G. Şükürow, T. Kerimow, S. Çopanowa

OPTIMALLAŞDYRMA USULLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2020

UOK 378:517
Ş 83

Şükürow G. we başg.
Ş 83 **Optimallaşdyrma usullary.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2020.

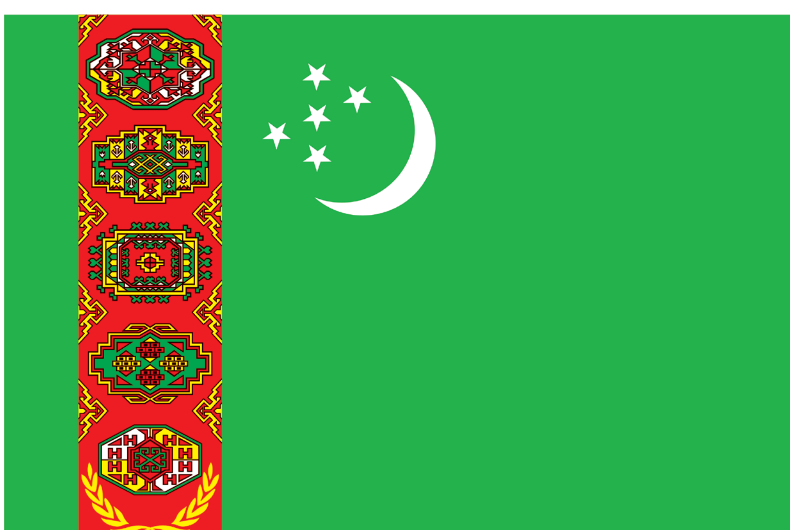
Okuw kitabynda optimallaşdyrma usullary boýunça belli bolan usullaryň birnäçesi öz beýanyny tapdy. Ol usullar iň oňaýly (optimal) çözgüdi talap edýän, durmuşda duş gelýän dürli meselelerden baş alyp çykmaga ýardam berer.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň ykdysadyýet ugry boýunça bilim alýan talyplaryna optimallaşdyrma usullary dersiniň esaslaryny öwretmeklige niýetlenilen hem bolsa, ondan bu ugurda gyzyklanýan islendik okyjy-da peýdalanyp biler.

TDKP № 209, 2020 KBK 22.16 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

Ýurdumyzyň sanly ykdysadyýete geçýän häzirki döwründe geljekki ykdysatçy hünärmenleriň köpdürli ýagdaýlardan dogry we iň gowy ýoly saýlap, baş alyp çykmagyny gazanmak üçin olaryň dürli ykdysady-matematiki modellerini, optimallaşdyrma usullaryny doly ele almaklary zerurdyr.

Häzirki zaman ykdysady nazaryýet matematiki usullary we modelleri zerur serişde hökmünde özünde jemleýär. Matematiki usullaryň we modelleriň ykdysadyýetde ulanylmagy ykdysady görkezijileriň we desgalaryň arasyndaky düýpli arabaglanyşyklary ýüze çykarmakda we formal taýdan ýazyp beýan etmekde, induktiw ýol bilen öwrenilýän ykdysady desga barada täze bilimleri ele almakda, onuň näbelli parametrleriniň baglylygynyň görnüşini we parametrlerini bahalandyrmakda zerur bolup durýar. Galyberse-de, matematiki diliň peýdalanylmagy ykdysady nazaryýetiň düzgünlerini takyk we jebis beýan etmäge ýardam edýär.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň yglan eden Berkarar döwletimiziň bagtyýarlyk döwründe geljekki ykdysadyýetçi hünärmenlerden düýpli ykdysadyýet biliminiň hili boýunça talaplaryň ýokarlanmagy olara berilýän düýpli matematiki bilimiň ornuny ýokarlandyryp, matematiki taýýarlygyň ýokary derejede bolmagyny talap edýär [1, 2, 3]. Düýpli matematiki bilimi ele almak adamda logiki oýlanma, takyk bolmak, çylşyrymly hadysalaryň esasy baglanyşyklaryndan baş alyp çykmak, her bir meselä çuňňur düşünmek we iň gowy (optimal) çözgüdi çalt kabul etmek ukybyny terbiýeleýär.

Matematiki usullara ykdysadyýet ylmyny esaslandyrmakda ilkinji orunlar degişlidir. Matematiki ussullaryň ykdysady nazaryýet bilen bilelikde ulanylmagy ykdysady ylymlaryň we olaryň iş ýüzünde ulanylmagynyň täze mümkinçiliklerini açýar.

Optimallaşdyrma usullary boýunça bilim bermegiň maksady ony özleşdirýänlere:

– ykdysady nazaryýetiň düzgünlerini takyk beýan etmäge;

– iň esasy ykdysady görkezijileriň, üýtgeýän ululyklaryň arasyndaky baglanyşyklary anyklamaga we formal beýan etmäge;

– gelip çykan şol baglanyşyklardan matematiki optimallaşdyrma usullaryň kömegi bilen dogry (optimal) ýoly saýlap almaga;

– matematiki we statistiki usullardan peýdalanyp, seljerilýän desga barada täze maglumatlary almaga mümkinçilik döretmekden ybaratdyr.

Okuw kitaby ýokary okuw mekdeplerinde ykdysady hünärler boýunça ýokary bilimli hünärmenleri taýýarlamagyň meýilnamasyna laýyklykda «Optimallaşdyrma usullary» dersi boýunça berilmeli bilimleriň özenini öz içine alýar.

Okuw kitabynyň esasy aýratynlygy, onuň I bölüminde optimallaşdyrma usullaryna giňişleýin syn berilmegidir.

I bölüm

OPTIMALLAŞDYRMA USULLARYNA SYN

Optimallaşdyrma usullary matematikanyň durmuşda duş gelýän dürli ekstremal meseleleriň matematiki modelleriniň optimal çözüwini gurmagyň usullary bilen meşgullanýan bölümidir. Ekstremal meseleleriň teswirlenilişine we onda çykyş edýän funksiýalaryň görnüşine we häsiýetlerine baglylykda olary çözmegiň usullarynyň dürli görnüşleri işlenilip düzülendir. Olaryň matematiki modellerini düzmek gönüden-göni matematikanyň optimallaşdyrma usullary bölümine degişli bolmasa hem, bu okuw kitabynda olaryň käbirine garalyp geçiler. Sebäbi, meseläniň matematiki modeliniň görnüşi onuň optimal çözüwini tapmagyň usulyny kesgitleýär.

Köp ýagdaýlarda obýektiň matematiki modeli käbir optimal bahasyny tapmak gerek bolýan, maksady görkezýän $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ funksiýanyň kömegi bilen berilýär. Ýagny, käbir $\bar{x}=(x_1, x_2,\dots, x_n)\in G$ mümkin bolan ýagdaýlaryň oblastynda $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ funksiýanyň optimal (iň uly, iň kiçi, minimum ýa-da maksimum) bahasyny tapmaly. Başgaça aýdylanda, optimallaşdyrma meseleleri:

$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max_{\bar{x}\in G} (\min_{\bar{x}\in G}), \tag{1}$$

ýa-da

$f(\bar{x})\to\max(\min)$, $\bar{x}\in G$ görnüşinde berilýär.

Ýolbererli çözüwleriň G oblasty çyzykly ýa-da çyzykly däl çäklendirmeler ulgamynyň kömegi bilen kesgitlenýär:

$$G = \left\{x\colon\ g_j(\bar{x}) \le g_j^0;\ j = 1, 2, \dots, m\right\}. \tag{2}$$

Ykdysady meselelerde modeliň üýtgeýänleriniň ýolbererli çözüwleriniň G oblastynyň mümkin bolan bahalaryna edilýän çäklendirmeler, umuman, bardyr. Bu ykdysady harajatlaryň çäklidigi sebäplidir. Ýöne, çäklendirmeleriň ýok bolan ekstremal meselelerine hem duş gelinýär. Bu ýagdaýa çäklendirilmedik mukdarly harajatly meselelerde duş gelinýär. Şeýle şertsiz meseleler aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$f(\bar{x}) \to \max_{\bar{x}}(\min).$$

Meseleleriň çylşyrymlylygy esasy kriterini, ýagny maksady görkezýän $f(\bar{x})$ funksiýanyň (mundan beýläk **maksat funksiýasynyň**) we ýolbererli çözüwleriň oblastyny kesgitleýän $g_j(\bar{x})$ funksiýalaryň görnüşlerine baglydyr. Funksiýalar çyzykly, çyzykly däl, üznüksiz, diskret bahalary alýan funksiýalar bolup bilerler. Ýolbererli çözüwleriň oblasty güberçek, güberçek däl, bagly, bagly däl, diskret köplükler bolup bilerler. Bulara baglylykda meseleler bir ekstremally ýa-da köp ekstremally bolup, dürli usullar boýunça çözülip bilnerler.

Meselem, eger $f(\bar{x})$ we $g_j(\bar{x})$ funksiýalar öz argumentlerine görä çyzykly bagly bolsalar, onda degişli meselelere **çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleri** diýilýär. Bu ýagdaýda olary çözmek üçin çyzykly programmalaşdyrmanyň ýörite usullary ulanylýar.

