejeli birjynsly simmetrik köpagzalaryň jemi görnüşinde ýazalyň:

$$f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1,x_2,x_3) - 4f_2(x_1,x_2,x_3) + 5,$$

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Ilki bilen, $f_1(x_1,x_2,x_3)$ simmetrik köpagzany ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňladalyň. Onuň iň ýokary agzasy $x_1^2x_2$ bolar. 1-nji teoremanyň subudyna laýyklykda $f_1(x_1,x_2,x_3)$ köpagzadan

$$g(x_1,x_2,x_3) = A_1\delta_1^{2-1}\delta_2^{1-0}\delta_3^{0} = A_1\delta_1\delta_2$$

köpagzany aýyrmaly, sebäbi ýokary agzanyň derejesini düzýän sanlar 2,1,0. Ýöne bu aýyrmagy ýerine ýetirmekligiň zerurlygy ýok, bu dereje görkezijileriň kömegi bilen emele getirilýän $\varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_3)$ köpagzanyň agzalaryny näbelli koeffisiýentler bilen ýazyp olary tapmak ýeterlik. Ýokarda A_1 koeffisiýentiň bahasynyň 1-e deň bolýandygy düşnükli, sebäbi $f_1(x_1,x_2,x_3)$ köpagzanyň iň ýokary agzasynyň koeffisiýenti 1-e deň.

$f_1(x_1,x_2,x_3) - g(x_1,x_2,x_3)$ tapawutda 2,1,0 dereje görkezijileriň islendik çalşyrmasy bilen emele getirilýän $f_1(x_1,x_2,x_3)$ köpagzanyň ähli baş agzalary ýok bolup gidýär. Ýöne, baş agzadan pes bolan 3-nji derejeli başga agzalarynyň emele gelmegi mümkin. Düzgün boýunça biziň ýagdaýymyzda dereje görkezijileriň ulgamy 1,1,1 görnüşde bolar. Netijede, ikinji ädimde, alnan tapawutdan

$$g_1(x_1,x_2,x_3) = A_2\delta_1^{1-1}\delta_2^{1-1}\delta_3^{1} = A_2\delta_3$$

simmetrik köpagzany aýyrmaly bolar. Üçünji derejeli agzalaryň arasynda dereje görkezijileriniň ulgamy 1,1,1 bolan agzadan pes agza ýok bolany üçin, seredilýän $f(x_1,x_2,x_3)$ köpagzany

$$g_1(x_1,x_2,x_3) = \delta_1,\delta_2 + A\delta_3$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde A_2 näbelli koeffisiýent. Soňky deňligi ýazgyn görnüşinde ýazalyň:

$$x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + A_2x_1x_2x_3.$$

A_2 – näbelli koeffisiýenti tapmak üçin, x_1,x_2,x_3 üýtgeýänlere özümize amatly bolan käbir takyk bahany bermek ýeterlik, meselem, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ diýeliň. Bu bahalary ýokarky deňlikde ornuna goýup, $6 = 9 + A_2$ deňlemäni alarys. Bu ýerden $A_2 = -3$ bolýandygy görünýär.

Şeýlelikde,

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = \delta_1\,\delta_2 - 3\delta_3$$

deňlik alynýar.

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

köpagza hem edil ýokardaky ýaly çemeleşilýär. Bu ýerde mümkin bolan dereje görkezijileriň ulgamy 2,0,0 we 1,1,0 bolar. Şonuň üçin hem aýyrmaly köpagzalar

$$g_2(x_1,x_2,x_3) = \delta_1^{2-0}\delta_2^{0-0}\delta_3^{0} = \delta_1^{2},$$

$$g_3(x_1,x_2,x_3) = B\delta_1^{1-1}\delta_2^{1-0}\delta_3^{0} = B\delta_2$$

görnüşde bolar. Şoňa laýyklykda, $f_2(x_1,x_2,x_3)$ köpagzany $f_2(x_1,x_2,x_3) = \delta_1^2 + B\delta_2$ görnüşde göz öňüne getirip we $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ bahalary berip, $3 = 9 + 3B$ deňlemäni alarys. Bu ýerden $B = -2$ we

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \delta_1^2 - 2\delta_2 \tag{12}$$

aňladyşy alarys.

Şeýlelik bilen, gutarnykly ýagdaýda

$$f(x_1,x_2,x_3) = \delta_1\delta_2 - 3\delta_3 - 4(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 5$$

deňligi alarys.

Simmetrik köpagzalar baradaky esasy teoremadan gelip çykýan bir sany wajyp netijä seredeliň.

Goý, P meýdanda x üýtgeýänli n-nji derejeli käbir köpagza berlen bolsun:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{13}$$

Bu köpagzanyň köklerini $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ bilen belgiläliň; olaryň P meýdana degişli bolmazlygy hem mümkin, ýöne olar hökman P meýdanyň käbir Δ giňeltmesine degişli bolar. Indi P meýdanda berlen n üýtgeýänli erkin $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ simmetrik köpagzany alalyň. Simmetrik köpagzalar baradaky esasy teorema görä, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ simmetrik köpagzany ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen P meýdanda

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \varphi(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)$$

görnüşde ýazyp bolýar.

$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzada x_1 üýtgeýäniň ornuna α_1-i, x_2 üýtgeýäniň ornuna α_2-ni, x_n üýtgeýäniň ornuna α_n-i goýalyň. Ähli α_i kökleriň P meýdanyň Δ giňeltmesine degişli bolýandygy üçin, $g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ hem Δ meýdanyň elementi bolýar. Ýöne, simmetrik köpagzalara mahsus häsiýete görä, $g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ element berlen P meýdanyň elementi bolmaly. Hakykatdan hem, Wiýetiň formulalaryna laýyklykda ýönekeý simmetrik köpagzalaryň bahalaryny (13) köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňlatmak bolar, ýagny

$$\delta_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -a_{n-1},$$

$$\delta_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_{n-2},$$

$$\delta_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n a_0$$

deňlikler dogry. Bu deňliklere baglylykda

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = (-a_{n-1},a_{n-2},\ldots,(-1)^n a_0)$$

deňlik alynýar. Indi $g(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ elementiň P meýdanyň elementi bolýandygy görünýär, sebäbi $a_i \in P$ $(i = 0,1,2,\ldots, n - 1)$ elementleriň jeminiň we köpeltmek hasylynyň netijesi we $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P[x_1{:}x_n]$ köpagzanyň koeffisiýentleri P meýdanyň elementleri bolýar.

Şeýlelikde, aşakdaky teorema subut edildi.

3-nji teorema. *Eger $f(x)$ köpagza P meýdanda berlip, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ köklere eýe bolsa (kökleriň hemmesiniň P meýdana degişli bolmazlygy hem mümkin), onda islendik $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P\,[x_1{:}x_n]$ simmetrik köpagza $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2,\ldots,x_n = \alpha_n$ bahalarda P meýdanyň elementine öwrülýär.*

11.3. Simmetrik köpagzalaryň ulanylyşy

Algebrada we matematikanyň beýleki bölümlerinde simmetrik köpagzalar teoriýasynyň netijeleri birnäçe ýerlerde netijeli ulanylýar. Simmetrik köpagzalar baradaky esasy teoremany ulanyp, kompleks sanlar meýdanynyň algebraik ýapyklygy baradaky fundamental tassyklamany subut edip bolýar (§13). Bu teoremany algebraik deňlemeleri radikallarda çözmek meselesini öwrenmekde hem ulanmak bolar. §12-de simmetrik köpagzalar nazaryýetini algebraik deňlemeleri çözmekde ulanarys.

Bu bölümçede bellibir derejede mekdep matematikasy bilen baglanyşykly bolan simmetrik köpagzalaryň kömegi bilen çözülýän ýönekeý meselelere serederis.

1. Drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak

Bu meselä mekdep matematikasynda algebraik aňlatmalar ýönekeýleşdirilende, irrasional deňlemeleri çözende duş gelinýär. Matematiki analiz dersinde bolsa predelleri hasaplamakda, integral hasaplamakda we ş.m. ýerlerde duş gelinýär.

Ýönekeý öwürmeleriň kömegi bilen drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan nähili edip boşadyp boljakdygyna seredeliň.

1-nji mysal. $\dfrac{\sqrt{5}+3}{1-\sqrt{5}}$ aňlatma berlen bolsun. Bu drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin, onuň maýdalawjysyny we sanawjysyny $1+\sqrt{5}$ köpeldip alarys:

$$\frac{\sqrt{5}+3}{1-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(8+4\sqrt{5}\right)}{-4} = -2-\sqrt{5}.$$

2-nji mysal. $\dfrac{\sqrt[3]{2}+4}{2-\sqrt[3]{2}}$ aňlatma berlen bolsun. Bu drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin, onuň maýdalawjysyny we sanawjysyny $2^2 + 2\sqrt[3]{2} + {}$ $+\sqrt[3]{2^2}$ aňlatma köpeldip, alarys:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+4}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{(\sqrt[3]{2}+4)(2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(2-\sqrt[3]{2})(2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})} = \frac{6\sqrt[3]{2^2}+12\sqrt[3]{2}+18}{6} =$$
$$= \sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+3.$$

Bu mysallaryň ikisini hem derňäliň. Berlen aňlatmalaryň birinjisi maýdalawjyda $\psi_1(x) = x^2 - 5$ köpagzanyň köki bolýan $\sqrt{5}$ irrasional sany saklaýar, ikinjisi bolsa, $\psi_2(x) = x^3 - 2$ köpagzanyň köki bolýan $\sqrt[3]{2}$ irrasional sany saklaýar. Netijede, goýlan meseläni umumy ýagdaýda berlen $\frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}$ drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak hökmünde göz öňüne getirmek bolar, bu ýerde $f(x)$, $g(x)$ köpagzalar $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen köpagzalar, α_1 bolsa käbir $\psi(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzanyň irrasional köküdir.

1-nji mysalda $f_1(x) = x+3$, $g_1(x) = 1-x$, $\alpha_1 = \sqrt{5}$ bolsa $\psi_1(x) = x^2 - 5$ köpagzanyň irrasional köküdir. Drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin, $f_1(\alpha_1)$ we $g_1(\alpha_1)$ aňlatmalary $1+\sqrt{5} = 1-\alpha_2 = g_1(\alpha_2)$ aňlatma köpeltdik, bu ýerde $\alpha_2 = -\sqrt{5}$ irrasional san $\psi_1(x)$ köpagzanyň ikinji köki; şunlukda,

$$\frac{f_1(\alpha_1)g_1(\alpha_2)}{g_1(\alpha_1)g_2(\alpha_2)}$$

aňlatmany aldyk.

2-nji mysala hem ýokardaky ýaly çemeleşmek bolar. Bu mysalda $f_2(x) = x+4$, $g_2(x) = 2-x$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$ bolsa $\psi_2(x) = x^3 - 2$ köpagzanyň köki, bu köpagzanyň beýleki kökleri $\alpha_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$, $\alpha_3 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$. Drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny, ýagny $f_2(\alpha_1)$, $g_2(\alpha_1)$ aňlatmalary

$$2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2} = \left[2-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})\right]\left[2-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})\right] =$$
$$= (2-\alpha_2)(2-\alpha_3) = g_2(\alpha_2)\cdot g_2(\alpha_3)$$

aňlatma köpeldýäris we netijede

$$\frac{f_2(\alpha_1)g_2(\alpha_2)g_2(\alpha_3)}{g_2(\alpha_1)g_2(\alpha_2)g_2(\alpha_3)}$$

aňlatmany alýarys.

Bu seredilen iki mysal aşakdaky umumy çemeleşmäni görkezýär.

Goý, $\frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)}$ drob berlen bolsun, bu ýerde $f(x), g(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$, α_1 bolsa $\psi(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzanyň irrasional köki. Eger $\psi(x)$ köpagzanyň derejesi n-e deň bolsa, onda ol dagatma meýdanynda α_1 kökden başga-da, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ köklere eýedir. Drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin, $f(\alpha_1)$ we $g(\alpha_1)$ aňlatmalary $g(\alpha_2)$

$g(\alpha_3)\ldots g(\alpha_n)$ köpeltmek hasyla köpelderis we netijede

$$\frac{f(\alpha_1)}{g(\alpha_1)} = \frac{f(\alpha_1)g(\alpha_2)g(\alpha_3)\ldots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)g(\alpha_3)\ldots g(\alpha_n)} \tag{14}$$

aňlatmany alarys. Onda

$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n) = q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ deňlik dogry bolar ýaly, $q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ aňlatma tapylyp, ol $x_i = \alpha_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ bolanda, $q(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \boldsymbol{Q}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ simmetrik köpagzanyň bahasydyr. 3-nji teorema görä $q(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \boldsymbol{Q}$, ýagny rasional san bolýar. Şeýlelik bilen, drobuň maýdalawjysyndaky irrasionallyk ýok edildi.

Mysallar çözülende, $\psi(x)$ köpagzanyň $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ köklerini bilmezden (14) deňligiň sag tarapyny hasaplap bolýar. $g(\alpha_1)\, g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n)$ maýdalawjyny, 1-nji teorema görä, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ üýtgeýänlere görä alnan ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmak bolýar. Alnan aňlatma öz gezeginde $\psi(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladylýar. Sanawjydaky $g(\alpha_2)g(\alpha_3)\ldots g(\alpha_n)$ köpeltmek hasyly barada aýdanymyzda bolsa, ol $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$-e görä simmetrik köpagzadyr we şonuň üçin hem, $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ köklere eýe bolan

$$\omega(x) = \frac{\psi(x)}{x - \alpha_1} = a_n(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$$

köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen rasional aňladylmagy mümkin. $\omega(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri α_1 köküň we $\psi(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen rasional aňladylýar. Ol koeffisiýentleri $\psi(x)$ köpagza we $x - \alpha_1$ ikagza Gorneriň shemasyny ulanyp tapmak bolýar.

3-nji mysal. 2-nji mysaldaky $\dfrac{2 + \sqrt[3]{4}}{2 - \sqrt[3]{2}}$ droba seredeliň. Indi bu drobuň maýdalawjysyny umumy düzgün boýunça irrasionallykdan boşadalyň. Bu ýerde $f(x) = x + 4$, $g(x) = 2 - x$,$\psi(x) = x^3 - 2$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$ bolar. Ilki bilen $g(\alpha_1)\, g(\alpha_2)\, g(\alpha_3)$ aňlatmanyň bahasyny tapýarys:

$$g(\alpha_1)\, g(\alpha_2)\, g(\alpha_3) = (2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2)(2 - \alpha_3) = 8 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) +$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 8 - 0 + 0 - 2 = 6.$$

Bu ýerde $\psi(x) = x^3 - 2$ köpagza Wiýetiň teoremasyny ulanyp, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 0$ we $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2$ bolýandygy göz öňünde tutuldy.

$\dfrac{\psi(x)}{x - \alpha_1}$ köpagzanyň koeffisiýentlerini tapalyň. Gorneriň shemasyny ulanyp, alarys:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline \alpha_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & 0 \end{array},$$

ýagny $\dfrac{\psi(x)}{x-\alpha_1} = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1^2$. Şeýlelikde, $\alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_1$ we $\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^2$ (Wiýetiň teoremasyna laýyklykda) bolar. Indi $g(\alpha_2)g(\alpha_3)$-üň bahasyny hasaplaýarys:

$$g(\alpha_2)g(\alpha_3) = (2-\alpha_2)(2-\alpha_3) = 4 - 2(\alpha_2+\alpha_3) + \alpha_2\alpha_3 = 4 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 =$$
$$= 4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

Gutarnykly ýagdaýda alarys:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+4}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{f(\alpha_1)g(\alpha_2)g(\alpha_3)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)g(\alpha_3)} = \frac{(\sqrt[3]{2}+4)(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{6} = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 3.$$

2. Derejeli jemler. Matematikada derejeli jem diýip atlandyrylýan ýörite görnüşli

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,\ (k \in N)$$

simmetrik köpagzalara duş gelinýär. Şunlukda, $S_1 = \delta_1$, $S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2$ bolýar, bu ýerde $\delta_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$.

Simmetrik köpagzalar baradaky esasy teorema görä, her bir derejeli jemi hem ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmak bolýar.

$n = 3$ bolanda, $S_1 = \delta_1$ we $S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2$ bolýandygyna $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ simmetrik köpagzany ýönekeý simmetrik köpagzanyň üsti bilen aňladanymyzda hem göz ýetiripdik. Ýokarda bellenişine görä bu aňlatma üýtgeýänleriň sany n bolanda hem dogrudyr. Üýtgeýänleriň sany n bolanda, S_3 derejeli jemi ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmaklyga (mysal hökmünde) seredeliň.

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3$ derejeli jemi ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmak üçin ilki bilen onuň iň ýokary agzasynyň dereje görkezijileriň sistemasyny saýlap, aňlatmanyň näbelli koeffisiýentleriň üsti bilen aňladylyşynyň tablisasyny düzeliň.

Ýokary agzalaryň derejeleriniň sistemasy	Ýokary agzalar	Ýönekeý simmetrik köpagzalaryň degişli köpeltmek hasyly
3 0 0 0...0	x_1^3	$\delta_1^{3-0}\delta_2^{0-0}\delta_3^0 = \delta_1^3$
2 1 0 0...0	$ax_1^2x_2$	$a\delta_1^{2-1}\delta_2^{1-0}\delta_3^0 = a\delta_1\delta_2$
1 1 1 0...0	$bx_1x_2x_3$	$b\delta_1^{1-1}\delta_2^{1-1}\delta_3^1 = b\delta_3$

Bu tablisa boýunça

$$S_3 = \delta_1^3 + a\delta_1\delta_2 + b\delta_3$$

deňligi alarys. Bu ýerde a,b näbelli koeffisiýentlerdir. Bu näbelli koeffisiýentleri tapmak üçin, näbelli koeffisiýentleriň sanyna görä $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$ üýtgeýänlere, hasaplamasy amatly bolar ýaly bahalary berip, aşakdaky tablisany düzmek oňaýly bolýar.

x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n	S_3	δ_1	δ_2	δ_3
1	1	0	0	...	0	2	2	1	0
1	1	1	0	...	0	3	3	3	1

bu ýerde $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3,\ \delta_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$

$$\delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + x_3x_4 + x_3x_5 + \cdots + \\ + x_3x_n + \cdots + x_{n-1}x_n;$$

$$\delta_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + \cdots + x_1x_3x_n + \cdots + \\ + x_1x_{n-1}x_n + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \cdots + x_2x_{n-1}x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n .$$

Bu tablisadan we $S_3 = \delta_1^3 + a\delta_1\delta_2 + b\delta_3$ deňlemeden

$$\begin{cases} 2 = 8 + 2a, \\ 3 = 27 + 9a + b \end{cases}$$

deňlemeler sistemasy alynýar. Ony çözüp, $a = -3$, $b = 3$ näbelli koeffisiýentleri taparys. Netijede,

$$S_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3$$

aňladylyş alynýar.

Şuňa meňzeşlikde, $S_4, S_5, \ldots$ derejeli jemleriň hem ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmasyny bermek bolar.

Derejeli jemler bilen ýönekeý simmetrik köpagzalaryň arasyndaky baglanyşygy (Nýutonyň formulalary diýip atlandyrylýan) aşakdaky rekurrent formulalaryň kömegi bilen kesgitlemek bolar:

$$S_k - S_{k-1}\delta_1 + S_{k-2}\delta_2 - \ldots + (-1)^{k-1} S_1 \delta_{k-1} + (-1)^k k\delta_k = 0 \ (k = 1,2,\ldots,n),$$

$$S_k - S_{k-1}\delta_1 + S_{k-2}\delta_2 - \ldots + (-1)^n S_{k-n}\delta_n = 0 \ \ (k = n+1, n+2, \ldots).$$

Eger $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ derejeli jemleriň ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmasy belli bolsa, onda S_k derejeli jemiň ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmasyny Nýutonyň ýokardaky formulalarynyň kömegi bilen tapyp bolar.

Biz bu ýerde Nýutonyň formulalarynyň subudyna seretmeýäris. Onuň subudyny okyjy, meselem, [17] edebiýatyň §53-nji bölümçesinden görüp biler.

Derejeli jemleri ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmaga degişli soragy aşakdaky tablisany bermek bilen jemleýäris:

$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ derejeli jemiň $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ üsti bilen aňladylyşy
$S_0 = 3;$ $S_1 = \delta_1;$ $S_2 = \delta_1^2 - 2\delta_2;$ $S_3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3;$ $S_4 = \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 + 4\delta_1\delta_3;$ $S_5 = \delta_1^5 - 5\delta_1^3\delta_2 + 5\delta_1\delta_2^2 + 5\delta_1^2\delta_3 - 5\delta_2\delta_3;$ $S_6 = \delta_1^6 - 6\delta_1^4\delta_2 + 9\delta_1^2\delta_2^2 - 2\delta_2^3 + 6\delta_1^3\delta_3 - 12\delta_1\delta_2\delta_3 + 3\delta_3^2;$ $S_7 = \delta_1^7 - 7\delta_1^5\delta_2 + 14\delta_1^3\delta_2^2 - 7\delta_1\delta_2^3 + 7\delta_1^4\delta_3 - 12\delta_1^2\delta_2\delta_3 + 7\delta_1\delta_3^2 + 7\delta_2^2\delta_3$ ―――――――――――――――――――――――――――――

3. Önümçilikde aşakdaky görnüşde berlen meselelere duş gelinýär

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ köklere eýe bolan $f(x) \in P[x]$ köpagzanyň kömegi bilen (kökleri $\beta_i = \varphi(\alpha_i),(\varphi(x) \in P[x],\ i = 1,2,\ldots,n)$ baglanyşykda bolan) β_i kökli $g(x) \in P[x]$ köpagzany gurmak talap edilýär. Şeýle görnüşli meseleleriň ýönekeý mysallaryna mekdep matematikasynda duş gelmek bolýar. Meselem, degişli kökleri berlen $f(x) \in$ $\in \boldsymbol{Q}[x]$ köpagzanyň kökleriniň kwadratlaryna deň bolan $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen $g(x)$ köpagzany gurmaly.

Ýokardaky görnüşde berlen meselelerde $g(x)$ köpagzany aşakdaky görnüşde gözlemeli

$$g(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \cdots + A_1 x + A_0.$$

Bu ýerde

$$\begin{gathered} -A_{n-1} = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \cdots + \varphi(\alpha_n), \\ A_{n-2} = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) + \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_3) + \cdots + \varphi(\alpha_{n-1})\varphi(\alpha_n), \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ (-1)^n A_0 = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n). \end{gathered} \tag{15}$$

Görnüşi ýaly, $g(x)$ köpagzanyň $A_i (i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ koeffisiýentleri P meýdanda berlen käbir simmetrik köpagzalaryň $x_j = \alpha_j$ $(j = 1,2,\ldots,n$; α_j san $f(x)$ köpagzanyň kökleri bolandaky bahalaryna deň. 1-nji teoremadan gözlenilýän A_i koeffisiýentleri, hemişe $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladyp bolýandygy gelip çykýar, 3-nji teoremadan bolsa A_i koeffisiýentleriň hem $f(x)$ köpagzanyň kesgitlenýän P meýdanyna degişli boljakdygy alynýar.

4-nji mysal. *Kökleri rasional koeffisiýentli*

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

köpagzanyň kökleriniň kublaryna deň bolan $g(x) \in P[x]$ köpagzany tapyň.

Çözülişi. Mysalyň şertine görä, $f(x)$ köpagzanyň kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sanlar bolsa, onda $\beta_1 = \alpha_1^3, \beta_2 = \alpha_2^3, \beta_3 = \alpha_3^3$ sanlar $g(x)$ köpagzanyň kökleri bolmaly. Onda

$$g(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$$

diýip, (15) deňligi hasaba alsak,

$$a = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\cdot$$
$$\cdot(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 - 3 + 3 = 1,$$

$$b = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = \alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_1^3\alpha_3^3 + \alpha_2^3\alpha_3^3 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^3 -$$
$$- 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$c = \beta_1\,\beta_2\,\beta_3 = (\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,)^3 = 1.$$

Şeýlelik bilen, $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ bolar. Görnüşi ýaly, $f(x) = g(x)$, ýagny $f(x)$ köpagzanyň kökleriniň kublary ýene-de şu köpagzanyň kökleri boldy.

§12. Näbellileri yzygider çykarmak usuly

12.1. Näbellileri yzygider çykarmak

Bir üýtgeýänli $f(x)$ köpagzanyň häsiýetlerini öwrenmeklik $f(x) = 0$ algebraik deňlemäni çözmeklik berk baglanyşykly, sebäbi bu deňlemäniň kökleri $f(x)$ köpagzanyň nollary bilen gabat gelýär.

Köp üýtgeýänli $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagza bolan ýagdaýynda hem oňa degişli

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \tag{1}$$

n näbellili deňlemä seredilýär. Kähalatlarda $f(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ köpagzanyň ýa-da (1) deňlemäniň köki düşünjesiniň ornuna (1) deňlemäniň çözüwi düşünjesi ulanylýar. Has takygy, *eger $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in P[x_1{:}x_n]$ we Δ meýdan P meýdanyň käbir giňeltmesi, onda $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2,\ldots,x_n = \alpha_n$ bolanda, $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = 0$ bolýan meýdanyň tertipleşen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriniň toplumyna* (1) *deňlemäniň* **çözüwi** *diýilýär.*

Eger P meýdan tükeniksiz san meýdany bolsa, onda $degf \geq 1$ bolanda, (1) görnüşli islendik deňlemäniň P meýdanda ýa-da onuň käbir giňeltmesinde çözüwiniň bardygyny görkezmek kyn däl. Şonuň üçin $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň agzalaryny onuň haýsy hem bolsa bir üýtgeýänine görä (ol üýtgeýäne görä köpagzanyň derejesi nol bolmaly däl), tertipleşdirmek ýeterlik. Meselem, x_n üýtgeýäne görä, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň agzalaryny tertipleşdireliň:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a_m(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})x_n^m + \cdots + a_1(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})x_n + \\ + a_0(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}), \tag{2}$$

bu ýerde $a_m(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}) \not\equiv 0$.

Soňra P meýdana degişli $a_m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) \neq 0$ şerti kanagatlandyrýan $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2,\ldots, x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ erkin alnan bahalary saýlalyň ($a_m(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ köpagza nol köpagza däldigi üçin, beýle bahalary hemişe saýlap bolar). Bu saýlanyp alnan bahalary (2) deňlikde goýup, x_n üýtgeýäne görä, P meýdanda berlen derejesi $m \geq 1$ bolan

$$a_m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})x_n^m + \cdots + a_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})x_n + a_0(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})$$

köpagzany alarys. Kronekeriň teoremasyna görä *(8.3-nji bölümçä seret)*, bu köpagza P meýdanda ýa-da onuň käbir giňeltmesinde α_n köke eýedir. Onda $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementler (1) deňlemäniň çözüwi bolýar.

Bu bölümde biz seredilýän ähli köpagzalary tükeniksiz elementli san meýdanynda berlen diýip hasap ederis. Ýokardaky beýan etmelerden görnüşi ýaly derejesi noldan uly bolan n üýtgeýänli islendik köpagza çözüwe eýe. Şeýle-de, $n \geq 2$ bolanda köpüýtgeýänli köpagzanyň kökleriniň sany tükeniksiz bolýar, sebäbi $\alpha_1,\alpha_2,\ldots, \alpha_{n-1} \in P$ elementleri $a_m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) \neq 0$ bolar ýaly edip, tükeniksiz sanly usul bilen saýlamak bolar (P meýdanyň tükeniksizdigini ýatlalyň). Şunlukda, $n \geq 2$ bolanda, ($n = 1$ bolan ýagdaýyndan tapawutlylykda) (1) deňleme kesgitsiz bolýar.

Köp üýtgeýänli köpagzalaryň köki düşünjesine algebraik deňlemeler sistemasyny çözende, ýagny

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0, \\ \hline f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

görnüşli deňlemeler sistemalaryny çözende gelinýär. Bu sistemany çözmek diýlende $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ köpagzalaryň umumy köklerini tapmaklyga düşünilýär.

Biz (3) deňlemeler sistemasynyň hususy haly bolan çyzykly deňlemeler sistemasyna (I kitaba seret) ýeterlik derejede giňişleýin seretdik. $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ köpagzanyň derejesi ýokary bolanda, (3) deňlemeler sistemasyny çözmekligiň umumy usulyny tapmaklyk ýeterlik derejede kyndyr. (3) görnüşli deňlemeler sistemasyny çözmeklik meselesi köp ýagdaýlarda nabellileri yzygider ýok edip, bir nabellili algebraik deňlemäni çözmeklik meselesine getirilýär.

Näbellileri yzygider çykarmak usulyny mekdep matematikasynda duş gelinýän iki näbellili iki algebraik deňlemeler sistemasyny çözmek esasynda görkezeris.

Mysal. Goý,

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 - a^2 = 0, \\ g(x,y) &= xy - b = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

iki nabellili deňlemeler sistemasy berlen bolsun.

(4) deňlemeler sistemasyny çözmek üçin, haýsy hem bolsa bir usul bilen bir näbellini ýok edip deňlemeler sistemasyny bir näbellili deňlemä getirmek gerek. Meselem, bu sistemanyň ikinji deňlemesindäki x nabellini y nabelliniň üsti bilen aňladanymyzdan soň, ony onuň birinji deňlemesinde x-iň ornuna goýup,

$$x = \frac{b}{y}, \quad \frac{b^2}{y^2} + y^2 - a = 0$$

ýa-da

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0 \tag{5}$$

deňlemäni alarys. Görnüşi ýaly, bu deňleme bikwadrat deňleme, onuň kökleri

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)}; \quad y_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)}$$

sanlardyr.

$y_i (i = 1,2,3,4)$ bahalary $x = \dfrac{b}{y}$ deňlemede y-iň ornuna goýup, x näbelliniň degişli bahalaryny taparys:

$$x_{1,2} = \pm\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)}}; \quad x_{3,4} = \pm\frac{b}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4b^2}\right)}}.$$

(4) deňlemeler sistemasyny çözmekligiň yzygiderliligini aşakdaky ýaly ýazmak bolar. Bir näbellini ýok etmek esasynda alnan (5) deňlemäniň çep tarapyny (4) deňlemeler sistemasynyň rezultanty diýip atlandyralyň we ony $R(f,g)$ bilen belgiläliň. Şeýlelikde,

$$R(f,g) = y^4 - ay^2 + b^2$$

bolar. Bu rezultantyň köklerini tapyp, berlen deňleme sistemasynyň ähli çözüwlerini alýarys.

Erkin alnan

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

iki näbelli iki deňlemeler sistemasyny çözmeklige hem ýokardaky ýaly yzygiderlikde çemeleşýäris. Ýagny $f(x,y)$ we $g(x,y)$ köpagzalaryň rezultantyny gurarys we onuň köklerini taparys. Bu ýerden aşakdaky soraglaryň ýüze çykmagy tebigydyr: rezultanty nädip gurup bolar, deňlemeler sistemasynyň çözüwleri bilen rezultantyň kökleriniň arasynda nähili baglanyşyk bar, näbellileriň sany üç we ondan köp bolanda deňlemeler sistemasyny nädip çözmeli?

12.2. Rezultant

Goý, iki näbelli deňlemeler sistemasy berlen bolsun. Bu deňlemeleriň çep tarapy P meýdanda berlen x,y üýtgeýänlere görä $f(x,y)$ we $g(x,y)$ köpagzalardan durýar. Bu köpagzalary haýsy hem bolsa bir üýtgeýäniň, meselem, x üýtgeýäniň derejeleri boýunça ýazalyň:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y) = 0, \\ g(x,y) &= b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \cdots + b_1(y)x + b_0(y) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(α,β) jübüti (6) sistemasynyň çözüwi diýip güman edeliň, ýagny $f(\alpha,\beta)=0$ we $g(\alpha,\beta)=0$ diýeliň. (6) sistemany (α,β) çözüwi bolar ýaly edip, deňlemeleriň tutuş bir hatary bilen çalyşmak bolar. Ýöne, (6) sistemany deňleme bilen çalyşanymyzda alnan deňleme ýeňilräk çözülmeli we berlen sistemanyň çözüwlerini tapmaklyga kömek etmeli, mümkin bolsa gerek bolmajak del kökleri özünde saklamaly däl. Hususy ýagdaýda, alnan deňleme bir näbelli bolup, berlen sistemanyň çözüwlerini doly kesgitlese maksadalaýyk bolar.

Eger (6) sistemada $y=\beta$ diýsek, onda bir näbelli iki sany deňlemeli sistemany alarys:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\beta) &= a_n(\beta)x^n + a_{n-1}(\beta)x^{n-1} + \cdots + a_1(\beta)x + a_0(\beta) = 0, \\ g(x,\beta) &= b_m(\beta)x^m + b_{m-1}(\beta)x^{m-1} + \cdots + b_1(\beta)x + b_0(\beta) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Özi hem $x=\alpha$ bu deňlemeleriň umumy köki bolýar. Eger (7) sistema umumy köke eýe bolsa, onda bu sistemanyň deňlemeleriniň koeffisiýentleriň arasynda nähili hem bolsa bir baglanyşyk bolmaly. Eger $a_i(\beta)$ we $b_j(\beta)$ koeffisiýentleriň arasyndaky baglanyşygy tapyp bolsa, ýagny

$$R[a_n(\beta),a_{n-1}(\beta),\ldots,a_1(\beta),a_0(\beta),b_m(\beta),b_{m-1}(\beta),\ldots,b_1(\beta),b_0(\beta)]=0$$

bolsa, onda oňa degişli bolan

$$R[a_n(y), a_{n-1}(y), \ldots, a_1(y), a_0(y), b_m(y), b_{m-1}(y), \ldots, b_1(y), b_0(y)] = 0$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde (7) sistemanyň umumy çözüwi we soňky deňlemäni kanagatlandyrýan β sanlar berlen sistemanyň (α,β) çözüwler köplügini berýär.

Şeýlelik bilen, ilkinji nobatda, aşakdaky meseläni çözmek zerur bolýar. Goý, bir näbelli

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

deňlemeler sistemasy berlen bolsun. Bu sistemanyň deňlemeleriniň nähili şertlerde umumy köke eýedigini tapmak talap edilsin.

(7) we (8) sistemalaryň arasynda käbir tapawutlaryň bardygyny belläliň. (8) sistemada $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ diýip hasap etmeli, sebäbi (6) sistemadan $y = \beta$ diýip alnan (7) sistemanyň käbir koeffisiýentleriniň, hususy ýagdaýda $a_n(\beta)$, $b_m(\beta)$ koeffisiýentleriniň, olara degişli $a_n(y)$, $b_m(y)$ köpagzalaryň nol köpagzalar däldigine seretmezden nola deň bolmagy mümkin.

(8) sistema gaýdyp geleliň. (8) sistemanyň deňlemeleriniň umumy köklerini $f(x)$ köpagzanyň kökleriniň arasyndan gözlemelidigi düşnükli. $f(x)$ köpagzanyň köklerini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilen belgiläliň. Ikinji tarapdan diňe $g(\alpha_i) = 0$ bolanda, α_i kök $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň umumy köki bolýar.

Kesgitleme.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_n = 0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, b_m = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

köpagzalaryň **rezultanty** *diýip,*

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n) \tag{10}$$

aňlatma aýdylýar, bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sanlar $f(x)$ köpagzanyň kökleridir.

1-nji bellik. Bu kesgitlemede $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar deň hukukly däl; $R(g,f)$ rezultant

$$R(g,f) = b_m^n f(\gamma_1) f(\gamma_2) \ldots f(\gamma_m) \tag{11}$$

formulanyň kömegi bilen tapylýar, bu ýerde $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sanlar $g(x)$ köpagzanyň kökleridir. Şeýle seredäýmäge, bu deň hukuksyzlyk ýokardaky kesgitlemäniň kemçiligi ýaly bolup görünmegi mümkin, ýöne meseläniň goýluşyna laýyklykda $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar doly deň hukuklydyrlar. Aşakda $R(f,g)$ we $R(g,f)$ rezultantlaryň diňe alamatlary bilen tapawutlanýandygyny görkezeris.

2-nji bellik. $R(f,g)$ rezultantyň kesgitlemesinde $a_n \neq 0$ bolýandygyndan peýdalandyk, sebäbi $f(x)$ köpagzanyň n sany köki bar diýip hasap ederis. Edil şeýle $R(g,f)$ rezultanty kesgitlänimizde $b_m \neq 0$ bolýandygyna daýandyk. Netijede, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň $R(f,g)$ ýa-da $R(g,f)$ rezultantlaryny kesgitlemek üçin, bu köpagzalaryň iň bolmanda biriniň baş koeffisiýentiniň noldan tapawutly bolmalydygyny aldyk.

Iki köpagzanyň rezultantyny hasaplamagyň (10), (11) formulalaryna daşyndan seredeniňde ony hasaplamak üçin, olaryň haýsy hem bolsa biriniň ähli köklerini bilmek zerur diýen pikiri döredýär. Hakykatda bolsa, rezultanty berlen köpagzalaryň koeffisiýentleriniň üsti bilen, özi hem rasional görnüşde aňlatmak bolar .