Eger $f(\bar{x})$ we $g_j(\bar{x})$ funksiýalar çyzykly däl bolsalar, onda degişli meseleleri çözmek üçin **çyzykly däl programmalaşdyrmanyň usullary** ulanylýar. Eger bu ýagdaýda güberçek $f(\bar{x})$ funksiýanyň güberçek köplükdäki ($g_i(\bar{x})$ funksiýalar hem güberçek) iň kiçi bahasy (minimum bahasy) gözlenýän bolsa, onda biz **güberçek çyzykly däl progammalaşdyrmanyň meselesi** bilen iş salyşmaly bolarys. Bu ýagdaýda degişli meselä **bir ekstremally mesele** hem diýilýär.

Eger $g_j(\bar{x})$ çyzykly we minimumy gözlenýän $f(\bar{x})$ funksiýa güberçek kwadratik bolsa, onda **kwadratik programmalaşdyrmanyň algoritmleri we usullary** ulanylýar.

Güberçek oblastda güberçek däl funksiýa minimallaşdyrylanda **köp ekstremally mesele** bilen we netijede, **global ekstremumy gözlemek** bilen iş salyşmaly bolýar.

Eger meselä girýän üýtgeýän ululyklara bitin bahalylyk ýa-da diskretlilik talaby ýüklenen bolsa, onda meseleleri çözmeklige, degişlilikde **bitin sanly programmalaşdyrmanyň ýa-da diskret programmalaşdyrmanyň usullary** ulanylýar.

Eger çäklendirmeler ulgamy ýok bolup, $f(\bar{x})$ funksiýa çyzykly däl bolsa, onda (3) meseläni çözmek, ýagny bu funksiýanyň ekstremumyny tapmak üçin matematiki seljermäniň dürli usullary we algoritmleri ulanylýar. Meselede $f(\bar{x})$ funksiýa barada bar bolan maglumatlara görä, bu algoritmlerde gözlegiň göni, birinji we ikinji tertipli usullary ulanylýar.

Gözlegiň göni usullary ýa-da gözlegiň nolunjy tertipli usullary diýlip at berlen usullarda ekstremumyň gözleginde diňe funksiýanyň özi hakdaky maglumatlar ulanylyp, onuň önümleri hakdaky maglumatlar ulanylmaýar.

Gözlegiň birinji tertipli usullarynda ekstremumyň gözleginde funksiýanyň özi hakyndaky maglumatlar bilen birlikde onuň birinji önümi hakdaky maglumatlar hem ulanylýar. Bu usullara dürli gradiýent usullar degişlidir.

Gözlegiň ikinji tertipli usullarynda ekstremumyň gözleginde funksiýanyň özi hakyndaky maglumatlar bilen birlikde onuň birinji we ikinji tertipli önümleri hakdaky maglumatlar hem ulanylýar. Bu usullara Nýutonyň usuly we onuň dürli görnüşleri (modifikasiýalary) degişlidir.

§ 1.1. Birölçegli gözleg usullary

Adatça, ykdysady meseleler çözülende köpölçegli meseleleri çözmek bilen iş salşylýar. Olary çözmek üçin köpölçegli usullar diýlip atlandyrylýan usullar ulanylýar. Ýöne, olary çözmegiň dürli döwürlerinde ýa-da şeýle meseleleriň çözülişi seljerilende käbir wektoryň ugry boýunça birölçegli minimallaşdyrma meseleleri bilen iş salyşmaly bolýar. Bulara kesimde funksiýanyň ekstremumlaryny gözlemegiň meseleleri degişlidir.

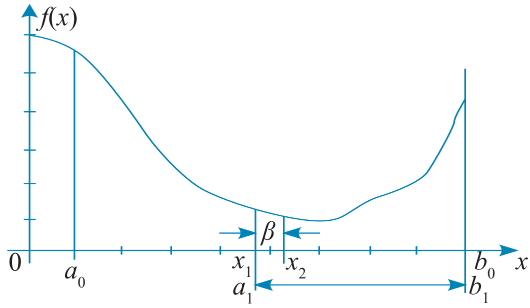
Kesimde funksiýanyň ekstremumlaryny gözlemegiň köpsanly usullary işlenip düzülendir. Olaryň has bellileri hökmünde dihotomiýa (kesimi deň ýarpa bölmek usuly), altyn kesikler we Fibonaççiniň usullaryny bellemek bolar. Olara aýry-aýrylykda seredip geçeliň.

1.1.1. Dihotomiýa usuly

Goý, minimumy gözlenýän $f(x)$ funksiýa $[a_0, b_0]$ kesimde unimodal bolsun we onuň bu kesimdäki minimumyny käbir ε takyklyk bilen tapmak gerek bolsun. Kesimde diňe bir ekstremumy bolan üznüksiz funksiýa **unimodal funksiýa** diýilýär. Aşakdaky görnüşde iki sany nokady alalyň:

$$x_1 = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2} \text{ we } x_2 = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2}.$$

Bu ýerde $\delta<\varepsilon$. Bu nokatlarda funksiýanyň $f(x_1)$ we $f(x_2)$ bahalaryny hasaplalyň (*1.1-nji surat*).



1.1-nji surat

Soňra kesgitsizlik aralygyny aşakdaky ýaly kiçeldýäris. Eger $f(x_1)<f(x_2)$ bolsa, onda $a_1=a_0$ we $b_1=x_2$ bilen belgiläp, garşylykly ýagdaýda bolsa $a_1=x_1$ we $b_1=b_0$ bilen belgiläp, täze kiçi $[a_1, b_1]$ kesimi alalyň.

Indiki ädimde, edil ýokardaky ýaly x_1 we x_2 nokatlaryň jübütini hasaplaýarys. Bu nokatlaryň üsti bilen täze kesgitsizlik aralygyny alýarys.

Gözleg nobatdaky k-njy tapgyrda kesgitlenen $[a_k, b_k]$ kesgitsizlik aralygynyň uzynlygy berlen takyklykdan kiçi, ýagny

$$|b_k-a_k| < \varepsilon$$

bolanda togtadylýar.

Beýan edilen usulda her ädimde minimallaşdyrylýan $f(x)$ funksiýanyň bahasy iki gezek hasaplanylýar, kesgitsizlik aralygynyň uzynlygy bolsa iki essä golaý ($\delta<\varepsilon$ bolanda) kiçelýär.

1.1.2. Altyn kesikler usuly

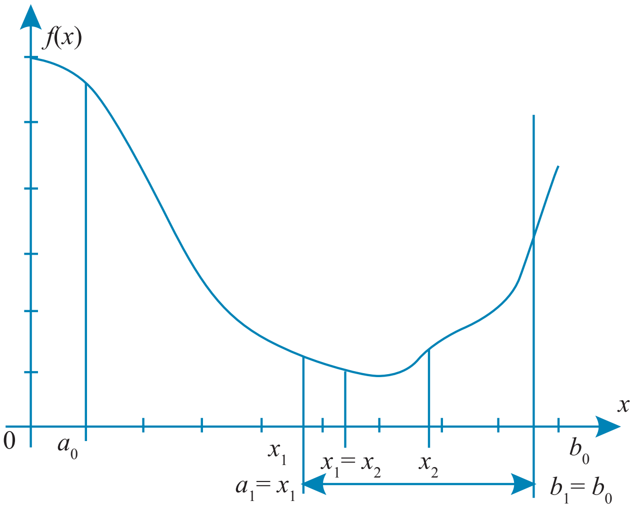
Bu usul berlen $[a_0, b_0]$ kesimde $f(x)$ funksiýanyň gözlenýän minimumyny dihotomiýa usulyna görä has az hasaplamalaryň kömegi bilen tapmaga mümkinçilik berýär.

Birinji ädimde iki nokady aşakdaky formulalaryň kömegi bilen tapýarys:

$$x_1 = a_0 + \frac{(3-\sqrt{5})}{2}(b_0 - a_0) = a_0 + 0,381966011(b_0 - a_0),$$

$$x_2 = b_0 + \frac{(\sqrt{5}-3)}{2}(b_0 - a_0) = b_0 - 0,381966011(b_0 - a_0) =$$
$$= a_0 + 0,6180033989(b_0 - a_0).$$

Soňra $f(x)$ funksiýanyň bu nokatlardaky $f(x_1)$ we $f(x_2)$ bahalaryny hasaplaýarys (*1.2-nji surat*).



1.2-nji surat

Indi kesgitsizlik aralygyny kiçeldýäris.

1) Eger $f(x_1) < f(x_2)$ bolsa $a_1 = a_0$ we $b_1 = x_2$, $x_1 = x_2$.

2) Garşylykly ýagdaýda, ýagny $f(x_1) > f(x_2)$ bolanda $a_1 = x_1$ we $b_1 = b_0$, $x_2 = x_1$ bilen belgiläp, täze kiçi $[a_1, b_1]$ kesimi alarys.

Indiki ädimlerde diňe *f(x)* funksiýanyň bahasynyň täzelenmeli nokady tapylýar: 1) ýagdaýda x_1 bilen $f(x_1)$ hasaplanýar; 2) ýagdaýda x_2 bilen $f(x_2)$ hasaplanylýar.

Gözleg nobatdaky *k*-njy tapgyrda kesgitlenen $[a_k, b_k]$ kesgitsizlik aralygynyň uzynlygy berlen takyklykdan kiçi, ýagny

$$|b_k - a_k| < \varepsilon$$

bolanda togtadylýar.

i-nji tapgyrda kesgitlenen $[a_i, b_i]$ kesgitsizlik aralygynyň uzynlygy $0{,}6180033989 \cdot (b_{i-1} - a_{i-1})$ ululyga çenli kiçelýär. Bu ondan öňki kesimiň uzynlygyndan iki esseden azyrak kiçidir, ýöne ony tapmak üçin $f(x)$ funksiýanyň bahasy bir gezek hasaplanylýar.