Dogrudan hem, $R(f,g)$ rezultanta üýtgeýänlere $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ baha berlen n üýtgeýänli simmetrik köpagzanyň bahasy hökmünde seretmek bolar; (10) formuladan görnüşi ýaly bu köpagzanyň koeffisiýentleri $a_n,b_m,b_{m-1},\ldots,b_1,b_0$ koeffisiýentleriň üstünde goşmak we köpeltmek amallaryny yerine ýetirmek arkaly alynýar. 11.2-nji bölümçäniň 1-nji teoremasy boýunça bu köpagzany $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ ýönekeý simmetrik köpagzalaryň üsti bilen aňlatmak mümkin. Ýönekeý simmetrik köpagzalar bolsa $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladylýar. Netijede, $R(f,g)$ rezultant $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň a_i we b_i koeffisiýentleriniň üsti bilen rasional aňladylýar.

Bu ýerden, hususy ýagdaýda, P meýdanda berlen iki köpagzanyň rezultantynyň bu meýdanyň elementi bolýandygy gelip çykýar. Ony 11.2-nji bölümçedaki 3-nji teorema hem tassyklaýar.

Mysal. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\ g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ köpagzalaryň rezultantyny tapyň.

Çözülişi. $f(x)$ köpagzanyň köklerini α_1 we α_2 bilen belgilesek, onda

$$R(f,g) = a_2^2 g(\alpha_1)g(\alpha_2) = a_2^2[b_2\alpha_1^2 + b_1\alpha_1 + b_0][b_2\alpha_2^2 + b_1\alpha_2 + b_0]$$

deňligi alarys. Bu ýerde köpeltmegi ýerine ýetirip,

$$R(f,g) = a_2^2[b_2^2\alpha_1^2\alpha_2^2 + b_1b_2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1\alpha_2 + b_1^2\alpha_1\alpha_2 + b_0b_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) +$$
$$+b_0b_1(\alpha_1 + \alpha_2) + b_0^2]$$

deňligi alarys. Wiýetiň formulalary boýunça $\alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}, \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}$; şonuň üçin

$$R(f,g) = a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0a_2b_1^2 + (a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2.$$

Rezultantyň kesgitlemesinden gelip çykýan käbir häsiýetlere seredeliň:

1. $R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (\alpha_i - \gamma_i)$. (12)

Subudy. Biziň bilşimize görä, $g(x) = b_m(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots(x-\gamma_m)$,

$$g(\alpha_i) = b_m(\alpha_i-\gamma_1)(\alpha_i-\gamma_2)\ldots(\alpha_i-\gamma_m) = b_m \prod_{1\le j\le m}(\alpha_i-\gamma_i).$$

Şonuň üçin,

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n) =$$

$$= a_n^m\left[b_m\prod_{1\le j\le m}(\alpha_1-\gamma_j)\right]\left[b_m\prod_{1\le j\le m}(\alpha_2-\gamma_j)\right]\cdots\left[b_m\prod_{1\le j\le m}(\alpha_n-\gamma_j)\right] =$$

$$= a_n^m b_m^n \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}(\alpha_1-\gamma_j) \blacktriangleright$$

2. $R(g,f) = (-1)^{mn}R(f,g)$. (13)

Subudy. $R(g,f)$ rezultanta (12) formulany ulanyp,

$$R(g,f) = b_m^n a_n^m \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}(\gamma_j-\alpha_i)$$

deňligi alarys. Her bir ýaýyň daşyna -1 çykaryp we köpeldijileriň sanynyň mn köpeltmek hasylyna deňdigini hasaba alyp,

$$R(g,f) = (-1)^{mn} b_m^n a_n^m \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}(\alpha_1-\gamma_j) = (-1)^{mn}R(f,g)$$

deňligi alarys. ►

Rezultantyň kömegi bilen (8) sistemanyň çözüwiniň bar bolmak şertini kesgitläp bolýandygyny aşakdaky teorema tassyklaýar.

1-nji teorema. *$f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň umumy kööküniň bolmagy üçin, olaryň rezultantynyň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. *Zerurlyk şerti.* Eger $f(x)$ köpagzanyň α_i köki $g(x)$ köpagzanyň hem köki bolsa, onda $g(\alpha_i) = 0$ bolar. Bu bolsa

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_i)\ldots g(\alpha_n)$$

rezultantyň bir köpeldijisiniň nola deňdigini aňladýar, şoňa görä-de $R(f,g) = 0$ bolar.

Ýeterlik şerti. Eger $R(f,g) = 0$ bolsa, ýagny $a_n^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n) = 0$ bolsa, onda bu deňligiň çep tarapyndaky $g(\alpha_1)g(\alpha_2)\ldots g(\alpha_n)$ köpeldijileri iň bolmanda biri nola deň bolar, sebäbi $a_n \ne 0$. Meselem, $g(\alpha_i) = 0$ diýeliň. Bu bolsa $f(x)$ köpagzanyň

α_i köküniň şol bir wagtyň özünde $g(x)$ köpagzanyň köki bolýandygyny aňladýar, ýagny berlen köpagzalar umumy köke eýe. ►

1-nji teoremanyň subudyny a_n koeffisiýentiň nola deň däldigine esaslanyp geçirenligimize üns bereliň. Eger $a_n = 0$ bolup, ýöne $b_m \neq 0$ bolsa, onda teorema dogrulygyna galardy, ýöne bu ýagdaýda $R(g,f)$ rezultanta serederis. Şeýlelikde, 1-nji teoremanyň diňe a_n we b_m baş koeffisiýentleriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda ulanarlykdygyna göz ýetirdik.

12.3. Diskriminant

Rezultant düşünjesini we 1-nji teoremany gönüden-göni köpagzanyň kratny kökleriniň barlygyny ýa-da ýoklugyny kesgitlemekde ulanmak bolar. §8-iň 8-nji teoremasyndan $f(x)$ köpagzanyň kratny kökünin, $f(x)$ we onuň önümi bolan $f'(x)$ köpagzanyň umumy köki bolýandygy gelip çykýar.

Goý, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ köpagza berlen bolsun. Onuň köklerini $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilen belgiläliň. Onda

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) \tag{14}$$

bolýandygy aýdyň.

$f(x)$ we $f'(x)$ köpagzalara rezultantyň kesgitlemesini ulanyp alarys:

$$R(f,f') = a_n^{n-1} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_n). \tag{15}$$

Bu rezultanty hasaplamak üçin, $f(x)$ köpagzany (14) görnüşde ýazyp, onuň önümini taparys:

$$f'(x) = a_n\{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_i)\ldots(x-\alpha_n) +$$

$$+ (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_i)\ldots(x-\alpha_n) + \cdots +$$

$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_n) + \cdots +$$

$$+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_i)\ldots(x-\alpha_{n-1})\}.$$

Bu deňlikde $x = \alpha_i$ diýip alarys:

$$f'(\alpha_i) = a_n(\alpha_i - \alpha_1)(\alpha_i - \alpha_2)\ldots(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i - \alpha_n).$$

Netijede,

$$R(f,f') = a_n^{n-1} f'(\alpha_1) f'(\alpha_2)\ldots f'(\alpha_n) = a_n^{n-1}[a_n(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n)]$$

$$[a_n(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n)]\ldots[a_n(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_{n-1})]$$

deňligi alarys.

Bu köpeltmek hasylyna üns berip seretsek, onda her bir $\alpha_i - \alpha_j$, $i \neq j$ köpeldijiniň bu köpeltmek hasylyna iki gezek girýändigini, özi hem garşylykly alamat bilen girýändigini görýäris. (Meselem, $\alpha_1 - \alpha_2$ we $\alpha_2 - \alpha_1$ ýa-da $\alpha_1 - \alpha_n$ we $\alpha_n - \alpha_1$). Olary köpeltmek hasylynda $(\alpha_i - \alpha_j)^2$, $(i > j)$ görnüşde ýazyp bolýar.

Şeýle kwadratlaryň sanynyň $\dfrac{n(n-1)}{2}$ baha deňligini hasaplamak kyn däl, netijede,

$$R(f,f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-1} \prod_{(1 \le j \le i \le n)} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{16}$$

deňligi alarys.

Kesgitleme. *$f(x) \in P[x]$ köpagzanyň $D(f)$* **diskriminanty** *diýip, P meýdanyň*

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f,f') \tag{17}$$

elementine aýdylýar, bu ýerde $R(f,f')$ aňlatma $f(x)$ köpagza bilen onuň önümi bolan $f'(x)$ köpagzanyň rezultantydyr.

(17) deňlikde (16) formula bilen kesgitlenen, $R(f,f')$ rezultantyň bahasyny goýup,

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{(1 \le j < i \le n)} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{18}$$

formulany alarys.

(17) formuladan görnüşi ýaly, diskriminant $R(f,f')$ rezultantdan diňe $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-1}$ köpeldiji bilen tapawutlanýar.

1-nji teoremanyň netijesi hökmünde aşakdaky tassyklamany alarys.

2-nji teorema. *$f(x)$ köpagzanyň kratny köküniň bolmagy üçin, onuň diskriminantynyň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. Eger $f(x)$ köpagzanyň kratny köki bar bolsa, onda ol $f(x)$ we $f'(x)$ köpagzalaryň umumy köküdir, şeýle-de, $R(f,f') = 0$ bolar. Eger tersine, $D(f) = 0$ bolsa, onda $R(f,f') = 0$ deňlik alnar, ýagny $f(x)$ we $f'(x)$ köpagzalar umumy köke eýe bolar; $f(x)$ üçin bolsa bu kök kratny kök bolar. ▶

2-nji teoremany $f(x)$ köpagzanyň kratny köküniň bar bolmagynyň kriteriýasy hökmünde ulanmak bolar.

1-nji mysal. Kökleri α_1 we α_2 bolan $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ üçagzanyň diskriminantyny tapyň.

Çözülişi. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ köpagzanyň önümi $f'(x) = 2a_2x + a_1$ bolany, üçin, (17) we (15) formulalara görä alarys:

$$D(f)=(-1)^{\frac{2\cdot 1}{2}}a_2^{-1}R(f,f')=-a_2^{-1}a_2(2a_2\alpha_1+a_1)(2a_2\alpha_2+a_1)=$$

$$=-[4a_2^2\alpha_1\alpha_2+2a_1a_2(\alpha_1+\alpha_2)+a_1^2]=-[4a_2a_0-2a_1^2+a_1^2]=a_1^2-4a_2a_0,$$

bu ýerde $\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{a_1}{a_2}, \alpha_1\alpha_2=\dfrac{a_0}{a_2}$ baglanyşyklar ulanyldy. Şeýlelikde, $D(f)=$ $=a_1^2-4a_2\alpha_0$ bolýar.

Bu netijäni (18) formulany ulanyp hem alyp bolýar:

$$D(f)=a_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^2=a_2^2(\alpha_2^2+\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2)=\alpha_2^2((\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2)=$$

$$=a_2^2\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}-4\frac{a_0}{a_2}\right)=a_1^2-4a_2a_0.$$

Görnüşi ýaly, bu ýerde tapylan diskriminantlar mekdep matematikasynda girizilen diskriminant bilen dolulygyna gabat gelýär.

2-nji mysal. Kökleri $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ bolan, $f(x)=x^3+px+q$ üçagzanyň diskriminantyny hasaplamaly.

Çözülişi.

$$D(f)=(-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}}f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3)=-(3\alpha_1^2+p)(3\alpha_2^2+p)(3\alpha_3^2+p)=$$

$$=-[27\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+9p(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2)+3p^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+p^3].$$

Bu ýerde $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ aňlatmalar $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ köklere görä, simmetrik köpagzalar bolýar. Olary Wiýetiň teoremasy esasynda, $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladalyň:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2=q^2;\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)^2-$$
$$-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=p^2;$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=-2p.$$

Netijede,

$$D(f)=-(27q^2+4p^3)$$

deňligi alarys.

Tapylan diskriminant $x^3+px+q=0$ kub deňlemäni çözmek üçin, ulanylýan Kardanonyň formulasyndaky diskriminantdan (§15-e seret) diňe $(-27\cdot 4)$ köpeldiji bilen tapawutlanýar.

12.4. Silwestriň kesgitleýjisi bilen rezultantyň hasaplanylyşy

Köp ýagdaýlarda simmetrik köpagzalar nazaryýetinden peýdalanman iki köpagzanyň rezultantyny hasaplamak amatly bolýar. Bu bölümçede Silwestriň kesgitleýjisi diýip atlandyrylýan kesgitleýjiniň kömegi bilen rezultanty hasaplamaga sererderis.

Goý,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

köpagzalar berlen bolsun. $f(x)$ köpagzada $a_n \neq 0$ diýip alýarys. Goý, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elementler $f(x)$ köpagzanyň kökleri bolsun. Kesgitlilik üçin, $n > m$ diýeliň. $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň kömegi bilen $m + n$ sany köpagzalaryň aşakdaky sistemasyny düzeliň:

$$x^{m-1} f(x); x^{m-2} f(x); \ldots; x f(x); f(x);$$

$$x^{n-1} g(x); x^{n-2} g(x); \ldots; x g(x); g(x).$$

Bu sistemanyň köpagzalaryny aşakdaky deňlikleriň kömegi bilen ýazyp bolýar:

$$x^{m-1} f(x) = a_n x^{n+m-1} + a_{n-1} x^{n+m-2} + \cdots + a_1 x^m + a_0 x^{m-1},$$

$$x^{m-2} f(x) = a_{n-1} x^{n+m-2} + \cdots + a_2 x^m + a_1 x^m - 1 + a_0 x^{m-2},$$

$$x f(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x,$$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$x^{n-1} g(x) = b_m x^{n+m-1} + b_{m-1} x^{n+m-2} + \cdots + b_1 x^n + b_0 x^{n-1},$$

$$x^{n-2} g(x) = b_m x^{n+m-2} + \cdots + b_1 x^{n-1} + b_0 x^{n-2},$$

$$x g(x) = b_m x^{m+1} + b_{m-1} x^m + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x,$$

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Bu deňlikleriň ähli agzalaryny deňlikden bir tarapa geçireliň we $x = \alpha_i$ diýeliň, bu ýerde α_i element $f(x)$ köpagzanyň haýsy hem bolsa bir köki. $f(\alpha_i) = 0$ bolýandygyny hasaba alyp aşakdaky deňlikleri alarys:

$$a_n\alpha_i^{n+m-1} + a_{n-1}\alpha_i^{n+m-2} + \cdots + a_1\alpha_i^m + a_0\alpha_i^{m-1} = 0,$$
$$a_n\,\alpha_i^{n+m-2} + \cdots + a_1\alpha_i^{m-1} + a_0\alpha_i^{m-2} = 0,$$

$$a_n\alpha_i^{n+1} + a_{n-1}\alpha_i^n + \cdots + a_1\alpha_i^2 + a_0\alpha_i = 0,$$
$$a_n\alpha_i^n + \cdots + a_1\alpha_i + a_0 = 0, \tag{19}$$
$$b_m\alpha_i^{n+m-1} + b_{m-1}\alpha_i^{n+m-2} + \cdots + b_1\alpha_i^n + [b_0 - g(\alpha_i)]\,\alpha_i^{n-1} = 0,$$
$$b_m\alpha_i^{n+m-2} + \cdots + b_1\alpha_i^{n-1} + [b_0 - g(\alpha_i)]\,\alpha_i^{n-2} = 0,$$

$$b_m\alpha_i^{m+1} + b_{m-1}\alpha_i^m + \cdots + b_1\alpha_i^2 + [b_0 - g(\alpha_i)]\,\alpha_i = 0,$$
$$b_m\alpha_i^m + \cdots + b_1\alpha_i + [b_0 - g(\alpha_i)] = 0.$$

(19) deňliklere $n + m$ sany näbellili we $n + m$ sany deňlemeli birjynsly çyzykly deňlemeler sistemanyň käbir çözüwleriniň netijesi hökmünde seretmek bolar. Ol çyzykly deňlemeler sistemasyny $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m-1}, x_{n+m}$ näbellilere görä aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$\left.\begin{array}{r}
a_nx_1 + a_{n-1}x_2 + \cdots + a_1x_n + a_0x_{n+1} = 0,\\
a_nx_2 + \cdots + a_1x_{n+1} + a_0x_{n+2} = 0,\\
\hline
a_nx_{m-1} + a_{n-1}x_m + \cdots + a_0x_{n+m-1} = 0,\\
a_nx_m + \cdots + a_0x_{n+m} = 0,\\
b_mx_1 + b_{m-1}x_2 + \cdots + b_1x_m + [b_0 - g(\alpha_i)]x_{m+1} = 0,\\
b_mx_2 + \cdots + b_1x_{m+1} + [b_0 - g(\alpha_i)]x_{m+2} = 0,\\
\hline
b_mx_{n-1} + b_{m-1}x_n + \cdots + b_1x_{n+m-2} + [b_0 - g(\alpha_i)]x_{n+m-1} = 0,\\
b_mx_n + \cdots + b_1x_{n+m-1} + [b_0 - g(\alpha_i)]x_{n+m} = 0
\end{array}\right\} \tag{20}$$

(19) deňliklere görä, (20) deňlemeler sistemasy nol däl

$$(\alpha_i^{n+m-1}, \alpha_i^{n+m-2}, \ldots, \alpha_i^n, \ldots, \alpha_i^m, \ldots, \alpha_i, 1)$$

çözüwe eýe, sebäbi bu elementleriň arasynda 1 bar. Biziň bilşimiz ýaly, (1, §26), (20) birjynsly çyzykly deňlemeler sistemasynyň nol däl çözüwi bar bolsa, onda onuň kesgitleýjisi nola deň bolýar. Ol kesgitleýjini Δ bilen belgiläliň. Şeýlelik bilen,

$$\Delta = \left|\begin{array}{l}
a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
\qquad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
\hline
\qquad\qquad\quad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_n\;\; a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, [b_0 - g(\alpha_i)] \\
\qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, [b_0 - g(\alpha_i)] \\
\hline
\qquad\qquad\quad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, [b_0 - g(\alpha_i)] \\
\qquad\qquad\qquad\quad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, [b_0 - g(\alpha_i)]
\end{array}\right| \tag{21}$$

kesgitleýjini alarys (doldurylmadyk boş ýerlerde nollar bar diýip hasap ederis).

Bu ýerdäki α_i elementiň $f(x)$ köpagzanyň köki bolýanlygy üçin, Δ kesgitleýji her bir i ($i = 1,2,..., n$) üçin nola deňdir. Şoňa laýyklykda, aşakdaky kesgitleýjä seredeliň:

$$F(u) = \left|\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
\qquad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0
\end{array}\right\} m \text{ setir} \\
\left.\begin{array}{l}
b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 - u \\
\qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 - u \\
\hline
\qquad\qquad\qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 - u \\
\qquad\qquad\qquad\quad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 - u
\end{array}\right\} n \text{ setir}
\end{array}\right| \tag{22}$$

$F(u)$ aňlatmanyň u baglylykda n-nji derejeli köpagzany emele getirýänligi düşnükli, sebäbi bu kesgitleýjide $b_0 - u$ element n sany setirde we sütünde bir gezekden duş gelýär. $F(u)$ köpagzanyň baş koeffisiýenti, ýagny u^n-iň koeffisiýenti $(-1)^n\, a_n^m$ sana deňdir. $F(u)$ kesgitleýjiniň esasy diagonalyndaky elementlerini köpeldip, $(-1)^n\, a_n^m\, u^n$ agzany alarys.

(21) kesgitleýjä üns berip, $g(\alpha_1), g(\alpha_2),\ldots,g(\alpha_n)$ elementleriň $F(u)$ köpagzanyň kökleri bolýar diýen netijä geleris. Şonuň üçin hem, Wiýetiň formulalaryndan peýdalanyp,

$$g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n) = (-1)^n \frac{F(0)}{(-1)^n a_n^m}, \ (a_n \neq 0)$$

deňligi alarys, bu ýerde $F(0)$ element $F(u)$ köpagzanyň azat agzasy. Soňky deňlikden $F(0) = a_n^m\ g(\alpha_1)\ g(\alpha_2)\ \ldots\ g(\alpha_n)$ deňligi, ýagny $F(0) = R(f,g)$ deňligi alarys. Ýöne, $F(0)$ azat agzany (22) kesgitleýjide $u = 0$ diýip almak bolar.

Netijede,

$$R(f,g) = \left|\begin{array}{l} a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\ \qquad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0 \\ b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 \\ \qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_m\, b_{m-1} \ldots b_1\, b_0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \text{ setir} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \text{ setir} \end{array} \qquad (23)$$

deňligi alarys. Rezultantyň bu görnüşde aňladylyşyna **Silwestriň kesgitleýjisi görnüşinde ýazylyşy** diýilýär. Iki köpagzanyň rezultantyny hasaplamak üçin Silwestriň kesgitleýjisi has amatly, sebäbi ol kesgitleýjiniň elementleri $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň koeffisiýentlerinden durýar. Silwestriň kesgitleýjisini düzmek üçin $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini m gezek yzygider her bir indiki setirdäki ýazgysyny indiki sütüniň aşagyndan ýazyp başlamak gerek, $g(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini hem ýokardaky ýaly edip, n gezek ýazmak ýeterlik. Kesgitleýjiniň hiç zat ýazylman boş taşlanyp gidilen ýerlerinde nollar bar diýip düşünmeli.

1-nji mysal. $f(x) = x^2 + px + q$ köpagzanyň diskriminantyny Silwestriň kesgitleýjisini ulanyp hasaplaň.

Çözülişi. Ilki bilen $f(x)$ köpagzanyň önümini tapalyň: $f'(x) = 2x + p$ (23) formula laýyklykda alarys ($m = 1$, $n = 2$):

$$R(f,f') = \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix} = 4q - p^2.$$

Şonuň üçin hem, (17) formula görä $D(f) = p^2 - 4q$ bolar.

Rezultanty Silwestriň kesgitleýjisiniň kömegi bilen bermekligiň ýene-de bir wajyp artykmaçlygy 12.2-nji bölümçede girizilen rezultant düşünjesini umumylaşdyrmaga mümkinçilik berýär. Biz $a_n \neq 0$ bolanda, Silwestriň kesgitleýjisiniň (10) formula bilen kesgitlenen, $R(f,g)$ rezultant bilen gabat gelýändigini gördük.

12. sargyt № 749

Edil şeýle usul bilen $b_m \neq 0$ bolanda, R(g,f) rezultantyň hem Silwestriň degişli kesgitleýjisine deňdigine göz ýetirmek bolar. Eger $a_n = 0$, $b_m = 0$ bolsa, onda (10), (11) formulalaryň kömegi bilen kesgitlenen rezultant manysyny ýitirýär, ýöne bu ýagdaýda, Silwestriň kesgitleýjisi nol bahany alsa-da manysyny ýitirmeýär.

Şuňa baglylykda, geljekde $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň $R(f,g)$ rezultanty hökmünde (23) görnüşdäki Silwestriň kesgitleýjisini alarys.

Rezultantyň bu täze kesgitlemesinde 11.2-nji bölümçede seredilen rezultantyň 1-nji häsiýeti manysyny ýitirmegi mümkin (eger $a_n = b_m = 0$ bolsa), ýöne 2-nji häsiýeti öz güýjünde galýar, ýagny $R(f,g) = (-1)^{mn} R(g,f)$ deňligiň ýerine ýetýändigini gönüden-göni (23) kesgitleýjiniň setirleriniň ýerlerini çalşyp göz ýetirmek bolar.
1-nji teoremany subut edenimizde a_n we b_n koeffisiýentleriň bir wagtda nola deň däldigine daýanypdyk. Silwestriň kesgitleýjisi bilen rezultanty kesgitlänimizde $a_n = b_m = 0$ bolanda hem rezultant manysyny ýitirmeýänligi üçin, rezultanty umumylaşdyrmagy aşakdaky teorema bilen formirlemek bolar.

3-nji teorema. *Eger $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň rezultanty nola deň bolsa, onda: a) $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar umumy köke eýe; b) bu köpagzalaryň ikisiniň hem baş agzalary nola deň.*

Subudy. Teoremanyň subudyny etmek üçin, $R(f,g) = 0$ bolmak mümkinçiliginiň: a)ýagdaýynyň ýerine ýetmedik mahalynda, b) ýagdaýyň ýerine ýetýändigini görkezmekligiň ýeterlikdigi aýdyň. Goý, $R(f,g) = 0$ we $a_n \neq 0$ ýa-da $b_m \neq 0$ bolsun; kesgitlilik üçin, $a_n \neq 0$ diýeliň. Onda (23) kesgitleýji bilen kesgitlenen rezultantyň täze kesgitlemesi rezultantyň (10) aňlatmanyň kömegi bilen kesgitlenen kesgitlemesine deňgüýçli bolýar, özi hem 1-nji teoremanyň şerti ýerine ýetýär. Netijede, $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar umumy köke eýedir. ►

4-nji teorema. *Eger $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar umumy köke eýe bolsa, onda olaryň rezultanty nola deňdir.*

Subudy. Eger a_n, b_m baş koeffisiýentleriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsa, onda 1-nji teoremadan bu teoremanyň tassyklamasynyň dogrulygy gelip çykýar. Eger $a_n = b_m = 0$ bolsa, onda rezultantyň nola deňligi gönüden-göni Silwestriň kesgitleýjisiniň birinji sütüniň nola deňliginden gelip çykýar. ►

12.5. Algebraik deňlemeler sistemasynyň çözülişi

Goý, koeffisiýentleri P meýdana degişli bolan iki näbellili iki algebraik deňlemeler sistemasy berlen bolsun. Bu sistemanyň deňlemelerini haýsy hem bolsa bir näbelliniň derejesine görä, meselem, x näbelliniň derejesine görä tertipleşdirip,

$$f(x,y) = a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y) = 0,$$
$$g(x,y) = b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \cdots + b_1(y)x + b_0(y) = 0 \qquad (24)$$

deňlemeler sistemasyny alarys.

y üýtgeýäne parametr hökmünde seredip, $f(x,y)$, $g(x,y)$ köpagzalaryň $R(f,g)$ rezultantyny düzeliň:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_n(y)a_{n-1}(y)\ldots a_1(y)a_0(y) & & & \\ & a_n(y)a_{n-1}(y)\ldots a_1(y)a_0(y) & & \\ & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & & \\ & & a_n(y)a_{n-1}(y)\ldots a_1(y)a_0(y) & \\ & & & a_n(y)a_{n-1}(y)\ldots a_1(y)a_0(y) \\ b_m(y)b_{m-1}(y)\ldots b_1(y)b_0(y) & & & \\ & b_m(y)b_{m-1}(y)\ldots b_1(y)b_0(y) & & \\ & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} & & \\ & & b_m(y)b_{m-1}(y)\ldots b_1(y)b_0(y) & \\ & & & b_m(y)b_{m-1}(y)\ldots b_1(y)b_0(y) \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Bu rezultantyň y parametre baglydygyny hasaba alsak, onda

$$R(f,g) = R(y)$$

belgilenişigi girizmek bolar.

(25) kesgitleýjiden görnüşi ýaly, $R(y)$ rezultanty $a_i(y)$ we $b_i(y)$ koeffisiýentleriň üstünde goşmak we köpeltmek amallaryny ýerine ýetirip alarys. Şonuň üçin hem, P meýdanda berlen $f(x,y)$ we $g(x,y)$ köpagzalaryň $R(y)$ rezultanty hem P meýdanda berlen y üýtgeýänli köpagzadyr. $R(y)$ köpagzanyň derejesini l bilen belgiläliň. l derejäniň $f(x,y)$ we $g(x,y)$ köpagzalaryň derejeleriniň köpeltmek hasylyndan geçmeýändigini görkezmek bolar. $R(y)$ köpagza özüniň dagatma meýdanynda l sany köke eýedir, olary $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{l-1}, \beta_l$ bilen belgiläliň. Onda, $R(\beta_k) = 0$, $(k = 1,2,\ldots,l)$ bolar. Rezultantyň nola deňligi bolsa 3-nji teorema görä,

$$f(x,\beta_k) = a_n(\beta_k)x^n + a_{n-1}(\beta_k)x^{n-1} + \cdots + a_1(\beta_k)x + a_0(\beta_k),$$
$$g(x,\beta_k) = b_m(\beta_k)x^m + b_{m-1}(\beta_k)x^{m-1} + \cdots + b_1(\beta_k)x + b_0(\beta_k)$$

köpagzalaryň umumy köke eýedigini ýa-da $a_n(\beta_k)$ we $b_m(\beta_k)$ baş koeffisiýentleriň ikisiniň hem birwagtda nola deňdigini aňladýar. Iki ýagdaýa hem seredeliň:

a) goý, $a_n(\beta_k)$ we $b_m(\beta_k)$ koeffisiýentleriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolsun.

Bu ýagdaýda $f(x,\beta_k)$ we $g(x,\beta_k)$ köpagzalar umumy köke eýe bolar. Ol köki α_k bilen belgiläliň. $f(\alpha_k, \beta_k)=0$ we $g(\alpha_k, \beta_k)=0$ bolany üçin, (α_k, β_k) jübüt (24) ulgamyň bir çözüwi bolar. Saýlanyp alnan β_k köke degişli $f(x,\beta_k)$, $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň birnäçe umumy kökleriniň bolmagynyň mümkindigini belläliň, meselem, α_k' we α_k''. Onda (α_k', β_k), (α_k'', β_k) jübütleriň ikisiniň hem, (24) sistemanyň çözüwi boljakdygy aýdyň;

b) $a_n(\beta_k)$ we $a_m(\beta_k)$ koeffisiýentleriň ikisi hem nola deň bolsun.

Bu ýagdaýda $f(x,\beta_k)$ we $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň rezultanty nola deň bolsa-da, olaryň umumy kökleriniň bolmazlygy mümkin. Eger hakykatdan hem şeýle bolsa, onda rezultantyň β_k köküni taşlamaly bolar. Ýöne, b) ýagdaýda hem $f(x,\beta_k)$ we $g(x,\beta_k)$ köpagzalar α_k umumy köke eýe bolmagy mümkin. Onda (α_k,β_k) jübüt ýene-de (24) sistemanyň çözüwi bolar.

Şeýlelikde, (24) sistemanyň ähli çözüwlerini tapmak üçin, $R(y)$ rezultantyň ähli $\beta_k (k = 1,2,\ldots,l)$ çözüwlerine aýratynlykda seretmek zerur bolýar.

(24) sistemanyň ýokardaky usul bilen tapylan çözüwlerinden başga çözüwiniň bolup bilmejekdigini hem belläliň. Hakykatdan hem, eger (α,β) jübüt (24) sistemanyň erkin çözüwi bolsa, onda

$$f(x,\beta) = a_n(\beta)x^n + a_{n-1}(\beta)x^{n-1} + \cdots + a_1(\beta)x + a_0(\beta),$$
$$g(x,\beta) = b_m(\beta)x^m + b_{m-1}(\beta)x^{m-1} + \cdots + b_1(\beta)x + b_0(\beta)$$

köpagzalar, α umumy köke eýe bolardy. Onda 4-nji teorema görä, $R(y)$ rezultant $y=\beta$ bolanda nola deň bolmaly, ýagny $R(\beta) = 0$ bolmaly. Bu bolsa β sanyň rezultantyň haýsy hem bolsa bir köki bolýandygyny aňladýar.

Ýokardaky aýdylanlar boýunça iki näbellili, iki algebraik deňlemeler sistemasyny çözmegiň aşakdaky yzygiderligini düzmek bolar:

1. Berlen deňlemeler sistemasyny (24) deňlemeler sistemasy görnüşinde ýazmaly;

2. Alnan sistemanyň rezultantyny düzüp, onuň ähli $\beta_k (k = 1,2,\ldots,l)$ köklerini tapmaly;

3. Tapylan β_k kökleri sistemasynyň deňlemelerinde goýup, $f(x,\beta_k) = 0$, $g(x,\beta_k) = 0$ bir üýtgeýänli deňlemeleri almaly;

4. $f(x,\beta_k)$, $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň $d_k(x)$ iň uly umumy bölünijisini tapmaly.

5. Eger $deg d_k \geq l$ bolsa, onda $d_k(x) = 0$ deňlemäni çözmeli. Bu deňlemäniň $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_p}$ kökleriniň $f(x,\beta_k)$ we $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň umumy kökleri boljakdygy aýdyň.

6. $(\alpha_{k_1}, \beta_k), (\alpha_{k_2}, \beta_k), \ldots, (\alpha_{k_p}, \beta_k)$ jübütleriň toplumyny düzmeli. Bu jübütleriň, köplügi rezultantyň β_k köküne degişli berlen sistemanyň kökleri bolar.

Bu yzygiderlikdäki 3-6 ädimler $\beta_k (k = 1,2,\ldots,l)$ kökleriň her biri üçin aýratynlykda ýerine ýetirilýär. Özi hem, käbir β_k kökler üçin $f(x,\beta_k)$, $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň umumy kökleriniň bolmazlygynyň mümkindigini hasaba almaly. Ýokarda görkezişimiz ýaly, bu ýagdaý $a_n(\beta_k) = b_m(\beta_k) = 0$ bolanda ýüze çykýar, ýöne ony barlamagyň geregi ýok. Sebäbi $d_k(x) = l$ şert, $f(x,\beta_k)$, $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň umumy kökleriniň ýokdugynyň nyşany bolýar.

$f(x,\beta_k)$, $g(x,\beta_k)$ köpagzalaryň haýsy hem bolsa biriniň ähli α_i köklerini kynçylyksyz tapyp bolýan ýagdaýynda $d_k(x)$ köpagzalaryň iň uly umumy bölüjini tapmaklygyň zerurlygy ýok; α_i-niň beýleki köpagzanyň hem köki bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny barlamak ýeterlik.

Biz iki näbellili, iki algebraik deňlemeli sistemalary çözmeklige ýeterlik derejede jikme-jik seretdik. Bu usuly s näbelli s sany algebraik deňlemeli sistemada hem ulanmak bolar. Onuň $s = 3$ bolan ýagdaýynda ulanylyşyna seredeliň. Goý,

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 0, \\ f_2(x,y,z) &= 0, \\ f_3(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

deňlemeler sistemasy berlen bolsun. f_1, f_2, f_3 köpagzalary x üýtgeýäniň derejeleri boýunça tertipleşdireliň we $R(f_1,f_2)$, $R(f_2,f_3)$ rezultantlary tapalyň. Olaryň y,z üýtgeýänlere görä köpagzalar boljakdygy aýdyň, ýagny

$$R(f_1,f_2) = R_1(y,z), \ R(f_2,f_3) = R_2(y,z).$$

Soňra, bu köpagzalary y üýtgeýäniň derejeleri boýunça tertipleşdirip, olaryň rezultantyny taparys:

$$R(R_1, R_2) = R(z).$$

Goý, γ san $R(z)$ rezultantyň käbir köki bolsun. $R_1(y,z)$, $R_2(y,z)$ rezultantlarda $z = \gamma$ diýip, $R_1(y,\gamma)$, $R_2\ (y,\gamma)$ köpagzalaryň $y = \beta$ umumy köküni taparys; soňra f_1, f_2, f_3 köpagzalarda $y = \beta$, $z = \gamma$ ornunagoýmalary ulanyp, $f_1(x,\beta,\gamma)$, $f_2(x,\beta,\gamma)$, $f_3(x,\beta,\gamma)$ köpagzalaryň α umumy köküni taparys.

Netijede, (α,β,γ) üçlük berlen (26) deňlemeler sistemasynyň çözüwi bolar. Bu sistemanyň ähli çözüwlerini almak üçin, her bir γ,β,α kökleriň üçlügi üçin ýokardaky yzygiderligi aýratynlykda gaýtalamaly.

1-nji mysal.

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= (y-1)x^2 - yx + 1 = 0, \\ g(x,y) &= (y-1)x^2 + 3x + y - 6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

deňleme sistemasyny çözüň.

Çözülişi. Ilki bilen

$$R(y) = \begin{vmatrix} \boxed{y-1} & -y & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{y-1} & -y & 1 \\ y-1 & 3 & y-6 & 0 \\ 0 & y-1 & 3 & y-6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-1 & -y & 1 & 0 \\ 0 & y-1 & -y & 1 \\ 0 & y+3 & y-7 & 0 \\ 0 & 0 & y+3 & y-7 \end{vmatrix} = 2(y-1)(y^3 - 9y^2 + 24y - 20)$$

rezultanty düzeris. $y^3 - 9y^2 + 24y - 20$ köpagzany derňäp, onuň bir rasional köküniň 2-ä deňdigini anyklarys. Ondan soňra aňsatlyk bilen,

$$R(y) = 2(y-1)\,(y-2)^2\,(y-5)$$

aňlatmany alarys. Şeýlelik bilen, rezultantyň kökleri $\beta_1 = 1$, $\beta_{2,3} = 2$, $\beta_4 = 5$ bolar.

a) berlen sistemada $y = \beta_1 = 1$ diýip,

$$f(x,1) = -x + 1,$$
$$g(x,1) = 3x + 5$$

deňlemeleri alarys. Olaryň umumy kökleri ýok. Onuň sebäbini $f(x,1)$ we $g(x,1)$ köpagzalaryň baş agzalarynyň koeffisiýentleriniň 0-a deňligi bilen düşündirip bolar.

b) $y = \beta_{2,3} = 2$ bolanda, berlen sistema seredeliň. Alarys:

$$f(x,2) = x^2 - 2x + 1,$$
$$g(x,2) = x^2 + 3x - 4.$$

Ýa-da

$$f(x,2) = (x-1)^2,$$
$$g(x,2) = (x-1)(x+4)$$

köpagzalary alarys. Bu köpagzalaryň umumy köki $\alpha_2 = 1$ we şonuň üçin hem, $x = \alpha_2 = 1$, $y = \beta_2 = 2$ berlen sistemanyň çözüwi bolýar.