1.1.3. Fibonaççiniň usuly

Fibonaççiniň sanlary diýilýän yzygiderligiň agzalary

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

gatnaşyga tabyndyr. Bu ýerde n=1, 2, 3, … we $F_1=F_2$. Onuň ilkinji agzalary: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

Matematiki induksiýa usulynyň kömegi bilen Fibonaççiniň sanlarynyň yzygiderliginiň n-nji agzasynyň

$$F_n = \frac{\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n}{\sqrt{5}}, \ (n=1, 2, 3, ...)$$

formula bilen (Bineniň formulasy) hasaplanýandygyny görkezip bolar.

Bu formuladan, n-iň uly bahalarynda

$$F_n \approx \frac{\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n}{\sqrt{5}}$$

takmyny deňligiň ýerine ýetýändigi görünýär. Soňky gatnaşykdan n-iň artmagy bilen Fibonaççiniň sanlarynyň çalt artýandygy görünýär.

Fibonaççiniň usulynyň algoritmi altyn kesikler usulynyň algoritmine meňzeşdir. Başlangyç aralykda nokatlar aşaky formulalar bilen hasaplanylýar:

$$x_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0), \quad x_2 = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) = a_0 + b_0 - x_1 .$$

Kesgitsizlik aralygy edil altyn kesikler usulyndaky ýaly gysgalýar (*1.2-nji surat ser.*). Täze ädimde bolsa diňe bir nokat we bu nokatdaky funksiýanyň bahasy hasaplanylýar.

k-njy ädimde (iterasiýada) minimal bahaly nokat alnyp, ol aşakdaky formulalar boýunça hasaplanýan nokatlaryň biri bilen gabat gelýär:

$$x_1^{'} = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+3}}(b_k - a_k) = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

$$x_2^{'} = a_k + F_{(n-k+2)} / F_{(n-k+3)}(b_k - a_k) = a_k + F_{(n-k+2)} / F_{(n+2)}(b_0 - a_0).$$

Bu sanlar $[a_k, b_k]$ kesimde onuň ortasyna simmetrik ýerleşendirler. $k=n$ bolanda

$$x_1^{'} = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0) \quad \text{we} \quad x_2^{'} = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

sanlar gabat gelýärler we $[a_n, b_n]$ kesimi ýarpa bölýärler. Diýmek,

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon$$

bolar. Bu ýerden n-i $\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}$ şertden saýlap boljakdygy görünýär.

Şeýlelik bilen bu şert algoritm boýunça hasaplamagy başlamazdan ozal berlen $[a_0, b_0]$ kesimde, minimum bahanyň berlen ε takyklygy boýunça ädimleriň (iterasiýalaryň) sanyny kesgitlemäge ýardam berýär.

$\frac{F_n}{F_{n+2}}$ aňlatmanyň tükeniksiz onluk drobdugy sebäpli, n-iň artmagy bilen bu usulda «gyşarmanyň» ýüze çykyp, minimum nokatly aralygyň ýitmegi, ýagny nokada öwrülmegi mümkin.

Şeýle-de, altyn kesikler usulynyň hem netijelilik, ýygnanma tizligi we alynýan çözüwiň takyklygy boýunça Fibonaççiniň usulyndan pes däldigini bellemek zerurdyr. Altyn kesikler usulynyň algoritmik taýdan amal edilişi has hem ýönekeýdir.

Köpölçegli algoritmler işlenip düzülende we ýerine ýetirilende diňe ýokarda beýan edilen usullar ulanylman, eýsem dürli ewristik algoritmler, meselem, minimumy gözlenýän funksiýanyň interpolýasiýasy (approksimasiýasy) hem ulanylýar.

§ 1.2. Gözlegiň göni usullary

Göni we nolunjy tertipli usullar maksat funksiýasyny anyk görnüşde bilmegi talap etmeýär. Bu usullar maksat funksiýasynyň üznüksizligini we önümleriniň bolmagyny hem talap etmeýär. Bu ýagdaý ykdysady meseleleriň çözülýän halatynda uly artykmaçlyklaryň biri bolup hyzmat edýär.

Göni usullar işlenip düzülende meseläni çözmegiň taýýarlyk döwri has gysgadyr. Sebäbi bu usullarda funksiýanyň birinji we ikinji önümlerini tapmak zerurlygy ýokdur. Göni usullara netijeliligi bilen tapawutlanýan dürli algoritmler degişlidir. Olar, esasan, ewristik häsiýetli algoritmlerdir.

Göni usullar, esasan, optimallaşdyrmagyň şertsiz meselelerini, ýagny:

$$\min_{\bar{x} \in E^n} f(\bar{x})$$

görnüşdäki meseleleri çözmeklige niýetlenendir.

1.2.1. Gaussyň algoritmi

Bu usul minimallaşdyrmany her ädimde (her bir iterasiýada) üýtgeýän ululyklaryň $\overline{x}$ wektorynyň bir düzüjisi (komponenti) boýunça amala aşyrylýandygy bilen tapawutlanýar.

Goý, başky ýakynlaşmanyň wektory berlen bolsun: $\overline{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)^T$. Birinji ädimde funksiýanyň minimumyny birinji koordinatanyň üýtgeýän, beýleki koordinatalaryň üýtgewsiz şertinde tapýarys, ýagny

$$x_1^1 = \arg\min_{x_1} f\left(x_1, x_2^0, ..., x_n^0\right).$$

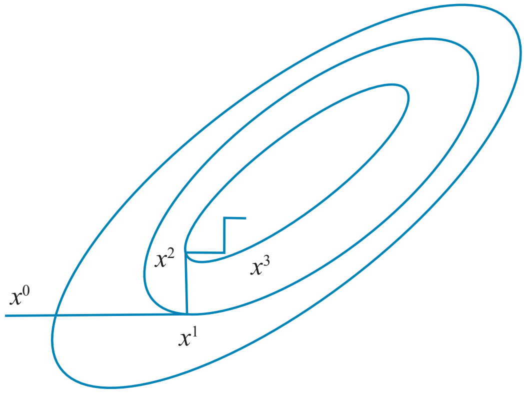
Netijede, täze $\overline{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)^T$. nokady alarys. Soňra $\overline{x}^1$ nokatdan funksiýanyň minimumyny ikinji koordinatanyň üýtgeýän, beýleki koordinatalaryň üýtgewsiz şertinde gözleýäris. Netijede,

$$x_2^1 = \arg\min_{x_2} f\left(x_1^1, x_2, x_3^0, \cdots, x_n^0\right)$$

meseleden täze $\bar{x}^2 = \left(x_1^1, x_2^2,\ x_3^0, \cdots, x_n^0\right)$ nokady alarys. Bu ýagdaýy dowam edip, n-nji ädimden soň $\bar{x}^n = \left(x_1^1, x_2^2,\ x_3^3, \cdots, x_n^n\right)$ nokady alarys. Bu nokatdan soň gözleg ýene-de birinji üýtgeýän ululykdan başlaýar.

Gözlegiň bes edilmeginiň şerti hökmünde aşaky iki şertiň birini ulanyp bolar:

1) $f\left(\bar{x}^{k+1}\right) - f\left(\bar{x}^k\right) \leq \varepsilon$;
2) $f\left(\bar{x}^{k+1}\right) - f\left(\bar{x}^k\right) \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \leq \varepsilon,\ \forall i$.



1.3-nji surat. Gaussyň algoritminde traektoriýalaryň inmeginiň mysallary

Beýan edilen Gaussyň usuly ýönekeý hem bolsa netijelidir (*1.3-nji surat*). Bu usulda kynçylyklar dereje çyzyklary has süýnen bolanda ýüze çykyp biler.

Bu usulyň kömegi bilen maksat funksiýasy güberçek funksiýalaryň jemi, ýagny

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

görnüşde bolanda gowy netijeler alynýar.

1.2.2. Hukuň we Jiwsiň algoritmi

Bu algoritmde gözlegiň logiki taýdan ýönekeý strategiýasy hödürlenilýär. Algoritm aşakdaky iki döwri öz içine alýar:

1) $\bar{x}^k$ bazis (esasy) nokadyň töweregindäki gözleg;

2) minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözleg.

Ilki bilen gözlegiň başky $\bar{x}^0$ nokady we başlangyç ädimi $(\Delta\bar{x}^0)$ berilýär. Soňra aşakda beýan edilen gözleg başlanýar.

Barlaýjy gözleg. Ilki x_i üýtgeýän ululyk boýunça synag ädimini edýäris, ýagny $x_1^0 + \Delta x_1^0$ nokady kesgitläp, funksiýanyň $\bar{x}' = \left(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ nokatdaky bahasyny hasaplaýarys.

Eger funksiýanyň bu nokatdaky bahasy onuň $f(\Delta\bar{x}^0)$ bahasyndan uly bolsa, onda bu üýtgeýän ululyk boýunça garşylykly tarapa barlaýjy ädim edýäris. Eger funksiýanyň garşylykly tarapdaky $\bar{x}'' = \left(x_1^0 - \Delta x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ nokatdaky bahasy onuň $f(\Delta\bar{x}^0)$ bahasyndan uly bolsa, onda $x_1^0 + \Delta x_1^0$ nokady üýtgewsiz galdyrýarys. Beýleki ýagdaýda $\bar{x}^0$ nokady $\bar{x}'$ nokada, ýa-da $\bar{x}''$nokada, olaryň haýsysynda funksiýanyň bahasynyň onuň başky bahasyndan kiçiligine baglylykda çalyşýarys. Bu algoritmi ulanyp, alnan nokatdan beýleki koordinatalar boýunça barlag ädimini edýäris.

Eger barlaýjy gözlegiň netijesinde hiç bir şowly barlag ädimi ädilip bilinmese, $\Delta\bar{x}$ ululygy kiçeldip düzetmeli. Şondan soňra ýene-de barlaýjy gözlegi geçirmeli.

Eger barlaýjy gözlegiň netijesinde iň bolmanda bir şowly barlag ädimi ädilen bolsa, onda ikinji ädime, ýagny minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözlege geçýäris.

Minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözleg. Barlaýjy gözlegiň netijesinde biz $\bar{x}^{01}$ nokady alýarys. $\bar{x}^{01} - \bar{x}^0$ ugur funksiýanyň kemelýän ugruny kesgitleýär. Şol sebäpli bu ugur boýunça funksiýanyň minimallaşdyrmasyny alyp baraýarys:

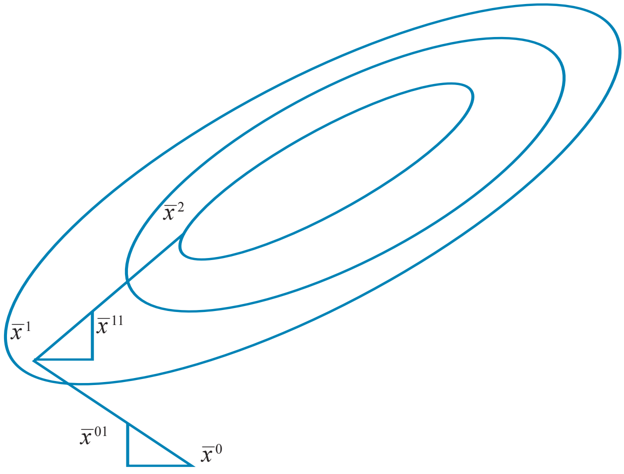
$$\min_{\lambda} f(\overline{x}^0+\lambda\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^0)).$$

Minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözlegde her bir üýtgeýän ululyk boýunça ädim barlaýjy gözleg döwründäki ädimiň ululygyna baglydyr. Eger minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözlegde şowly ädim edip bolsa, onda onuň netijesinde täze $\overline{x}^1=\overline{x}^0+\lambda^0\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^0)$ ýakynlaşmany alarys. Bu ýerde:

$$\lambda^0=\arg\min_{\lambda} f(\overline{x}^0+\lambda\cdot(\overline{x}^{01}-\overline{x}^0)).$$

$\overline{x}^1$ nokatdan täze barlaýjy gözlege başlaýarys we şuňa meňzeşler.

Bu algoritmi her bir barlaýjy gözlegde her üýtgeýän ululyk boýunça minimumy gözlemek ýa-da minimum üçin saýlanan ugur boýunça gözlegde funksiýanyň minimumyny gözlemän, tapylan ugur boýunça diňe λ parametriň hemişelik bahasy boýunça ädim edip özgertmek bolar (*1.4-njisurat*).



1.4-nji surat. Hukuň we Jiwsiň algoritminde inmäniň traýektoriýasynyň mysaly

§ 1.3. Birinji tertipli usullar

Gözlegiň birinji tertipli usullarynda ekstremumyň gözleginde funksiýanyň özi hakyndaky maglumatlar bilen birlikde onuň birinji önümi hakdaky maglumatlar hem ulanylýar. Bu usullara dürli gradiýent usullar degişlidir.

1.3.1. Iň çalt inme algoritmi

Goý, bize käbir oblastda üznüksiz differensirlenýän $f(\overline{x})$ funksiýa berlen bolsun. **Funksiýanyň gradiýenti** diýip i-nji düzüjisi (komponentasy) bu funksiýanyň degişli argumenti boýunça hususy önümine deň bolan wektor-funksiýa aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenilýär:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Belli bolşy ýaly, funksiýanyň islendik nokatdaky gradiýenti onuň bu nokatda iň çalt lokal artýan ugruny görkezýär. Şol sebäpli, $f(\overline{x})$ funksiýanyň minimumy gözlenende onuň gradiýentine garşylykly ugra, ýagny iň çalt inme ugry boýunça hereket etmek gerekdir.

Iň çalt inme prosesiniň ädimleýin (iterasiýa) formulasy aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$\overline{x}^{k+1}=\overline{x}^{k}-\lambda^{k}\cdot\Delta f(\overline{x}^{k})$$

ýa-da

$$\overline{x}^{k+1}=\overline{x}^{k}-\lambda^{k}\cdot\Delta f(\overline{x}^{k})/\|\Delta f(\overline{x}^{k})\| =\overline{x}^{k}+\lambda^{k}\cdot\overline{S}^{k}.$$

λ parametriň dürli bahalarynda inme ugurlarynyň mese-mälim tapawutlanjakdygy aýdyňdyr. λ parametriň uly bahalarynda inme ugurlarynyň ýoly yrgyldyly proses bolup, onuň has uly bahalarynda bu prosesiň dargamagy, ýagny gözlenýän nokatdan daşlaşmagy mümkin. λ parametriň kiçi bahalarynda inme ýoly ýuwaş üýtgär we proses ýuwaş-ýuwaşdan gözlenýän nokatda ýygnanar.

Adatça, λ-nyň bahasy

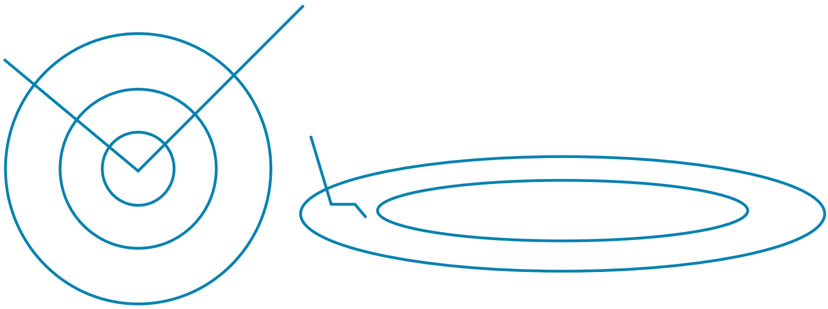
$$\lambda^{k}= \arg\min_{\lambda} f(\overline{x}^{k}+\lambda\cdot\overline{S}^{k})$$

şert ýerine ýeter ýaly edilip, birölçegli minimallaşdyrma meselesini çözmek bilen saýlanylýar. Bu ýagdaýda has çalt inme algoritmini alarys.

Eger λ parametr birölçegli minimallaşdyrma meselesini çözmek bilen kesgitlenýän bolsa, nobatdaky gradiýent ondaň öň gelýän inmäniň ugruna ortogonal bolar: $\Delta f(\overline{x}^{k+1})\perp\overline{S}^{k}$.

Umuman, iň çalt inme ýagdaýy islendik stasionar nokatda ($\Delta f(\overline{x})=\overline{0}$) soňlanmagy mümkin. Şol sebäpli her bir şeýle nokatda prosesiň soňlanandygyny ýa-da soňlanmandygyny barlamak zerurdyr.

Algoritmiň netijeliligi minimallaşdyrylýan funksiýanyň görnüşine baglydyr. Meselem, islendik başlangyç ýakynlaşmada $f(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ funksiýa üçin iň çalt inme algoritmi bir ädimde gutarar, $f(\overline{x}) = x_1^2 + 100x_2^2$ funksiýa üçin bolsa örän ýuwaş bolar (*1.5-nji surat*).



1.5-nji surat. Funksiýanyň görnüşine görä inmäniň traýektoriýalary

Minimallaşdyrylýan funksiýanyň derejeler çyzyklary göni çyzyk ýa-da egriçyzykly çukur görnüşli bolsa algoritmiň netijeliligi pes bolar.

Iň çalt inme algoritmi ekstremum nokadyndan daşlaşan ýerlerde çalt, ekstremun nokadynyň golaýynda bolsa ýuwaş ýygnanar. Şol sebäpli bu usul beýleki algoritmler bilen utgaşdyrylan görnüşinde ulanylýar.

1.3.2. Köp parametrli gözleg

Mil bilen Kentrelliň bu usuly [13, 15, 19] $f(\overline{x})$ funksiýany minimallaşdyrmanyň gözleg ugurlary boýunça iki saýlama parametri ulanyp alyp barmaga esaslanandyr. Bu algoritmde hereketiň yzygiderligi aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda_0^k \cdot \nabla f(\overline{x}^k) + \lambda_1^k \cdot \Delta\overline{x}^{k-1}, \qquad (3)$$

bu ýerde $\Delta\overline{x}^{k-1} = \overline{x}^k - \overline{x}^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3.$

Her bir ädimde iki parametr boýunça aşakdaky minimallaşdyrma meselesi çözülýär:

$$\min_{\lambda_0,\lambda_1} f\left(\overline{x}^k - \lambda_0^k \cdot \nabla f(\overline{x}^k) + \lambda_1^k \cdot \overline{x}^{k-1}\right).$$

Ondan soňra (3) formula boýunça nobatdaky ýakynlaşma tapylýar. Prosesiň dowamynda

$$\nabla^T f(\overline{x}^k)\nabla f(\overline{x}^{k+1}) = 0,$$

$$\nabla^T f(\overline{x}^{k+1})\overline{x}^{k+1} = 0,$$

$$\nabla^T f(\overline{x}^{k+1})\overline{x}^{k} = 0$$

formulalaryň dogrulygyna göz ýetirilip ulanylýar.