ç) $y = \beta_4 = 5$ ýagdaýa seredeliň. Bu ýagdaýda berlen sistemadan

$$f(x,5) = 4x^2 - 5x + 1,$$
$$g(x,5) = 4x^2 + 3x - 1$$

köpagzalary alarys. Bu ýerde umumy kök $x = \alpha_4 = \frac{1}{4}$ bolar. Netijede, $x = \alpha_4 = \frac{1}{4}$, $y = \beta_4 = 5$ berlen sistemanyň ikinji çözüwi bolar. Berlen sistemanyň başga çözüwi ýok.

2-nji mysal. Ýokardaky düşündirilen nazaryýeti bu bölümçäniň başynda seredilen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - a = 0,$$

$$g(x,y) = xy - b = 0$$

mysalda ulanalyň.

Ýönekeý usul bilen x näbellini ýok edip,

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0 \qquad (27)$$

deňlemäni alarys.

Indi bolsa (23) umumy formulany peýdalanyp, $f(x,y)$ we $g(x,y)$ köpagzalaryň rezultantyny hasaplalyň:

$$R(y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 - a \\ y & -b & 0 \\ 0 & y & -b \end{vmatrix} = y^4 - ay^2 + b^2.$$

Görşümiz ýaly, bu rezultant (27) deňlemäniň çep tarapy bilen gabat gelýär.

Adaty usullar bilen $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ sistemanyň bir näbellisini ýok etmeklik, aglaba ýagdaýda bu köpagzalaryň rezultantyny tapmaklyk bilen gabat gelýär. Rezultantyň β köki esasynda, köplenç, $f(x,\beta) = 0$ ýa-da $g(x,\beta) = 0$ deňlemeleriň haýsy hem bolsa biriniň α köki tapylyp, ol kök deňlemeleriň beýlekisinde barlanyp görülýär, ýagny (α,β) jübütiň berlen sistemanyň çözüwi bolýandygy ýa-da bolmaýandygy anyklaşdyrylýar.

Bu bölümçäni biz bir üýtgeýänli köpagzalaryň ähli köklerini tapmak meselesini çözmekligi başarýan hökmünde beýan etdik. Hakykatda bolsa, biz häzirlikçe diňe n-nji derejeli köpagzanyň dagatma meýdanynda n sany kökünіň bardygyny bilýäris. Ol kökleri tapmaklygyň usullaryny bolsa aýratynlykda öwrenmeklik zerur bolýar. San koeffisiýentli köpagzalaryň köklerini tapmaklygyň käbir usullaryna indiki bölümde serederis.

IV BÖLÜM SAN MEÝDANYNDA BERLEN KÖPAGZALAR

§ 13. Kompleks sanlar meýdanynyň algebraik ýapyklygy

13.1. Giriş bellikleri

Indi bolsa san koeffisiýentli köpagzalary, ýagny san meýdanynda berlen köpagzalary we olara mahsus bolan häsiýetleri öwrenmeklige geçeliň. Bu soragyň wajyplygy matematikanyň köp bölümleriniň, tebigat bilimleriniň, ykdysady meseleleriniň aglabasynyň hakyky ýa-da kompleks koeffisiýentli algebraik deňlemeleri ýa-da olaryň sistemalaryny çözmeklige getirilýänligi bilen düşündirilýär. Şunuň bilen baglylykda, XIX asyryň ortalarynda san koeffisiýentli köpagzalar nazaryýeti algebra ylmynyň esasy soraglarynyň biri bolupdy, bu soragyň esasynda algebra ylmy ösüp, häzirki zaman matematikasynyň esasy düşünjeleri bolan abstrakt strukturalar we abstrakt meýdanlarda berlen köpagzalar düşünjelerini ýüze çykardy.

San meýdanlarynda berlen köpagzalaryň häsiýetlerini öwrenmeklik, esasan hem, mekdep mugallymlary üçin has ähmiýetlidir, sebäbi mekdep matematikasynda diňe san koeffisiýentli köpagzalar we olara degişli algebraik deňlemeler öwrenilýär.

6.3-nji bölümçede görkezilişi ýaly, san meýdanlarynda berlen köpagzalaryň algebraik we funksional berlişi deňhukuklydyr. Bu bolsa beýle köpagzalara hakyky üýtgeýänli ýa-da kompleks üýtgeýänli funksiýalar hökmünde seredip boljakdygyny, bu funksiýalara degişli kesgitlemeleri we tassyklamalary, hususy ýagdaýda, üznüksiz funksiýanyň häsiýetlerini köpagzalar üçin ulanmak boljakdygyny aňladýar. Bu bölümde biz köpagzanyň funksional kesgitlemesinden peýdalanarys, sebäbi san koeffisiýentli köpagzalaryň kökleriniň barlygyny, sanyny, ýerleşişini derňemeklik köpagzanyň funksional berlişinden peýdalanyp ýerine ýetirilýär.

Öňki bölümlerde köpagzalaryň koeffisiýentleriniň haýsy meýdanda berlendigine bagly bolmadyk, ýagny dürli meýdanlarda ýerine ýetýän umumy häsiýetlerine seredipdik. Hatda köpagzalaryň getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmasy dürli meýdanlarda dürli bolýandygyna seretmezden bu dagatmanyň umumy häsiýetlerine seredipdik. Erkin alnan P meýdan üçin köpagzanyň $P[x]$ halkasynda köpagzalaryň üstünde geçirilýän amallaryň häsiýetleri, köpagzalaryň bölünijiligine degişli esasy häsiýetler, simmetrik köpagzalaryň häsiýetleri we ş.m. köpagzalara degişli umumy häsiýetler bolýarlar. Bu häsiýetleriň san meýdanlarynda berlen köpagzalar üçin hem, orunly häsiýetler boljakdygy tebigydyr.

Köpagzalary häsiýetlendirýän wajyp häsiýetleriň biri-de onuň kökleriniň barlygy, sany we ýerleşişidir. Bu soraglary öwrenenimizde indi biz, köpagzalaryň haýsy san meýdanynda berlendigini hökman hasaba almaly bolarys. Sebäbi şol bir köpagzanyň käbir san meýdanynda köküniň bolmagy ýa-da bolmazlygy ýa-da şol bir köpagzanyň dürli meýdanlarda kökleriniň sanynyň dürli bolmagy mümkin. Meselem, $f(x) = x^2 + 1$ köpagza hakyky sanlar meýdanynda hiç bir köke eýe däl, ýöne kompleks sanlar meýdanynda $\pm\, i$ köklere eýe; $g(x) = x^4 - 1$ köpagzanyň rasional sanlar meýdanynda iki köki kompleks sanlar meýdanynda bolsa, dört köki bardyr.

§ 8-de beýan edişimize görä, $P[x]$ halkanyň her bir $f(x)$ köpagzasynyň dagatma meýdany bolmaly. Ol dagatma meýdan P meýdanyň käbir L giňeltmesi bolup, L meýdanda $f(x)$ köpagza çyzykly köpeldijilere dagaýar. San meýdanlarynyň arasynda $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany aýratyn wajyplygy bilen tapawutlanýar. $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen her bir $f(x)$ köpagzanyň dagatma meýdany $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynyň özi bolýar eken, ýagny kompleks sanlar meýdanynda islendik köpagza çyzykly köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagaýar. Başga sözler bilen aýdanymyzda, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany algebraik ýapyk bolýar. Biziň bilşimiz ýaly, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdany munuň ýaly fundamental aýratynlyga eýe däldir. Şonuň bilen baglylykda kompleks koeffisiýentli köpagzalaryň ýa-da başgaça aýdanda, kompleks üýtgeýänli bitin rasional funksiýanyň häsiýetlerini öwrenmeklik aýratyn mesele bolup durýar.

$\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen algebraik deňlemeleriň köküniň bar bolmak meselesini derňemekligiň esasy netijesi, derejesi noldan tapawutly bolan erkin alnan kompleks koeffisiýentli köpagzanyň iň bolmanda bir köküniň bar bolmagy hakyndaky teoremadyr. Bu fundamental netije $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanyň algebraik ýapyklygy bilen deňgüýçlidir. Bu netijäniň esasynda algebraik deňlemeleri derňemekligiň we çözmekligiň dürli usullary işlenip düzüldi.

Şoňa görä-de, bu teoremany alymlar ***algebranyň esasy teoremasy*** diýip, atlandyrypdyrlar. Ýöne, bu adalga häzirki döwürde könelişen hasaplanýar, sebäbi algebra dersi $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen algebraik deňlemeler nazaryýeti bilen tamamlanmaýar. Geljekde biz bu teoremanyň adyny **kompleks sanlar algebrasynyň *esasy teoremasy*** diýip atlandyrarys.

Bu bölümde esasy teoremanyň we ondan gelip çykýan netijeleriň subutlary görkezilýär. Bu teorema birnäçe usullar bilen subut edilýär; biz «has algebraik» hasap edilýän Eýler-Gaussyň usulyny getireris. Bu usul köpagzalaryň funksional häsiýetlerine daýanýar.

13.2. Köpagzalaryň modulynyň häsiýetleri

Ilki bilen, $f(z)$ köpagzanyň modulynyň häsiýetine seredeliň, bu ýerde z kompleks üýtgeýäni aňladýar.

1-nji teorema. *Eger derejesi noldan tapawutly $f(z)$ köpagza berlen bolsa, onda erkin alnan we ýeterlik uly bolan $M > 0$ san üçin, $N > 0$ san tapylyp, $|z| > N$ bolanda, $|f(z)| > M$ deňsizlik ýerine ýetýär.*

Başga sözler bilen aýdanymyzda, $|z|$-iň artmagy bilen $|f(z)|$ çäksiz artýar.

Subudy. Modulyň ($|a - b| \geq |a| - |b|$) häsiýeti esasynda alarys:

$$|f(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \\ + \ldots + a_1 z + a_0|. \tag{1}$$

Ýöne, jemiň modulynyň goşulyjylaryň modullarynyň jeminden geçmeýändigini we köpeltmek hasylynyň modulynyň, köpeldijileriň modulynyň köpeltmek hasylyna deňdigini hasaba alsak, onda

$$|a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \cdots + \\ + |a_1||z| + |a_0| \leq A[|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1] = A\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \tag{2}$$

deňsizligi alarys, bu ýerde A san $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň $|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|$ modullarynyň iň ulusyna deňdir. Eger z üýtgeýäne goşmaça

$$|z| > 1 \tag{3}$$

şerti bersek, onda

$$A\frac{|z|^{n-1}}{|z| - 1} < A\frac{|z|^n}{|z| - 1} \tag{4}$$

deňsizligi alarys.

(1) we (4) deňsizlikleriň kömegi bilen (1) deňsizligi güýçlendirip,

$$|f(z)| > |a_n||z|^n - A\frac{|z|^n}{|z| - 1} = |z|^n \frac{|a_n||z| - |a_n| - A}{|z| - 1} \tag{5}$$

deňsizligi alarys. $|z|$-iň çäksiz artmagy bilen ol

$$N_1 = \frac{2A}{|a_n|} + 1 \tag{6}$$

sandan uly bolar, ýagny

$$|z| > \frac{2A}{|a_n|} + 1 \tag{6'}$$

deňsizlik ýa-da başgaça

$$\frac{A}{|z|-1} < \frac{|a_n|}{2}$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de,

$$\frac{|a_n||z|-|a_n|-A}{|z|-1} = |a_n| - \frac{A}{|z|-1} > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}. \tag{7}$$

Eger $|z|$ ululyk (3) deňsizligi kanagatlandyryp, (6′) deňsizligi hem kanagatlandyrsa, ýagny eger

$$|z| > \max\{1, N_1\} = N_1 \tag{8}$$

bolsa, onda (5) we (7) deňsizlikleriň esasynda

$$|f(z)| > |z|^n \frac{|a_n|}{2} \tag{9}$$

deňsizligi alyp bolýar.

Indi bolsa, $|z|$ ýeterlik uly bolanda, $|f(z)|$ modulyň berlen M sandan uly boljakdygyny görkezeliň.

Hakykatdan hem,

$$|z| > \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}} \tag{10}$$

bolanda

$$|z|^n \frac{|a_n|}{2} > \frac{2M}{|a_n|}\frac{|a_n|}{2} = M \tag{11}$$

deňsizligiň ýerine ýetjekdigi düşnükli. Eger bu ýagdaýda (9) deňsizlik hem ýerine ýetýän bolsa, onda (9) we (11) deňsizliklerden $|f(z)| > M$ deňsizlik gelip çykýar. (9) deňsizligiň (8) deňsizligi kanagatlandyrýan z-ler üçin, (11) deňsizligiň bolsa (10) deňsizligi kanagatlandyrýan z-ler üçin ýerine ýetirýändigine görä, $|f(z)| > M$ deňsizlik bu deňsizlikleriň ikisini hem kanagatlandyrýar, ýagny $|z| > N$, bu ýerde

$$N = \max\left\{N_1, \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}}\right\},$$

deňsizligi kanagatlandyrýan z-ler üçin ýerine ýetýär. Islendik M položitel san üçin, ýokardaky şert bilen kesgitlenýän N sany tapyp boljakdygy aýdyň. ▶

Bu teoremany subut etmekligiň dowamynda alnan deňsizliklerden gönüden-göni aşakdaky netijeleri almak bolar.

1-nji netije. *$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ köpagza diňe moduly*

$$N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|} \tag{12}$$

sandan kiçi bolan köklere eýedir, bu ýerde A san $f(z)$ köpagzanyň koeffisiýentleriň $|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_1|, |a_0|$ modullarynyň iň ulusyna deňdir.

Subudy. Hakykatdan hem, eger z erkin alnan san bolsa, özi hem $|z| \geq N_0$, ýagny $|z| \geq 1 + \frac{A}{|a_n|}$ ýa-da $|a_n||z| - |a_n| - A \geq 0$ şerti kanagatlandyrsa, onda (5) deňsizlikden $|f(z)| > 0$ deňsizligi alarys. Bu bolsa, $|z| \geq 1 + \frac{A}{|a_n|}$ şerti kanagatlandyrýan z-leriň $f(z)$ köpagzany nola öwürmeýändigini aňladýar. ►

2-nji netije. $|z| > N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ *şert ýerine ýetende, $f(z)$ köpagzanyň baş agzasynyň moduly bu köpagzanyň beýleki agzalarynyň jeminiň modulyndan uludyr, ýagny*

$$|a_n z^n| > |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0| \tag{13}$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

Subudy. Hakykatdan hem, eger $|z| > N_0$ bolsa, onda

$|a_n||z| - |a_n| = A > 0$ bolar. Şoňa görä-de,

$$|a_n||z|^n - \frac{A|z|^n}{|z|-1} = |z|^n \frac{|a_n||z| - |a_n| - A}{|z|-1} > 0,$$

ýagny $|a_n z^n| > A\frac{|z|^n}{|z|-1}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Ýöne, (2) we (4) deňsizliklerden

$$A\frac{|z|^n}{|z|-1} > |a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0|$$

deňsizligi alarys. Gutarnykly ýagdaýda, soňky deňsizliklerden $|z| > N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ bolanda (13) deňsizligi alarys. ►

2-nji teorema. ***R*** *hakyky sanlar meýdanynda berlen täk derejeli $f(x)$ köpagza iň bolmanda bir sany hakyky köke eýedir.*

Subudy. Teoremanyň şerti boýunça $f(x)$ köpagza hakyky sanlar meýdanynda berlen köpagzalaryň hususy haly bolýar, şoňa görä-de goý, x diňe hakyky bahany alýan bolsun we

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

köpagzanyň koeffisiýentleri diňe hakyky sanlar bolsun. Matematiki analiz kursundan belli bolşy ýaly, $f(x)$ funksiýa x üýtgeýäne görä üznüksiz funksiýa bolýar. 2-nji netijä görä, $|x|$-iň ýeterlik uly bahalarynda $|a_n x^n| > |a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0|$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin hem x-iň bu bahalarynda $f(x)$ köpagzanyň alýan bahasynyň alamaty $a_n x^n$ baş agzanyň alamaty bilen gabat gelýär. n-iň täk sandygyny hasaba alsak, $a_n x^n$ baş agzasynyň alamaty x-iň alamaty üýtgände üýtgeýär. Şonuň üçin hem, $|x|$-iň ýeterlik uly bahasynda $f(x)$ köpagzanyň san bahasynyň alamaty x üýtgeýäniň bahasynyň položitel ýa-da otrisateldigine baglylykda üýtgeýär. Netijede, x üýtgeýäniň käbir $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ bahalarynda $f(a)$ we $f(b)$ sanlar alamatlary boýunça dürli bolarlar. Onda matematiki analiz kursundan belli bolan Bolsana – Koşiniň teoremasyna görä, (a,b) aralykda $f(x)$ köpagzany nola öwürýän iň bolmanda bir sany ξ san bardyr, ýagny $f(\xi) = 0$ bolar. ▶

13.3. Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasy

Ilki bilen aşakdaky teoremany subut edeliň.

3-nji teorema. *Derejesi $n \geq 1$ şerti kanagatlandyrýan hakyky koeffisiýentli her bir köpagza iň bolmanda bir kompleks köke eýedir.*

Subudy. Ilki bilen, islendik n natural sany $n = 2^k_q$ görnüşde ýazyp bolýandygyny belläliň. Bu ýerde $k \geq 0$ bitin, q bolsa käbir täk natural san.

Goý, $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ derejesi $n = 2^k_q$ deň bolan köpagza bolsun. Teoremany $k \geq 0$ bitin sana görä matematiki induksiýa usulyny ulanyp, subut ederis. $k = 0$ bolanda, $n = q$ täk natural san bolýandygy üçin, 2-nji teorema görä, berlen köpagza hakyky köke eýedir, şonuň üçin bu ýagdaýda teorema dogry. Indi bolsa, 3-nji teoremanyň tassyklamasyny hakyky koeffisiýentli, derejesi $2^{k-1}q$-a deň bolan islendik köpagza üçin, dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, 3-nji teoremanyň tassyklamasyny derejesi $2^k q$-a deň bolan hakyky koeffisiýentli islendik köpagza üçin dogrulygyny subut edeliň.

C kompleks sanlar meýdanynda seredilýän $f(z)$ köpagzanyň $\tilde{C}$ dagatma meýdanynda n sany köki bardyr *(8.3-nji bölümçä seret)*. Olary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bilen belgiläliň. Indi bolsa, käbir erkin alnan r hakyky sany saýlap alalyň we $\tilde{C}$ meýdanyň $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j)$, $i < j$ görnüşli ähli mümkin bolan elementlerine seredeliň. Belli bolşy ýaly, β_{ij} görnüşli ähli elementleriň sany

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k q(2^k q - 1)}{2} = 2^{k-1} q(2^k q - 1) = 2^{k-1} q_1$$

formulanyň kömegi bilen kesgitlenýär, bu ýerde $q_1 = \boldsymbol{q}(2^k q - 1)$ täk sandyr.

Indi kökleri diňe β_{ij} sanlar bolan

$$\varphi(z) = \prod_{i,j(i<j)} \left(z - \beta_{ij}\right), \beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j), i < j$$

köpagza seredeliň. Bu köpagzanyň derejesiniň $2^{k-1}q_1$ deňligi aýdyň, sebäbi β_{ij} görnüşli sanlaryň sany $2^{k-1}q_1$-e deň. z hakyky san bolany üçin, $\varphi(z)$ köpagzanyň koeffisiýentleri β_{ij}-lere görä, β_{ij}-leri üýtgeýänler hökmünde göz öňüne getirsek we netijede, $\alpha_i(i = 1,2,...,n)$-lere görä hakyky koeffisiýentli köpagzalar bolar. $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň islendik ornunagoýmasynda $\varphi(z)$ köpagza üýtgemeýär:

$$\varphi(z)=\prod_{i,j(i<j)}\left(z-\beta_{ij}\right)=\prod_{i,j(i<j)}\{z-[\alpha_i\alpha_j+r(\alpha_i+\alpha_j)]\}.$$

Eger $\varphi(z)$ köpagza $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň islendik çalşyrmasynda üýtgemeýän bolsa, onda onuň koeffisiýentleri hem üýtgemeýär. Şoňa görä-de, $\varphi(z)$ köpagzanyň koeffisiýentleri $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ üýtgeýänlere görä ***R*** hakyky sanlar meýdanynda berlen simmetrik köpagzany emele getirýär.

Ýöne, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementler hakyky koeffisiýentli $f(z)$ köpagzanyň kökleri bolany üçin, simmetrik köpagzalar baradaky 3-nji teorema görä *(11.2-nji bölümçä seret)*, $\varphi(z)$ köpagzanyň koeffisiýentleri hakyky sanlar bolýar. $\varphi(z)$ köpagzanyň derejesi $2^{k-1}q_1$-e deň bolany üçin, induksiýanyň güman etmesine görä, ol iň bolmanda bir sany kompleks köke eýe. Ýöne onuň kökleri $\alpha_i\alpha_j+r(\alpha_i+\alpha_j)$ görnüşde bolany üçin, olaryň iň bolmanda biri kompleks san bolar.

Şeýlelik bilen, r hakyky sany nähili edip saýlap alsak-da, $\alpha_i\alpha_j+r(\alpha_i+\alpha_j)$ element $\tilde{C}$ meýdanyň kompleks sany bolar ýaly i,j $(1\le i\le n,\ 1\le j\le n)$ indeksleriň jübütini görkezmek bolar. Dürli r we r' hakyky sanlara dürli indeksleriň jübütleri degişli edilýär. Ýöne hakyky sanlaryň köplügi tükeniksiz köplük, ähli mümkin bolan indeksleriň sany bolsa tükenikli köplük, onda şol bir indeksleriň jübütleri degişli edilen dürli iki r_1 we r_2 hakyky sanlary saýlap bolar:

$$\alpha_i\alpha_j+r_1(\alpha_i+\alpha_j)=\gamma_1, \tag{14}$$

$$\alpha_i\alpha_j+r_2(\alpha_i+\alpha_j)=\gamma_2, \tag{15}$$

bu ýerde γ_1 we γ_2 kompleks sanlardyr.

Bu deňlikleri agzama-agza aýryp,

$$(r_1-r_2)(\alpha_i+\alpha_j)=\gamma_1-\gamma_2$$

deňligi, bu ýerden bolsa

$$\alpha_i+\alpha_j=\frac{\gamma_1-\gamma_2}{r_1-r_2} \tag{16}$$

deňligi alarys. Tapylan bahany (14) deňlikde goýup,

$$\alpha_i\alpha_j+r_1\frac{\gamma_1-\gamma_2}{r_1-r_2}=\gamma_1$$

deňligi, bu ýerden bolsa,

$$\alpha_i \alpha_j = \gamma_1 - r_1 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{r_1 - r_2} \tag{17}$$

deňligi alarys.

Görnüşi ýaly, $\alpha_i + \alpha_j$ jem we $\alpha_i \alpha_j$ köpeltmek hasyly kompleks sanlar bolýar. Ýöne (16) we (17) deňliklerden α_i we α_j sanlary tapmak bolar. Ol sanlaryň hem kompleks sanlar boljakdygy aýdyň. α_i we α_j sanlary, meselem,

$$z^2 - (\alpha_i + \alpha_j)z + \alpha_i \alpha_j = 0$$

kwadrat deňlemäniň kökleri hökmünde göz öňüne getirmek bolar.

Netijede, $f(z)$ köpagzanyň $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ kökleriniň arasynda hatda iki sany kompleks sanyň bardygyny görkezdik. ▶

Indi 3-nji teoremanyň umumylaşmasy bolan aşakdaky tassyklamany subut edeliň.

4-nji teorema. (Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasy). *Kompleks koeffisiýentli, derejesi noldan tapawutly her bir*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

köpagzanyň iň bolmanda bir sany kompleks köki bardyr.

Subudy. Goý, erkin alnan kompleks koeffisiýentli

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

köpagzanyň derejesi noldan uly bolsun. $f(z)$ köpagzanyň her bir koeffisiýentini özüniň çatrymlysy bilen çalşyp,

$$f_1(z) = \overline{a_n}\, z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}, z + \overline{a_0}$$

köpagzany alalyň we

$$g(z) = f(z)\, f_1(z) = b_{2n} z^{2n} + b_{2n-1}\, z^{2n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$$

köpeltmek hasylyna seredeliň, bu ýerde

$$b_k = \sum_{i+j=k} a_i \bar{a}_j, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Çatyrymly kompleks sanlaryň häsiýetine görä we $i,j = 1,2,\ldots, n$ bolany üçin,

$$\overline{b_k} = \sum_{i+j=k} \overline{a_i} a_j = b_k$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny $g(z)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri hakyky sanlardyr. Netijede, 3-nji teorema görä, $g(z)$ köpagza iň bolmanda bir sany α kompleks köke eýe bolýar we şonuň üçin hem, $g(\alpha)=f(\alpha)f_1(\alpha)=0$ deňlik ýerine ýetýär. Bu ýerden $f(\alpha)=0$ deňligi ýa-da $f_1(\alpha)=0$ deňligi alarys. Birinji ýagdaýda α kompleks san $f(z)$ köpagzanyň köki bolýar. Ikinji ýagdaýda

$$f_1(\alpha) = \overline{a_n}\alpha^n + \overline{a_{n-1}}\alpha^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\alpha + \overline{a_0} = 0$$

deňligi alarys. Bu ýerde çatrymlylygyny häsiýetlerine görä ähli kompleks sanlary olaryň çatyrymlary bilen çalşyp,

$$a_n\bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0 = f(\bar{\alpha}) = 0$$

deňligi, ýagny $\bar{\alpha}$ kompleks sanyň $f(z)$ köpagzanyň köki bolýandygyny alarys. Bu bolsa, $f_1(\alpha)=0$ ýagdaýda hem teoremanyň dogry bolýandygyny aňladýar. ►

§ 14. Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasyndan gelip çykýan netijeler

14.1. Köpagzalaryň kompleks sanlar meýdanynda çyzykly köpeldijilere dagadylyşy

Ýokardaky subut edilen kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasyndan birnäçe wajyp netijeler gelip çykýar.

1-nji teorema. *Kompleks sanlar meýdanynda derejesi birden uly her bir köpagza getirilýändir.*

Subudy. Goý, $f(z)$ köpagzanyň derejesi ikiden kiçi bolmasyn. Onda esasy teorema görä, onuň iň bolmanda bir sany $z_0 \in C$ köki bardyr. 8-nji bölümçäniň 1-nji teoremasyna görä, $f(z)$ köpagza $z - z_0$ ikagza bölünýär, ýagny $f(z) = (z - z_0)f_1(z)$ deňlik dogry, bu ýerde $deg f_1 \geq 1$. Şunuň bilen $f(z)$ köpagzanyň kompleks sanlar meýdanynda getirilýändigi subut edildi. ►

Netije. *Kompleks sanlar meýdanynda köpagzanyň getirilmeýän bolmagy üçin, onuň derejesiniň bire deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

2-nji teorema. *Kompleks sanlar meýdanynda derejesi n-e deň bolan her bir $f(z)$ köpagza ýeke-täk usul bilen (köpeldijileriň ýerleşiş tertibine çenli takyklykda)*

$$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) \qquad (1)$$

görnüşde çyzykly köpeldijileriň köpeltmek hasylyna dagaýar, bu ýerde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sanlar $f(z)$ köpagzanyň kökleri, a_n onuň baş koeffisiýenti.

Subudy. 7.7-nji bölümçäniň 8-nji teoremasyna görä, ***C*** meýdanda berlen her bir $f(z)$ köpagzany $f(z)=f_1(z)f_2(z)\dots f_m(z)$ görnüşde getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagatmak bolýar, özi hem bu dagatmada $f_k(z)$ köpagzalar hemişelik köpeldijä çenli takyklykda birbelgili kesgitlenýär. Ýöne, kompleks sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalar diňe birinji derejeli köpagzalar bolup bilýär. Netijede, bu dagatmadaky ähli $f_k(z)$ köpagzalar birinji derejeli köpagzalardyr we şoňa görä-de, $m=n$ bolar. $f_k(z)$ köpagzalaryň hemişelik köpeldijä çenli takyklykda kesgitlenýändigi üçin, biz $f_k(z)$ köpagzalary normirlenen diýip hasap ederis, ýagny $f_k(z)=z+\alpha_k$ diýip ýazyp bileris. Onda

$$f(z)=A(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\dots(z+\alpha_n)$$

bolar. Bu deňligiň sag we çep taraplaryndaky köpagzalaryň baş koeffisiýentlerini deňeşdirip, $A=a_n$ bolýandygyny göreris. $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ sanlaryň $f(z)$ köpagzanyň kökleri bolýandygy aýdyň. Olary $z_1, z_2, \dots, z_n$ bilen belgiläp hemişelik köpeldijä çenli takyklykda kesgitlenen (1) dagatmany alarys. ►

(1) dagatmadan $f(z)$ köpagzanyň $z_1, z_2, \dots, z_n$ sanlardan başga kökleriň bolup bilmeýändigi gelip çykýar. Şeýlelikde, aşakdaky tassyklama dogry bolýar.

3-nji teorema. *n-nji derejeli köpagza kompleks sanlar meýdanynda n sany köke eýedir.*

(1) dagatmadan görnüşi ýaly, ***C*** kompleks sanlar meýdanynda berlen $f(z)$ köpagzanyň ähli kökleri hem ***C*** meýdanyň elementleri bolýar, ýagny kompleks koeffisiýentli islendik köpagzanyň dagatma meýdany ***C*** kompleks sanlar meýdany bolýar. Netijede, kompleks sanlaryň meýdany algebraik ýapykdyr.

Bu alnan netijeler diňe kompleks sanlar meýdanyna geçip, algebraik deňlemeleriň umumy nazaryýetini düzmekligiň mümkindigini aňladýar; ***Q*** rasional sanlaryň meýdanynda we ***R*** hakyky sanlaryň meýdanynda käbir köpagzalaryň bir köküniň hem bolmazlygy mümkin.

8.3-nji bölümçäniň 6-njy teoremasyna görä n-nji derejeli

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2}$$

algebraik deňlemäniň $z_1, z_2, \dots, z_n$ kökleri üçin, Wiýetiň formulalary dogrudyr:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + \dots + z_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\
z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\
z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\
\hline
z_1 z_2 \dots z_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned} \tag{3}$$

$\boldsymbol{C}$ meýdanda $f(z)$ köpagzanyň (1) dagatmasyna girýän käbir kratny kökleriniň bolmagy mümkin, şoňa görä-de, (1) dagatmany

$$f(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m} \tag{4}$$

görnüşde ýazmak bolýar, bu ýerde $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sanlar $f(z)$ köpagzanyň jübüt-jübütden dürli kökleri, özi hem $m \leq n$ we $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

14.2. Köpagzalaryň hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalaryň köpeltmek hasylyna dagadylyşy

Hakyky koeffisiýentli algebraik deňlemeler kompleks koeffisiýentli algebraik deňlemeleriň giň ýaýran hususy halydyr. Hakyky sanlar köplügi $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynyň bölek meýdanyny emele getirýänligi üçin, bu bölümiň ähli tassyklamalary hakyky koeffisiýentli köpagzalar üçin hem ýerlikli bolýar, meselem, derejesi n-e deň bolan hakyky koeffisiýentli her bir köpagzanyň jemi n sany kompleks köki bardyr. Ýöne, käbir ýagdaýlarda hakyky koeffisiýentli köpagzalaryň hakyky köklerine bolan aýratyn gyzyklanma ýüze çykýar. Elbetde, käbir hakyky koeffisiýentli köpagzalaryň bir sany hem hakyky kölüniň bolmazlygynyň mümkinligini biz öň belläpdik (meselem, $x^2 + 1 = 0$ deňlemäniň hakyky köki ýok). Şeýle bolsa-da kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasyndan, hakyky koeffisiýentli algebraik deňlemeleriň häsiýetlerine degişli birnäçe netijeleri almak bolar.

4-nji teorema. *Eger z_0 kompleks san hakyky koeffisiýentli*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{5}$$

köpagzanyň köki bolsa, onda oňa çatyrymly bolan $\overline{z_0}$ kompleks san hem bu köpagzanyň köküdir.

Subudy. $f(z_0)$ kompleks sanyň hakyky bölegini we hyýaly bölegini aýratynlykda görkezeliň :

$$f(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = A + Bi,\ A, B \in R. \tag{6}$$

z_0 san (5) deňlemäniň köki bolany üçin $A + Bi = 0$ bolmaly, bu ýerden $A = B = 0$ bolýandygy alynýar. Edil şeýle görnüşde $f(\bar{z}_0)$ bahany hem hasaplalyň. Şert boýunça $f(z)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri hakyky sanlar, şoňa görä-de, $\overline{a_k} = a_k$ bolar.

Onda

$$\begin{aligned} f(\bar{z}_0) = a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \cdots + a_1 (\bar{z}_0) + a_0 = a_n (\bar{z}_0)^n + \\ + \bar{a}_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 (\bar{z}_0) + \bar{a}_0. \end{aligned} \tag{7}$$

(6) we (7) deňlikleri deňeşdirip $f(\overline{z}_0)$ aňlatmany $f(z_0)$ aňlatmada ähli sanlary olaryň çatyrymlary bilen çalşyp, almak bolýandygyna göz ýetirýäris. $f(\overline{z}_0)$ we $f(z_0)$ aňlatmalaryň goşulyjylarynyň üstünde diňe goşmak we aýyrmak amallaryny ýerine ýetirýändigimiz üçin, ol sanlar kompleks sanlaryň esasy häsiýetlerine görä (§ 18-e seret), $f(\overline{z}_0)=\overline{f(z_0)}=A-Bi$ bolýar. Ýöne, $A=B=0$ bolany üçin, $f(\overline{z}_0)=0$ bolýar. ►

Subut edilen teoremanyň üstüni aşakdaky tassyklama bilen doldurmak bolar.

5-nji teorema. *Eger z_0 kompleks san hakyky koeffisiýentli $f(z)$ köpagzanyň k kratnyly köki bolsa, onda z_0 sana çatyrymly bolan $\overline{z}_0$ kompleks san hem bu köpagzanyň k kratnyly köküdir.*

Subudy. Eger z_0 kök $f(z)$ köpagzanyň k kratnyly köki bolsa, onda

$$f(z_0)=f(z_0)=\cdots=f^{(k-1)}(z_0)=0, \quad f^{(k)}(z_0)\neq 0 \tag{8}$$

gatnaşyklar ýerine ýetýär *(8.5-nji bölümçä seret)*. Ýöne, hakyky koeffisiýentli köpagzanyň ähli önümleriniň ýene-de hakyky koeffisiýentli köpagzalar bolýandygyna görä, $f^{(i)}(z)$ köpagzalara 4-nji teoremany ulanyp, $f^{(i)}(\overline{z}_0)=0$ ($i=1,2,\ldots,k-1$) netijä gelýäris. Ikinji tarapdan $f^{(k)}(\overline{z}_0)\neq 0$ bolar, sebäbi $f^{(k)}(\overline{z}_0)=0$ bolanda, $f^{(k)}(\overline{z}_0)=0$ bolardy. Ol bolsa (8) gatnaşyga garşy gelýär. Netijede, $\overline{z}_0$ san hem $f(z)$ köpagzanyň k kratnyly köki bolýar. ►

6-njy teorema. *Derejesi ikiden uly bolan hakyky koeffisiýentli her bir köpagza **R** hakyky sanlar meýdanynda getirilýändir.*

Subudy. Goý, z_0 san $f(z)$ köpagzanyň käbir köki bolsun. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

a) goý, z_0 hakyky san bolsun. Onda Bezunyň teoremasyna görä hakyky sanlar meýdanynda $f(z)=(z-z_0)f_1(z)$ deňlik dogrudyr, bu ýerde $f_1(z)\in \boldsymbol{R}[x]$ we $deg f_1\geq 1$. Şeýlelikde, bu ýagdaý üçin teorema dogry bolýar: $f(z)$ köpagza **R** hakyky sanlar meýdanynda getirilýär;

b) goý, z_0 hakyky däl kompleks san bolsun. Onda 4-nji teorema görä, z_0 sana çatyrymly bolan z_0 san hem $f(z)$ köpagzanyň köki bolýar. Şonuň üçin hem, $f(z)$ köpagza $z-z_0$ we $z-\overline{z}_0$ çyzykly köpeldijilere bölünýär. Netijede,

$$f(z)=(z-z_0)(z_0-\overline{z}_0)\varphi(z)$$

deňligi, ýagny

$$f(z)=[z^2-(z_0+\overline{z}_0)z+z_0\,\overline{z}_0]\varphi(z)$$

deňligi alarys. Bu ýerde $z_0+(\,\overline{z}_0)$ we $z_0\;\overline{z}_0$ sanlaryň hakyky sanlardygyny hasaba alsak, $f(z)$ köpagzanyň ikinji derejeli hakyky koeffisiýentli köpagza bölünýändigini göreris. Şunlukda, $f(z)$ köpagzanyň derejesi ikiden uly bolany üçin, $deg\varphi \geq 1$ we $\varphi(z) \in \boldsymbol{R}[z]$ bolar. Şeýlelik bilen, $f(z)$ köpagza bu ýagdaýda hem $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda getirilýär.

7-nji teorema. *Hakyky koeffisiýentli her bir $f(z)$ köpagza R hakyky sanlar meýdanynda çyzykly köpeldijileriň ýa-da kwadrat üçagzalaryň köpeltmek hasylyna*

$$f(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} \dots (z - z_l)^{k_l} (z^2 + p_{l+1}z + q_{l+1})^{k_{l+1}} \dots (z^2 + p_m z + q_m)^{k_m} \tag{9}$$

görnüşde ýeke-täk usul bilen dagaýar, bu ýerde $k_i \in N \cup \{0\}$ we $k_i \leq n$, $i = 1,2,\dots,m$.

Subudy. Köpagzalaryň bölünijilik nazaryýetinden belli bolşy ýaly, erkin alnan hakyky koeffisiýentli köpagza $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalara dagaýar. 6-njy teorema görä, bu köpeldijiler diňe birinji derejeli ýa-da ikinji derejeli köpagzalar bolup bilerler. Eger bu köpeldijileriň baş agzalarynyň koeffisiýentleri 1-e deň bolsa, onda olar birbelgili kesgitlenýärler. Bu ýagdaýda (9) deňligiň sag tarapynda a_n köpeldijiniň boljakdygy düşnüklidir. ►

1-nji mysal. $f(z) = z^4 + 4$ köpagzany kompleks we hakyky sanlar meýdanlarynda getirilmeýän köpagzalara dagadyň.

Çözülişi. $f(z) = z^4 + 4$ köpagza hakyky köklere eýe däl. Onuň kökleri jübüt-jübütden çatrymly bolan kompleks sanlardyr:

$$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = -1 + i,\ z_4 = -1 - i.$$

7-nji teorema görä $f(z) = z^4 + 4$ köpagza $\boldsymbol{C}$ meýdanda getirilmeýän köpagzalara aşakdaky ýaly dargaýar:

$$f(z) = z^4 + 4 = [z - (1 + i)][z - (1 - i)][z - (-1 + i)][z - (-1 - i)] =$$

$$= (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 - i)(z + 1 + i).$$

Bu köpagzanyň $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda dagatmasy

$$f(z) = z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$$

görnüşe eýe bolýar.

7-nji teoremany drob-rasional funksiýany ýönekeý droblaryň jemine dagatmakda ulanmak oňaýly bolýar. P meýdanda dogry droby ýönekeý droblaryň jemine dagatmanyň formulasynyň

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{f_{ij}(x)}{[g_i(x)]^j} \tag{10}$$

görnüşdedigine 9.3-nji bölümçede seredilipdi, bu ýerde maýdalawjylardaky $g_i(x)$ köpagzalar P meýdanda getirilmeýän, $f_{ij}(x)$ bolsa derejesi $g_i(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi bolan köpagzalardyr.

Drob-rasional funksiýanyň dagatmasyna $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda seredenimizde $g_i(x)$ köpagzalar birinji derejeli ýa-da ikinji derejeli köpagzalar bolup bilerler, olara degişli $f_{ij}(x)$ köpagzalar bolsa, nolunjy ýa-da birinji derejeli köpagzalar bolar. Şonuň üçin hem, $g(x)$ maýdalawjyny $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalara dargadyp,

$$g(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}\dots(x - x_l)^{k_l}(x^2 + p_{l+1}x + q_{l+1})^{k_{l+1}}\dots(x^2 + p_m x + q_m)^{k_m} \qquad (11)$$

deňligi alarys, bu ýerde $k_i \in N \cup \{0\}$ we $k_i \le n$, $i = 1,2,\dots,m$. Netijede, (10) formulany aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{a_n(x - x_1)^{k_1}\dots(x - x_l)^{k_l}\left(x^2 + p_{l+1}x + q_{l+1}\right)^{k_{l+1}}\dots(x^2 + p_m x + q_m)^{k_m}} =$$

$$= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_{l1}}{x - x_l} + \frac{A_{l2}}{(x - x_l)^2} + \dots + \qquad (12)$$

$$+ \frac{A_{1k_l}}{(x - x_l)^{k_l}} + \frac{B_{l+1,1}x + C_{l+1,1}}{x^2 + p_{l+1}x + q_{l+1}} + \dots + \frac{B_{l+1,k_{l+1}}x + C_{l+1,k_{l+1}}}{\left(x^2 + p_{l+1}x + q_{l+1}\right)^{k_{l+1}}} +$$

$$+ \frac{B_{m1}x + C_{m1}}{x^2 + p_m x + q_m} + \dots + \frac{B_{m,k_m}x + C_{m,k_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{k_m}}.$$

Eger (11) deňlikde käbir k_i-ler nola deň bolsa, onda (12) deňligiň şol k_i-lere degişli $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzaly goşulyjylary özünde saklamajagy düşnükli.

2-nji we 7-nji teoremalar $f(z)$ köpagzanyň kompleks sanlar meýdanyndaky ýa-da hakyky sanlar meýdanyndaky getirilmeýän köpagzalara dagatmasy $f(z)$ köpagzanyň ähli köklerini tapmaklyga mümkinçilik berýär. Öz gezeginde, bu dagatmalary tapmak üçin, $f(z)$ köpagzanyň ähli köklerini bilmek zerur. Şonuň üçin hem, san koeffisiýentli köpagzalaryň köklerini tapmak meselesi, köpagzany $\boldsymbol{C}$ ýa-da $\boldsymbol{R}$ meýdanda getirilmeýän köpagzalara dagatmak meselesi bilen deňgüýçlidir.

§15. 3-nji we 4-nji derejeli algebraik deňlemeler. Deňlemeleri algebraik çözmek

15.1. 3-nji derejeli algebraik deňlemeler

$\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda n-nji derejeli köpagzalaryň n sany kompleks köküniň barlygy baradaky fundamental tassyklama esaslanyp, algebraik deňlemeleri çözmegiň käbir usullaryna seredeliň.

Belli bolşy ýaly, *çep tarapy n-nji derejeli köpagza bolan*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

görnüşli deňlemä **n-nji derejeli algebraik deňleme** *diýilýär*. Bu deňlemä $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda serederis. Mekdep matematikasynda hakyky sanlar meýdanynda berlen 1-nji we 2-nji derejeli algebraik deňlemelere seredilýär. 1-nji derejeli $a_1 x + a_0 = 0$, $(a_1 \neq 0)$ deňlemäniň köki

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \tag{1}$$

formulanyň, 2-nji derejeli $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0$ algebraik deňlemäniň hakyky kökleri (eger olar bar bolsa),

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \tag{2}$$

formulanyň kömegi bilen tapylýar.

Mekdepde bu formulalara köpagzanyň koeffisiýentleri hakyky sanlar bolanda seredilýär. (2) formula a_0, a_1, a_2 erkin alnan kompleks sanlar bolanda hem dogrudyr, bu ýagdaýda $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0$ deňlemäniň iki sany kompleks köki bardyr.

Indi bolsa, kompleks koeffisiýentli 3-nji derejeli normirlenen, ýagny baş koeffisiýenti bire deň bolan

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3}$$

algebraik deňlemä seredeliň. Bu deňlemäni $x = y - \frac{a_2}{3}$ ornunagoýmanyň kömegi bilen birazrak ýönekeýleşdirip bolýandygyny belläliň. Hakykatdan hem, $x = y - \frac{a_2}{3}$ ornunagoýmany ulanyp, y^2-ly agzasy ýok bolan

$$y^3 + \left(-\frac{a_2^2}{3} + a_1\right)y + \left(\frac{2}{27}a_2^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_0\right) = 0 \tag{4}$$

görnüşli kub deňlemäni alarys.

Şeýlelik bilen, $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ kub deňlemäni çözmek meselesini

$$x^3 + px + q = 0 \tag{5}$$

görnüşli deňlemäni çözmeklige getirdik. Bu deňlemäni çözmekligiň birnäçe usullary bar. Olaryň birine seredeliň. $x = u + v$ diýeliň we (5) deňlemäni kanagatlandyrar ýaly, u we v näbellileri gözläliň. Bir x näbellini iki sany u we v näbelliler bilen çalşyp, käbir goşmaça şert girizmäge mümkinçilik alarys. (5) deňlemede $x = u + v$ diýip

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

ýa-da

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

deňlemäni alarys. İndi, u we v näbelliler üçin goşmaça

$$uv = -\frac{p}{3} \tag{6}$$

şerti girizip,

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

deňlemäni alarys. Şeýlelik bilen, (5) deňlemäni çözmek meselesini u we v üýtgeýänlere görä

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \tag{7}$$

deňlemeler sistemasyny çözmeklige getirdik. Bu sistemany çözmek üçin bolsa, ony u^3 we v^3 ululyklaryň köpeltmek hasylyny saklaýan ýagdaýyna getireliň:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{8}$$

(8) sistemadaky u^3 we v^3 ululyklara, Wiýetiň teoremasyna görä, $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ deňlemäniň kökleri hökmünde seretmek bolar. Netijede,

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

$$z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

bolar. $x = u + v$ deňlik u we v üýtgeýänlere görä simmetrik bolany üçin, z_1 we z_2-ni erkin saýlap alyp bileris, ýagny $z_1 = u^3$ diýmän $z_1 = v^3$ diýip alyp hem biljekdigimizi belläliň. Şeýlelik bilen,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \tag{9}$$

formulalary alarys, bu ýerde $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ we oňa (5) deňlemäniň **diskriminanty** diýilýär.

$x = u + v$ bolany üçin ,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{10}$$

ýa-da

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \tag{11}$$

formulany alarys. Kub deňlemäniň köklerini tapmaklykda ulanylýan bu formula **Kardanyň formulasy** diýilýär.

(9) formulalardaky kub kökleriň her biri dürli üç baha eýe bolýar, şoňa görä-de, u-nyň üç bahasyny we v-niň üç bahasyny kombinirlesek, onda (10) formula görä x-iň dokuz sany dürli bahasy alnar. Ýöne (8) sistemanyň (7) sistema deňgüýçli däldigini ýatdan çykarmaly däl, sebäbi $uv = -\frac{p}{3}$ deňlemäni $u^3 = -\frac{p^3}{27}$ deňleme bilen çalyşdyk. Şoňa görä-de, (8) sistema del köklere (artykmaç köklere) eýe bolýar. Şonuň üçin, (9) formuladaky kub kökleriniň diňe $uv = -\frac{p}{3}$ şerti kanagatlandyrýanlaryny saýlap almaly.

Bu soragy giňişleýin derňäliň. Şonuň üçin ilki bilen z kompleks sany

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrik görnüşde ýazyp, ondan n-nji derejeli kök alalyň:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{12}$$

ýa-da başgaça

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{13}$$

$\sqrt[n]{z}$ kököň dürli n sany bahasy bardyr; olary k ($k = 0,1,2,\ldots,n-1$) parametre dürli bahalary berip almak bolar. Şoňa görä-de, (13) formulany

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \tag{14}$$

görnüşde ýazmak amatly bolýar.

$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = (\sqrt[n]{z})_0$ we $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_k$, (bu ýerde ε_k – birlikden alnan n-nji derejeli kökleriň k-njysy) belgilenişikleri girizip, şeýle-de, $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ deňligi göz öňünde tutup, (14) deňligi

$$(\sqrt[n]{z})_k = (\sqrt[n]{z})_0\varepsilon_1^k \tag{15}$$

görnüşde ýazmak bolýar.

Kub deňlemäni çözmek meselesine gaýdyp geleliň. $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ kub kököň $k = 0$ bolandaky bahasyny u_0 bilen belgiläliň. Bu kököň beýleki iki bahasy (15) formula görä

$$u_1 = u_0\varepsilon_1, \quad u_2 = u_0\varepsilon_1^2$$

görnüşde bolar, bu ýerde $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Edil şeýle görnüşde (9) formuladaky v-niň v_0, v_1, v_2-niň bahalaryny alarys. (6) şert u_k-nyň her bir bahasyny, v_k-nyň diňe kesgitli alnan bahalary bilen kombinirläp boljakdygyny aňladýar. v_0 bilen v-niň u_0-a degişli bahasyny belgiläliň, ýagny $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$ diýeliň. Onda

$$v_1 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3u_0\varepsilon_1^2} = -\frac{p\varepsilon_1}{3u_0\varepsilon_1^3} = v_0\varepsilon_1,$$

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3u_0\varepsilon_1^2} = -\frac{p\varepsilon_1}{3u_0\varepsilon_1^3} = v_0\varepsilon_1$$

bolar. Şeýlelik bilen, (6) şert v_k-nyň u_k degişli bolan bir bahasyny kesgitleýär we şoňa görä-de, x-iň dokuz bahasyny däl-de, üç bahasyny alarys:

$$x_0 = u_0 + v_0;$$

$$x_1 = u_1 + v_1 = u_0\varepsilon_1 + v_0\varepsilon_1^2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0); \tag{16}$$

$$x_2 = u_2 + \varepsilon_2 = u_0\varepsilon_1^2 + u_0\varepsilon_1 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0),$$

bu ýerde u_0 san $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ köküň haýsy hem bolsa bir bahasy, v_0 san bolsa, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ köküň u_0 sana degişli bahasy. Başgaça v_0-yň bahasyny, $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$ formuladan hem alyp bolýar. (16) formulalar (5) kub deňlemäniň ähli çözüwlerini berýär.

1-nji mysal. $x^3 + 9x - 26 = 0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. $x^3 + 9x - 26 = 0$ deňlemä görä alarys: $D = \frac{(-26)^2}{4} + \frac{9^3}{27} = 196$, $u = \sqrt[3]{13 + \sqrt{196}} = \sqrt[3]{27}$.

u_0-yň bahasy hökmünde $\sqrt[3]{27}$ köküň hakyky bahasyny alalyň, ýagny $u_0 = 3$ diýeliň. Onda $v_0 = -\frac{p}{3u_0} = -1$. (16) formulalar esasynda $x_0 = 2$, $x_1 = -1 + 2i\sqrt{3}$, $x_2 = -1 - 2i\sqrt{3}$ çözüwleri alarys.

1-nji teorema. *Eger kub deňlemäniň D diskriminanty nola deň bolsa, onda ol özara deň bolan köklere eýedir.*

Subudy. Eger $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ (bu ýerde $q \neq 0$, $p \neq 0$ diýip hasap ederis) bolsa, onda $q^2 = -\frac{4p^3}{27}$ bolar. Ondan başga-da, bu şertde (9) formuladan

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q^3}{2q^2}} = \sqrt[3]{\frac{-q^3}{2\cdot\left(-\frac{4p^3}{27}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{27q^3}{8p^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3q}{2p}\right)^3}$$

gatnaşygy alarys. Bu köküň bir bahasynyň $u_0 = \frac{3q}{2p}$ boljakdygy aýdyň. (6) şert boýunça bu baha degişli υ_0-yň bahasyny tapalyň:

$$\upsilon_0 = -\frac{p}{3u_0} = -\frac{p}{3\frac{3q}{2p}} = -\frac{2p^2}{9q} = -\frac{2p^2\cdot 3p}{9q3p} = \frac{6}{qp}\left(-\frac{p^3}{27}\right) = \frac{6}{qp}\cdot\frac{q^2}{4} = \frac{3q}{2p} = u_0.$$

Şeýlelikde, $u_0 = \upsilon_0 = \frac{3q}{2p}$ bolany üçin, (16) formulalardan (5) deňlemäniň $x_0 = \frac{3q}{p}$, $x_1 = x_2 = -\frac{3q}{2p}$ çözüwlerini alarys. ►

Hakyky koeffisiýentli kub deňlemäniň kökleriniň derňewi onuň D diskriminantyna baglydyr.

2-nji teorema. *Goý,*

$$x^3 + px + q = 0$$

deňlemäniň p we q koeffisiýentleri hakyky sanlar bolsun. Onda:

a) *eger onuň D diskriminanty noldan uly bolsa, onda $x^3 + px + q = 0$ deňleme bir hakyky we iki sany özara çatyrymly bolan kompleks köke eýedir;*

b) *eger $D = 0$ bolsa, onda $x^3 + px + q = 0$ deňlemäniň ähli kökleri hakyky sanlardyr we olaryň ikisi özara deňdir;*

ç) *eger $D < 0$ bolsa, onda $x^3 + px + q = 0$* deňleme *üç sany özara dürli bolan hakyky köklere eýedir.*

Subudy. *a)* eger $D > 0$ bolsa, onda $\sqrt{D}$ hakyky san bolar, şoňa görä-de (9) formuladaky kub köküniň aşagyndaky san hem hakyky san bolar. Hakyky sandan alnan kub köküň üç bahasy bar, olaryň biri hakyky sandyr. Bu hakyky sany u_0-yň bahasy hökmünde alalyň. Onda $u_0\upsilon_0 = -\frac{p}{3}$ şertden υ_0-yň hem hakykylygy gelip çykýar. Bu ýerden bolsa, $x_0 = u_0 + \upsilon_0$ köküň hakyky sandygy gelip çykýar. $u_0 \neq \upsilon_0$ bolýandygyny belläliň. Hakykatdan hem, eger $u_0 = \upsilon_0$ bolsa, onda $u_0^3 = \upsilon_0^3$ bolardy we bu ýerden $D = 0$ gelip çykardy, bu bolsa şerte garşy gelýär. Netijede, $u_0 + \upsilon_0$ we $u_0 - \upsilon_0 \neq 0$-hakyky sanlar bolany üçin, (16) formulalar esasynda x_1 we x_2 kökler özara çatyrymly kompleks sanlar bolýar:

b) $D=0$ ýagdaýda $u_0 = v_0$ bolar we (16) formulalara görä, $x^3+px+q=0$ deňlemäniň ähli kökleri hakyky sanlar bolup, özi hem $x_1 = x_2$ bolýar;

ç) eger $D<0$ bolsa, onda $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$ -hyýaly san. Netijede, (9) formuladaky kub kökleriň aşagynda özara çatyrymly kompleks sanlar bolar. Muňa laýyklykda, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}}$ we $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{-D}}$ kökleriň degişlilikde, ähli u_k we v_k bahalary kompleks sanlar bolar. Bize mälim bolşy ýaly, $-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}$ we $-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}$ özara çatrymly kompleks sanlaryň modullary deň:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-D}\right)^2}=\sqrt{\frac{-p^3}{27}}. \tag{17}$$

Şoňa görä-de, bu sanlardan alnan kub kökleriň şol bir ρ moduly bolar:

$$\rho=|u_k|=|v_k|=\sqrt[3]{r}=\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}. \tag{18}$$

Bu ýerde, $p<0$ bolany üçin, kwadrat kök aşagyndaky san položitel sandyr ($p<0$ deňsizlik $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ deňsizlikden gelip çykýar).

Indi bolsa, u kökүň haýsy hem bolsa bir bahasyny u_0 bilen belgiläliň, oňa degişli v kökүň bahasyny bolsa, $v_0=-\frac{p}{3u_0}$ bilen belgiläliň. Onda

$$v_0u_0=-\frac{p}{3}.$$

(18) formula esasynda bolsa, $|u_0|^2=-\frac{p}{3}$ bolar. Netijede,

$$v_0\,u_0=|u_0|^2$$

deňligi alarys. Ýöne, öz gezeginde $|u_0|^2=u_0\overline{u_0}$; şonuň üçin hem

$$v_0\,u_0=u_0\overline{u_0}$$

deňlik dogry. Bu ýerden $v_0=\overline{u_0}$, ýagny v_0 kompleks sanyň, u_0 kompleks san bilen özara çatrymly sanlar bolýandygyny göreris. Indi (16) formulalary derňäp, x^3+px+ $+q=0$ deňlemäniň ähli kökleriniň hakyky sandygyna göz ýetireris. ►

Bellik. Üç sany hakyky köki bolan $x^3+px+q=0$ ($p\neq 0$, $q\neq 0$) kub deňlemäniň hökman özara garşylykly alamatly kökleri bardyr. Hakykatdan hem, Wiýetiň teoremasyna görä bu deňlemäniň kökleriniň jemi nola deň:

$$x_0+x_1+x_2=0.$$

Ýöne, bu deňlik x_0, x_1, x_2 kökleriň iň bolmanda ikisiniň alamaty özara dürli bolanda we diňe şonda ýerine ýetýär.

15.2. 4-nji derejeli algebraik deňlemeler we olary çözmekligiň usullary

4-nji derejeli

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{19}$$

deňlemä seredeliň.

Bu deňlemäni çözmekligiň birnäçe usullary bar. Ilki bilen, kub deňlemäni çözmeklikde ulanylan usula meňzeş bolan, Eýleriň usulyna seredeliň. $x = y - \frac{a_3}{4}$ ornunagoýmanyň kömegi bilen, (19) deňlemäniň x^3-y saklaýan agzasyny ýok edip bolýandygyny belläliň. Şonuň üçin hem,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{20}$$

görnüşdäki deňlemäni çözmeklige seredýäris. Onuň çözüwlerini

$$x = u + v + \omega \tag{21}$$

görnüşde gözläliň. (21) deňligi kwadrata göterip alarys:

$$x^2 = u^2 + v^2 + \omega^2 + 2(uv + u\omega + v\omega)$$

ýa-da

$$x^2 - (u^2 + v^2 + \omega^2) = 2(uv + u\omega + v\omega).$$

Soňky alnan deňligi ýene-de kwadrata göterip ,

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + \omega^2)\, x^2 + (u^2 + v^2 + \omega^2)^2 = 4(u^2 v^2 + u^2 \omega^2 + v^2 \omega^2) +$$
$$+ 8(u^2 v\omega + uv^2 \omega + uv\omega^2)$$

deňligi alarys. Bu ýerde (21) ornuna goýmany ulanyp,

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + \omega^2)\, x^2 - 8uv\omega x - 2(u^2 v^2 + u^2 \omega^2 + v^2 \omega^2) +$$
$$+ (u^4 + v^4 + \omega^4) = 0 \tag{22}$$

deňlemäni alarys. (20) we (22) deňlemeleriň ikisinde hem $x = u + v + \omega$ hasap edip, (20) deňlemeden (22) deňlemäni aýryp,

$$[p + 2(u^2 + v^2 + \omega^2)]\, x^2 + [q + 8uv\omega]x + [r + 2(u^2 v^2 + u^2 \omega^2 + v^2 \omega^2) -$$
$$- (u^4 + v^4 + \omega^4)] = 0 \tag{23}$$

deňlemäni alarys. x üýtgeýäni u, v, ω üýtgeýänler bilen aňladanymyz üçin, (23) deňlemä goşmaça şert girizip bileris:

$$p - 2(u^2 + v^2 + \omega^2) = 0,\ q + 8uv\omega = 0. \tag{24}$$

Onda (23) deňleme

$$r + 2(u^2 v^2 + u^2 \omega^2 + v^2 \omega^2) - (u^4 + v^4 + \omega^4) = 0 \qquad (25)$$

görnüşe geçer. Şeýlelikde, (20) deňlemäni u, v, ω näbellilere görä çözülýän (24) we (25) deňlemelere getirdik. Öň belleýşimiz ýaly, ol näbelliler x näbelli bilen $x = u + v + \omega$ gatnaşykdadyr.

(24) we (25) deňlemelerden

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + \omega^2 = -\dfrac{p}{2}, \\ u^2 v^2 + u^2 \omega^2 + v^2 \omega^2 = \dfrac{p^2 - 4r}{16}, \\ u^2 v^2 \omega^2 = \dfrac{q^2}{64} \end{cases} \qquad (26)$$

deňlemeler sistemasyny alarys. (26) sistema (24), (25) deňlemeleriň emele getirýän sistemasyna deňgüýçli däldir, sebäbi (26) sistemany $q + 8uv\omega = 0$ deňlemäni $u^2 v^2 \omega^2 = \dfrac{q^2}{64}$ deňleme bilen çalşyp aldyk. Şonuň üçin hem, (26) sistemanyň çözüwlerini tapanymyzdan soň artykmaç kökleri aýryp taşlamaly bolar. (26) sistemanyň deňlemelerine u^2, v^2, ω^2 näbellilere görä alnan käbir kub deňleme üçin, Wiýetiň formulalary hökmünde seretmek bolar. Bu deňlemäniň

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0 \qquad (27)$$

görnüşde boljakdygy aýdyň. (27) deňlemä (20) deňlemäniň kubiki rezolwentasy diýilýär.

Eger (27) deňlemäniň z_1, z_2, z_3 köklerini tapsak, onda

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{z_0}\,,\ v_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}\,,\ v_{1,2} = \pm\sqrt{z_2} \qquad (28)$$

çözüwleri alarys. (20) deňlemäniň çözüwleri bolar ýaly $x = u + v + \omega$ saýlap almak üçin, diňe

$$uv\omega = -\frac{q}{8} \qquad (29)$$

şerti kanagatlandyrýan u, v, ω bahalaryny almaly bolar.

Goý, u_0, v_0, ω_0 üçlük (29) şerti kanagatlandyrýan (28) bahalaryň käbir toplumy bolsun, onda (20) deňlemäniň ähli çözüwleri

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + v_0 + \omega_0; \\ x_1 &= u_0 - v_0 - \omega_0; \\ x_2 &= -u_0 + v_0 - \omega_0; \\ x_3 &= -u_0 - v_0 + \omega_0 \end{aligned} \qquad (30)$$

formulalaryň kömegi bilen tapylýar, sebäbi u_0, v_0, ω_0 sanlaryň diňe ikisiniň alamatyny birwagtda üýtgedeniňde (29) şert bozulmaýar. İslendik 4-nji derejeli deňlemäniň bolsa dört sany köki bardyr.

1-nji mysal. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. $x = y - 1$ ornunagoýma $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$ deňlemäni $y^4 - 8y + 12 = 0$ görnüşe getirýär. Bu deňlemäniň kubiki rezolwentasy $z^3 - 3z - 1 = 0$ görnüşde bolar. $z^3 - 3z - 1$ köpagza rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär. Kardananyň formulasyndaky kök aşagyndaky $-\frac{q}{2} + \sqrt{D}$ aňlatmany trigonometrik görnüşde aňladalyň:

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{D} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{D} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Biziň mysalymyzda: $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, ýagny $\rho = 1$, $\varphi = 60°$ we şonuň üçin,

$$z_0 = 2\cos\frac{60°}{3} = 2\cos 20° \approx 2 \cdot 0{,}94 \approx 1{,}88\ ;$$

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{60°}{3} + 120°\right) = 2\cos 140° \approx 2 \cdot (-0{,}766) \approx -1{,}53;$$

$$z_2 = 2\cos\left(\frac{60°}{3} + 240°\right) = 2\cos 260° \approx 2 \cdot (-0{,}174) \approx -0{,}35.$$

$u_{1,2} = \pm\sqrt{1{,}88} \approx \pm 1{,}37$; $v_{1,2} = \pm\sqrt{-1{,}53} \approx \pm 1{,}24i$; $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{-0{,}35} \approx \pm 0{,}59i$ bolany üçin, $u_0 \approx 1{,}37$; $v_0 \approx -1{,}24i$; $\omega_0 \approx 0{,}59i$ diýip,

$u_0\, v_0\, \omega_0 = -\frac{-8}{2} = 1$ şerti kanagatlandyrýan u_0-yň, v_0-yň, ω_0-yň bahalaryny saýlap alanymyzdan soňra, (30) formulalary ulanyp,

$$y_0 = u_0 + v_0 + \omega_0 \approx 1{,}37 - 0{,}65i;$$

$$y_1 = u_0 - v_0 - \omega_0 \approx 1{,}37 + 0{,}65i;$$

$$y_2 = -u_0 + v_0 - \omega_0 \approx -1{,}37 - 1{,}83i;$$

$$y_3 = -u_0 - v_0 + \omega_0 \approx -1{,}37 + 1{,}83i.$$

Gutarnykly ýagdaýda berlen deňlemäniň

$$x_0 \approx 0{,}37 - 0{,}65i;$$

$$x_1 \approx 0{,}37 + 0{,}65i;$$

$$x_2 \approx -2,37 - 1,83i;$$

$$x_3 \approx -2,37 + 1,83i$$

çözüwlerini alarys.

Görşümiz ýaly, bu ýagdaýda berlen deňleme iki jübüt özara çatrymly kompleks çözüwe eýe. Hakyky koeffisiýentli 4-nji derejeli deňlemäniň ýa-ha dört sany hakyky köküniň ýa-da iki hakyky we bir jübüt özara çatrymly kompleks kökünïň, ýa-da bolmasa iki jübüt özara çatrymly bolan kompleks kökünïň bardygyny belläliň.

Indi bolsa 4-nji derejeli deňlemeleri çözmeklikde giňden ulanylýan italýan matematigi L. Ferrariniň usulyna seredeliň.

Goý,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{31}$$

deňleme berlen bolsun. Bu deňlemäniň soňky üç agzasyny deňlikden saga geçirip we onuň iki tarapyna hem $\frac{a^2x^2}{4}$ goşup alarys:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

Soňky alnan deňlemäniň iki tarapyna hem $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)t + \frac{t^2}{4}$ aňlatmany goşup (bu ýerde t kömekçi näbelli),

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{t}{4}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)x^2 + \left(\frac{at}{2} - c\right)x + \frac{t^2}{4} - d \tag{32}$$

deňlemäni alarys. Indi, (33) deňlemäniň sag tarapy $(Ax + B)^2$ görnüşli doly kwadrat bolar ýaly edip, t-niň bahasyny saýlalyň. Onuň üçin, A,B näbelli koeffisiýentleriň we t näbelliniň, berlen deňlemäniň koeffisiýentleri bilen,

$$A^2 = \frac{a^2}{4} - b + t, \quad 2AB = \frac{at}{2} - c, \quad B^2 = \frac{t^2}{4} - d$$

gatnaşykda bolmalydygyndan peýdalanalyň. A we B näbelli koeffisiýentleri ýok edip, t kömekçi näbellä görä:

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t - (da^2 - 4db + c^2) = 0, \tag{33}$$

deňlemäni alarys. Alnan (34) deňleme berlen (32) deňlemäniň kubiki rezolwentasy bolýar. Eger t_0 san (34) deňlemäniň erkin alnan köki bolsa, onda (33) deňlemeden iki sany x üýtgeýäne görä,

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{t_0}{2} = Ax + B,$$

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t_0}{2}=-(Ax+B),$$

kwadrat deňlemeleri alarys. Bu deňlemeleriň çözüwleri berlen (32) deňlemäniň ähli çözüwlerini berýär.

4-nji derejeli deňlemeleri çözmek meselesini awtoryň hödürleýän näbelli koeffisiýentler usulyna seretmeklik bilen jemläris.

Goý, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ deňleme berlen bolsun. Bu deňlemäniň çep tarapyndaky köpagzany

$$x^4+ax^3+bx^2-cx+d=(x^2+Ax+B)(x^2+Lx+N) \tag{34}$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde A,B,L,N näbelli koeffisiýentler.

(35) deňligiň sag tarapyndaky ýaýlary açyp we alnan köpagza bilen x^4+ax^3+ $+bx^2+cx+d$ köpagzany deňeşdirip, A,B,L,N näbelli koeffisiýentlere görä

$$\begin{cases} A+L=a, \\ AL+B+N=b, \\ BL+AN=c, \\ BN=d \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} A=a-L, \\ N=\dfrac{d}{B}, \\ (a-L)L+B+\dfrac{d}{B}=b, \\ BL+(a-L)\dfrac{d}{B}=c \end{cases} \tag{35}$$

deňlemeler sistemasyny alarys. Bu sistemanyň soňky deňlemesini $L=\dfrac{c-\dfrac{ad}{B}}{B-\dfrac{d}{B}}$ görnüşde ýazyp, (35) sistemadan B näbellä görä:

$$\frac{a\left(c-\dfrac{ad}{B}\right)}{B-\dfrac{d}{B}}-\frac{\left(c-\dfrac{ad}{B}\right)^2}{\left(B-\dfrac{d}{B}\right)^2}+B+\frac{d}{B}=b$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäni ýönekeýleşdirip, ony

$$\frac{ac\left(B+\dfrac{d}{B}\right)-a^2d-c^2}{B^2+\dfrac{d^2}{B^2}-2d}+B+\frac{d}{B}=b \tag{36}$$

deňleme bilen çalşarys. Soňky deňlemede $B+\dfrac{d}{B}=t$ belgilenişik geçsek we $B^2+\dfrac{d^2}{B^2}=t^2-2d$ bolýandygyny göz öňüne tutsak, onda ony

$$t+\frac{act-a^2d-c^2}{t^2-4d}=b$$

ýa-da

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t + 4db - a^2d - c^2 = 0 \qquad (37)$$

görnüşde ýazmak bolar. Soňky deňleme berlen deňlemäniň kubiki rezolwentasy bolýar we onuň Ferrariniň usulyndaky rezolwenta bilen gabat gelýändigini görýäris.

Şeýlelikde, berlen deňlemäni çözmek üçin, soňky deňlemäniň haýsy hem bolsa, bir t_0 köküni tapyp, $B + \frac{d}{B} = t_0$ deňlemeden B-niň bahasyny, $L = \dfrac{c - \frac{ad}{B}}{B - \frac{d}{B}}$ formuladan peýdalanyp, L-iň bahasyny we $N = \frac{d}{B}$, $A = a - L$ formulalardan peýdalanyp bolsa, N we A-nyň bahalaryny taparys. Gutarnykly ýagdaýda,

$$x^2 + Ax + B = 0 \text{ we } x^2 + Lx + N = 0$$

deňlemeleri çözüp, berlen deňlemäniň ähli köklerini alarys.

2-nji mysal. $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Bu deňlemäniň kubiki rezolwentasy

$$t^3 - 15t^2 - 24t - 8 = 0$$

deňleme bolar. Bu deňlemäniň bir köki $t_0 = -1$. Ony $B + \frac{d}{B} = t_0$ deňlemede ornuna goýup, $B - \frac{2}{B} = -1$ deňlemäni, ýagny $B^2 + B - 2 = 0$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň bir köki $B = 1$ bolar. Ony $L = \dfrac{c - \frac{ad}{B}}{B - \frac{d}{B}}$ formulada ornuna goýup, $L = 4$ bahany alarys. Soňra $N = \frac{d}{B}$, $A = a - L$ formulalardan peýdalanyp, $N = -2$, $A = 4$ bahalary alarys. Netijede bolsa, $x^2 + 4x + 1 = 0$ we $x^2 + 4x - 2 = 0$ deňlemeler alynýar. Bu deňlemeleriň $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{6}$, $x_4 = -2 + \sqrt{6}$ çözüwleri berlen $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$ deňlemäniň ähli çözüwleri bolýar.

Bellik. $B^2 + B - 2 = 0$ deňlemäniň çözüwi hökmünde $B = -2$-ni alsak, soňky netijede, $x^2 + 4x - 2 = 0$ we $x^2 + 4x + 1 = 0$ deňlemeleri alarys.

15.3. Deňlemeleri algebraik çözmek meselesi

Biz erkin alnan birinji, ikinji, üçünji, dördünji derejeli deňlemeleri çözmeklige seretdik. Bu deňlemeleriň çözüwlerini olaryň koeffisiýentleriniň üstünde algebraik amallary ýerine ýetirmekligi görkezýän formulalaryň kömegi bilen berdik. Eger

14. sargyt № 749

algebraik deňlemeler üçin olaryň köklerini koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladylýan formula tapylsa, onda bu deňlemeler **algebraik çözülýär** ýa-da **radikallarda çözülýär** diýilýär. Has takygy:

Kesgitleme. *Eger berlen deňlemäniň ähli köklerini olaryň koeffisiýentleriniň üstünde goşmak, aýyrmak, köpeltmek, bölmek we kök almak amallaryny tükenikli gezek ulanyp aňladyp bolsa, onda bu deňlemäni* ***algebraik çözüp bolýar*** *ýa-da* ***radikallarda çözüp bolýar.***

Şeýlelik bilen, biz islendik san koeffisiýentli birinji, ikinji, üçünji, dördünji derejeli deňlemeleri algebraik çözüp bilýäris. 3-nji, 4-nji derejeli deňlemeleri çözmekligiň beýany XVI asyra degişlidir. Ondan soňra alymlaryň 5-nji derejeli deňlemeleri umumy görnüşde çözmeklige synanyşmagy tebigydyr. 5-nji we ondan uly derejeli algebraik deňlemeleriň köklerini koeffisiýentleriň üsti bilen aňladylýan formulany tapmaklyga üç asyr synanyşyk edipdirler. Ýöne, netijesiz bolupdyr. Diňe XIX asyryň başlarynda bu şowsuzlygyň sebäbine düşünipdirler, ýagny aşakdaky teorema subut edilipdir.