Birinji ädimde $\Delta\overline{x}^{k-1}=0$ bolýar, $\overline{x}^0$ bolsa öňünden berlen bolmaly. k-njy ädimde:

$\nabla f(\overline{x}^k)$ we $\Delta\overline{x}^{k-1} = \overline{x}^k - \overline{x}^{k-1}$ hasaplanylýar.

Ýörite usullaryň biriniň kömegi bilen λ_0^k we λ_1^k talap edilýän takyklykda tapylýar.

(1) formula boýunça $\overline{x}^{k+1}$ hasaplanylýar we 1-nji ädime geçilýär.

Her bir $n+1$-nji ädim $\Delta\overline{x}^{k-1}=0$ deňlikden başlanýar.

Haçan-da $|\nabla f(\overline{x}^k)| < \varepsilon$ bolan ýagdaýynda proses togtadylýar.

Kret we Lewi [13] bu usuly köp parametrli ýagdaý üçin giňeltdiler. Olaryň teklip edýän usulynyň her bir ädiminde nobatdaky ýakynlaşma

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda_0 \cdot \nabla f(\overline{x}^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \overline{x}^{i-1} \qquad (4)$$

formula bilen tapylýar, bu ýerde $m<n-1$. Şeýlelikde, her bir ädimde $f(\overline{x})$ funksiýa berlen gözleg ugurlary boýunça minimallaşdyrylanda

$$\min_{\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m} f\left(\overline{x}^k - \lambda_0 \cdot \nabla f(\overline{x}^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \Delta\overline{x}^{i-1}\right)$$

görnüşdäki mesele çözülýär.

Soraglar we ýumuş

1. Gradiýent usulynyň manysy nämeden ybarat?
2. Iň çalt inme usuly we onda ädimiň ululygynyň saýlanylyşy.
3. Köp parametrli gözlegiň esasy aýratynlygy we kemçilikleri nämeden ybarat?

§ 1.4. Ikinji tertipli usullar

Gözlegiň ikinji tertipli usullarynda ekstremumyň gözleginde funksiýanyň özi hakyndaky maglumatlar bilen birlikde onuň birinji we ikinji tertipli önümleri hakdaky maglumatlar hem ulanylýar. Bu usullara Nýutonyň usuly we onuň dürli görnüşleri degişlidir.

1.4.1. Nýutonyň usuly

Bu metodyň esasynda $f(\overline{x})$ funksiýa üçin Teýloryň hataryndaky üçünji we ondan ýokarky agzalary taşlanylanda alynýan, kwadratik approksimasiýa diýilýän aşakdaky takmyny deňlik durýar:

$$f(\overline{x}) \approx f(\overline{x}^k) + \nabla^T f(\overline{x}^k)(\overline{x} - \overline{x}^k) + \frac{1}{2}(\overline{x} - \overline{x}^k)^T \nabla^2 f(\overline{x}^k)(\overline{x} - \overline{x}^k), \quad (5)$$

bu ýerde $\nabla^2 f(\overline{x}^k) = H(\overline{x}^k)$ – Gessäniň matrisasy diýlip at berilýän, $\overline{x}^k$ nokatdaky $f(\overline{x})$ funksiýanyň ikinji tertipli hususy önümleriniň kwadrat matrisasy.

Nýutonyň usulynda gözlegiň ugry ($\overline{S}^k$) şeýle kesgitlenilýär. Eger (5) aňlatmadaky $\overline{x}$-i $\overline{x}^{k+1}$ bilen çalşyp, $\Delta\overline{x}^k$=$\overline{x}^{k+1}$-$\overline{x}^k$ belgileme girizsek, alarys:

$$f(\overline{x}^{k+1}) \approx f(\overline{x}^k) + \nabla^T f(\overline{x}^k) \cdot \Delta\overline{x}^k + \frac{1}{2}(\overline{x}^k)^T \nabla^2 f(\overline{x}^k)(\Delta\overline{x}^k). \quad (6)$$

$f(\overline{x})$ funksiýanyň $\Delta\overline{x}^k$-iň ugry boýunça minimumy bu funksiýany $\Delta\overline{x}$-iň her bir düzüjisi boýunça differensirläp alnan aňlatmalary nola deňlemekden alynýar:

$$\nabla f(\overline{x}^k) + \nabla^2 f(\overline{x}^k)\Delta\overline{x}^k = \overline{0} \quad (7)$$

Bu ýerden alarys:

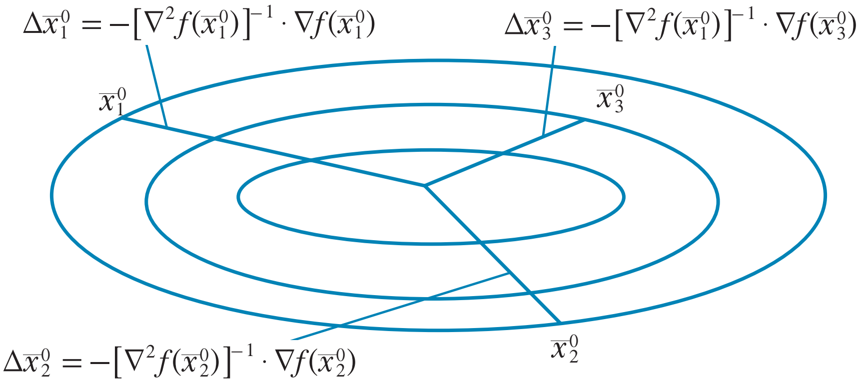
$$\Delta\overline{x}^k = -\left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \nabla f(\overline{x}^k), \quad (8)$$

ýa-da

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \nabla f(\overline{x}^k). \quad (9)$$

Bu ýagdaýa çenli ädimiň ululygy hem, gözlegiň ugry hem doly kesgitlenildi.

Eger $f(\overline{x})$ kwadrat funksiýa bolsa (güberçekligi aşak), onda minimuma çenli bir ädim ýeterlik (*1.6-njy surat*):



1.6-njy surat. Kwadrat funksiýa üçin Nýutonyň usuly boýunça inmäniň traýektoriýasy

Ýöne, umuman aýdylanda, çyzykly däl $f(\overline{x})$ funksiýa üçin bir ädimde minimuma ýetilmeýär. Şol sebäpli, (9) tapgyrlaýyn formula adatça aşaky görnüşe getirilýär:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda^k \frac{\left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \nabla f(\overline{x}^k)}{\left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \nabla f(\overline{x}^k)} \tag{10}$$

ýa-da

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda^k \left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \nabla f(\overline{x}^k) = \overline{x}^k - \lambda^k H^{-1}(\overline{x}^k) \nabla f(\overline{x}^k), \tag{11}$$

bu ýerde λ^k – ädimiň uzynlygyny görkezýän parametr.

Inmäniň ugry:

$$\bar{S}^k = -H^{-1} \nabla f(\overline{x}^k).$$

(10) ýa-da (11) iterasion proses ony saklamanyň käbir kabul edilen kriterisi ýerine ýetýänçä dowam etdiriler.

$f(\overline{x})$ funksiýanyň iki gezek differensirlenýän şertinde Nýutonyň usulynyň ýygnanma şerti Gessäniň $H(\overline{x}^k)$ matrisasynyň položitel kesgitlenen bolmagydyr.

Kähalatlarda her ädimde $H(\overline{x}^k)$ matrisany hasaplamak kesgitli kynçylyk döredýär. Şol ýagdaýda Nýutonyň usulyndan başga, onuň üýtgedilen görnüşi ulanylýar. Onuň manysy şeýle. Goý, başlangyç ýakynlaşma ýeterlik gowy bolsun. Ilki bilen $\left[\nabla^2 f(\overline{x}^0)\right]^{-1}$ matrisa hasaplanylýar we indiki iterasiýalarda $\left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1}$ matrisa derek $\left[\nabla^2 f(\overline{x}^0)\right]^{-1}$ matrisa ulanylýar.

Nobatdaky ýakynlaşma

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda^k\left[\nabla^2 f(\overline{x}^0)\right]^{-1}\nabla f(\overline{x}^k) = \bar{x}^k - \lambda^k H^{-1}(\overline{x}^0)\nabla f(\overline{x}^k)$$

deňlik bilen kesgitlenilýär.

Elbetde, bu ýagdaýda minimuma ýetmek üçin gerek bolan tapgyrlaryň sanynyň artmagy mümkin, ýöne oňa garamazdan, proses netijeli bolar.

Gradiýent usullary, hususan hem iň çalt inme usuly ýygnanmanyň çyzykly tizligine eýedir. Nýutonyň usuly bolsa, ýygnanmanyň kwadrat tizligine eýedir.

Nýutonyň usuly onuň ýygnanmagynyň zerur we ýeterlik şertiniň ýerine ýetýän ýagdaýyndan has netijelidir. Ýöne, haýsy hem bolsa bir berlen $f(\overline{x})$ funksiýa üçin bu şertiň ýerine ýetýändigini barlamak kyn meseleleriň biridir.

Soraglar

1. Nähili funksiýalar üçin ikinji tertipli usullary ulanmak netijeli?
2. Nähili şertlerde Nýutonyň usulynyň üýtgedilen görnüşi ýygnanýar, haýsy şertlerde dargaýar?
3. Usulyň ýygnanmagyny üpjün etmek üçin döredilýän algoritmde nämeleri göz öňünde tutmaly?