Teorema. (Ruffini – Abeliň teoremasy). *Erkin alnan harp koeffisiýentli n-nji derejeli algebraik deňlemeleri $n \geq 5$ bolanda radikallarda çözüp bolmaýar.*

Has takygy, $n \geq 5$ bolanda n-nji derejeli deňlemeleriň arasynda (hatda bitin koeffisiýentli) radikallarda çözüp bolmaýan deňlemeleriň hökman bardygy subut edilýär. Bu alnan netijä derejesi dörtden uly bolan san koeffisiýentli ähli deňlemeleri radikallarda çözüp bolmaýar diýip düşünmeli däl. Käbir görnüşli deňlemeleri umumy ýagdaýda hem radikallarda çözüp bolýandygyna biz duş geldik. Meselem, ikagzaly $ax^n - b = 0$, $a \neq 0$, $n \in N$ görnüşli deňlemeleri radikallarda çözüp bolýandygyny görüpdik. Onuň kompleks sanlar meýdanynda n sany köki bardyr.

§ 16. Köpagzalaryň hakyky kökleriniň ýerleşişi

16.1. Hakyky kökleriň araçägi

Öňki bölümlerde algebraik deňlemeleriň kökleriniň barlygyna we sanyna degişli soraglara seredipdik. Ýöne, bu kökleri tapmak üçin, ol kökleriň hakyky okuň üstünde ýa-da kompleks sanlaryň tekizliginde nähili ýerleşýändigini ýeterlik takyklykda bilmek zerur bolýar. Köpagzanyň kompleks kökleri barada iki sany belligi edeliň.

1-nji bellik. *Kompleks koeffisiýentli $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ köpagzanyň ähli kökleri merkezi koordinatalar başlangyjynda ýerleşýän radiusy*

$$N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|};\ A = \max\{|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,\ldots,|a_1|,|a_0|\} \qquad (1)$$

ululyga deň bolan tegelegiň içinde ýatýar.

Bu tassyklama 13.2-nji bölümçäniň 1-nji teoremasynyň 1-nji netijesinden gelip çykýar.

2-nji bellik. *Hakyky koeffisiýentli köpagzanyň kompleks kökleri hakyky oka görä jübüt-jübütden simmetrik ýerleşendirler.*

Bu tassyklama bolsa 14.2-nji bölümçedäki 4-nji teoremadan we özara çatrymly kompleks sanlaryň hakyky oka görä simmetrik ýerleşýanliginden gelip çykýar.

1-nji bellikden aşakdaky tassyklamany alarys.

1-nji teorema. *Hakyky koeffisiýentli*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0$$

deňlemäniň ähli hakyky kökleri $(-N_0, N_0)$ interwalda ýatýar, bu ýerde $N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, $A = max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|,\ldots,|a_1|, |a_0|\}$).

Subudy. Hakykatdan hem, bu deňlemäniň ähli kompleks kökleri $|z| < N_0$ tegelegiň içinde ýatýar. Şonuň üçin hem, eger onuň hakyky kökleri bar bolsa, onda olar görkezilen interwala düşmeli.

1-nji mysal. $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ deňlemäniň hakyky kökleriniň ýatýan interwalyny tapyň.

Çözülişi. $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ deňleme üçin, $A = 3$, $a_5 = 2$ we şoňa görä-de, $N_0 = 1 + \frac{3}{2} = 2{,}5$-e deň. Netijede, bu deňlemäniň hakyky kökleri $(-2{,}5; 2{,}5)$ interwalda ýatýar.

1-nji teorema algebraik **deňlemäniň hakyky kökleriniň araçägi baradaky teorema** hem diýilýär. Algebraik deňlemeleriň hakyky kökleriniň araçägini ýokary takyklykda kesgitlemegiň birnäçe usullary bar. Biz olaryň diňe Nýutonyň usuly diýip atlandyrylýanyna serederis.

Öňünden käbir belliklere seredeliň.

1-nji teorema bilen kesgitlenýän N_0 san, birwagtyň özünde köpagzanyň otrisatel kökleriniň aşaky çägini we položitel kökleriň ýokarky çägini kesgitlemäge mümkinçilik berýär, sebäbi eger köpagzanyň hakyky kökleri bar bolsa, onda olar $(-N_0, N_0)$ interwalda ýatýar. Hakyky kökleriň ýatýan interwalyny daraltmagyň bir ýoly, berlen köpagzanyň položitel kökleriniň aşaky we ýokarky çägini aýratynlykda hem-de otrisatel kökleriň aşaky we ýokarky çägini aýratynlykda tapmaklyga esaslanýar, ýagny položitel kökleriň (m_+, M_+) interwalyny kesgitleýän m_+, M_+ sanlary, otrisatel kökleriň (m_-, M_-) interwalyny kesgitleýän m_-, M_- sanlary tapmaklyga esaslanýar. Eger berlen köpagza $x = 0$ köke eýe bolsa, onda seredilýän köpagzany x-a bölüp, ol köki aýrarys.

Bu sanlaryň birini tapmaklygyň usuly bilinse, onda berlen meseläni çözmek birnäçe esse ýeňilleşýär, meselem, položitel kökleriň M_+ ýokarky çägini tapyp bilsek, onda $f(x) = 0$ deňlemäniň hakyky kökleriniň galan üç çägini tapmaklygy oňa getirmek bolar.

Berlen $f(x) = 0$ deňlemede $x = \frac{1}{t}$ ornunagoýmany ulanyp, $g(t) = 0$ deňlemäni alarys. Onuň t_i kökleri $f(x) = 0$ deňlemäniň x_i kökleri bilen $x_i = \frac{1}{t_i}$ deňlik arkaly baglydyr. Eger M_+' san $g(t) = 0$ deňlemäniň kökleriniň ýokarky çägi, ýagny $0 < t_i < M_+'$ bolsa, onda $x_i > \frac{1}{M_+'} > 0$ bolar. Bu ýerden görnüşi ýaly $f(x) = 0$ deňlemäniň položitel kökleriniň aşaky çägi hökmünde $\frac{1}{M_+'}$ sany almak bolýar, ýagny $m_+ = \frac{1}{M_+'}$. Edil şeýle edip, $x = -y$ ornunagoýma esasynda, $f(x) = 0$ deňlemeden y_i kökleri $f(x) = 0$ deňlemäniň x_i kökleri bilen $x_i = -y_i$ deňlik esasynda bagly bolan $\varphi(y) = 0$ deňlemä geçmek bolar. Eger $y_i (i = 1,2,\ldots,q)$ sanlar $\varphi(y) = 0$ deňlemäniň ähli položitel kökleri bolsa, onda x_i $(i = 1,2,\ldots,q)$ sanlar $f(x) = 0$ deňlemäniň ähli otrisatel kökleri bolar. $m_+'' < y_i < M_+''$ deňsizlikden $-M_+'' < x_i < -m_+''$ deňsizlik gelip çykýanlygy üçin, $m_- = -M_+''$, $M_- = -m_m''$ bolar. Şeýlelik bilen, berlen köpagzanyň ähli m_+, M_+, m_-, M_- çäklerini tapmak üçin, onuň we onuň bilen bagly käbir köpagzalaryň diňe položitel kökleriniň ýokarky çägini tapmaklygy başarmaklygyň ýeterlikdigine göz ýetirdik.

2-nji teorema (Nýutonyň teoremasy). *Eger $x = M$ bolanda, $f(x)$ köpagza položitel baha eýe, onuň ähli önümleri bolsa otrisatel däl baha eýe bolsa, onda M san $f(x)$ köpagzanyň položitel kökleriniň ýokarky çägi bolýar.*

Subudy. $f(x)$ funksiýanyň hakyky üýtgeýänli funksiýadygyny hasaba alsak, onda onuň üçin Teýlor formulasy dogry bolýar, ony

$$f(x) = f(M) + \frac{f'(M)}{1}(x - M) + \frac{f''(M)}{2!}(x - M)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(M)}{n!}(x - M)^n$$

görnüşde ýazmak bolýar. Bu ýerden görnüşi ýaly, $x \geq M$ bolanda $f(x) > 0$ bolýar, ýagny $f(x)$ köpagzanyň ähli hakyky kökleri M sandan kiçi bolýar. ▶

$f(x)$ köpagzanyň we onuň önümleriniň M nokatdaky alamatlary, $f(x)$ köpagzanyň $x - M$ ikagzanyň derejeleri boýunça dagatmasyndaky degişli koeffisiýentleriniň alamatlary bilen gabat gelýänligi üçin, M sany saýlamakda Gorneriň shemasyny ulanmak amatly bolýar. Özi hem, köp ýagdaýlarda ähli koeffisiýentleri hasaplamagyň zerurlygy bolmaýar: $x - M$ ikagza galyndyly bölmekligiň yzygiderliginde otrisatel däl sanlaryň setirini alyp bilsek, onda M sany položitel kökleriniň ýokary çägi hökmünde almak bolar, sebäbi mundan soňra Gorneriň shemasyny ulanmak esasynda hiç wagt otrisatel koeffisiýent alyp bolmaýar. Hususy ýagdaýda, eger berlen $f(x)$ köpagza diňe otrisatel däl koeffisiýentlere eýe bolsa, onda $M=0$ diýip hasap etmek bolar, sebäbi $f(x)$ köpagza bu ýagdaýda položitel köke eýe bolmaýar.

2-nji mysal. 1-nji mysalda seredilen $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ deňlemäniň položitel kökleriniň we otrisatel kökleriniň çäklerini Nýutonyň usuly bilen tapyň.

Çözülişi. $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ (2)

deňlemäniň çep tarapyny $x - 1$ ikagza bölüp alarys:

	2	0	1	1	– 2	– 3
1	2	2	3	4	2	– 1

Bu ýerde otrisatel koeffisiýent bar, ýöne $M = 1{,}1$ diýsek, onda tablisanyň ikinji setirinde položitel koeffisiýentleriň setirini alarys:

	2	0	1	1	– 2	– 3
1,1	2	2,2	3,42	4,76	3,24	0,56

Şoňa görä-de, položitel kökleriň ýokarky çägi hökmünde 1,1-i alyp bolar, ýagny $M_+ = 1{,}1$.

Položitel kökleriň aşaky çägini almak üçin, (2) deňlemede $x = \frac{1}{t}$ goýup,

$$3t^5 + 2t^4 - t^3 - t^2 - 2 = 0 \qquad (3)$$

deňlemäni alarys. $M=1$ diýip, bu deňlemäniň çep tarapyna Gorneriň shemasyny ulanalyň

	3	2	– 1	– 1	0	– 2
1	3	5	4	3	3	1

Bu bolsa, (3) deňlemäniň položitel kökleriniň ýokarky çägi hökmünde 1-i alyp bolýandygyny aňladýar. Ýokarda aýdylanlara görä, (2) deňlemäniň položitel kökleriniň aşaky çägi $m_+ = \frac{1}{1} = 1$ bolar. Soňra, (2) deňlemede $x = -y$ ornuna goýmany ulanyp,

$$2y^5 + y^3 - y^2 - 2y + 3 = 0 \qquad (4)$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň çep tarapyny $y - 1$ ikagza böleliň:

	2	0	1	– 1	– 2	3
1	2	2	3	2	0	3

Şeýlelik bilen, (4) deňlemäniň položitel kökleriniň ýokarky çägi hökmünde 1-i alarys we bu ýerden berlen (2) deňlemäniň otrisatel kökleriniň aşaky çäginiň $m_{-} = -1$ bolýandygyny göreris.

(4) deňlemede $y = \frac{1}{z}$ diýip,

$$3z^5 - 2z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0 \tag{5}$$

deňlemäni alarys. Onuň çep tarapyny $z - 1$ ikagza bölüp,

	3	– 2	– 1	1	0	2
1	3	1	0	1	1	3

tablisany alarys. Netijede, $M_{-} = -1$ bolar. Alnan $M_{-} = -1$ we $m_{-} = -1$ netijeler, (2) deňlemäniň hiç hili otrisatel köküniň ýokdugyny aňladýar.

Görşümiz ýaly, Nýutonyň usuly (2) deňlemäniň hakyky kökleriniň çäklerini ýeterlik derejede takyk kesgitlemäge kömek etdi. Eger 1-nji teoremany ulanan bolsak, onda (2) deňlemäniň hakyky kökleriniň (– 2,5; 2,5) çägini alardyk. Nýutonyň usulyny ulanyp, biz (2) deňlemäniň položitel hakyky köki bar bolsa, onda onuň (1;1,1) aralykda ýatýandygyny, otrisatel köküniň bolsa ýokdugyny anyklaşdyrdyk.

16.2. Hakyky kökleriň sany

Köpagzalaryň hakyky kökleriniň sanyny we ýerleşişini bilmeklik sanly usullar teoriýasynda deňlemeleri çözmekligiň zerur etapy bolup durýar. Aýratyn ýagdaýlarda berlen köpagzanyň hakyky kökleri barada käbir zatlary aýtmak mümkin. Meselem, 14.2-nji bölümçedäki 5-nji teorema boýunça, hakyky koeffisiýentli köpagzanyň hakyky kökleriniň sany onuň derejesine deň ýa-da ondan kiçi bolýar diýen netijä gelmek bolar. Kähalatlarda, kökleriň çägini tapmaklygyň yzygiderliginde onuň položitel ýa-da otrisatel kökleriniň ýok bolýan ýagdaýlaryna duş gelinmegi mümkin. Ýöne, köpagzanyň hakyky kökleriniň sany baradaky soraga doly jogap bermek üçin, çuňňur derňew geçirmeklik zerur bolýar.

Köp ýagdaýlarda hakyky koeffisiýentli deňlemeleriň hakyky kökleriniň sanyny Dekardyň düzgüni diýip atlandyrylýan usul bilen kesgitlemek bolýar.

Ilki bilen käbir bellikleri edeliň.

1-nji bellik. *Berlen*

$$c_1, c_2, \ldots, c_m \tag{6}$$

tükenikli yzygiderligiň **alamat üýtgemeleriniň sanyny** *goňşy jübüt elementleriň alamatlaryna görä alarys, ýagny her bir garşylykly alamatly goňşy elementleriň jübüti bir sany alamat üýtgemäni berýär.*

Meselem, – 1, – 2,6, 3, – 1,4 yzygiderlikde 3 sany alamat üýtgeme bar, olary (– 2;6), (3; – 1) ,(– 1;4) jübütler emele getirýär. – 1, – 2, – 6, – 3, – 1, – 4 yzygiderlikde bolsa alamat üýtgeme ýok, ýagny alamat üýtgemeleriň sany nola deň. Eger $c_1, c_2, \ldots, c_m$ yzygiderlikde käbir sanlar nola deň bolsa, onda alamat üýtgemeleriň sanyny kesgitlände olara üns berilmeýär.

Eger (6) yzygiderlikde birinji we iň soňky c_1 we c_m sanlar birmeňzeş alamata eýe bolsa, onda bu yzygiderlikdäki alamat üýtgemeleriň sany jübüt; eger c_1 we c_m dürli alamata eýe bolsa, onda alamat üýtgemeleriň sanynyň täk bolýandygyny belläliň.

2-nji bellik. *Köpagzanyň kratny köpeldijilerini hemişe bölüp alyp bolýandygy üçin, seredilýän köpagzanyň kratny köpeldijileri ýok diýip hasap ederis.*

Dekardyň düzgüni. *Hakyky koeffisiýentli*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{7}$$

köpagzanyň položitel kökleriniň sany onuň koeffisiýentleriniň emele getirýän yzygiderligindäki alamat üýtgemeleriň sanyna deň ýa-da alamat üýtgemeleriň sanyndan jübüt san azdyr.

1-nji mysal. Dekardyň düzgüni bilen, $f(x) = x^3 - 6x + 1$ köpagzanyň položitel kökleriniň sanyny kesgitläň.

Çözülişi. $f(x) = x^3 - 6x + 1$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň emele getirýän 1,0, – 6,1 yzygiderligindäki alamat üýtgetmeleriň sany 2-ä deň. Şonuň üçin hem Dekardyň düzgünine görä, onuň 2 ýa-da 0 sany položitel köki bar.

2-nji mysal. $x^4 + x^3 + x + 2 = 0$ we $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ deňlemeleriň položitel kökleriniň sanyny kesgitläň.

Çözülişi. $x^4 + x^3 + x + 2 = 0$ deňlemäniň çep tarapyndaky koeffisiýentleriň yzygiderligi alamat üýtgemä eýe däl, ýagny ol yzygiderlikdäki alamat üýtgemeleriň sany nola deň, şonuň üçin hem bu deňleme položitel köke eýe däl. $2x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$ deňleme bir sany položitel köke eýe.

Dekardyň düzgünini hakyky koeffisiýentli deňlemäniň otrisatel köklerine baha bermekde hem ulanyp, bolar. Onuň üçin,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

deňlemede $x = -y$ diýip näbellini çalyşmaly. Berlen deňlemäniň otrisatel kökleriniň sany $f(-y) = 0$ deňlemäniň položitel kökleriniň sanyna deň.

3-nji mysal. 1) $x^3 - 6x + 1 = 0$ we $x^4 + x^3 + x^2 + 2 = 0$ deňlemeleriň otrisatel kökleriniň sanyny kesgitläň.

Çözülişi. $x^3 - 6x + 1 = 0$ deňlemede $x = -y$ ornunagoýma $y^3 - 6y - 1 = 0$ deňlemäni berýär. Bu ýerde alamat üýtgemeleriň sany 1-e deň, netijede, bu deňlemäniň 1 položitel köki bar. Berlen deňleme bolsa, 1 otrisatel köke eýe bolar.

2) $x^4 + x^3 + x^2 + 2 = 0$ deňleme $x = -y$ ornunagoýmanyň esasynda $y^4 - y^3 + y^2 + 2 = 0$ deňlemä öwrülýär. Bu ýerden iki sany alamat üýtgemäni alarys. Berlen deňleme 2 sany otrisatel köke eýedir ýa-da hiç bir otrisatel köke eýe däldir.

Eger berlen $f(x) = 0$ deňlemäniň ähli kökleriniň hakyky sanlardygy belli bolsa, onda Dekardyň düzgüni deňlemäniň hakyky kökleriniň sanyna takyk jogap berip bilýär. Ýagny $f(x) = 0$ deňlemäniň položitel kökleriniň sany $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň emele getirýän yzygiderligindäki alamat üýtgemeleriň sanyna, otrisatel kökleriniň sany bolsa $f(-x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň alamat üýtgemeleriniň sanyna deňdir.

4-nji mysal. $x^3 - 6x + 1 = 0$ deňlemäniň položitel we otrisatel kökleriniň sanyny kesgitläň.

Çözülişi. $x^3 - 6x + 1 = 0$ deňlemäniň ähli kökleri hakyky sanlar, sebäbi onuň $D = \frac{(-6)^3}{27} + \frac{1}{4} = -\frac{31}{4}$ diskriminanty otrisatel. Onda bu deňlemäniň 2 sany položitel we 1 otrisatel köki bardyr.

§17. Rasional sanlar meýdanynda berlen köpagzalar

17.1. Rasional sanlar meýdanynda köpagzalaryň getirilýänligi we getirilmeýänligi

Erkin alnan algebraik deňlemäniň rasional kökleriniň ulanylýan ýerleri köp duş gelmeýär. Ýöne, eger $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda berlen $f(x)$ köpagza ýa-da şol bir zady aňladýan rasional koeffisiýentli

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

deňleme rasional köklere eýe bolsa, onda köp ýagdaýlarda bu kökleri tapmak gaty ýeňil bolýar. Berlen deňlemäniň iň bolmanda bir r köküni tapyp bilsek, onda ony $x - r$ bolup, berlen deňlemä görä ýönekeýräk bolan $(n - 1)$ derejeli deňlemäni almak bolar. Şoňa görä-de, $\boldsymbol{Q}[x]$ halkanyň köpagzalarynyň rasional köklerini tapmaklygyň ýönekeý usullaryna seretmeklik maksadalaýykdyr. Bu usullary bilmeklik her bir mekdep mugallymy üçin zerurdyr, sebäbi mekdep matematikasynda, esasan hem, rasional kökleri tapmak talap edilýän rasional koeffisiýentli köpagzalara köp duş gelinýär.

$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda berlen köpagzalaryň $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen köpagzalaryndan ýa-da $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynda berlen köpagzalardan esasy aýratynlygy, *derejesi ýeterlik uly bolanda hem rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän islendik derejeli rasional koeffisiýentli köpagzany görkezmek bolar.* $\boldsymbol{C}[x]$ halkada derejesi birden uly bolan islendik köpagzany getirilýändigi, $\boldsymbol{R}[x]$ halkada bolsa derejesi ikiden uly her bir köpagzanyň (hatda ol köpagzanyň hakyky kökleri bolmasada) getirilýänligini ýatlalyň.

Rasional koeffisiýentli islendik derejeli köpagzalaryň arasynda rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzalaryň bardygyny subut etmeklige geçmezden öňürti, rasional koeffisiýentli köpagzalaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

Ilki bilen rasional koeffisiýentli islendik algebraik deňlemäni, bu deňlemäniň ähli koeffisiýentlerini ol koeffisiýentleriň maýdalawjylarynyň iň uly umumy bölüjisine köpeldip, berlen deňlemä deňgüýçli bolan, bitin koeffisiýentli deňlemä getirip bolýandygyny belläliň.

1-nji mysal. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{3} = 0$ rasional koeffisiýentli deňlemäni oňa deňgüýçli bolan bitin koeffisiýentli deňleme bilen çalşyň.

Çözülişi. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{3} = 0$ deňlemäni 6-a köpeldip alarys:

$$2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0. \tag{1}$$

Drob sanlar bilen iş salyşmaklyga görä, bitin sanlar bilen iş salyşmak amatly bolany üçin, $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä berlen köpagza degişli soragy bitin koeffisiýentli köpagzalara degişli sorag bilen çalyşýarys. Hususy ýagdaýda, $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen köpagzanyň getirilmeýänligi (getirilýänligi) baradaky soragy bitin koeffisiýentli köpagzanyň getirilmeýänligine (getirilýänligine) getirip öwreneris. Şonuň üçin, ilki bilen $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlaryň halkasyna görä kesgitlenen primitiw köpagzanyň kesgitlemesini we esasy häsiýetini ýatlalyň *(25.4-nji bölümçä seret).*

Kesgitleme. *Eger bitin koeffisiýentli $p(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri* ± 1 *sandan başga umumy bölüjä eýe bolmasa, onda oňa* **primitiw (ýönekeý)** *diýilýär.*

2-nji mysal. (1) deňlemäniň çep tarapyndaky köpagza primitiwdir, $2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12$ köpagza bolsa primitiw däldir.

Lemma. *Iki primitiw köpagzanyň köpeltmek hasyly ýene-de primitiw köpagzadyr.*

Indi bitin koeffisiýentli köpagzalaryň rasional sanlar meýdanynda getirilýänligi we getirilmeýänligi baradaky soraga geçeliň.

1-nji teorema. *Bitin koeffisiýentli $f(x)$ köpagzanyň rasional sanlar meýdanynda getirilýän bolmagy üçin, onuň **Z** bitin sanlar halkasynda getirilýän bolmagy, ýagny $f(x)=f_1(x)\,f_2(x)$ deňlik ýerine ýeter ýaly, derejesi noldan tapawutly bitin koeffisiýentli $f_1(x)$* we *$f_2(x)$ köpagzalaryň bolmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. *Zerurlyk şerti.* Goý, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilýän bitin koeffisiýentli köpagza berlen bolsun, ýagny $f(x) = g_1(x)\ g_2(x)$ deňlik ýerine ýeter ýaly, derejesi noldan tapawutly rasional koeffisiýentli $g_1(x)$ we $g_2(x)$ köpagzalar bar bolsun.

$g_1(x)$ we $g_2(x)$ köpagzalaryň koeffisiýentleriniň maýdalawjylarynyň umumy bölüjisini tapyp we olaryň iň uly umumy bölüjisini ýaýyň daşyna çykaryp,

$$g_1(x) = \frac{\alpha}{\beta} s_1(x),\ \ g_2(x) = \frac{\gamma}{\delta} s_2(x)$$

deňlikleri alarys. Özi hem, bu ýerde $(\alpha;\beta) = 1$, $(\gamma;\delta) = 1$ diýip hasap ederis. $s_1(x)$ we $s_2(x)$ köpagzalaryň primitiw köpagzalar boljakdygy aýdyň. Indi,

$$f(x) = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} s_1(x)\, s_2(x)$$

deňlikdäki $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ drobuň bitin sandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$ diýip, tersinden güman edeliň, bu ýerde p we $q \neq \pm 1$ sanlar özara ýönekeý sanlardyr. Ýokardaky lemma görä, $s_1(x)$ we $s_2(x)$ köpagzalaryň $s(x)$-köpeltmek hasyly primitiwdir. Goý, c_k san $s(x)$ köpagzanyň k-njy agzasynyň koeffisiýenti bolsun. $\frac{p}{q}$ c_k köpeltmek hasyly bitin san bolmaly, sebäbi şert boýunça $f(x) = \frac{p}{q}\ s(x)$ köpagza bitin koeffisiýentli köpagzadyr. p we q özara ýönekeý bitin sanlar bolany üçin, c_k koeffisiýent q sana bölünýär. c_k koeffisiýent erkin alnan agzanyň koeffisiýenti bolany üçin, bu aýdylanlar ähli k-lar üçin ýerine ýetýär, ýagny $s(x)$ köpagzanyň ähli koeffisiýentleri q sana bölünýär. Bu bolsa $s(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleriniň ± 1 sanlardan başga hem umumy bölüjisiniň bardygyny aňladýar. Ol bolsa $s(x)$ köpagzanyň primitiw köpagzadygyna garşy gelýär. Netijede, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = m \in \boldsymbol{Z}$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Indi $f_1(x) = ms_1(x)$, $f_2(x) = s_2(x)$ diýip, $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ deňligi alarys, bu ýerde $f_1(x)$ we $f_2(x)$ köpagzalar derejesi noldan tapawutly, bitin koeffisiýentli köpagzalardyr.

Ýeterlik şerti. Eger $f(x)$ köpagza $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasynda getirilýän bolsa, onda ol $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda hem getirilýändir, sebäbi $\boldsymbol{Z}[x] \subset \boldsymbol{Q}[x]$. ►

1-nji teorema köpagzalaryň $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilýänligi baradaky soragy tutuşlygyna $\boldsymbol{Z}$ bitin sanlar halkasyna geçirýär.

2-nji teorema (Eýzenşteýn). *Eger bitin koeffisiýentli*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

köpagzanyň $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ koeffisiýentleri käbir p ýönekeý sana bölünse, özi hem a_0 koeffisiýent p^2 sana, a_n baş koeffisiýent bolsa, p sana bölünmese, onda $f(x)$ köpagza rasional sanlaryň meýdanynda getirilmeýär.

Subudy. 1-nji teorema görä, 2-nji teoremanyň şertine laýyklykda kesgitlenen $f(x)$ köpagzany derejesi noldan tapawutly bolan bitin koeffisiýentli iki sany köpagzalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolmaýandygyny görkezmek ýeterlik. Şonuň üçin, tersinden güman edeliň, ýagny bitin koeffisiýentli köpagzalar üçin

$$f(x) = (b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0),$$
$$(r \geq 1, s \geq 1, r + s = n)$$

deňlik ýerine ýetýär diýeliň. Takyklyk üçin, $r \geq s$ diýeliň. Ýokardaky deňligiň sag tarapyndaky ýaýlary açyp, meňzeş agzalary toparlanymyzdan soňra, deňligiň sag we çep tarapyndaky köpagzalary deňeşdirip,

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ a_2 &= b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \\ &\overline{} \\ a_r &= b_r c_0 + b_{r-1} c_1 + \cdots + b_{r-s} c_s, \\ &\overline{} \\ a_n &= b_r c_s \end{aligned} \tag{2}$$

deňlikleri alarys.

Teoremanyň şertine görä a_0, ýagny $b_0 c_0$ san p sana bölünmeli, ýöne p^2 sana bölünmeli däl. Şonuň üçin hem, p san b_0 ýa-da c_0 sanlaryň diňe birini bölýär. Goý, meselem, $b_0 \,⋮\, p$, c_0 san bolsa p sana bölünmeýän bolsun. Onda (2) deňlikleriň 2-nji deňlemesine görä, b_1 san p sana bölüner, sebäbi şert boýunça $a_1 \,⋮\, p$ we $p \nmid c_0$ bolýandygyny ýokarda görkezdik. Indi, $b_0 \vdots p$ we $b_1 \vdots p$ bolýandygyndan (2) deňlikleriň üçünji deňliginden $b_2 \vdots p$ gelip çykýandygyny alarys. Edil şuňa meňzeşlikde, $b_3, b_4, \ldots, b_{r-1}, b_r$ sanlaryň hem p sana bölünýändigini görkezmek bolar. Ýöne bu mümkin däl, sebäbi b_r sanyň p sana bölünýändiginden we (2) deňlikleriň iň soňky deňliginden a_n sanyň p sana bölünýändigi alnar. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. ►

Eýzenşteýniň kriteriýasy diýip atlandyrylýan 2-nji teoremanyň kömegi bilen, $\boldsymbol{Q}[x]$ halkanyň köp köpagzalarynyň getirilýändigini ýa-da getirilmeýändigini barlamak bolar.

3-nji mysal. Eýzenşteýniň kriteriýasyny ulanyp, $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6$ köpagzanyň rasional sanlar meýdanynda getirilýändigini ýa-da getirilmeýändigini barlaň.

Çözülişi. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x - 6$ köpagza rasional sanlaryň meýdanynda getirilmeýär, sebäbi $p = 2$ bolanda onuň koeffisiýentleri Eýzenşteýniň kriteriýasynyň şertlerini kanagatlandyrýar.

Eýzenşteýniň kriteriýasyndan peýdalanyp, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän derejesi isledigiňçe uly bolan, bitin koeffisiýentli köpagzalary görkezip bolar. Hususy ýagdaýda, n islendik natural san bolanda we p ýönekeý san bolanda $f(x) = x^n + p$ köpagza, hakykatdan hem, $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilmeýän köpagza bolýar. Şuňa meňzeş köpagzalary başga-da dürli usullar bilen gurup boljakdygy düşnükli.

Şeýlelik bilen, Eýzenşteýniň kriteriýasyna esaslanyp, aşakdaky tassyklamany subut etdik.

3-nji teorema. *Rasional sanlar meýdanynda berlen köpagzalaryň halkasynda rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän islendik derejeli köpagzalar dardyr.*

Ýokardaky aýdylanlardan derejesi birden uly bolan, rasional koeffisiýentli $f(x)$ köpagzanyň iň bolmanda bir sany rasional köki bar bolsa, onda ol $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilýändir. 3-nji derejeli köpagzalar üçin ters tassyklama hem dogrudyr.

4-nji teorema. *Eger rasional koeffisiýentli, 3-nji derejeli köpagza rasional köke eýe bolmasa, onda ol rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär.*

Subudy. Tersinden güman edeliň. Goý, $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ bolsun, bu ýerde $f_1(x), f_2(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$ we $deg f_1 \geq 1$, $deg f_2 \geq 1$, $deg f_1 + deg f_2 = 3$ bolany üçin, $deg f_1 = 1$ we $deg f_2 = 2$ ýa-da $deg f_1 = 2$ we $deg f_2 = 1$ bolmaly. Goý, $deg f_1 = 1$ bolsun, ýagny $f_1(x) = ax + b$ rasional koeffisiýentli köpagza bolsun. Onda $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ san bu köpagzanyň rasional köki bolýar, şoňa görä-de, ol $f(x)$ köpagzanyň köki bolýar. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. ►

4-nji mysal. $x^3 - 4$ köpagza $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilmeýär, sebäbi bu köpagza rasional köke eýe däl. Eýzenşteýniň kriteriýasyny gönüden-göni ulanyp, bu köpagzanyň getirilmeýändigi baradaky soraga jogap berip bolmaýar.

17.2. Rasional koeffisiýentli köpagzalaryň rasional kökleri

Rasional koeffisiýentli deňlemeleriň rasional köklerini tapmaklygyň ýönekeý usullaryna seredeliň. 17.1-nji bölümçede $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen deňlemä biz hemişe bitin koeffisiýentli deňleme hökmünde seretmek bolýandygyna göz ýetirdik. Rasional koeffisiýentli deňlemeleriň rasional köklerini tapmak meselesinde aşakdaky teorema uly ähmiýete eýedir.

5-nji teorema. *Eger $\frac{p}{q}$ rasional san (bu ýerde p we q özara ýönekeý sanlar), bitin koeffisiýentli*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3)$$

deňlemäniň köki bolsa, onda $a_0 \vdots p$ we $a_n \vdots q$.

Subudy. Eger $\frac{p}{q}$ rasional san (3) deňlemäniň köki bolsa, onda

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

ýa-da

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

deňlik dogrudyr. Görnüşi ýaly, deňligiň çep tarapyndaky goşulyjylaryň iň soňkusyndan başgasy we tutuş jem (ol nola deň) p sana bölünýär, onda $a_0\, q^n \vdots p$. Ýöne, p we q sanlar özara ýönekeý şonuň üçin hem $a_0 \vdots p$. Edil şeýle-de, deňligiň çep tarapyndaky goşulyjylaryň birinjisinden başgasy we tutuş jem q sana bölünýär, şoňa görä-de, $a_n\, p^n \vdots q$. Bu ýerden bolsa, p we q sanlaryň özara ýönekeýdigini göz öňüne tutsak, $a_n \vdots q$ alynýar. ▶

Netije. *Eger bitin koeffisiýentli deňlemäniň baş koeffisiýenti* 1-e *deň bolsa, onda bu deňlemäniň ähli rasional kökleri bitin sanlar bolup, olar azat agzanyň bölüjileri bolýar.*

1-nji mysal. $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň rasional kökleri, 5-nji teorema laýyklykda, $\frac{p}{q}$ görnüşde bolmaly, bu ýerde

$p = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12;$ $q = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Has takygy, bu deňlemäniň rasional köklerini

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{4}{3}; \pm\frac{1}{6}$$

sanlaryň arasyndan gözlemeli.

Amaly mysallar çözülende, kähalatlarda, 5-nji teoremanyň özünden däl-de, onuň netijesinden peýdalanmak amatly bolýar, sebäbi her bir bitin koeffisiýentli deňlemäni bitin koeffisiýentli normirlenen deňlemä öwürmek kyn däl. Onuň üçin berlen deňlemäni a_n^{n-1} sana köpeldip, $a_n x = y$ belgilenişigi geçirmek ýeterlik.

2-nji mysal. $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$ deňlemäni 2^2 sana köpeldip, $y = 2x$ belgilenişigi geçirenimizden soňra

$$y^3 + 3y^2 + 12y - 16 = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemä 5-nji teoremanyň netijesini ulanmak bolar. Onuň rasional kökleri azat agzanyň bölüjileri bolan bitin sanlar bolmagy mümkin, ýagny $\pm1; \pm2; \pm4; \pm8; \pm16$ sanlaryň bolmagy mümkin.

Ýöne, ýokardaky ýaly özgertmäni geçirmek hemişe maksadalaýyk däl, meselem, (4) deňlemäni 6^3 sana köpeldip alanymyzda, azat agza $12 \cdot 6^3 = 2592$ sana deň bolýar, onuň bolsa bölüjileri gaty köp.

5-nji teorema rasional sanyň, bitin koeffisiýentli deňlemäniň köki bolmaklygynyň zerurlyk şertini kesgitleýär. Ýöne, zerurlyk şertler köpräk bolsa gowy, sebäbi olaryň kömegi bilen barlaglary ýeňletmek bolar.

6-njy teorema. $\frac{p}{q}$ (*bu ýerde* $(p,q) = 1$) *rasional sanyň bitin koeffisiýentli*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

köpagzanyň köki bolmagy üçin, $f(k)$ (k*-bitin san*) *sanyň* $p - qk$ *sana bölünmegi zerurdyr* ($p - qk \neq 0$).

Subudy. $f(x)$ köpagzany $x - k$ ikagza galyndyly böleliň. Bezunyň teoremasyna laýyklykda

$$f(x) = (x-k)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + f(k) \qquad (4)$$

deňligi alarys. Bu ýerde paýyň ähli $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0$ koeffisiýentleri bitin sanlar. (4) deňlikde $x = \frac{p}{q}$ diýip, $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ bolýandygyny hasaba alyp,

$$-f(k) = \left(\frac{p}{q} - k\right)\left[b_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + b_1\frac{p}{q} + b_0\right]$$

deňligi alarys. Bu deňligiň iki tarapyny hem q^n sana köpeldip,

$$-q^n f(k) = (p - qk)[b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 pq^{n-2} + b_0 q^{n-1}]$$

deňligi alarys. Bu ýerde, eger $p - qk \neq 0$ bolsa, onda $q^n f(k)$ san $(p - qk)$ sana bölünýär. Indi, q we $p - qk$ sanlaryň özara ýönekeý sanlardygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, eger ol sanlar $|\alpha| \neq 1$ şerti kanagatlandyrýan α umumy bölüjä eýe bolsady, onda $p = qk + (p - qk)$ san hem bu bölüjä eýe bolardy. Bu bolsa mümkin däl, sebäbi $(p,q) = 1$. Netijede, q we $p - qk$ sanlar özara ýönekeý bolýar şoňa görä-de, q^n we $p - qk$ sanlar hem özara ýönekeý bolarlar. Ikinji tarapdan, $q^n f(k)$ san $p - qk$ sana bölünýär; bu ýerden $f(k)$ sanyň $p - qk$ sana bölünýändigi gelip çykýar. ►

Netije. *Eger bitin koeffisiýentli berlen $f(x)$ köpagzanyň a_n baş koeffisiýenti bire deň bolsa, onda onuň rasional kökleri diňe $f(k) \vdots (p - k)$, $(p - k \neq 0$, k - bitin san$)$ şerti kanagatlandyrýan p bitin sanlar bolup biler.*

Subudy. Hakykatdan hem, 5-nji teoremanyň netijesine görä, $a_n = 1$ bolanda $q = 1$ bolýandygyny alarys, bu ýerden hem tassyklamamyz gelip çykýar. ►

6-njy teoremada k sana dürli bitin bahalary berip, $\frac{p}{q}$ sanyň berlen deňlemäniň köki bolmaklygynyň islendik sandaky zerurlyk şertlerini almak bolar. $f(1)$ we $f(-1)$ hasaplamalar ýeňil bolany üçin, k sana 1 we -1 bahalary bermek amatly bolýar. Ony ulanmaklygyň düzgünini aşakdaky ýaly kesgitlemek bolar: $\frac{p}{q}$ sanyň bitin koeffisiýentli köpagzanyň köki bolmagy üçin, $\frac{f(1)}{p-q}$, $\frac{f(-1)}{p+q}$ sanlaryň bitin bolmagy zerur.

3-nji mysal. $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň rasional köklerini tapyň.

Çözülişi. 6-njy teorema görä, $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň rasional köklerini diňe aşakdaky sanlaryň arasyndan gözlemeli bolar:

$$\pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \pm 3\,;\ \pm 4\,;\ \pm 6;\ \pm 12;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{4}{3};\ \pm\frac{1}{6}. \qquad (5)$$

Berlen deňleme üçin, $f(1) = 4$, $f(-1) = 18$ bolýar. Ilki bilen, (5) sanlaryň haýsysy üçin $\frac{4}{p-q}$ sanyň bitin bolýandygyny anyklaşdyralyň. Barlaglar

$$+2;\ \pm 3;\ +\frac{1}{2};\ +\frac{3}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ +\frac{2}{3};\ +\frac{4}{3} \qquad (6)$$

sanlar üçin, $\frac{4}{p-q}$ aňlatmanyň bahasynyň bitin san bolýandygyny görkezýär. Görnüşi ýaly, $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň köki bolmagy mümkin bolan sanlaryň sanyny 24-den 9-a getirdik. Indi (6) sanlaryň toplumyna $\frac{18}{p+q}$ sanyň bitin bolmak şertini goýsak, onda $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň köki bolmagy mümkin bolan sanlaryň sanyny ýene azaldyp, 2; – 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1}{3}$ sanlary alarys. Bu sanlary gönüden-göni berlen deňlemede goýup, olaryň haýsysynyň onuň köki bolýandygyny anyklarys. Hasaplamalar diňe $\frac{1}{2}$ we – 3 rasional sanlaryň bu deňlemäniň köki bolýandygyny görkezýär. Berlen deňlemäniň çep tarapyny Gorneriň shemasy boýunça $x + 3$ we $x - \frac{1}{2}$-e bölüp, çözüwi $x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$ bolýan kwadrat deňlemäni alarys. Şeýlelikde, $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - - 26x + 12 = 0$ deňleme $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -3$ çözüwlere eýe bolýar.

Käbir deňlemeleriň rasional köklerini tapanda, ilki bilen berlen deňlemäniň hakyky kökleriniň çäklerini tapmak maksadalaýyk bolýar. Sebäbi onuň kömegi bilen barlaglaryň sanyny azaltmak mümkin. $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$ deňlemäniň hakyky kökleri 31.1-nji bölümçedäki 1-nji teorema laýyklykda $\left(-\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$ aralykda ýatýar; şonuň üçin hem, (5) sanlaryň käbirini barlamagyň zerurlygy bolmaýar.

V BÖLÜM

SAN MEÝDANLARYNYŇ ALGEBRAIK GIŇELTMESI

§18. Algebraik san we meýdanyň tükenikli giňeltmesi

18.1. Algebraik sanlar

§6-da erkin alnan abstrakt halkada algebraik we transendent element düşünjesine seredipdik. Bu bölümde biz bu düşünjeleriň hususy halyna, ýagny algebraik we transendent san düşünjelerine serederis.

1-nji kesgitleme. *Eger berlen san käbir rasional koeffisiýentli köpagzanyň köki bolsa, onda oňa* ***algebraik san*** *diýilýär.*

Islendik r rasional sanyň algebraik san boljakdygy düşnükli, sebäbi oňa $f(x) = x - r$ köpagzanyň köki hökmünde seretmek bolar. Irrasional sanlaryň hem algebraik san bolmagy mümkin. Meselem, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ sanlar algebraikdir, sebäbi olaryň birinjisi $f(x) = x^2 - 2$ köpagzanyň, ikinjisi bolsa $g(x) = x^3 - 5$ köpagzanyň köküdir. Ýöne, ähli irrasional sanlar algebraik bolup bilmez. $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen hiç bir köpagzanyň köki bolmaýan tükeniksiz köp irrasional sanlary görkezmek bolar. Ol sanlara ***transendent sanlar*** diýilýär. Transendent sanlara mysal edip e, π, log2, $2^{\sqrt{2}}$ we ş.m. sanlary görkezmek bolar. $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda kesgitlenen algebraik we transendent san düşünjelerini erkin alnan san meýdanlarynda berlen köpagzalar üçin umumylaşdyryp boljakdygy tebigydyr.

2-nji kesgitleme. *Eger α san Δ meýdanda berlen käbir köpagzanyň köki bolsa, onda α sana Δ meýdana görä (ýa-da Δ meýdanda berlen)* ***algebraik san*** *diýilýär. Δ meýdana görä algebraik bolmaýan sana bu meýdana görä* ***transendent*** *diýilýär.*

$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdany islendik Δ san meýdanynyň bölek meýdany bolýandygy üçin, $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä algebraik bolýan san islendik Δ meýdana görä hem algebraik bolýar. Δ meýdanyň islendik ξ elementleriniň bu meýdana görä algebraik boljakdygy düşnükli, sebäbi ol $f(x) = x - \xi$ köpagzanyň köki bolýar.

Goý, α san Δ meýdanda berlen n-nji derejeli

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (1)$$

köpagzanyň köki bolsun. Bu köpagza normirlenen, sebäbi onuň baş koeffisiýenti bire deň. Bu köpagzany Δ meýdanda getirilmeýän hasap edeliň. Goý, ondan başga-da, $g(x)$ köpagza α sanyň köki bolýan Δ meýdanda berlen islendik köpagza bolsun.

15. sargyt № 749

$f(x)$ we $g(x)$ köpagzalaryň özara ýönekeý däldigi düşnükli, sebäbi olaryň umumy α köki bolany üçin, olaryň ikisi hem $x - \alpha$ köpeldijä eýe bolýar. Ikinji bir tarapdan $f(x)$ köpagza Δ meýdanda getirilmeýän köpagzadyr. Şonuň üçin hem $g(x)$ köpagza $f(x)$ köpagza bölünýär we netijede, onuň derejesi n-den kiçi bolmaýar. Hususy ýagdaýda, eger $g(x)$ köpagza hem Δ meýdanda getirilmeýän bolsa, onda ol $f(x)$ köpagzadan hemişelik köpeldiji bilen tapawutlanar. Şonuň üçin hem, köki α bolan normirlenen $f(x)$ köpagza Δ meýdanda getirilmeýän α kökli köpagzalaryň arasynda iň kiçi derejeli köpagza bolýar.

3-nji kesgitleme. *Δ meýdanda getirilmeýän we α kökli normirlenen $f(x)$ köpagza α sanyň **minimal köpagzasy** diýilýär, onuň n derejesine bolsa Δ meýdana görä kesgitlenen α **algebraik sanyň derejesi** diýilýär.*

Eger α sanyň derejesi Δ meýdana görä bire deň bolsa, onda $\alpha \in \Delta$ bolýar. $n > 1$ bolanda, $f(x)$ köpagzanyň Δ meýdanda getirilmeýänliginden $\alpha \notin \Delta$ gelip çykýar. Hakykatdan hem, eger $\alpha \in \Delta$ bolan bolsady, onda $f(x)$ köpagza $x - \alpha$ ikagza bölünerdi, bu bolsa $f(x)$ köpagzanyň Δ meýdanda getirilýändigini aňladýar.

18.2. Meýdanyň ýönekeý algebraik giňeltmesi

Goý, M erkin alnan san köplügi berlen bolsun. M köplügiň ähli elementlerini özünde saklaýan san meýdany bardyr, meselem, ähli kompleks sanlaryň emele getirýän meýdany.

*M köplügi özünde saklaýan ähli san meýdanlarynyň kesişmesi netijesinde emele gelýän meýdana, berlen san köplügi özünde saklaýan **minimal meýdan** diýilýär we $P\{M\}$ bilen belgilenýär.*

Bu kesgitleme käbir meýdanyň islendik sanly bölek meýdanlarynyň kesişmesiniň ýene-de meýdan emele getirýändigine daýanýar.

1-nji mysal. $M = \{1\}$ köplügi özünde saklaýan minimal meýdany kesgitläň.

Çözülişi. $M = \{1\}$ köplügi her bir san meýdan özünde saklar. Bu köplügi özünde saklaýan minimal meýdanyň $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdany bolýar. Hakykatdan hem, $\boldsymbol{Q}$ meýdan ähli san meýdanlaryň bölegi bolýar. Ikinji tarapdan, ähli san meýdanlaryna degişli bolan irrasional san ýok, meselem, irrasional san iň bolmanda $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyna degişli däl.

$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyna **minimal san meýdany** diýmek, tebigydyr.

2-nji mysal. $\sqrt{2}$ sany saklaýan minimal meýdany kesgitläň.

Çözülişi. $\sqrt{2}$ sany saklaýan minimal meýdan $a + b\sqrt{2}$ görnüşli sanlary özünde saklaýan $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdan bolar, bu ýerde $a,b \in \boldsymbol{Q}$. Hakykatdan hem, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\,|a,b \in \boldsymbol{Q}\}$ san köplügi $\sqrt{2}$ sany özünde saklaýan meýdany emele getirýär. Ikinji tarapdan, $\sqrt{2}$ sany özünde saklaýan her bir P meýdan $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdany hem özünde saklaýar, sebäbi ähli rasional sanlar we $\sqrt{2}$ san bilen bilelikde, goşmagyň we köpeltmegiň netijesi bolan ähli $a + b\sqrt{2}$ görnüşli sanlar hem P meýdanda saklanýar.

Goý, Δ käbir san meýdany, α bolsa bu san meýdanyna degişli bolmadyk san bolsun. Δ meýdany we α sany saklaýan $P\{\Delta,\alpha\}$ minimal meýdana seredeliň. $P\{\Delta,\alpha\}$ meýdan Δ meýdanyň α sany özünde saklaýan minimal giňeltmesi bolýar. Hakykatdan hem, minimal meýdanyň kesgitlemesine görä, Δ meýdanyň α sany özünde saklaýan islendik giňeltmesi $P\{\Delta,\alpha\}$ meýdany hem özünde saklamaly.

Belli bolşy ýaly (1,§13), Δ meýdanyň $\Delta \not\ni \alpha$ sany özünde saklaýan minimal giňeltmesine Δ meýdanyň oňa **α sany çatyp alnan giňeltmesi** hem diýilýär we $\Delta(\alpha)$ bilen belgilenýär. Edil şuňa meňzeşlikde, $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ meýdana Δ meýdana $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sanlary çatyp alnan Δ meýdanyň giňeltmesi diýilýär. Meýdana, bir sany çatyp alnan giňeltmä, bu ***meýdanyň ýönekeý giňeltmesi*** diýilýär.

2-nji mysalda seredilen $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\,/a,b \in \boldsymbol{Q}\}$ meýdan $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyň oňa $\sqrt{2}$ sany çatyp alnan ýönekeý giňeltmesi bolýar.

1-nji kesgitleme. *Δ meýdana görä algebraik bolan α sany Δ meýdana çatyp alnan $\Delta(\alpha)$ meýdana, Δ meýdanyň* **ýönekeý algebraik giňeltmesi** *diýilýär.*

Ýönekeý algebraik giňeltmäniň gurluşy aşakdaky teorema bilen häsiýetlendirilýär.

1-nji teorema. *Δ meýdanda getirilmeýän n-nji derejeli*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

köpagzanyň α köküni Δ meýdana çatyp alnan $\Delta(\alpha)$ meýdan

$$\xi = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1} \qquad (2)$$

görnüşli sanlardan durýar, bu ýerde $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1} \in \Delta$.

Subudy. Ilki bilen (2) görnüşli sanlaryň köplüginiň meýdan emele getirýändigini görkezeliň. (2) görnüşli sanlaryň jeminiň we tapawudynyň ýene-de (2) görnüşli sanlar boljakdygy aýdyň. Indi olaryň köpeltmek hasylyna we paýyna seredeliň. (2) görnüşli sanlary Δ meýdanda berlen, derejesi $(n-1)$-den geçmeýän käbir $q(x)$ köpagzada x-iň ornuna α goýup, alnan aňlatma görnüşinde göz öňüne getirip boljakdygy düşnükli:

$$\xi = q(\alpha).$$

Goý, $\xi_1 = q_1(\alpha)$, $\xi_2 = q_2(\alpha)$ bolsun. Onda $\xi_1 \xi_2 = q_1(\alpha)\, q_2(\alpha) = q(\alpha)$ bolar, bu ýerde $q(x)$ köpagzanyň derejesi $(n - 1)$-den geçmegi hem mümkin. Ol ýagdaýda $q(x)$ köpagzany $f(x)$ köpagza galyndyly bölüp alarys:

$$q(x) = f(x)\varphi(x) + r(x), \tag{3}$$

bu ýerde $r(x)$ köpagzanyň derejesi $f(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi bolar, ýagny $(n - 1)$-den geçmez. (3) deňlikde x-iň ornuna α goýup $q(\alpha) = r(\alpha)$, ýagny

$\xi_1 \xi_2 = r(\alpha)$ deňligi alarys. Başgaça ξ_1 we ξ_2 sanlaryň köpeltmek hasyly (2) görnüşli san bolýar.

Paýa seretmeklige geçeliň. Bu ýagdaýda $\dfrac{1}{q(\alpha)}$ sanyň (2) görnüşli sanlaryň köplügine girýändigini görkezmek ýeterlik, bu ýerde $\xi = q(\alpha) \neq 0$. $f(x)$ köpagzanyň Δ meýdanda getirilmeýändigi üçin $q(x)$ köpagza onuň bilen ýa-ha özara ýönekeý ýa-da $f(x)$ köpagza bölünýän bolmaly. Ýöne, soňky ýagdaý bolup bilmez. Sebäbi $q(x)$ köpagzanyň derejesi $f(x)$ köpagzanyň derejesinden kiçi, şonuň üçin hem $(f,q) = 1$.

Özara ýönekeý köpagzalar üçin bolsa, «$f(x)\varphi_1(x) + q(x)\,\varphi_2(x) = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly, ýeke-täk $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ köpagzalaryň jübüti bar» -diýen tassyklama dogry *(7.5-nji bölümçä seret)*. Bu deňlikde $x = \alpha$ diýip we $f(\alpha) = 0$ bolýandygyny hasaba alyp, $q(\alpha)\varphi_2(\alpha) = 1$, ýagny $\xi\varphi_2(\alpha) = 1$ deňligi alarys. Netijede, $\varphi_2(\alpha) = \dfrac{1}{\xi}$ bolar. Eger $\varphi_2(x)$ köpagzanyň derejesi n-den kiçi bolsa, onda tassyklama subut edildi. Eger $\varphi_2(x)$, köpagzanyň derejesi n-e deň ýa-da ondan uly bolsa, onda $\varphi_2(x)$ köpagzany $f(x)$ köpagza galyndyly bölüp, ýagny $\varphi_2(x) = f(x)\varphi(x) + r(x)$ diýip, bu ýerden $\varphi_2(\alpha) = r(\alpha) = \dfrac{1}{\xi}$ deňligi alarys, bu ýerde $r(x)$ köpagzanyň derejesi n-den kiçi bolar. Şeýlelikde, $\dfrac{1}{\xi}$ sanyň hem (2) görnüşdedigi subut edildi.

Netijede, (2) görnüşli sanlaryň köplüginiň meýdan emele getirýänligi görkezildi. Ony Δ_1 bilen belläliň. Indi $\Delta_1 = \Delta(\alpha)$ bolýandygyny subut etmek gerek. Δ_1 meýdan Δ meýdany we α sany özünde saklaýar. Onda $\Delta(\alpha)$-nyň kesgitlenişine görä, $\Delta_1 \supseteq \Delta(\alpha)$ bolar. Ikinji bir tarapdan, α sany we Δ meýdany özünde saklaýan her bir meýdan (2) görnüşli sanlary hem saklaýar. Şoňa görä hem $\Delta(\alpha) \supseteq \Delta_1$ bolýar. Netijede, $\Delta_1 \supseteq \Delta(\alpha)$ we $\Delta(\alpha) \supseteq \Delta_1$ gatnaşyklardan $\Delta_1 = \Delta(\alpha)$ deňlik gelip çykýar. ▶

Netije. *Eger α san Δ meýdanda berlen ikinji derejeli*

$$f(x) = x^2 + px + q$$

köpagzanyň köki, ozi hem $\alpha \notin \Delta$ bolsa, onda Δ meýdanyň oňa α sany çatyp alnan $\Delta(\alpha)$ ýönekeý algebraik giňeltmesi $a + b\alpha$ görnüşli sanlardan durýar, bu ýerde a,b sanlar Δ meýdanyň erkin alnan elementleridir.

Aşakdaky kesgitlemäni girizeliň.

Kesgitleme. *Eger α san Δ meýdanda berlen kwadrat üçagzanyň Δ meýdana degişli däl köki bolsa, onda Δ meýdana α sany çatyp alnan $\Delta(\alpha)$ ýönekeý algebraik giňeltmesine Δ meýdanyň* ***kwadratik giňeltmesi*** *diýilýär.*

3-nji mysal. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanyň kwadratik giňeltmedigini subut ediň.

Subudy. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdan, $\boldsymbol{Q}$ meýdana ikinji derejeli $f(x) = x^2 - 2$ köpagzanyň $\sqrt{2}$-ä deň bolan köküni çatyp alnan meýdanydyr. Bu meýdanyň elementleri $a + b\sqrt{2}$ görnüşli sanlardan durýar, bu ýerde a,b islendik rasional sanlardyr. Netijede, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdan kwadratik giňeltme bolýar.

4-nji mysal. $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$ meýdanyň elementleriniň gurluşyny kesgitläň.

Çözülişi. $\alpha = \sqrt[3]{2}$ san $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän $f(x) = x^3 - 2$ köpagzanyň köküdir. Şonuň üçin hem $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$ meýdanyň ähli ξ elementleri, 1-nji teorema görä, $\xi = c_0 + c_1\sqrt[3]{2} + c_2\sqrt[3]{2^2}$ görnüşde bolýar, bu ýerde c_0, c_1, c_2-rasional sanlar.

5-nji mysal. Biziň bilşimiz ýaly, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany $\boldsymbol{R}$ – hakyky sanlar meýdanyna $\boldsymbol{R}$-de getirilmeýän ikinji derejeli $f(x) = x^2 + 1$ köpagzanyň i köküni çatyp gurulýar. Subut edilen teorema görä,

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(i) = \{a + bi \,|\, a, b \in R, i^2 = -1\} \text{ bolýar.}$$

18.3. Maýdalawjyny irrasionallykdan boşatmak

Biz öň 11.3-nji bölümçede drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmaklyga seredipdik. Indi drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmagyň ýene bir usulyna serederis.

Goý, $\dfrac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ gysgalmaýan drob berlen bolsun, bu ýerde $p(x)$ we $q(x)$ kopagzalar $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen, α bolsa $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilmeýän rasional koeffisiýentli

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

köpagzanyň irrasional köki (elbetde, $q(\alpha) \neq 0$). Bu drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşatmak üçin, onuň üstünde käbir toždestwolaýyn özgertmeleri geçirmek zerur bolýar. Onuň üçin, 1-nji teoremanyň subudyndan peýdalanarys. Eger $\deg q \geq n$ bolsa, onda $q(x)$ kopagzany $f(x)$ köpagza galyndyly bölüp $q(x) = f(x)s(x) + r(x)$ deňligi alarys. Bu ýerde $x = \alpha$ diýip, bu deňlikden $q(\alpha) = r(\alpha)$ deňligi alarys, şoňa görä-de $\dfrac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = \dfrac{p(\alpha)}{r(\alpha)}$ deňlik alynýar, bu ýerde $\deg r < \deg f$. Şeýlelik bilen, drobuň maýdalawjysyndaky köpagzanyň derejesini hemişe n-den kiçi diýip hasap edip bolýandygyny görkezdik. Indi $q(x)$ we $f(x)$ köpagzalaryň özara ýönekeýdigi düşnükli, sebäbi $f(x)$ getirilmeýän köpagza. Goý, $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen $\varphi_1(x)$ we $\varphi_2(x)$ köpagzalar

$$\varphi_1(x)f(x) + \varphi_2(x)q(x) = 1 \tag{4}$$

deňligi kanagatlandyrýan bolsun. Bu deňlikde $x = \alpha$ diýsek, $f(\alpha) = 0$ bolýandygyny hasaba alsak , onda

$$\frac{1}{q(\alpha)} = \varphi_2(\alpha)$$

ýa-da

$$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = p(\alpha)\varphi_2(\alpha) \tag{5}$$

deňligi alarys.

Şeýlelik bilen, $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ drobuň maýdalawjysyny irrasionallykda boşatmaklygyň aşakdaky yzygiderligini aldyk:

1) eger $deg q \geq n$ bolsa, onda $q(\alpha)$ sany $r(\alpha)$ san bilen çalyşmaly, bu ýerde $r(x)$ köpagza $q(x)$ köpagzany $f(x)$ köpagza bölmekden galýan galyndy;

2) (4) deňligi kanagatlandyrýan $\varphi_1(x)$ we $\varphi_2(x)$ köpagzalary tapmaly;

3) $\varphi_2(\alpha)$-ny kesgitlemeli we $\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$ droby (5) formula esasynda aňlatmaly.

1-nji mysal. $\frac{\sqrt[3]{2}+4}{2-\sqrt[3]{2}}$ drobuň maýdalawjysyny irrasionallykdan boşadyň.

Çözülişi. Şerte görä, $f(x) = x^3 - 2$, $p(x) = x + 4$, $q(x) = 2 - x$, $deg q < deg f$ we $\alpha = \sqrt[3]{2}$.

$\varphi_1(x)(x^3 - 2) + \varphi_2(x)(-x + 2) = 1$ deňligi kanagatlandyrýan $\varphi_1(x)$ we $\varphi_2(x)$ köpagzalary, has takygy $\varphi_2(x)$ köpagzany tapalyň. Degişli hasaplamalary geçirip,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

deňlikleri alarys. Indi (5) formula görä,

$$\frac{\sqrt[3]{2}+4}{2-\sqrt[3]{2}} = (\sqrt[3]{2}+4)\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{2^2} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{2} + \frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 3$$

netijäni alarys.

18.4. Meýdanyň tükenikli giňeltmesi

1-nji teorema we getirilen mysallar $\Delta(\alpha)$ meýdana degişli ξ sanlaryň özboluşly gurluşynyň bardygyny görkezýär. Olary her bir agzasy Δ meýdanyň c_k elementleri bilen $\Delta(\alpha)$ meýdanyň $\alpha^k (k = 0,1,\ldots,n-1)$ elementleriniň köpeltmek hasyllarynyň jemi görnüşinde, ýagny

$$\xi = c_0 + c_1\alpha + c_2\,\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\,\alpha^{n-1}$$

görnüşli jem hökmünde göz öňüne getirmek bolýar. Şeýlelik bilen, $\Delta(\alpha)$ meýdanyň erkin alnan ξ elementini, $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$ elementleriň, koeffisiýentleri Δ meýdana degişli bolan kombinasiýasy görnüşinde göz öňüne getirmek bolýar. $\Delta(\alpha)$ meýdanyň elementleriniň jemi we $\Delta(\alpha)$ meýdanyň elementlerini Δ meýdanyň elementine köpeltmek hasyly ýene-de $\Delta(\alpha)$ meýdanyň elementi bolýanlygy üçin, $\Delta(\alpha)$ meýdana Δ meýdana görä çyzykly giňişlik hökmünde seretmek bolýar. $\Delta(\alpha)$ çyzykly giňişlik çyzykly algebra hem emele getirýär, ýöne, bize $\Delta(\alpha)$ meýdanyň çyzykly giňişlik bolan ýagdaýyndaky häsiýetleri gerek.

Pikirimizi umumylaşdyryp, käbir T meýdana we onuň Δ bölek meýdanyna seredeliň. Onda, T meýdan Δ meýdana görä çyzykly giňişlik emele getirýär. Bu giňişligiň elementleri T meýdanyň sanlary, amallary bolsa, T meýdanyň elementlerini goşmak we olary Δ meýdandan alnan sana köpeltmek amallary bolýar.

Bu giňişligiň ölçegini we bazisini kesgitlemäge geçmezden öňürti çyzykly giňişlikler nazaryýetine degişli, bize belli bolan (1, VII bölüm) käbir maglumatlary ýatlalyň.

Eger

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\,\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\,\alpha_k = 0 \tag{6}$$

deňlik diňe $\lambda_i = 0$ ($i = 1,2,\ldots,k$) bolanda ýerine ýetse, onda T meýdanyň $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ elementleriniň toplumyna Δ *meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz elementleriniň sistemasyny emele getirýär* diýilýär, bu ýerde $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ elementler Δ meýdana degişlidir. Eger (6) deňlik λ_i-leriň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda we diňe şonda ýerine ýetse, onda $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ elementleriniň toplumyna Δ *meýdana görä çyzykly baglanyşykly elementleriniň sistemasyny* emele getirýär diýilýär.

Bu kesgitlemäni mysallarda şöhlelendireliň.

1-nji mysal. $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \sqrt{2}$ sanlaryň $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanda, $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz sistema emele gelýändigini subut ediň.

Subudy. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanda, $\alpha_1 = 1$ we $\alpha_2 = \alpha\sqrt{2}$ sanlar $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz sistemasyny emele getirýär. Hakykatdan hem, goý, $\lambda_1, \lambda_2 \in Q$ bolsun. Bu ýagdaý üçin (6) deňlik $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \sqrt{2} = 0$ görnüşde bolar. Bu deňligiň diňe, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bolýandygyny görkezeliň. Tersinden güman edeliň, ýagny $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ bolsun (λ_1 ýa-da λ_2 elementleriň diňe biriniň nola deň bolup bilmejek ýagdaýy gönüden-göni görnüp dur). Onda $\sqrt{2} = -\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$, ýagny $\sqrt{2}$ san rasional san bolar. Bu bolsa mümkin däl.

2-nji mysal. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanyň $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ elementleri haýsy ýagdaýda $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzykly baglanyşykly bolýar.

Çözülişi. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdandan alnan, $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ we $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ iki sanyň $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä, çyzykly baglanyşykly bolmagy mümkin. Hakykatdanam, eger bu sanlaryň koeffisiýentleri proporsional, ýagny $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$ bolsa, onda $\alpha_2 = \lambda\,\alpha_1$ boljagy aýdyň. Şoňa görä-de, $\lambda\,\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ deňlik dogry. Bu ýerde α_2 elementiň koeffisiýentiniň noldan tapawutlydygyna üns bereliň.

Jogaby. α_1 we α_2 özara proporsional bolsa.

3-nji mysal. $Q(\sqrt[3]{2})$ meýdanda $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ elementleriň toplumy $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä, çyzykly baglanyşyksyz sistema emele getirýär (özbaşdak subut ediň).

Indi bolsa çyzykly baglanyşyksyz elementleriň sistemasyna degişli käbir ýönekeý häsiýetleri ýatlalyň (1, §28):

1) Δ meýdana görä, çyzykly baglanyşyksyz bolýan sistemanyň her bir bölek sistemasy hem, Δ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz sistema emele getirýär;

2) nol sany özünde saklaýan T meýdanyň islendik elementleriniň sistemasy Δ meýdana görä çyzykly baglanyşykly sistema emele getirýär;

3) eger T meýdana degişli elementleriň sistemasy Δ meýdana görä çyzykly baglanyşykly bolsa, onda onuň iň bolmanda bir elementi beýleki elementleriň çyzykly kombinasiýasy bolýar;

4) eger T meýdana degişli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ elementleriň sistemasynyň iň bolmanda bir elementi Δ meýdana görä onuň beýleki elementleriniň çyzykly kombinasiýasy bolsa, onda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sistema Δ meýdana görä çyzykly baglanyşykly sistema bolýar.

Indi 1-nji teoremanyň netijelerine gaýdyp geleliň. Öň belleýşimiz ýaly, bu teorema $\Delta(\alpha)$ meýdanyň elementleriniň gurluşyny kesgitleýär, bu ýerde α san Δ meýdanda getirilmeýän n-nji derejeli $f(x)$ köpagzanyň köki. $\Delta(\alpha)$ meýdanyň özi bolsa, aşakdaky ýaly gurlandyr: $\Delta(\alpha)$ meýdanda n sany $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ elementler tapylyp, her bir $\xi \in \Delta(\alpha)$ element bu elementleriň, koeffisiýentleri Δ meýdanyň elementleri bolan, çyzykly kombinasiýany emele getirýär.

Indi $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ elementleriň emele getirýän sistemasynyň Δ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyzdygyny görkezeliň.

Hakykatdan hem, bu sistema görä (6) deňligi ýazalyň:

$$\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 \alpha + \gamma_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha^{n-1} = 0,$$

bu ýerde $\lambda_i \in \Delta$. Eger bu deňlik λ_i-leriň ählisi nola deň bolmadyk ýagdaýynda ýerine ýetýän bolsa, onda bu α sanyň, derejesi $(n - 1)$ – den geçmeýän, koeffisiýentleri Δ meýdana degişli bolan käbir $\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x^{n-1}$ köpagzanyň köki bolýandygyny aňladýar. Emma, bu mümkin däl, sebäbi $f(x)$ köpagza α köke eýe bolan we derejesi n-e deň bolan minimal köpagzadyr.

Şeýlelik bilen, eger α san Δ meýdana görä n-nji derejeli algebraik san bolsa, onda $\Delta(\alpha)$ giňeltmäniň her bir elementiniň $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$ elementleriň, koeffisiýentleri Δ meýdanyň elementleri bolan çyzykly kombinasiýasyny emele getirýändigini görkezdik.

Umumy ýagdaýda, käbir Δ san meýdanyny we onuň T giňeltmesini alalyň hem-de her bir $\xi \in T$ element $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň (Δ meýdandan alnan koeffisiýentli) çyzykly kombinasiýasy bolýan T giňeltmäniň Δ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz bolan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriniň sistemasy bar diýeliň.

Bu $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň sistemasyna Δ meýdanyň, T giňeltmesiniň bazisi diýmek bolar, sebäbi olar Δ meýdana görä berlen T çyzykly giňişligiň bazisini emele getirýär. Bu bazisiň elementleri tükenikli we sany n-e deň. Meýdanyň şeýle giňeltmesine tükenikli giňeltme diýilýär.

Kesgitleme. *Eger T meýdandaky her bir ξ element $T \ni \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň (koeffisiýentleri Δ meýdanyň elementlerinden düzülen) çyzykly kombinasiýasy, ýagny her bir ξ elementini*

$$\xi = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n, \quad \lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n \in \Delta \tag{7}$$

görnüşde aňladar ýaly Δ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz $T \ni \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň sistemasy bar bolsa, onda Δ meýdanyň T giňeltmesine ***tükenikli giňeltme*** *diýilýär we $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ elementleriň sistemasyna T meýdanyň Δ meýdana görä* ***bazisi*** *diýilýär.*

T giňeltmäniň bazisini dürli usullar bilen saýlamak bolar. Ýöne, T meýdanyň her bir bazisiniň elementleriniň sany şol bir n-e deň bolar. Has takygy, erkin alnan n sany çyzykly baglanyşyksyz elementli sistema bazis emele getirer (1,§28). Bu n sana Δ meýdanyň T tükenikli giňeltmesiniň **derejesi** diýilýär we $(T:\Delta)$ belginiň kömegi bilen ýazylýar. $(T:\Delta)$-niň Δ meýdana görä gurlan T giňişligiň **ölçegi** boljakdygy düşnükli.

4-nji mysal. $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ we $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$ meýdanlarynyň ölçegini kesgitläň.

Çözülişi. 1) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \boldsymbol{Q}\}$ meýdan $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň derejesi 2-ä deň bolan giňeltmesidir, sebäbi $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyna görä gurlan $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanyň iki elementden durýan bazisi bar. Bazis hökmünde 1 we $\sqrt{2}$ sanlardan durýan köplügi almak bolar. Bazis hökmünde başga sanlary alsak hem bolar, meselem, $1-\sqrt{2}$ we $1+\sqrt{2}$ sanlary ýa-da umumy ýagdaýda $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz bolan $a_1 + b_1\sqrt{2}$ we $a_2 + b_2\sqrt{2}$ sanlary almak bolar. Bu aýdylanlara görä $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanyň ölçegi 2-ä deň bolýar.

2) $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in Q\}$ meýdan $\boldsymbol{Q}$ meýdanyň 3-nji derejeli giňeltmesi bolýar. Onuň bazisi $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz üç

sany meselem, 1, $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ ýa-da $1+\sqrt[3]{2}, 2-\sqrt[3]{2}, 1+\sqrt[3]{4}$, sanlar bolup biler. Bu giňişligiň ölçegi 3-e deň.

5-nji mysal. $\boldsymbol{C} = \{a + bi \mid a,b \in R, i^2 = -1\}$ kompleks sanlar meýdany $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynyň derejesi 2-ä deň bolan giňeltmesi bolýar. Bu giňeltmäniň $\boldsymbol{R}$-e görä bazisi bolup, meselem, 1 we i sanlar hyzmat edip biler.

6-njy mysal. Δ meýdanyň her bir birinji derejeli T giňeltmesi Δ meýdan bilen gabat gelýär.

Meýdanyň her bir giňeltmesiniň tükenikli giňeltme bolmaýandygyny bellemek wajypdyr. Meselem, $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdany $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň giňeltmesi, ýöne bu giňeltme tükenikli däl, sebäbi onuň tükenikli sanly elementden durýan bazisi ýok.

§19. San meýdanlarynyň algebraik giňeltmesi

19.1. Algebraik giňeltme düşünjesi

San meýdanlarynyň täze görnüşli giňeltmelerini girizeliň we olaryň häsiýetlerini öwreneliň. Δ meýdanyň ýönekeý algebraik giňeltmelerini birnäçe gezek yzygider ýerine ýetirmeklik netijesinde alnan T giňeltmesine **kratny ýa-da düzme algebraik giňeltme** diýilýär.

1-nji kesgitleme. *Eger*

$$\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k = T$$

*şerti kanagatlandyrýan $\Delta_1 = \Delta_0(\alpha_1)$, $\Delta_2 = \Delta_1(\alpha_2), \ldots, \Delta_k = \Delta_{k-1}(\alpha_k)$ algebraik giňeltmeleriň yzygiderligi bar bolsa, özi hem α_i san Δ_{i-1} meýdana görä algebraik bolsa, onda T giňeltmä Δ_0 meýdanyň **k kratnyly algebraik giňeltmesi** diýilýär.*

Bu kesgitlemeden $\alpha_i (i = 2,3,\ldots,k)$ sanyň ilkibaşda berlen Δ_0 meýdana görä algebraik bolýanlygy gös-göni gelip çykmaýar, sebäbi α_i sanyň Δ_{i-1} meýdana görä algebraikligi onuň Δ_0 bölek meýdanyna görä algebraikdigini aňlatmaýar.

Δ_0 meýdanyň k kratnylyga eýe bolan algebraik giňeltmesini $\Delta_0(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ ýazgy bilen belgiläris. Ony $\Delta_0(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ bilen garyşdyrmaly däl. Sebäbi $\Delta_0(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ ýazgy Δ_0 meýdanyň oňa bir wagtyň özünde Δ_0 meýdana görä algebraik bolan $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sanlary çatyp alnan algebraik giňeltmesi bolýar. Bu algebraik giňeltmä $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ **algebraik sanlaryň döredýän algebraik giňeltmesi** diýilýär.