§ 1.5. Üýtgeýän metrikaly usullar

Üýtgeýän metrikaly usullara başgaça kwazinýuton usullary ýa-da uly ädimli gradiýent usullary hem diýilýär.

Bu usullarda gözleg prosesi wagtynda ikinji tertipli hususy önümleriň matrisasynyň ýa-da oňa ters matrisanyň approksimasiýasy amala aşyrylýar.

Nobatdaky ýakynlaşma aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k + \lambda^k \bar{S}^k = \overline{x}^k - \lambda^k \cdot(\overline{x}^k)\nabla f(\overline{x}^k), \qquad (12)$$

bu ýerde kähalatlarda ugurlaryň matrisasy diýlip at berilýän $\eta(\overline{x}^k)$ – matrisa

$$[H(\overline{x}^k)]^{-1} = \left[\nabla^2 f(\overline{x}^2)\right]^{-1}$$

matrisanyň approksimasiýasi bolup hyzmat edýär.

Maksady görkezýän kwadrat funksiýa üçin

$$f(\overline{x}) \approx f(\overline{x}^k) + \nabla^T f(\overline{x}^k)\cdot(\overline{x} - \overline{x}^k) + \frac{1}{2}(\overline{x} - \overline{x}^k)^T \nabla^2 f(\overline{x}^k)\cdot(\overline{x} - \overline{x}^k),$$

bu ýerde $\nabla^2 f(\overline{x}^k) = H(\overline{x}^k)$.

Eger bu aňlatmada $\bar{x}$-iň deregine $\bar{x}^{k+1}$-i goýup, differensirlesek, alarys:

$$\nabla f(\bar{x}^{k+1}) = \nabla f(\bar{x}^{k}) + H(\bar{x}^{k})(\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^{k}),$$
$$\nabla f(\bar{x}^{k+1}) - \nabla f\bar{x} = H(\bar{x}^{k})(\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^{k}).$$

$[H(\bar{x}^{k})]^{-1}$-e köpeldip alarys:

$$\bar{x}^{k+1}-\bar{x}^{k}=[H(\bar{x}^{k})]^{-1})[\nabla f(\overline{x}^{k+1}) - \nabla f(\overline{x}^{k})]. \tag{13}$$

Eger bu ýerde $f(\bar{x})$ kwadratik funksiýa bolsa, onda $H(\bar{x}^{k})=H=$const hemişelik matrisa bolar.

(13) deňlemä $[H(\bar{x})]^{-1}$ ýa-da $H(\bar{x})$ matrisalary $f(\bar{x})$, $\nabla f(\bar{x})$ we $\Delta\bar{x}$-leriň berlen bahalarynda approksimirlemek üçin zerur bolan näbelli parametrli n näbellili n deňlemeleriň ulgamy hökmünde garap bolar.

Beýle deňlemeler ulgamyny çözmek üçin dürli usullary ulanyp bolar.

Usullaryň aglabasynda $[H(\bar{x}^{k+1})]^{-1}$ matrisa öňki k-njy ädimde alnan maglumatlara görä approksimirlener:

$$[H(\overline{x}^{k+1})]^{-1} \approx \omega\eta^{k+1} = \omega(\eta^{k} + \Delta\eta^{k}), \tag{14}$$

bu ýerde η^{k} – öňki ädimde $[H(\bar{x}^{k})]^{-1}$-matrisany approksimirleýän matrisa.

Umuman, $\eta^{k}=\eta^{k}(\bar{x}^{k})\cdot$(14)-de $\Delta\eta^{k}$ kesgitlenilýän matrisadyr, ω bolsa köp ýagdaýda bire deň bolan köpeldijidir.

$\Delta\eta^{k}$-iň saýlanyp alnyşy üýtgeýän metrikany kesgitleýän ýagdaýdyr.

Usulyň ýygnanmasyny üpjün etmek üçin $\omega\eta^{k+1}$ matrisa položitel kesgitlenen matrisa bolmalydyr we H^{-1}-niň (13)-de ornunda goýulanda bu deňlemäni kanagatlandyrmalydyr.

(k+1)-nji ädimde $\bar{x}^{k}$, $\nabla f(\overline{x}^{k})$ $\nabla f(\overline{x}^{k+1})$ we η^{k}-i ululyklary kesgitläp bolar we ony η^{k+1}-i (13) deňlik ýerine ýeter ýaly edip kesgitlemek gerek bolar.

(13)-aňlatmadan (14)-i göz öňünde tutup alarys:

$$\nabla\overline{x}^{k} = \omega\cdot^{k+1}[\nabla f(\overline{x}^{k+1}) - \nabla f(\overline{x}^{k})] = \omega\cdot^{k+1}\overline{g}^{k}$$

we

$$\eta^{k+1}\,\Delta\bar{g}^{k}=1/\omega\;\Delta\bar{x}^{k}. \tag{15}$$

$\eta^{k+1}=\eta^{k}+\Delta\eta^{k}$ bolýandygy üçin (4)-üň esasynda:

$$\Delta\eta^{k}\cdot\Delta\bar{g}^{k}=1/\omega\;\Delta\bar{x}^{k}-\eta^{k}\cdot\Delta\bar{g}^{k} \tag{16}$$

deňlemäni $\Delta\eta^{k}$-a görä çözmek zerurdyr.

Göni ornunda goýma usulynyň kömegi bilen (16) deňlemäniň çözüwiniň

$$\Delta\eta^k = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta\overline{x}^k \cdot \overline{y}^T}{\overline{y}^T \cdot \Delta\overline{g}^k} - \frac{\eta^k \cdot \Delta\overline{g}^k \cdot \overline{z}^T}{\overline{z}^T \cdot \Delta\overline{g}^k} \tag{17}$$

görnüşe eýedigini göreris. Bu ýerde $\overline{z}$ we $\overline{y}$ n ölçegli islendik wektorlar.

Meselem, eger ω=1 üçin $\Delta\overline{x}^k$ we $\Delta\eta^k \cdot \Delta\overline{g}^k$ ugurlaryň ýörite kombinasiýasy saýlanylsa, onda

$$\overline{z}=\overline{y}=\Delta\overline{x}^k-\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k$$

bolar we bu ýagdaýda **Broýdeniň usuly** diýilýän [13, 19] usul alnar.

Eger

$$\overline{y}=\Delta\overline{x}^k,\ \overline{z}=\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k$$

diýlip alynsa, onda $\Delta\eta^{k+1}$ matrisa **Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň** usuly diýilýän [13, 19] usulyň algoritmi boýunça gurulýar.

$\overline{z}$ we $\overline{y}$ wektorlaryň islendik wektorlardygy sebäpli bu ýerde başga mümkinçilikleriň bolmagy hem mümkin.

Eger bu algoritmlerde $\Delta\overline{x}^k$ ädimler $f(\overline{x})$ funksiýanyň $\overline{S}^k$ ugur boýunça minimallaşdyrylmasy netijesinde yzygiderli gurulsa, onda (15)-i kanagatlandyrýan $\Delta\eta^{k+1}$ simmetrik matrisanyň hasaplanylýan islendik usullaryň ählisi özara çatrymlanan ugurlary bererler.

1.5.1. Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň usuly

Üýtgeýän metrika usulynyň algoritmleriniň esasy tapawudy $\Delta\eta$-iň tapylyşyndadyr. Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritminde $\Delta\eta$-iň rangy 2-ä deňdir. η-matrisa kwadratik funksiýa üçin n ädimden soň:

$$[H(\overline{x}^k)]^{-1} = \left[\nabla^2 f(\overline{x}^k)\right]^{-1} \tag{18}$$

matrisa bilen gabat geler ýaly edilip hasaplanylýar.

Başky η^0 matrisanyň deregine adatça birlik matrisa alynýar: $\eta^0=E$.

Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritminde $\Delta\eta^k$

$$\overline{y}=\Delta\overline{x}^k,\ \overline{z}=\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k$$

aňlatmalary (17) deňlemede ornunda goýup alynýar:

$$\Delta\eta^{k+1} = \Delta\eta^k + A^k - B^k = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta\overline{x}^k \cdot (\Delta\overline{x}^k)^T}{(\Delta\overline{x}^k)^T \cdot \Delta\overline{g}^k} - \\ - \frac{\eta^k \cdot \Delta\overline{g}^k \cdot (\Delta\overline{g}^k)^T \cdot (\eta^k)^T}{(\Delta\overline{g}^k)^T \cdot (\eta^k)^T \cdot \Delta\overline{g}^k}. \tag{19}$$

Bu ýerde A^k we B^k simmetrik matrisalardyrlar, şol sebäpli $\Delta\eta^k$ we $\Delta\eta^{k+1}$ matrisalar hem simmetrikdirler.

Bu usul üýtgeýän metrikaly usullaryň iň netijelileriniň biridir. (19) aňlatmany ulanýan algoritm aşaky şertler ýerine ýetende has hem netijelidir:

1) $f(\overline{x}^k)$ hasaplananda edilýän tegeleklemelerdäki ýalňyşlyklar uly däl;

2) $\Delta\eta^k$ matrisa hasaplama prosesinde «gowulanýar».

Bu usul boýunça optimallaşdyrma wagtynda inmäniň gradiýent ugrundan kem-kemden nýuton ugruna geçmek amala aşýar. Şeýlelikde, her usulyň artykmaçlygy oňa degişli wagtda ulanylýar.