San meýdanynyň ýönekeý, kratny we algebraik elementleriň döredýän algebraik giňeltmeleri düşünjelerinden başga-da, san meýdanlarynyň algebraik giňeltmesi diýlen düşünjesini hem girizeliň.

2-nji kesgitleme. *Δ meýdanyň T giňeltmesiniň ähli elementleri Δ meýdana görä algebraik bolsa, onda bu T giňeltmä **algebraik giňeltme** diýilýär.*

Öň girizilen ähli algebraik giňeltmeleriň görnüşleriniň (ýönekeý, kratny we algebraik elementleriň döredýän) algebraik giňeltme bolýandygyny görkezeris. Algebraik bolmaýan giňeltmeler ***transendent giňeltme*** bolýar. Transendent giňeltmä mysal edip, ***Q*** rasional sanlar meýdanyň ***R*** hakyky sanlar meýdanyna giňeltmesini almak bolar. Biz bu ýerde diňe algebraik giňeltmeleri öwrenmek bilen çäkleneris.

19.2. Ýönekeý we kratny algebraik giňeltmeleriň tükenikliligi

Ýokarda girizilen giňeltmäniň käbir häsiýetlerine seredeliň. Ilki bilen 18.2-nji bölümçede seredilen 1-nji teoremanyň aşakdaky tassyklamanyň dogrulygyny aňladýandygyny belläliň.

1-nji teorema. *Δ meýdana oňa görä algebraik bolan α sany çatyp emele getirilen $\Delta(\alpha)$ ýönekeý algebraik giňeltme Δ meýdanyň **tükenikli giňeltmesi bolýar.** Δ meýdanyň $\Delta(\alpha)$ giňeltmesiniň derejesi, ýagny $(\Delta(\alpha):\alpha)$ san Δ meýdana görä algebraik bolan α sanyň derejesine deňdir.*

Subudy. Hakykatdan hem, §18-iň 1-nji teoremasynda subut edilişine görä erkin alnan $\xi \in \Delta(\alpha)$ san

$$\xi = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

görnüşde aňladylýar. Ondan başga-da, 18.4-nji bölümçede $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$ elementleriň Δ meýdana görä $\Delta(\alpha)$ meýdanyň bazisini emele getirýändigi subut edildi. Netijede, $\Delta(\alpha)$ meýdan Δ meýdana görä n-nji derejeli giňeltme bolýar. ►

Netije. *San meýdanynyň islendik kwadratik giňeltmesiniň derejesi 2-ä deň.*

Indi bolsa, Δ meýdanyň kratny algebraik giňeltmesiniň hem bu meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýandygyny görkezeliň. Şonuň üçin ilki bilen, aşakdaky tassyklamany subut edeliň.

1-nji lemma. *Eger Δ_2 meýdan Δ_1 meýdanyň tükenikli giňeltmesi we Δ_1 meýdan bolsa Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolsa, onda Δ_2 meýdan Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýar we $(\Delta_2 : \Delta) = (\Delta_2 : \Delta_1) \cdot (\Delta_1 : \Delta)$.*

Subudy. Goý, $(\Delta_2 : \Delta_1) = n, (\Delta_1 : \Delta) = m$ bolsun. Her bir $\omega \in \Delta_2$ elementi

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i \tag{1}$$

görnüşde aňlatmak bolar, bu ýerde $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ elementler Δ_1 meýdana görä Δ_2-de bazis emele getirýär, $c_1,c_2,\ldots,c_n$ elementler bolsa Δ_1 meýdana degişli bolýar.

Ikinji tarapdan, Δ_1 meýdan Δ meýdanyň n-nji derejeli giňeltmesi bolany üçin

$$c_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\eta_k, \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

deňligi alarys, bu ýerde $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ elementler Δ meýdana görä Δ_1 giňeltmäniň käbir bazisidir, ähli a_{ik} elementler bolsa Δ meýdana degişlidir.
(1) deňlikde (2) deňlik bilen kesgitlenen c_i-leriň bahasyny ornuna goýup,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\eta_k\xi_i \tag{3}$$

deňligi alarys.

Alnan (3) deňlik her bir $\omega \in \Delta_2$ sanyň Δ_2 meýdana degişli $\tau_{ik} = \eta_k\,\xi_i$ elementleriň Δ meýdana degişli a_{ik} koeffisiýentli çyzykly kombinasiýasydygyny görkezýär. Bu ýerden bolsa, Δ_2 meýdanyň Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýandygy gelip çykýar.

Indi bolsa bu giňeltmäniň derejesiniň mn-e deňdigini subut edeliň. Şonuň üçin mn sany τ_{ik} elementleriň Δ meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz sistema emele getirýändigini subut etmek ýeterlikdir.

Goý, λ_{ik} san Δ meýdandan alnan,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}\tau_{ik} = 0 \tag{4}$$

deňligi kanagatlandyrýan käbir sanlar bolsun. Bu deňligiň diňe ähli λ_{ik} sanlaryň nola deň bolan ýagdaýynda ýerine ýetýändigini görkezeliň.

Ýönekeý özgertmeleri ýerine ýetirip,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}\tau_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \lambda_i\eta_k\xi_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_i\eta_k\right)\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\xi_i \tag{5}$$

deňligi alarys, bu ýerde

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}\eta_k.$$

Indi (4) deňligi

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_i\xi_i = 0$$

görnüşde ýazmak bolar. Ýöne $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ elementler Δ_1 meýdana görä Δ_2 meýdanyň bazisi bolýar. Netijede, bu elementler Δ_1 meýdana görä çyzykly baglanyşyksyz sistemany emele getirýär, şonuň üçin $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ bolar.

Onda (5) deňliklerden

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}\eta_k = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

gelip çykýar, bu ýerde $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ elementler Δ görä Δ_1 meýdanyň bazisidir. Netijede, ähli $\lambda_{ik} = 0$ bolar. Şunlukda, $\tau_{in} = \eta_k \xi_i$ elementleriň sistemasy Δ meýdana görä Δ_2 meýdanyň bazisini emele getirýär, ýagny Δ_2 meýdan Δ meýdanyň *mn* derejeli giňeltmesi bolar. Başga sözler bilen aýdanymyzda, $(\Delta_2 : \Delta) = (\Delta_2 : \Delta_1) \cdot (\Delta_1 : \Delta)$ deňlik dogry. ►

1-nji teoremadan we 1-nji lemmadan aşakdaky teorema gelip çykýar.

2-nji teorema. $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)$ *kratny algebraik giňeltme* Δ *meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýar. Bu giňeltmäniň derejesi* Δ *meýdana görä alnan* $\Delta(\alpha_1)$ *giňeltmäniň derejesini,* $\Delta(\alpha_1)$ *meýdana görä alnan* $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)$ *giňeltmäniň derejesine köpeltmek hasylyna deňdir.*

Subudy. $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1)$, $\Delta_2 = \Delta_1(\alpha_2)$ belgilenişikleri girizeliň. $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2$ boljakdygy aýdyň. Her bir Δ_1 we Δ_2 giňeltme ýönekeý algebraik giňeltmedir. 1-nji teorema görä, bu giňeltmeler tükeniklidir. $(\Delta_2 : \Delta_1) = n$, $(\Delta_1 : \Delta) = m$ diýeliň. 1-nji lemma esaslanyp, Δ_2 meýdanyň Δ meýdana görä *mn* derejeli tükenikli giňeltme bolýandygyny göreris.

1-nji netije. $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ *kratny algebraik giňeltme* Δ *meýdan tükenikli giňeltmesi bolýar. Bu giňeltmäniň derejesi ähli yzygider ýerine ýetirilip alnan ýönekeý giňeltmeleriň derejeleriniň köpeltmek hasylyna deňdir.*

Subudy. Bu tassyklamany subut etmeklige matematiki induksiýa usulyny ulanarys. $k = 2$ bolanda biziň tassyklamamyz dogry, sebäbi ol bu ýagdaýda 2-nji teorema bilen gabat gelýär. Indi bu tassyklamany $k = i - 1$ üçin dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, onuň $k = i$ üçin hem dogrudygyny subut edeliň. Şonuň üçin, $\Delta_{i-1} = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_{i-1})$; $\Delta_i = \Delta_{i-1}(\alpha_i)$ belgilenişikleri girizeliň. Induksiýanyň güman etmesi boýunça Δ_{i-1} meýdan Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolar we onuň derejesi $\mu_{i-1} = (\Delta_1 : \Delta) \cdot (\Delta_2 : \Delta_1) \cdot\ldots\cdot (\Delta_{i-1} : \Delta_{i-2})$-ä deň bolar. Onda 2-nji teorema görä, Δ_i hem Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýar, özi hem onuň derejesi

$$\mu_i = \mu_{i-1} \cdot (\Delta_i : \Delta_{i-1}) = (\Delta_1 : \Delta) \cdot (\Delta_2 : \Delta_1) \cdot\ldots\cdot (\Delta_{i-1} : \Delta_{i-2}) \cdot (\Delta_i : \Delta_{i-1})$$

sana deň. ►

Her bir ýönekeý giňeltmesiniň derejesi 2-ä deň bolan kwadratik giňeltmeleriň yzygiderligi berlen ýagdaýynda aşakdaky netijä geleris.

2-nji netije. *Eger* $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k$ *kwadratik giňeltmeleriň yzygiderligi bolsa, onda* Δ_k *giňeltme* Δ *meýdanyň derejesi* 2^k *deň bolan tükenikli giňeltmesi bolýar.*

19.3. Tükenikli giňeltmeleriň algebraikligi we ýönekeýligi

Biz meýdanyň ýönekeý giňeltmesiniň, kratny algebraik giňeltmesiniň hem meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýandygyny görkezdik. Bu giňeltmeleriň algebraikdigini subut etmek üçin, meýdanyň erkin alnan tükenikli giňeltmesiniň algebraikdigini subut etmek ýeterlik.

3-nji teorema. *Meýdanyň islendik tükenikli giňeltmesi onuň algebraik giňeltmesi bolýar.*

Subudy. Goý, Δ_1 meýdan Δ meýdanyň n-nji derejeli tükenikli giňeltmesi bolsun. Bu ýerden Δ_1 meýdanyň islendik $n + 1$ sany elementleriniň sistemasynyň çyzykly baglanyşykly sistema emele getirýändigi gelip çykýar. Şonuň üçin hem, eger Δ_1 meýdana degişli erkin α elementi alyp we onuň kömegi bilen $n + 1$ sany $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n$ elementleriň sistemasyny düzsek, onda bu sistema Δ meýdana görä çyzykly baglanyşykly bolýar, ýagny

$$\lambda_0 + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha^2 + \cdots + \lambda_{n-1}\alpha^{n-1} + \lambda_n\alpha^n = 0$$

deňlik $\lambda_i \in \Delta$ sanlaryň iň bolmanda biri noldan tapawutly bolanda ýerine ýetýär. Netijede, α san koeffisiýentleri Δ meýdana degişli bolan

$$f(x) = \lambda_n x^n + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

köpagzanyň köki bolýar, ýagny Δ meýdana görä algebraik bolýar. ►

Bu teoremanyň subudyndan gönüden-göni görnüşi ýaly, Δ meýdanyň n-nji derejeli tükenikli giňeltmesiniň ber bir elementi Δ meýdana görä derejesi n-den geçmeýän algebraik san bolýar.

1-3-nji teoremalardan aşakdaky ýaly netijä gelinýär: Δ *san meýdanynyň her bir ýönekeý ýa-da kratny algebraik giňeltmesi bu meýdanyň algebraik giňeltmesi bolýar.*

Δ san meýdanynyň tükenikli giňeltmesi diňe bir algebraik bolman, ol ýönekeý algebraik giňeltme hem bolýar. Bu tassyklamany biz indiki üç teoremanyň netijesi hökmünde alarys.

4-nji teorema. Δ meýdana görä algebraik bolan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sanlary Δ meýdana çatyp alnan $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ algebraik giňeltme, $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ - kratny algebraik giňeltme bilen gabat gelýär.

Subudy. Eger $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1)$, $\Delta_2 = \Delta_1(\alpha_2),\ldots,\Delta_i = \Delta_{i-1}(\alpha_i),\ldots,\Delta_k = \Delta_{k-1}(\alpha_k)$ giňeltmeleriň

$$\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_{k-1} \subseteq \Delta_k$$

yzygiderligi gurlan bolsa, onda olar ýönekeý algebraik giňeltmeler bolýar. Hakykatdan hem, şert boýunça her bir α_i san Δ meýdana görä algebraik, şonuň üçin hem ol bu meýdanyň giňeltmesi bolan Δ_{i-1} meýdana görä hem algebraikdir. Şoňa görä-de, $\Delta_i = \Delta_{i-1}(\alpha_i)$ ýönekeý algebraik giňeltme bolýar. Eger $\alpha_i \in \Delta_{i-1}$ bolsa, onda Δ_i meýdanyň Δ_{i-1} meýdan bilen gabat gelmegi mümkin. Bu ýagdaýda $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots$ $\ldots(\alpha_{i-1})(\alpha_i)(\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_k) = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_{i-1})(\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_k)$ deňlik ýerine ýetýär.

$\Delta_k = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ meýdana seredeliň. 18.2-nji bölümçäniň 1-nji teoremasyna görä bu meýdanyň ähli elementlerini Δ meýdanyň elementleri we $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ elementleriň jemi we köpeltmek hasyly görnüşinde aňlatmak bolar. Bu ýerden Δ_k meýdanyň $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ meýdanyň bölek meýdany bolýandygyny , ýagny $\Delta_k \subseteq \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ bolýandygyny alarys. Ikinji tarapdan, $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ meýdan Δ-ny we $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ elementleri saklaýan minimal meýdan bolýar we şoňa görä-de, $\Delta_k \supseteq \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Netijede, $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ ($\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ elementleriň döredýän giňeltmesi) giňeltme $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ kratny giňeltme bilen gabat gelýär. ►

4-nji teorema $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ giňeltmäniň tükenikli we algebraik giňeltme bolýandygyny aňladýar, sebäbi ol $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ görnüşdäki giňeltmedir.

5-nji teorema. *Δ meýdanyň islendik tükenikli giňeltmesi, bu meýdanyň kratny algebraik giňeltmesi bolýar.*

Subudy. Goý, Δ_1 meýdan Δ meýdanyň n-nji derejeli tükenikli giňeltmesi bolsun. 3-nji teorema Δ_1 meýdanyň Δ meýdanyň algebraik giňeltmesi bolýandygyny aňladýar. Netijede, eger $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n$ sistema Δ_1 meýdanyň käbir bazisi bolsa, onda ähli $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n$ sanlar Δ meýdana görä algebraik sanlar bolýar. Indi, $\Delta_1 = \Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n)$ bolýandygyny görkezeliň. Δ_1 meýdan emele getirýär we $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n$ sanlary özünde saklaýar, $\Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n)$ meýdan bu sanlary özünde saklaýan minimal meýdandyr, şoňa görä-de

$$\Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n) \subseteq \Delta_1 \tag{6}$$

gatnaşyk ýerine ýetýär. $\Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n)$ meýdanyň kesgitlemesi boýunça ol meýdan $\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n$ sanlaryň Δ meýdandan alnan koeffisiýentli ähli çyzykly kombinasiýasyny özünde saklaýar, ýagny $\Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n)$ meýdan Δ_1 meýdany tutuşlygyna özünde saklaýar:

$$\Delta(\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_n) \supseteq \Delta_1. \tag{7}$$

(6) we (7) gatnaşyklardan we 4-nji teoremadan

$$\Delta_1 = \Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \Delta(\beta_1)(\beta_2)\ldots(\beta_n)$$

deňlik gelip çykýar. ►

Eger, meselem, $\beta_2 \in \Delta(\beta_1), \beta_3 \in \Delta(\beta_1), \ldots, \beta_n \in \Delta(\beta_1)$ bolsa, onda bu kratny algebraik giňeltmäniň ýönekeý boljakdygy aýdyň görünýär.

6-njy teorema. Δ *meýdanyň her bir* $T = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_k)$ *kratny algebraik giňeltmesi bu meýdanyň ýönekeý algebraik giňeltmesi bolýar, ýagny* $T = \Delta(\omega)$ *şerti kanagatlandyrýan* Δ *meýdana görä algebraik bolan* ω *san bardyr.*

Subudy. Matematiki induksiýany ulanalyň we $k = 2$ bolan ýagdaýa seredeliň. Bu ýagdaýda $T = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)$ bolar. $T = \Delta(\omega)$ bolar ýaly, Δ meýdana görä algebraik bolan ω sany tapmaly.

α_1, α_2 sanlar Δ meýdana görä algebraik bolany üçin, Δ meýdanda berlen käbir $f(x)$ we $g(x)$ köpagzalar bu sanlaryň minimal köpagzalary bolýar. Goý, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sanlar $f(x)$ köpagzanyň, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ sanlar bolsa, $g(x)$ köpagzanyň kökleri bolsun. ξ_i kökleriň özara dürlüdigi aýdyň (eger $f(x)$ köpagza kratny köke eýe bolsa, onda ol getirilýän köpagza bolardy we şoňa görä-de minimal köpagza bolup bilmezdi), özi hem olaryň biri α_1-e deň bolar (meselem, $\xi_1 = \alpha_1$); edil şoňa meňzeşlikde η_j kökleri hem özara dürli we $\eta_1 = \alpha_2$ diýip almak bolar.

Indi $\omega = \alpha_1 + c\alpha_2$ sany düzeliň, bu ýerde c san Δ meýdana degişli edilip, ähli $i = 1,2,...,n$ we $j = 2,3,...,m$ üçin,

$$\omega \neq \xi_i + c\eta_j \tag{8}$$

gatnaşygy kanagatlandyrar ýaly edip, saýlanylýar. c sany bu görnüşde hemişe saýlap bolýar, sebäbi Δ san meýdanyň elementleri tükeniksiz, ýöne

$$\alpha_1 + c\alpha_2 = \xi_i + c\eta_j \Leftrightarrow c = \frac{\alpha_1 - \xi_i}{\eta_j - \alpha_2}, \quad (i = 1,2,\ldots,n; j = 2,3,\ldots,m)$$

şert bilen kesgitlenýän c sanlar tükenikli.

$\omega = \alpha_1 + c\alpha_2$ görnüşde kesgitlenen bu sanyň biziň gözleýän sanymyz bolýandygyny görkezeliň. Ilki bilen $\omega \in T$ bolýandygyny bellәliň we şoňa görä-de ol Δ meýdana görä algebraik bolýar. Şeýle-de, $\Delta(\omega) \subseteq T$ bolýandygy düşnükli. Indi $\Delta(\omega)$ meýdanyň T meýdanyň her bir elementini özünde saklaýandygyny, ýagny $T \subseteq \Delta(\omega)$ bolýandygyny subut etmek galýar.

$f_1(x) = f(\omega - cx)$ köpagza seredeliň. Onuň koeffisiýentleri $\Delta(\omega)$ meýdana degişli bolýar, sebäbi $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentleri we c san Δ meýdana degişli, ω bolsa $\Delta(\omega)$ degişli. $f_1(x)$ köpagzanyň kökleriniň arasynda α_2 san bar, sebäbi

$$f_1(\alpha_2) = f(\omega - c\alpha_2) = f(\alpha_1) = 0$$

gatnaşyk dogry. Netijede, $f_1(x)$ we $g(x)$ köpagzalar α_2 umumy köke eýe. Ýöne, bu köpagzalar α_2-den başga hiç bir umumy köke eýe däldirler, sebäbi garşylykly ýagdaýda

$$\bigvee_{j=2}^{m}\left[f_1(\eta_j)=0\right] \Leftrightarrow \bigwedge_{j=2}^{m}[f(\omega-c\eta_j)=0] \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=2}^{m}\left[\omega-c\eta_j=\xi_i\right][\omega-c\eta_j=\xi_i]$$

gatnaşyk ýerine ýeterdi. Bu bolsa (8) şerte garşy gelýär.

Netijede, $f_1(x)$ we $g(x)$ köpagzalar ýeke-täk bir sany α_2 umumy köke eýe, şoňa görä-de, olaryň iň uly umumy bölüjisi $(f_1, g) = x - \alpha_2$ görnüşde kesgitlener. $f_1(x)$ we $g(x)$ köpagzalar Δ meýdanyň giňeltmesi bolan $\Delta(\omega)$ meýdanda berlen köpagzalar bolany üçin, $x - \alpha_2$ köpagza hem $\Delta(\omega)$ meýdanda kesgitlenen bolýar, ýagny $\alpha_2 \in$ $\in \Delta(\omega)$. Indi $\alpha_1 = \omega - c\alpha_2 \in \Delta(\omega)$ gatnaşygyň dogrulygy düşnükli boldy. Onda Δ meýdany we α_1, α_2 sanlary özünde saklaýan $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$ minimal meýdan $\Delta(\omega)$ meýdanyň bölek meýdany bolmaly. 4-nji teorema görä, $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2) = T$ deňlik ýerine ýetýär, şunuň bilen $T \subseteq \Delta(\omega)$ gatnaşygyň ýerine ýetýändigi görkezildi. $k = 2$ bolanda teorema subut edildi.

Indi teoremany $k = s \geq 2$ üçin, dogry diýip güman edeliň we bu güman etmämizden peýdalanyp, onuň $k = s + 1$ üçin hem dogrulygyny subut edeliň. Goý,

$$T = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_s)(\alpha_{s+1})$$

we α_i $(i = 1,2,\ldots,s + 1)$ sanlar Δ meýdana görä algebraik bolsun.

$T_1 = \Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_s)$ meýdana seredeliň. Induksiýanyň güman etmesine görä $T_1 = \Delta(\omega_1)$ deňlik dogry, bu ýerde ω_1 san Δ meýdana görä algebraik bolan käbir san. Onda $T = \Delta(\omega_1)(\alpha_{s+1})$ deňlik ýerine ýetýär (ony $k = 2$ bolan ýagdaýda subut etdik). Şeýlelikde, islendik $k \in N$ bolanda,

$$\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_k) = \Delta(\omega)$$

bolýandygyny, ýagny kratny algebraik giňeltmäniň ýönekeý giňeltme bolýandygyny subut etdik. ▶

Şeýlelikde, biz Δ san meýdanynyň giňeltmeleriniň aşakdaky bäş görnüşini öwrendik:

K_1 - ýönekeý algebraik giňeltme;
K_2 - kratny algebraik giňeltme;
K_3 - tükenikli giňeltme;
K_4 - algebraik elementler bilen döredilen giňeltme;
K_5 - algebraik giňeltme.

Bu giňeltmeleriň ýokarda seredilen özara baglanyşyklaryny gysgaça aşakdaky ýaly aýdyp bolar:

1-nji teorema görä, $K_1 \subseteq K_3$; 2-nji teorema görä $K_2 \subseteq K_3$; 3-nji teorema görä, $K_3 \subseteq K_5$; 4-nji teorema görä, $K_2 = K_4$; 5-nji teorema görä $K_3 \subseteq K_2$; 6-njy teorema görä, $K_2 \subseteq K_1$.

16. sargyt № 749

Bu ýerden 2-nji we 5-nji teoremalara görä; $K_2 = K_3$; 6-njy teorema we $K_1 \subseteq K_2$ gatnaşyga görä $K_1 = K_2$; 4-nji teorema görä $K_2 = K_4$ deňligi; netijede, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$ deňlikleri alarys. Başga sözler bilen aýdanyňda, ýönekeý algebraik giňeltme, kratny algebraik giňeltme, algebraik elementler bilen döredilen giňeltme we tükenikli giňeltme düşünjeleri gabat gelýär. Olar gurluşy boýunça dürli bolsalarda, şol bir algebraik giňeltmäni aňladýar.

K_5 synp barada aýdylanda bolsa, 3-nji teorema görä $K_3 \subseteq K_5$ gatnaşygyň ýerine ýetýändigini bilýäris. Indiki bölümçede $K_3 \subset K_5$ bolýandygyny görkezeris.

19.4. Algebraik sanlaryň emele getirýän meýdany

Δ meýdana görä algebraik bolan ähli sanlaryň $A(\Delta)$, ýagny $\Delta[x]$ halkanyň köpagzalarynyň kökleriniň toplumyna seredeliň.

7-nji teorema. *Δ meýdana görä algebraik sanlaryň $A(\Delta)$ toplumy meýdan emele getirýär.*

Subudy. $A(\Delta)$ köplük san köplügi, şoňa görä-de, onuň meýdan emele getirýändigini subut etmek üçin, $A(\Delta)$ köplügiň islendik iki sany ξ we η algebraik sanlar bilen bilelikde $\xi + \eta$, $\xi\eta$, $-\xi$, $\frac{1}{\xi}$ sanlary we 0-ly, 1-i özünde saklaýandygyny görkezmek ýeterlik. 0 we 1 sanlaryň $A(\Delta)$ köplüge degişlidigi

$$\boldsymbol{Q} \subseteq \Delta \subseteq A(\Delta) \tag{9}$$

gatnaşykdan gelip çykýar. Goý, $\xi \in A(\Delta)$, $\eta \in A(\Delta)$ bolsun. ξ we η elementleriň ýasaýan $\Delta(\xi,\eta)$ algebraik giňeltmesine seredeliň. Bu giňeltme algebraik giňeltme bolýar *(19.3-nji bölümçä seret)*, şonuň üçin hem onuň her bir elementi $A(\Delta)$ köplükde saklanýar. Hususy ýagdaýda, $\xi + \eta$, $\xi\eta$, $-\xi$, $\frac{1}{\xi}$ sanlar $\Delta(\xi,\eta)$ meýdana degişli, netijede, bu elementler $A(\Delta)$ köplüge hem degişli bolýar. ►

Netije. $A = A(\boldsymbol{Q})$ – ähli algebraik sanlaryň köplügi meýdan emele getirýär, bu ýerde $\boldsymbol{Q}$ – rasional sanlar meýdany.

$A(\Delta)$ köplügiň kesgitlemesinden we 7-nji teoremadan $A(\Delta)$ meýdanyň Δ meýdanyň algebraik giňeltmesi bolýandygy gelip çykýar. *Bu giňeltmäniň umumy ýagdaýda tükenikli giňeltme däldigini* görkezeliň. Onuň üçin $A(\boldsymbol{Q})$ meýdanyň $\boldsymbol{Q}$ – rasional sanlar meýdanynyň tükenikli däl giňeltmesi bolýandygyny barlamak ýeterlik. Bu hakykatdan hem, şeýle, sebäbi $\boldsymbol{Q}[x]$ halkada derejesi islendigiňçe uly bolan getirilmeýän köpagzalary görkezmek bolar *(17.1-nji bölümçä seret)*. Onda $A(\boldsymbol{Q})$ meýdan $\boldsymbol{Q}$ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolup bilmez, sebäbi 3-nji teorema görä, Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesiniň derejesi, onuň her bir elementiniň derejesinden kiçi bolup bilmez.

Bu aýdylanlardan meýdanyň algebraik giňeltmeleriniň arasynda tükenikli däl giňeltmeleriň hem bardygy gelip çykýar. Ýöne, bu aýdylanlar $A(\Delta)$ giňeltmeleriň ählisiniň tükeniksizdigini aňlatmaýar. Meselem, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynyň tükenikli giňeltmesi bolýar. Şol bir wagtyň özünde $\boldsymbol{C} = A(\boldsymbol{R})$, sebäbi ähli hakyky koeffisiýentli köpagzalaryň kökleri $\boldsymbol{C}$ meýdana degişlidir, tersine, her bir $a + bi$ kompleks san, $\boldsymbol{R}$ meýdanda berlen käbir köpagzanyň köküdir (meselem, $a + bi$ san $f(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ köpagzanyň köküdir).

Belli bolşy ýaly, $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdany algebraik ýapykdyr, ýagny bu meýdana görä ähli algebraik sanlar ýene-de $\boldsymbol{C}$ meýdana degişli: $A(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}$. Görüp otursak, bu häsiýete erkin alnan Δ meýdana görä alnan $A(\Delta)$ meýdan hem eýe eken, ýagny $A(A(\Delta)) = A(\Delta)$ deňlik ýerine ýetýär eken.

8-nji teorema. *Erkin alnan Δ meýdana görä algebraik sanlaryň $A(\Delta)$ meýdany algebraik ýapykdyr.*

Subudy. Goý, $A(A(\Delta)) = T$ bolsun. Bize $T = A(\Delta)$ bolýandygyny görkezmek gerek. $A(\Delta) \subseteq T$ gatnaşyk aýdyň. $A(\Delta) \supseteq T$ gatnaşygyň ýerine ýetýändigini görkezeliň. Şonuň üçin, erkin alnan $\omega \in T$ elementiň $A(\Delta)$ meýdana hem degişlidigini, başgaça aýdanymyzda, Δ görä algebraikdigini görkezeliň. Goý,

$$g(x) = x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

köpagza $A(\Delta)$ meýdanda berlen ω kökli minimal köpagza bolsun, bu ýerde $\alpha_j \in A(\Delta)$ $(j = 0,1,2,\ldots,n-1)$. Şeýle köpagza bar, sebäbi ω san $A(\Delta)$ meýdana görä, algebraik. Δ meýdanyň oňa görä algebraik $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ elementler bilen döredilen $\Delta_1 = \Delta(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ giňeltmesine seredeliň. Öň subut edişimize görä, Δ_1 meýdan Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesidir. Soňra Δ_1 meýdanyň ýönekeý algebraik giňeltmesi bolan $\Delta_1(\omega)$ giňeltmä seredeliň. Ol Δ_1 meýdana görä tükenikli giňeltme. 19.2-nji bölümçedäki 1-nji lemma görä, $\Delta_1(\omega)$ giňeltmä Δ meýdana görä tükenikli giňeltmäni emele getirýär diýip bolýar. Onda ol 19.3-nji bölümçäniň 3-nji teoremasyna görä Δ meýdanyň algebraik giňeltmesi bolýar, ýagny onuň islendik elementi, şol hatarda ω hem, Δ meýdana görä algebraik bolýar: $\omega \in A(\Delta)$. ▶

Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasy (§13) $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynyň algebraik ýapykdygyny tassyklaýar. $A = A(\boldsymbol{Q})$ algebraik sanlaryň meýdany $\boldsymbol{C}$ kompleks sanlar meýdanynyň bölek meýdany bolýar (özi hem $A(\boldsymbol{Q}) \subset \boldsymbol{C}$, sebäbi $\boldsymbol{C}$ köplükde transendent sanlar bar). 8-nji teoremadan $\boldsymbol{C}$ meýdanyň A bölek meýdanynyň algebraik ýapyklyk häsiýetiniň barlygy gelip çykýar.

§20. Algebraik deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmek meselesi

20.1. Kwadrat radikallarda çözülmek düşünjesi

Öň belleýşimiz ýaly *(15.3-nji bölümçä seret)*, radikallarda çözülmeýän algebraik deňlemeler hem bar. Umumy ýagdaýda, erkin alnan harp koeffisiýentli n-nji derejeli deňlemeleri $n \geq 5$ bolanda radikallarda çözüp bolmaýar.

Şeýle bolsa-da ýokary derejeli deňlemeleriň aýratyn alnan görnüşlerini radikallarda çözmek mümkin. Radikallarda çözmek meselesini umumy ýagdaýda derňemeklik algebranyň Galuanyň nazaryýeti diýen bölümine degişlidir. Bu bölümiň seredýän soraglary biziň okuw maksatnamamyzdan daşda bolany üçin, oňa seretmeris. Ýöne, bu nazaryýetiň mekdep matematikasyna täsiri uly bolan bir soragyna ýönekeý görnüşinde serederis. Gürrüň algebraik deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmek meselesi barada bolar. Hut şu soraga geometriýanyň sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurulýan köp meselelerini getirmek bolar. Hususy ýagdaýda kuby ikeltmek, burçy deň üç bölege bölmek, töweregiň kwadraturasy ýaly klassiki meseleleri almak bolar.

1-nji kesgitleme. *Eger*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

algebraik deňlemäniň n sany köküniň her birini goşmak, köpeltmek, aýyrmak, noldan tapawutly sana bölmek we kwadrat kök almak amallaryny tükenikli gezek yzygider ýerine ýetirip, ony a_j $(j = 0,1,\ldots,n)$ koeffisiýentleriň üsti bilen aňladyp bolsa, onda (1) *deňlemä* ***kwadrat radikallarda çözülýär*** *diýilýär.*

Eger goşmak, aýyrmak, köpeltmek we noldan tapawutly sana bölmek amallaryny arifmetiki amallar diýip atlandyrsak, onda 1-nji kesgitlemäni gysgarak görnüşde ýazmak bolar: eger (1) deňlemäniň her bir köküni arifmetiki amallaryny we kwadrat kök almak amalyny tükenikli gezek yzygider ýerine ýetirmek esasynda a_j $(j = 0,1,\ldots,n)$ koeffisiýentleriň üsti bilen aňladyp bolsa, onda oňa ***kwadrat radikallarda çözülýär*** diýilýär.

Geljekde biz bu kesgitlemäni has gysga görnüşde, ýagny kwadrat radikallarda çözmek meselesi diýlende berlen deňlemäniň her bir köküni onuň koeffisiýentleriniň üsti bilen kwadrat radikallarda aňlatmaklyga düşüneris.

Bize belli bolşy ýaly, islendik

$$ax + b = 0 \ (a \neq 0) \tag{2}$$

çyzykly deňleme we islendik

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

kwadrat deňleme kwadrat radikallarda çözülýär. Hakykatdan hem, olaryň köklerini koeffisiýentleriniň üsti bilen aňladýan

$$\alpha = -\frac{b}{a}, \quad a_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \alpha_2 = \frac{-b-b^2-4ac}{2a}, \quad (a \neq 0)$$

formulalary almak bolýar, bu ýerde α san (2) deňlemäniň, α_1 we α_2 bolsa (3) deňlemäniň kökleridir.

Biz has ýokary derejeli deňlemeleri hem kwadrat radikallarda çözüp bolýandygyny göreris.

Arifmetiki amallary ýerine ýetirmeklik esasynda $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ çyzykly deňleme, kwadrat kök almaklyk bilen bolsa ikagzaly $x^2 - a = 0$ deňleme çözülýänligi üçin, käbir deňlemeleri kwadrat radikallarda çözmeklik meselesini, derejesi 2-den geçmeýän, koeffisiýentleri bolsa berlen deňlemäniň koeffisiýentleriniň üsti bilen rasional aňladylýan ikagzaly deňlemeleriň zynjyryny çözmek meselesi bilen çalyşmak bolar.

Bu aýdylanlary mysalyň üsti bilen görkezeliň.

1-nji mysal. Belli bolşy ýaly,

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

kwadrat deňlemäni çözmekligi aşakdaky ýaly ýerine ýetirip, bolar. Deňlemäniň çep tarapyndaky üçagzany a sana bölüp we doly kwadraty bölüp çykaryp,

$$\left(x + \frac{b}{2a^2}\right) - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

deňlemäni alarys. Bu ýerde $x + \dfrac{b}{2a} = y$ belgilenişigi geçeliň. Onda kwadrat deňlemäni çözmek meselesi aşakdaky ikagzaly deňlemeleri yzygider çözmek meselesi bilen deňgüýçli bolar:

$$\left.\begin{aligned} y^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} &= 0, \\ x + \frac{b}{2a} - y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

2-nji mysal. $x^5 - 1 = 0$ deňlemäni aşakdaky ýaly çözmek bolar:

$$[x^5 - 1 = 0] \Leftrightarrow [(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x - 1 &= 0, \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= 0. \end{aligned}\right]$$

Bu toplumyň birinji deňlemesi $x_1 = 1$ köke eýe, ikinji deňlemesini x^2-a bölüp ony aşakdaky ýaly özgertmek bolar:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Bu ýerde $x + \frac{1}{x} = z$ belgilenişigi girizip,

$$z^2 + z - 1 = 0$$

deňlemäni alarys. Onuň kökleri

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

görnüşde tapylýar. $z = x + \frac{1}{x}$ belgilenişigi hasaba alsak, onda berlen deňlemäniň galan dört köküni taparys:

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}, \qquad x_3 = \frac{-1-5}{4} - \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4},$$

$$x_4 = \frac{-1+5}{4} + \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}, \qquad x_5 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}-10}}{4}.$$

Edil 1-nji mysaldaky ýaly, her bir kwadrat deňlemäni iki sany ikagzaly deňleme bilen çalşalyň $z^2 + z - 1 = 0$ deňlemede doly kwadraty bölüp çykarmaklygy ýerine ýetirip, $z + \frac{1}{2} = y$ belgilenişigi geçireris. Netijede, berlen deňlemäni iki sany ikagzaly deňlemä getireris: $x + \frac{1}{2} - y = 0$, $y^2 - \frac{4}{5} = 0$. Edil şeýle edip, $z = x + \frac{1}{x}$ deňlemäni $x - \frac{z}{2} - u = 0$ we $u^2 + 1 - \frac{z^2}{4} = 0$ deňlemeler bilen çalşarys. Şeýlelikde, $x^5 - 1 = 0$ deňleme, aşakdaky yzygiderlikde görkezilişi ýaly, ikagzaly deňlemeleriň zynjyryna getirilýär:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= 0, \\ y^2 - \frac{4}{5} &= 0, \\ z + \frac{1}{2} - y &= 0, \\ u^2 + 1 - \frac{z^2}{4} &= 0, \\ x - \frac{z}{2} - u &= 0. \end{aligned}\right\}$$

20.2. Kwadrat radikallarda çözülmek meselesiniň san meýdanynyň algebraik giňeltmesi bilen baglanyşygy

Deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmek meselesi bilen san meýdanlarynyň algebraik giňeltmesiniň arasynda berk baglanyşygyň bardygyna düşünmek kyn däl.

Goý, (1) deňlemäniň çep tarapyndaky $f(x)$ köpagza Δ san meýdanynda berlen bolsun. Özi hem bu ýagdaýda Δ meýdany $f(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini özünde saklaýan minimal san meýdany hasap ederis, ýagny

$$\Delta = \boldsymbol{Q}(a_0,a_1,\dots,a_n)$$

diýmek bolar, sebäbi islendik san meýdany $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyny özünde saklaýar.

1-nji kesgitleme. *$\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanyna $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ deňlemäniň koeffisiýentlerini çatyp emele getirilen $\boldsymbol{Q}(a_0,a_1,\dots,a_n)$* algebraik *giňeltmesine bu **deňlemäniň esasy meýdany*** diýilýär.

1-nji lemma. (1) *deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülmegi üçin, onuň her bir köküniň $\Delta = \boldsymbol{Q}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ meýdanyň käbir sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. 20.1-nji bölümçedäki 1-nji kesgitlemä görä, (1) deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülmegi üçin onuň her bir kökünïň (1) deňlemäniň koeffisiýentleriniň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylmagy zerur we ýeterlikdir. Şonuň üçin hem, lemmanyň subudyny etmekligi, käbir ξ sanyň (1) deňlemäniň koeffisiýentleriniň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylmagy üçin, onuň (1) deňlemäniň esasy meýdanyň käbir sanlary bilen kwadrat radikallarda aňladylmagynyň zerur we ýeterlikdigini barlamaklyga getirmek bolar.

Eger ξ san $a_j (j = 0,1,2,\dots,n)$ koeffisiýentleriň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylýan bolsa, onda ol, şol bir hatarda, $\Delta = \boldsymbol{Q}(a_0,a_1,\dots,a_n)$ meýdanyň sanlarynyň üsti bilen hem kwadrat radikallarda aňladylar, sebäbi ähli $a_j \in \Delta$.

Goý, indi tersine ξ san Δ meýdanyň $b_1,b_2,\dots,b_m$ sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylýan bolsun. Öz gezeginde her bir b_j san käbir sanlaryň we berlen deňlemäniň $a_i (i = 0,1,2,\dots,n)$ koeffisiýentleriniň üsti bilen rasional aňladylýar. Ýöne, islendik rasional san hem a_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ koeffisiýentleriň üsti bilen rasional aňladylýar. Hakykatdan hem, a_i koeffisiýentleriň iň bolmanda biri noldan tapawutly, meselem, $a_n \neq 0$; şonuň üçin hem, $0,1,-1$ sanlar a_n-iň üsti bilen rasional aňladylýar: $0 = a_n - a_n, 1 = \frac{a_n}{a_n}, -1 = 0 - 1$. Erkin alnan $\frac{m}{n}$ rasional sany hem $0,1,-1$ sanlaryň üsti bilen rasional aňlatmak bolar, $\frac{m}{n} > 0$ bolanda $\frac{m}{n} = \frac{\overbrace{1+1+1+...+1}^{m}}{\underbrace{1+1+1+...+1}_{n}}$,

$\frac{m}{n} < 0$ bolanda bolsa, $\frac{m}{n} = \frac{\overbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}^{m}}{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}}$.

Netijede, her bir $b_j (j = 1,2,\ldots,m)$ san, şonuň üçin hem ξ san $a_0,a_1,\ldots,a_n$ koeffisiýentleriň üsti bilen rasional aňladylýar.

Indi *deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülmekligi üçin, onuň ähli köklerini* Δ *esasy meýdanyň sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňlatmaklygyň zerur we ýeterlikdigi düşnükli boldy.*

Ikinji tarapdan, *käbir* ξ *sany* Δ *meýdana degişli sanlaryň üsti bilen kwadrat radikallarda aňlatmak mümkinçiligi* $\Delta(\xi)$ *giňeltmäniň ähli sanlaryny kwadrat radikallarda aňlatmaklygy aňladýar*. Bu tassyklama gönüden-göni her bir $\eta \in \Delta(\xi)$ sanyň, ξ sanyň we Δ meýdanyň käbir sanlarynyň üsti bilen, ξ sanyň özüniň bolsa Δ meýdanyň sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylýanlygyndan gelip çykýar. ►

2-nji kesgitleme. *Eger* Δ

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

deňlemäniň esasy meýdany, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ *sanlar bu deňlemäniň kökleri bolsa, onda* Δ *meýdana ähli* $\alpha_j (j = 0,1,2,\ldots,n)$ *kökleri çatyp, alnan* $T = \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ *meýdana* ***normal meýdan*** *ýa-da berlen deňlemäniň* ***dagatma meýdany*** *diýilýär.*

1-nji teorema. (1) *deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülýän bolmagy üçin, onuň T normal meýdanyna degişli islendik sanyň* Δ *esasy meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. Eger $T = \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ meýdana degişli sanlar Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylsa, onda hususy ýagdaýda deňlemäniň $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ kökleri hem Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar, ýagny deňleme kwadrat radikallarda çözülýär. Tersine, eger $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ kökler Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylsa, onda $\Delta(\alpha_1)$, $\Delta(\alpha_1)(\alpha_2),\ldots,\Delta(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots$ $\ldots(\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = T$ meýdanlaryň ähli sanlary Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar. ►

Netije. *Eger* Δ_1 *meýdan* Δ *meýdanyň kwadratik giňeltmesi bolsa, onda islendik* $\xi \in \Delta_1$ *san* Δ *meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar.*

Subudy. Kwadratik giňeltmäniň kesgitlemesine görä, *(18.2 bölümçä seret)* $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1)$ bolýar, bu ýerde α_1 san $ax^2 + bx + c = 0$ $(a,b,c \in \Delta)$ deňlemäniň köki.

Bu deňlemäniň α_1,α_2 kökleri Δ meýdana degişli däl, ýöne $\alpha_2 \in \Delta(\alpha_1)$ boljakdygy aýdyň, sebäbi $\alpha_2 = -\dfrac{b}{a} - \alpha_1$, şonuň üçin $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1) = \Delta(\alpha_1,\alpha_2)$, ýagny Δ_1 meýdan $ax^2 + bx + c = 0$ deňlemäniň normal meýdanyny emele getirýär. Indi biziň seredýän tassyklamamyzyň 1-nji teoremanyň netijesi bolýandygy düşnükli boldy. ▶

Şeýlelikde, algebraik deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmek meselesini käbir T meýdanyň ähli sanlaryny onuň Δ bölek meýdanynyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňlatmak mümkinçiligine getirdik.

20.3. Kwadrat radikallarda aňladylýan sanlar

Δ meýdanyň sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylýan ξ sany, 20.1-nji bölümçedäki kesgitlemeden gelip çykyşy boýunça,

$$\xi = r\left(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \ldots, \sqrt{q_m}\right) \tag{4}$$

görnüşde aňlatmak bolar, bu ýerde $r(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ Δ meýdanda berlen rasional funksiýadyr, $q_1,q_2,\ldots,q_m$ bolsa, Δ meýdana degişli sanlaryň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylan sanlardyr.

1-nji mysal.

$$\xi = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4} \tag{5}$$

san $\boldsymbol{Q}$ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar. Ony

$$\xi = r\left(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}\right)$$

görnüşde aňladyp bolýar, bu ýerde $r = r(x_1,x_2) = \dfrac{-1 - x_1 + x_2}{4}$ görnüşde kesgitlenen $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen rasional funksiýa. Berlen mysalda $q_1 = 5, q_2 = 2\sqrt{5} - 10$. Bu sanlar hem öz gezeginde $\boldsymbol{Q}$ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar: $q_1 \in \boldsymbol{Q}$, $q_2 = r_1\left(\sqrt{q_1}\right)$, bu ýerde $r_1(x) = 2x - 10$ görnüşde bolýar.

Umumy ýagdaýda $\left(\sqrt{q_i}\right)$ aňlatmany birnäçe gezek yzly-yzyna kwadrat kök almak esasynda gurmak bolar. Biri-biriniň aşagynda durýan kwadrat radikallaryň sanyny berlen kök aňlatmanyň **tertibi** diýip atlandyralyň. Mysal üçin, $\sqrt{5}$ aňlatmanyň tertibi 1-e deň, $\sqrt{2\sqrt{5}-10}$ aňlatmanyň tertibi 2-ä deň, $\sqrt{a + b\sqrt{c + d\sqrt{c}}}$ aňlatmanyň tertibi 3-e deň.

ξ sanyň (4) ýazgysyndaky $\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \ldots, \sqrt{q_m}$ aňlatmalaryň tertipleriniň iň ulusyny p_ξ bilen belgiläliň. ξ sanyň (5) görnüşdäki ýazgysynda $p_\xi = 2$ bolar. ξ sana degişli p_ξ sanyň birbelgili kesgitlenmeýändigini belläliň. Ol ξ sanyň Δ meýdanyň elementleri arkaly kwadrat radikallarda aňladylyşynyň takyk usulyna bagly bolýar.

Meselem, $\xi = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3}$ sany $\xi = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 1$ görnüşinde hem aňlatmak bolar. Bu ýerde esasy meýdan $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlaryň meýdany bolýar. Birinji ýagdaýda $p_\xi{}' = 2$, ikinji ýagdaýda $p_\xi{}'' = 1$ bolar. Geljekde p_ξ -yň bahasyny ξ sanyň kwadrat radikallarda takyk alnan aňlatmasynyň bahasy hökmünde alarys. Eger $\xi \in \Delta$ bolsa, onda $p_\xi = 0$ diýip hasap ederis.

2-nji teorema. ξ sanyň Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylmagy üçin aşakdaky:

1) Δ_1 meýdan Δ meýdanyň kwadratik giňeltmesi;

2) Δ_{j+1} meýdan Δ_j meýdanyň kwadratik giňeltmesi $(j = 1,2,\ldots,k-1)$;

3) ξ san Δ_k meýdana degişli bolmaly diýen şertleri ýerine ýetirýän $\Delta_1, \Delta_2,\ldots,\Delta_k$ meýdanlaryň tükenikli yzygiderliginiň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremanyň subudyny okyjynyň özüne goýýarys, ol onuň subudyny, meselem, [17] kitabyň 392-393-nji sahypalaryndan görüp biler.

2-nji mysal. 1-nji mysaldaky $\xi = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}$ san üçin kwadrat giňeltmäni guralyň.

Bu giňeltmäni $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2$ yzygiderligiň kesgitleýändigi aýdyň, bu ýerde $\Delta = \boldsymbol{Q}$, $\Delta_1 = \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$, $\Delta_2 = \Delta_1(\sqrt{2\sqrt{5}-10})$. Δ_2 meýdanyň Δ_1 meýdanyň kwadratik giňeltmesi bolýandygyny belläliň, sebäbi Δ_2 giňeltmäni Δ_1 meýdana $\sqrt{2\sqrt{5}-10}$ sany çatmak arkaly alarys. Ol san Δ_1 meýdanda berlen $f(x) = x^2 - (2\sqrt{5} - 10)$ köpagzanyň köki bolýar.

3-nji mysal. $\xi = \sqrt{1+\sqrt{2}+5}$ sana degişli kwadratik giňeltmeleriň yzygiderligi

$$\Delta = \boldsymbol{Q}, \quad \Delta_1 = \boldsymbol{Q}(\sqrt{5}), \quad \Delta_2 = \Delta_1(\sqrt{2}), \quad \Delta_3 = \Delta_2(\sqrt{1+\sqrt{2}}),$$

$\Delta_4 = \Delta_3(\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{5}})$ meýdanlardan durýar.

20.4. Berlen sanyň kwadrat radikallarda aňladylmagynyň nyşany

Öňki bölümçede seredilen 2-nji teorema sany berlen Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňlatmagyň mümkindiginiň kriteriýasy bolýar. Bu kriteriýanyň kemçiligi, ony takyk alnan mysalda ulanmaklygyň kyn bolýanlygyndadyr. Ýöne, 2-nji teorema daýanyp, köp ýagdaýlarda, takyk berlen sanyň esasy meýdanyň sanlarynyň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylýandygy ýa-da aňladylmaýandygy baradaky soraga doly jogap bermäge mümkinçilik berýän tassyklamalary subut etmek bolar.

3-nji teorema. *Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylýan ähli sanlar bu meýdanda algebraikdyr.*

Subudy. 2-nji teorema laýyklykda, Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýan islendik ξ san kwadratik giňeltmeleriň $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k$ zynjyry arkaly alnan käbir Δ_k meýdana degişlidir.

19.2-nji bölümçedäki 2-nji teoremanyň 2-nji netijesine görä Δ_k meýdan Δ meýdanyň tükenikli giňeltmesi bolýar. Onda 19.3-nji bölümçäniň 3-nji teoremasyna görä ol Δ meýdanyň algebraik giňeltmesi hem bolýar. Ýagny Δ_k meýdanyň ähli elementleri Δ meýdana görä algebraik bolýar, hususy ýagdaýda ξ san hem Δ meýdana görä algebraikdir. ►

Goý, käbir ξ san berlen bolsun we onuň Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýandygyny kesgitlemek zerur bolsun. Eger ξ san transandent san bolsa, onda ony kwadrat radikallarda aňladyp bolmajakdygy düşnükli. Şonuň üçin hem, ξ sany Δ meýdana görä algebraik hasap ederis, ýagny ξ sany Δ meýdanda getirilmeýän

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{6}$$

köpagzanyň köki diýip hasap ederis.

4-nji teorema. (Köpagzanyň köküniň kwadrat radikallarda aňladylmak mümkinçiliginiň zerurlyk şerti). *Eger Δ meýdanda getirilmeýän* (6) *köpagzanyň ξ köki Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýan bolsa, onda $f(x)$ köpagzanyň derejesi 2^m görnüşdäki sandyr, bu ýerde m bitin otrisatel däl sandyr.*

Subudy. ξ sanyň Δ meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylýandygyna görä, 20.3-nji bölümçäniň 2-nji teoremasyna laýyklykda, Δ_k meýdan ξ sany özünde saklar ýaly kwadratik giňeltmeleriň $\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k$ yzygiderligi bardyr. $\xi \in \Delta_k$ bolany üçin Δ_k meýdan $\Delta(\xi)$ minimal meýdany hem özünde saklaýar. 19.2-nji bölümçäniň 1-nji teoremasyna laýyklykda, $\Delta(\xi)$ meýdan Δ meýdanyň derejesi n-e deň bolan tükenikli giňeltmesi bolýar. Δ_k meýdan bolsa Δ meýdanyň derejesi 2^k deň bolan tükenikli giňeltmesidir (bu 19.2-nji bölümçäniň 2-nji teoremasynyň 2-nji netijesinden gelip çykýar). $\Delta(\xi) \subseteq \Delta_k$ bolany üçin, 19.2-nji bölümçäniň 2-nji lemmasyna görä n san 2^k sanyň bölünijisi bolýar. Bu bolsa n sanyň 2^m görnüşli sandygyny aňladýar. ►

Netije. *Derejesi 2-niň derejeleri bolmaýan we Δ meýdanda getirilmeýän, $f(x)$ köpagzanyň köki bu meýdanyň sanlary arkaly kwadrat radikallarda aňladylmaýar.*

20.5. 3-nji we 4-nji derejeli deňlemeleriň kwadrat radikallarda çözülmegi

Köp gyzykly we wajyp meseleler 3-nji derejeli köpagzalaryň kökleriniň kwadrat radikallarda aňlatmak mümkinçiligi baradaky soraga seredilýär. Onuň üçin, 4-nji teorema esaslanyp, ýönekeý we ulanmaga amatly kriteriýalary almak bolar.

5-nji teorema. *Δ meýdanda berlen kub deňlemäniň ähli kökleriniň Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylmagy üçin, bu köpagzanyň Δ meýdanda getirilýän bolmagy* **zerur** *we* **ýeterlikdir.**

Subudy. Hakykatdan hem, eger $f(x)$ köpagza Δ meýdanda getirilmeýän bolsa, onda onuň derejesi 3-e deň bolany üçin, 4-nji teoremanyň netijesine görä onuň bir köküni-de kwadrat radikallarda aňladyp bolmaýar. Eger $f(x)$ köpagza Δ meýdanda getirilýän bolsa, onda iki ýagdaýyň bolmagy mümkin. Birinjiden – $f(x)$ köpagza koeffisiýentleri Δ meýdana degişli bolan üç sany çyzykly ikagzalaryň köpeltmek hasylyna dagar. Bu ýagdaýda onuň ähli kökleri Δ meýdana degişli bolar we şonuň üçin hem olary kwadrat radikallarda aňlatmak bolar. Ikinji ýagdaýda, $f(x)$ köpagza çyzykly ikagzanyň we Δ meýdanda getirilmeýän kwadrat üçagzanyň köpeltmek hasylyna dagar. Δ meýdana bu kwadrat üçagzanyň α köküni çatyp $\Delta(\alpha)$ kwadratik giňeltmä geçeris. Bu giňeltmede bolsa berlen kub deňlemäniň ähli köklerini tapmak bolar we netijede, berlen köpagzanyň ähli kökleri Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar. ▶

5-nji teoremany aşakdaky ýaly beýan etmek bolar:
Δ meýdanda berlen 3-nji derejeli

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

algebraik deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülmegi üçin, $f(x)$ köpagzanyň Δ meýdanda getirilýän bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Kub deňlemäniň ähli kökleri diýen şertiň bu köpagzanyň iň bolmanda bir köki üçin diýen şert bilen deňgüýçlidigini belläliň. Hakykatdan hem, 3-nji derejeli köpagzanyň bir köküni kwadrat radikallarda aňlatmak mümkinçiliginden *(4-nji teorema)* bu köpagzanyň getirilýänligi gelip çykýar, onuň getirilýänliginden bolsa *(5-nji teorema),* onuň ähli köklerini Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňlatmak mümkinçiligi gelip çykýar.

Mysal. $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen

$$\varphi(t) = t^3 + 16t - 32 \tag{7}$$

köpagza seredeliň. Bu köpagzanyň $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilýändigini ýa-da getirilmeýändigini barlamak üçin onuň rasional köki barmy ýa-da ýok diýen soraga jogap bereliň. (7) köpagza normirlenen we bitin koeffisiýentli bolany üçin onuň rasional köki bar bolsa, onda ony 32-niň bölüjileriniň arasyndan, ýagny ±1, ±2, ±4, ±8, ±16, ±32 sanlaryň arasyndan gözlemeli. Gönüden-göni geçirilen barlaglar bu sanlaryň hiç biriniň hem (7) köpagzanyň köki bolmaýandygyny görkezýär. Şonuň üçin hem, $\varphi(t)$ köpagza $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilmeýär, bu bolsa onuň hiç bir köküniň $\boldsymbol{Q}$ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylmaýandygyny görkezýär.

Belli bolşy ýaly *(15.2-nji bölümçä seret)*, 4-nji derejeli köpagzanyň köklerini tapmaklygy onuň kömekçi deňlemesi bolan kubiki rezolwentasynyň köklerini tapmaklyga getirilýär. *«4-nji derejeli algebraik deňlemäniň kwadrat radikallarda çözülmegi üçin, onuň kubiki rezolwentasynyň kwadrat radikallarda çözülmegi zerur we ýeterlik»* – diýen tassyklamany subut edip bolýar.

20.6. Kwadrat radikallarda çözülmeýän deňlemelere getirilýän meselelere mysallar

Kwadrat radikallarda çözülmeýän deňlemelere getirilýän wajyp we teswirleýji meselelere mysal edip, sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmak baradaky geometriýanyň klassik meselelerini almak bolar. Olaryň içinde has bellileri kubuň ikeldilmek, burçy deň üç bölege bölmek we tegelegiň kwadraturasy meseleleridir. Bu meseleler gaty ýönekeý kesgitlenilýär. Olary bu ýerde getireliň.

Kuby ikeltmek meselesi: *göwrümi berlen kubuň göwrüminden iki esse uly bolan kuby gurmak.*

Burçy deň üç bölege bölmek meselesi: *erkin alnan burçy deň üç bölege bölmek.*

Tegelegiň kwadraturasy meselesi: *meýdany berlen tegelegiň meýdanyna deň bolan kwadraty gurmak.*

6-njy teorema. $\Delta \subseteq R$ *giňeltmede* ξ *hakyky sanyň sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurulýan bolmagy üçin, onuň* Δ *meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylmagy zerur we ýeterlikdir.*

Subudy. *Ýeterlik şerti.* Eger teoremanyň şerti ýerine ýetse, onda ξ sanyň Δ meýdana degişli sanlar üstünde rasional amallary geçirmek we kwadrat kök almak arkaly alynmagy mümkin. Ýöne, gurmak mümkin bolan sanlaryň üstünde geçirilen rasional amallaryň netijesinde alnan sanlary hem gurmak bolar; $a > 0$ bolanda, gurulmagy mümkin bolan a sandan alynýan kwadrat köki hem gurmak bolar (sebabi $\sqrt{a}$ kesimiň uzynlygyny a we 1 sanlaryň orta geometrik bahasy hökmünde sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmak bolýar). Netijede, ξ sany hem sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmak bolar .

Zerurlyk şerti. Goý, indi ξ sany gurmak bolýandygy belli bolsun, ýagny nokatlaryň toplumyndan ξ koordinataly nokady gurmaga mümkinçilik berýän yzygiderlik bar bolsun. Sebäbi göni çyzyk çyzykly deňleme arkaly kesgitlenýär,bu bolsa çyzgyjy ulanmak bilen gurulýan sanyň Δ meýdana degişlidigini aňladýar. Sirkuly bir gezek ulanyp, Δ degişli sany ýa-da Δ meýdanyň kwadratik giňeltmesi bolan Δ_1 meýdana degişli sany gurarys. Ondan soňra edil şeýle edip, Δ_1 meýdanyň kwadratik giňeltmesi bolan Δ_2 meýdana degişli sany gurarys. Edil şuňa meňzeş usul bilen, her biri öň ýanyndaky meýdanyň kwadratik giňeltmesi bolan $\Delta_3, \Delta_4, ..., \Delta_j, \ldots$ meýdanlara degişli sanlary gurarys. Gurmak yzygiderligi tükenikli bolany üçin, käbir ädimden soň ξ sany saklaýan Δ_k meýdana geleris.

Şeýlelikde, $\xi \in \Delta_k$ bolan kwadratik giňeltmeleriň

$$\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Delta_k$$

zynjyryny aldyk. Onda 20.3-nji bolümçäniň 2-nji teoremasyna göra ξ san Δ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylýar. ►

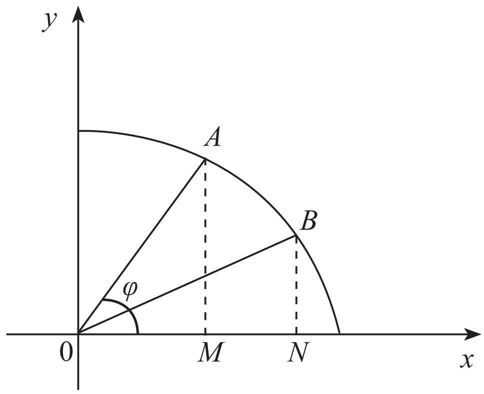
Indi ýokardaky agzalan gurmaga degişli meselelere seredeliň.

Kuby ikeltmek meselesi. Eger a san berlen kubuň gapyrgasynyň uzynlygy, x bolsa göwrümi berlen kubuň göwrüminden iki esse uly bolan kubuň gapyrgasynyň uzynlygy bolsa, onda $x^3 = 2a^3$ deňlik ýerine ýeter. Eger ýönekeýlik üçin $a = 1$ diýsek, onda $x = \sqrt[3]{2}$ bolar. Şeýlelikde, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň sanlaryndan peýdalanyp, $\sqrt[3]{2}$ sany gurmaly (bize diňe birlik kesim,ýagny 0 we 1 sanlar berlen).

Ýöne, $\sqrt[3]{2}$ san $\boldsymbol{Q}$ meýdanda berlen $f(x) = x^3 - 2$ köpagzanyň köki. $f(x)$ köpagzanyň ýekeje-de rasional kökünïň ýokdugyny barlamak kyn däl, şoňa göra-de ol $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär. Şeýlelikde, gürrüň $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynda getirilmeýän köpagzanyň köküni gurmaklyk hakda barýar. 20.4-nji bölümçäniň 4-nji teoremasynyň netijesine göra beýle kökler $\boldsymbol{Q}$ meýdana degişli sanlar arkaly kwadrat radikallarda aňladylmaýar we şonuň üçin hem, $\sqrt[3]{2}$ sany $\boldsymbol{Q}$ meýdandan ugur alyp sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurup bolmaýar.

Netijede, kuby ikeltmek meselesini çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen gurup bolmaýandygyny görkezdik.

Burçy deň üç bölege bölmek meselesi. Goý, $\varphi = \angle AON$ berlen burç bolsun. Merkezi berlen burçuň O depesinde ýatýan birlik radiusly töweregi geçireliň we koordinata sistemasyny koordinata başlangyjy berlen burçuň depesi bilen, abssissasyny bolsa, berlen burçuň bir tarapy bilen gabat geler ýaly edip guralyň. A nokady kesgitläp bolýanlygy üçin, $OM = \cos\varphi$ kesimi hem φ burç bilen bilelikde berlen diýip hasap etmek bolar. Eger biz B nokady ýa-da $ON = \cos\dfrac{\varphi}{3}$ kesimi gurup bilsek, onda berlen mesele çözülen hasap ederis. Şeýlelikde,



1-nji surat

bu meselede biziň gözleýän meýdanymyz 1 we $\cos\varphi = a$ sanlary özünde saklaýan minimal meýdan, eger a rasional san bolsa, onda $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdany ýa-da $\boldsymbol{Q}(a)$ meýdan (eger a – irrasional san bolsa) bolýar. Bu meýdanlardan ugur alyp bize $x_0 = \cos\frac{\varphi}{3}$ sany gurmak zerur bolýar. $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$ deňlik dogry bolany üçin, $a = 4x_0^3 - 3x_0$ deňligi, ýagny köki x_0 sana deň bolan Δ meýdanda berlen

$$f(x) = 4x^3 - 3x - a \tag{8}$$

köpagzany alarys.

20.5-nji bölümçäniň 5-nji teoremasyna görä, burçy deň üç bölege bölmek meselesi diňe (8) köpagza Δ meýdanda getirilýän bolanda çözüwe eýedir. Bu ýerden, berlen burçy deň üç bölege sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen bölmek meselesiniň $a = \cos\varphi$ parametre baglydygy gelip çykýar. $f(x) = 4x^3 - 3x - a$ köpagza Δ meýdanda getirilmeýän köpagza bolar ýaly φ burçuň, ýagny $a = \cos\varphi$ parametriň birnäçe mysallaryny, şeýle-de, $f(x)$ kopagza Δ meýdanda getiriler ýaly, φ burçuň mysallaryny getirmek bolar. Bu bolsa φ-iň kabir bahalarynda ony sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen deň üç bölege bölmekligiň mümkindigini aňladýar .

1-nji mysal. $\varphi = 60°$ bolanda, $a = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\Delta = \boldsymbol{Q}$, $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ bolar. Bu kopagza Q rasional sanlar meýdanynda getirilmeýär, sebäbi onuň rasional köki ýok, ony barlamak kyn däl. Netijede, bu ýagdaýda berlen burçy sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen deň üç bölege bölmek mümkin däl eken.

2-nji mysal. $\varphi = 90°$ bolanda, $a = \cos 90° = 0$, $\Delta = \boldsymbol{Q}$, $f(x) = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3)$, ýagny $f(x)$ kopagza $\boldsymbol{Q}$ meýdanda getirilýär. Netijede, $\varphi = 90°$ bolanda burçy çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen deň üç bölege bölmek mümkin. Bu gurallaryň kömegi bilen 30° burçy okyjynyň özüniň gurup biljekdigi ikuçsuzdyr.

3-nji mysal. $\varphi = 45°$ bolanda, $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Delta = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolar. Bu kopagza $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ köke eýe, şonuň üçin hem ol $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ meýdanda getirilýär. Şeýlelikde,

$\varphi = 45°$ burçy çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen deň üç bölege bölmek bolýar.

Görşümiz ýaly, islendik φ üçin $\frac{\varphi}{3}$ burçy gurmak mümkin däl eken, bu bolsa erkin alnan burçy sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen deň üç bölege bölmek meselesiniň umumy ýagdaýda çözüwe eýe däldigini aňladýar.

Tegelegiň kwadraturasy meselesi. Bu mesele beýleki nusgawy meselelere garanyňda has belli we kyn hasaplanýar. Eger berlen tegelegiň radiusyny bire deň diýip hasap etsek, onda onuň meýdany π sana deň bolar. Netijede, eger birlik kesim berlen bolsa, onda tegelegiň kwadraturasy meselesini tarapy $\sqrt{\pi}$ sana deň bolan kwadraty gurmak meselesine syrykdyrylýar. Başga sözler bilen aýdanda, töweregiň kwadraturasy meselesini çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen gurmak meselesini, $\boldsymbol{Q}$ rasional sanlar meýdanynyň sanlary arkaly $\sqrt{\pi}$ sany sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmak meselesine getirdik. $\sqrt{\pi}$ sany gurmak π sany gurmak bilen deňgüýçli bolany üçin, ähli derňewleri π san üçin geçireris.

Biziň bilşimiz ýaly, π san $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä transendent san, ýagny ol hiç bir rasional koeffisiýentli algebraik deňlemäniň köki bolup bilmez. Bu bolsa, 20.4-nji bölümçäniň 3-nji teoremasyna laýyklykda, π sanyň rasional sanlaryň üsti bilen kwadrat radikallarda aňladylmaýandygyny görkezýär. Şonuň üçin hem, ol $\boldsymbol{Q}$ meýdana görä çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen gurulmaýar, ýagny tegelegiň kwadraturasy meselesi, diňe çyzgyjy we sirkuly ulanmak esasynda çözülmeýär.

Kitapda peýdalanylan belgiler:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & .... & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{pmatrix}$ - n-nji derejeli ornunagoýma;

$< a >$ - a elementiň döredýän aýlawly topary, ol a elementiň derejelerinden durýar;

$MN = \{ab | a \in M, b \in N\}$ - köplükleriň köpeltmek hasyly;

$M \times N = \{(a;b) | a_2 \in M, b \in N\}$ - köplükleriň göni köpeltmek hasyly;

$G = H \dotplus g_1 H \dotplus g_2 H \dotplus \ldots \dotplus g_{s-1} H$ - G toparyň H bölek topar boýunça çep ýanaşyk klaslara dagadylyşy;

$G = H \dotplus Hg_1 \dotplus Hg_2 \dotplus \ldots \dotplus Hg_{s-1}$ - G toparyň H bölek topar boýunça sag ýanaşyk klaslara dagadylyşy;

$[G;H]$ - ýanaşyk klaslaryň sany;

$H \trianglelefteq G$ - G toparyň H normal bölüjisi;

$G_n(\boldsymbol{R})$ - $\boldsymbol{R}$ hakyky sanlar meýdanynda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň köplügi;

S_n - n-nji derejeli ornunagoýmalaryň köplügi, simmetrik topar;

A_n - n-nji derejeli jübüt ornunagoýmalaryň köplügi, alamaty üýtgediji topar;

G/H - faktor köplük, H normal bölüji boýunça alnan ýanaşyk klaslaryň emele getirýän faktor-topary;

$Ker\varphi$ - φ gomomorfizminiň ýadrosy;

$M_n(\boldsymbol{Q})$, $M_n(\boldsymbol{R})$, $M_n(\boldsymbol{C})$ - degişlilikde, $\boldsymbol{Q,R,C}$ meýdanlarda berlen n-nji tertipli kwadrat matrisalaryň halkasy;

$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix}$ (bu ýerde a_i, $a \in P$) - degişlilikde, P san meýdanynda berlen diagonal, skalýar matrisa;

(a) - K halkanyň a elementiniň döredýän idealy;

$R[x]$ - R bütewülik ýaýlasynda berlen x üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy;

$P[x]$ - P meýdanda berlen x üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy;

$degf$ - $R[x]$ halka degişli $f(x)$ köpagzanyň derejesi;

$N^0 = N \cup \{0\}$ - otrisatel däl bitin sanlaryň köplügi;

(f,g) - $f(x)$, $g(x) \in R[x]$ köpagzalaryň iň uly bölüjisi;

$[f,g]$ - $f(x)$, $g(x) \in R[x]$ köpagzalaryň iň kiçi umumy kratnysy;

17. sargyt № 749

$P(x)$ - P meýdanda berlen bir üýtgeýänli köpagzalaryň emele getirýän paýlar meýdany;

$R[x_1, x_2, \ldots, x_n] = R[x_1 : x_n]$ - R bütewülik ýaýlasynda berlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ üýtgeýänli köpagzalaryň halkasy;

$R(f, g)$ - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n), g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ köpagzalaryň rezultanty;

$D(f)$ - $f(x) \in R[x]$ köpagzanyň diskriminanty;

$P\{M\}$ - M san köplügini özünde saklaýan minimal meýdan;

$(T : \Delta)$ - Δ meýdanyň T tükenikli giňeltmesiniň derejesi, Δ meýdana görä T giňişligiň ölçegi.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat. TDNG, 2007.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat. TDNG, 2007.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I – VII tomlar. Aşgabat. TDNG, 2008 – 2014.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat.TDNG, 2007.

5. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Älem içre at gezer. Aşgabat. TDNG, 2011.

6. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Döwlet adam üçindir! Aşgabat. TDNG, 2011.

7. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň dermanlyk ösümlikleri. I-III tomlar. Aşgabat. TDNG, 2009-2012.

8. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Döwlet guşy. Aşgabat. TDNG, 2014.

9. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Bilim – bagtyýarlyk, ruhubelentlik, rowaçlyk. Aşgabat. TDNG, 2014.

10. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ile döwlet geler bolsa.... Aşgabat. TDNG, 2015.

11. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmen medeniýeti. Aşgabat. TDNG, 2015.

12. *Italmazow H.* Algebra we sanlar teoriýasy. I kitap. Aşgabat. TDNG, 2015.

13. *Italmazow H.* Tablisanyň kömegi bilen köpçleni köpçlene bölmek we köpeltmek. Aşgabat. Türkmenistanda ylym we tehnika. №2, 2002.

14. *Italmazow H.* Tablisanyň kömegi bilen köpçlenleriň iň uly umumy bölüjisini tapmak. Aşgabat. Türkmenistanda ylym we tehnika. №10, 2002.

15. *Italmazow H*. Algebraik deňlemeler ulgamy. Aşgabat. Türkmenistanda ylym we tehnika. №6, 2004.

16. *Бахтурин Ю.А.* Основные структуры современной алгебры. Москва. «Наука»,1990.

17. *Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И.* Алгебра и теория чисел. Часть 2. Киев. Высшая школа. Главное издательство, 1980.

18. *Валуце И.И.* Основы теории универсальных алгебр. Кишинев. Издательство Кишиневского политехнического института, 1982.

19. *Вандер Вардер Б.Л.* Алгебра. Москва. «Наука», 1965.

20. *Дрозд Ю.А., Кириченко В.В.* Высшая алгебра. Часть 1. Киев. Издательство Киевского университета,1971.

21. *Дрозд Ю.А., Кириченко В.В.* Высшая алгебра. Часть 2. Киев. Издательство Киевского университета, 1973.

22. *Калужин Л.А.* Введение в общую алгебру. Москва. Наука, 1973.
23. *Кострикин А.Н.* Введение в алгебру. Москва. «Наука», 1977.
24. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. Москва. «Наука», 1977.
25. *Фадеев Д.К., Соминский Н.С.* Сборник задач по высшей алгебре. Москва. «Наука», 1977.
26. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. Москва. Наука, 1978.

MAZMUNY

III bölüm

Köp üýtgeýänli köpagzalar

IV bölüm

San meýdanynda berlen köpagzalar

V bölüm

San meýdanlarynyň algebraik giňeltmesi

Hemra Italmazow

ALGEBRA WE SANLAR
TEORIÝASY

II kitap

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*A. Aşyrowa*
Surat redaktory	*O. Çerkezowa*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Korrektor	*A. Kiçiýewa*
Kompýuter bezegi	*M. Mullikowa*
	B. Mämmetgurbanow
Neşir üçin jogapkär	*S. Meretow*

Çap etmäge rugsat edildi 10.01.2018. Ölçegi $70x100^{1}/_{16}$.
Şertli çap listi 21,29. Çap listi 16,5.
Hasap-neşir listi 18,02. Şertli çap ottiski 44,76.
Sargyt № 749. Sany 600.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat. Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat. 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.