A^k matrisanyň (19) aňlatmadaky orny $\eta \to H^{-1}$ ymtylmany üpjün etmekdedir. B^k matrisa bolsa ähli hasaplama döwründe $\Delta\eta^{k+1}$ matrisanyň položitel kesgitlenen bolmagyny üpjün edýär. (19) aňlatmany η^0-dan başlap birnäçe ädimlerde ulanalyň:

$$\eta^1 = E + A^0 - B^0,$$
$$\eta^2 = \eta^1 + A^1 - B^1 = E + (A^0 + A^1) - (B^0 + B^1), \ldots$$
$$\eta^{k+1} = E + \sum_{i=1}^{k} A^i - \sum_{i=1}^{k} B^i.$$

Maksat funksiýasynyň kwadratik funksiýa ýagdaýynda, $k=n-1$ bolanda $H^{-1} = \sum_{i=1}^{k} A^i$ deňlik ýerine ýetmelidir, $\sum_{i=1}^{k} B^i$ jem bolsa başlangyç η_0 baha bilen gabat geler ýaly edilip gurulýar.

Maksat funksiýasy kwadratik funksiýa bolanda ulanylýan gözleg ugurlary biri-birine çatylandyr. Edil şu-da usulyň netijeliligini kesgitleýär.

1.5.2. Pirsonyň algoritmi

Eger (17) aňlatmada $\overline{y} = \overline{z} = \Delta\overline{x}^k$ we $\omega = 1$ deň diýlip alynsa, ugurlaryň matrisasynyň nobatdaky ýakynlaşmasy aşakdaky aňlatma bilen kesgitlenýär [15]:

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \frac{[\Delta\bar{x}^k - \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k](\Delta\bar{x}^k)^T}{(\Delta\bar{x}^k)^T \cdot \Delta\bar{g}^k}, \tag{20}$$

bu ýerde $\eta^0=R^0$ islendik položitel kesgitlenen matrisa.

Pirsonyň ikinji algoritmi adyny alan bu algoritm, adatça gözlegiň iň gowy däl ugurlaryna getirýär.

Pirsonyň üçünji algoritmi (17) aňlatmada $\bar{y}=\bar{z}=\eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k$ we $\omega=1$ parametrleriň goýulmagy bilen alynýar. Bu ýagdaýda iterasion formula aşakdaky görnüşe eýe bolýar [16]:

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \frac{[\Delta\bar{x}^k - \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k] \cdot [\eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k]^T}{(\Delta\bar{g}^k)^T \cdot \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k}, \tag{21}$$

bu ýerde $\eta^0=R^0$.

Bu algoritm has netijeli hasaplanylýar.

1.5.3. Nýutonyň-Rafsonyň algoritmi

Bu algoritm Nýutonyň-Rafsonyň algoritmi ady bilen belli bolsa-da Pirson tarapyndan hödürlenip [19], ol (17) aňlatmada $\omega \to \infty$, $\bar{z}=\eta^k\ \Delta\bar{g}^k$ bolanda alynýar. Bu ýagdaýda iterasion formula aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \frac{[\eta^k \Delta \cdot \bar{g}^k] \cdot [\eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k]^T}{(\Delta\bar{g}^k)^T \cdot \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k}, \tag{22}$$

bu ýerde $\eta^0=R^0$.

1.5.4.Grinştadtyň we Goldfarbyň usullary

Bu usulda ugurlar matrisasynyň nobatdaky ýakynlaşmasy aşakdaky aňlatma bilen kesgitlenilýär:

$$\eta^{k+1}=\eta^k+\Delta\eta^k.$$

Grinştadtyň algoritminde [13]:

$$\Delta\eta^k = \frac{1}{(\Delta\bar{g}^k)^T \cdot \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k} \cdot$$

$$\cdot \Bigg\{ \Delta\bar{x}^k \cdot (\Delta\bar{g}^k)^T \eta^k + \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k (\Delta\bar{x}^k)^T -$$

$$- \frac{[(\Delta\bar{g}^k)^T \Delta\bar{x}^k - (\Delta\bar{g}^k)^T \eta^k \Delta\bar{g}^k] \cdot \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k (\Delta\bar{g}^k)^T \eta^k}{(\Delta\bar{g}^k)^T \cdot \eta^k \cdot \Delta\bar{g}^k} \Bigg\}. \tag{23}$$

Goldfarbyň algoritminde [13]:

$$\Delta\eta^k = \frac{1}{(\Delta\overline{g}^k)^T \cdot \eta^k \cdot \Delta\overline{g}^k}\Bigg\{\Delta\overline{x}^k(\Delta\overline{g}^k)^T\eta_k + \eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k(\Delta\overline{x}^k)^T -$$

$$-\left[1+\frac{[(\Delta\overline{g}^k)^T\Delta\overline{x}^k]}{(\Delta\overline{g}^k)^T\cdot\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k}\right]\cdot\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k(\Delta\overline{g}^k)^T\eta^k\Bigg\}. \qquad (24)$$

Netijeliligi boýunça bu usullar Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritmi bilen deňeşdirerlikdir.

1.5.5. Fletçeriň algoritmi

Fletçer tarapyndan kwadrat funksiýa üçin n ädimden soň prosesiň ahyryny görkezýän şertiň taşlanyp, şeýle funksiýalar üçin $\eta\rightarrow H^{-1}$ (ýagny $\eta\rightarrow H^{-1}$ matrisanyň hususy bahalaryna ymtylýar) ymtylmanyň üpjün edilmesi talap edilýän usul hödürlenildi.

Fletçer tarapyndan η matrisanyň nobatdaky ýakynlaşmasy üçin alnan aňlatmasy aşakdaky görnüşe eýedir [15]:

$$\eta^{k+1} = \left[E - \frac{\Delta\overline{x}^k(\Delta\overline{g}^k)^T}{(\Delta\overline{x}^k)^T\cdot\Delta\overline{g}^k}\right]\cdot\eta^k\cdot\left[E - \frac{\Delta\overline{g}^k(\Delta\overline{x}^k)^T}{(\Delta\overline{x}^k)^T\cdot\Delta\overline{g}^k}\right] + \frac{\Delta\overline{x}^k\cdot(\Delta\overline{x}^k)^T}{(\Delta\overline{x}^k)^T\cdot\Delta\overline{g}^k}. \qquad (25)$$

Ýöne Fletçer tarapyndan η matrisany hasaplamak üçin teklip edilen algoritmde ol käbir şertleriň ýerine ýetirilişine görä dürli görnüşde hasaplanylýar:

a) $(\Delta\overline{g}^k)^T\cdot H^{-1}(\overline{x}^k)\cdot\Delta\overline{g}^k<(\Delta\overline{g}^k)^T\cdot\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k$

deňsizlik ýerine ýetende nobatdaky η^{k+1} ýakynlaşmany hasaplamak üçin Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritmindäki (19) deňlik ulanylýar;

b) $(\Delta\overline{g}^k)^T\cdot H^{-1}(\overline{x}^k)\cdot\Delta\overline{g}^k\geq(\Delta\overline{g}^k)^T\cdot\eta^k\cdot\Delta\overline{g}^k$

deňsizlik ýerine ýetende (25) deňlik ulanylýar.

Elbetde, *a*) we *b*) şertleri barlamak kyn we $H^{-1}(\overline{x}^k)$ matrisany tapmaly bolýandygy üçin ol manysyny hem ýitirýär. Şol sebäpli bu algoritm peýdalanylanda *a*) we *b*) şertler barlanylmazdan (25) deňlik ulanylýar. Ýötire test üçin funksiýalaryň üsti bilen bu ýagdaýda Fletçeriň algoritminiň netijeliligi boýunça Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritminden pes netijelidigini götkezip bolar.

Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň we Fletçeriň algoritmleriniň netijeliligi ulanylýan birölçegli gözleg usullaryny kesgitleýärler. Köphalatlarda ulanylýan ol ýa-da beýleki usullardaky üstünlikler şol birölçegli gözleg usullarynyň netijeliligini kesgitleýär.

$$\lambda^k = \arg\min_{\lambda} f(\bar{x}^k + \lambda \cdot \bar{S}^k)$$

meseläni çözmekde (bu ýerde $\bar{S}^k = -\eta(\bar{x}^k) \cdot \nabla f(\bar{x}^k)$) bu usullar ulanylanda λ^k ululygyň optimal bahasy $(0, \lambda')$ aralykda kub funksiýanyň interpolýasiýasynyň kömegi bilen kesgitlenilýär. Bu ýerde:

$$\lambda' = \min_{\lambda} \left\{ 1, \frac{2[f(\bar{x}^k) - f_0]}{\nabla^T f(\bar{x}^k) \bar{S}^k} \right\}$$

deňligiň kömegi bilen kesgitlenilýär. Bu ýerde $f_0 f(\bar{x})$ funksiýanyň $\bar{S}^k$wektoryň ugry boýunça birölçegli gözleg prosesiniň kömegi bilen tapylan iň kiçi bahalandyrmasy. Eger λ-nyň kub funksiýanyň interpolýasiýasynyň kömegi bilen kesgitlenen bahasy λ'-den uly bolsa, onda synag ädimleri üçin λ-nyň başlangyç bahalary

$$\lambda^{r+1} = 0{,}1\lambda^r$$

görnüşde alynýar. Bu ýerde r birölçegli gözlegdäki ädimleriň yzygiderliginiň tertibi. Eger $\lambda < \lambda'$ we $f(\bar{x}^k + \lambda \cdot \bar{S}^k) < f_0$ bolsa, onda birölçegli gözleg tamamlanýar.

Umuman, birölçegli gözlegde kwadrat interpolýasiýanyň ulanylmagy kub interpolýasyýanyň ulanylmagyndan pes netije bermeýär, algoritmler hem şonçarak netijelidir.

Soraglar

1. Üýtgeýän metrikanyň usullarynyň esasy ideýasy nämeden ybarat?
2. Broýdeniň usulynyň iterasion aňlatmasy we algoritmiň ädimleri nähili kesgitlenilýär?
3. Dewidonyň-Fletçeriň-Pauelliň algoritminde η^{k+1} matrisanyň nobatdaky ýakynlaşmasy nähili gurulýar?
4. Pirsonyň algoritminde η^{k+1} matrisanyň nobatdaky ýakynlaşmasy nähili gurulýar?
5. Grinştadtyň we Goldfarbyň algoritminde η^{k+1} matrisanyň nobatdaky ýakynlaşmasy nähili gurulýar?
6. Fletçeriň algoritminde η^{k+1} matrisanyň nobatdaky ýakynlaşmasy nähili gurulýar?

§ 1.6. Jerime funksiýalary usullary

Amalyýetde has köp ýaýran optimallaşdyrma meseleleri çäklendirmeleri bar bolan meselelerdir, ýagny käbir çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýan optimal çözüwi tapmak meseleleridir. Şertsiz optimallaşdyrma meseleleriniň netijeli usullarynyň bar bolmagy bu usullary şertli optimallaşdyrma meselelerini çözmekde ulanmaga ymtylynmagyna getirýär. Onuň üçin şertli optimallaşdyrma meselelerini özgerdip, olary şertsiz optimallaşdyrma meselelerine getirmek zerurdyr.

Goý, aşakdaky şertli optimallaşdyrma meselesini çözmek gerek bolsun:

$$\min\{f(\bar{x}) \mid h_j(\bar{x}),\ j=1, 2,\ldots,m;\ g_j(\bar{x})\le 0,\ j=m+1, m+2, \ldots, k\}. \quad (26)$$

Bu ýerde maksady görkezýän funksiýa we çäklendirmeleriň ulgamyndaky funksiýalar güberçek funksiýalardyr.

Jerime funksiýalary usullarynyň esasy manysy şeýledir [19]. Ilki aşakdaky ýaly kömekçi funksiýa gurulýar:

$$Q(\bar{x},\bar{r}) = f(\bar{x}) + \sum\nolimits_{j=1}^{m} r_j \cdot H[h_j(\bar{x})] + \sum\nolimits_{j=m+1}^{k} r_j G[g_j(\bar{x})]. \quad (27)$$

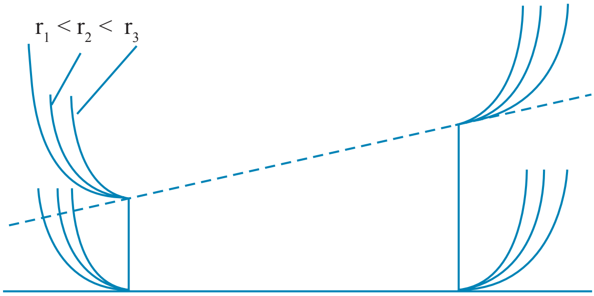
Bu funksiýa (26) meseläniň ýakynlaşan çözüwi aşakdaky şertsiz meseleleriň yzygiderliginiň çözülmegi netijesinde tapylar ýaly edilip gurulýar:

$$\min Q(\bar{x}, \bar{r}). \quad (28)$$

Jerime funksiýalary usullarynda $H(u)$ we $G(u)$ funksiýalar degişli çäklendirmeler kanagatlandyrylmadyk ýagdaýynda noldan tapawutly (položitel) bolar ýaly edilip saýlanylýar. (27) funksiýanyň minimallaşdyrýandygy sebäpli, çäklendirmeleriň bozulýan ugruna tarap hereket oňaýly däldir. Beýle usullarda $H(u)$ we $G(u)$ funksiýalar ýolbererli oblastyň içinde nola deň bolmalydyrlar. Meselem, aşakdaky çäklendirmelerde

$$g_j(\bar{x}) \to 0^{+0} \text{ bolanda } G_j[g_j(\bar{x})] \to 0 \text{ bolmaly.}$$

(26) meseläniň ýakynlaşan çözüwi (28) meseleleriň yzygiderlikleri $r_j \to \infty$, $j=1, 2,\ldots, k$ bolanda çözülip alynýar. Degişli usullar daşky nokadyň usullary diýlip hem atlandyrylýar (*1.7-nji surat*).

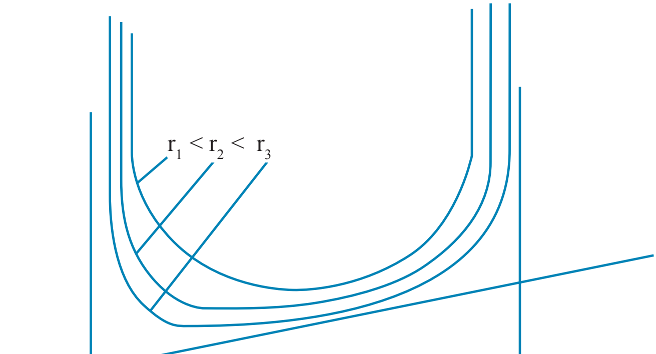


1.7-nji surat. Çäklendirmeler ýerine ýetmedik ýagdaýynda jerimäniň emele gelşi

Päsgelçilik funksiýalary usulynda [19] ýolbererli oblastda $H(u)$ we $G(u)$ funksiýalar noldan tapawutly edilip, ýagny olar bu oblastyň içki nokatlarynda noldan tapawutly kiçi bahalara eýe bolup, onuň çäklerine içki nokatlar boýunça golaýlaşylanda položitel uly bahalara eýe bolar ýaly edilip saýlanylyp alynýar. Meselem, deňsizlikler çäklendirmeleri

$$g_j(\bar{x}) \rightarrow 0^{-0} \text{ bolanda } G_j[g_j(\bar{x})] \rightarrow 0 \text{ bolmaly.}$$

Beýle usullara **içki nokat usullary** diýilýär. Bu görnüşli jerimeler funksiýalaryny (päsgelçilikler funksiýalaryny) ulanýan algoritmlerde gözleg wagtynda $\bar{x}$ nokadyň elmydama ýolbererli oblastyň içki nokady bolup galmagy talap edilýär (*1.8-nji surat*).



1.8-nji surat. Oblastyň çäginiň ýakynlarynda päsgelçilikleriň emele gelşi

(1) meseläniň ýakynlaşan çözüwi $r_j \to 0$, (j=1, 2,…,k) bolanda (3) meseleleriň yzygiderligi çözülip alynýar.

Deňlikleri çäklendirmek maksady bilen jerime funksiýalary saýlanylanda adatça

$$[h_j(\overline{x})] \to 0 \text{ bolanda } H_j[h_j(\overline{x})] \to 0$$

bolmagy talap edilýär. Bu şerti kanagatlandyrýan funksiýalar bolup, meselem, aşakda getirilen funksiýalar hyzmat edip bilerler.

1) $H_j[h_j(\overline{x})] = |h_j(\overline{x})|$

2) $H_j[h_j(\overline{x})] = (h_j(\overline{x}))^2$,

3) $H_j[h_j(\overline{x})] = (h_j(\overline{x}))^\propto$, α jübüt san.

Deňsizlikleri çäklendirmek maksady bilen jerime funksiýalary saýlanylanda

$g_j(\overline{x}) \leq 0$ bolanda $G_j[g_j(\overline{x})]=0$ bolmagy;

$g_j(\overline{x}) > 0$ bolanda bolsa, $G_j[g_j(\overline{x})] > 0$ deňsizligiň ýerine ýetmegi talap edilýär. Bu şerti kanagatlandyrýan funksiýalar bolup, meselem, aşakda getirilen funksiýalar hyzmat edýär:

1) $G_j[g_j(\overline{x})] = \frac{1}{2}\{g_j(\overline{x}) + |g_j(\overline{x})|\}$,

2) $G_j[g_j(\overline{x})] = \left(\frac{1}{2}\{g_j(\overline{x}) + |g_j(\overline{x})|\}\right)^2$

3) $G_j[g_j(\overline{x})] = \left(\frac{1}{2}\{g_j(\overline{x}) + |g_j(\overline{x})|\}\right)^\propto$, ($\alpha$ – jübüt san).

Deňsizlikleri çäklendirmek maksady bilen päsgelçilikleriň funksiýalary hökmünde, meselem aşakda sanalýan görnüşli funksiýalary saýlap alyp bolar:

1) $G_j[g_j(\overline{x})] = -\frac{1}{g_j(\overline{x})}$;

2) $G_j[g_j(\overline{x})] = -\ln[-g_j(\overline{x})]$.

Jerimeler ýa-da päsgelçilikler funksiýalary usullary ulanylanda ýerine ýetirmeli amallaryň yzygiderligi:

1) (26) meselä esaslanyp, (27) funksiýany gurýarys. $\overline{x}$-iň başlangyç ýakynlaşmasynyň we r_j jerimäniň başlangyç bahasyny saýlamaly.

2) (28) meseläni çözmeli.

3) Eger alnan çözüw çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrmasa, onda jerimeler funksiýasy usuly ulanylanda r_j koeffisiýentleriň bahalary ulaldylyp, ýene-de (28) mesele çözülýär. Päsgelçilikler funksiýalary usuly ulanylanda oblastyň çäginde çözüw alyp bolar ýaly r_j koeffisiýentleriň bahalary peseldilýär.

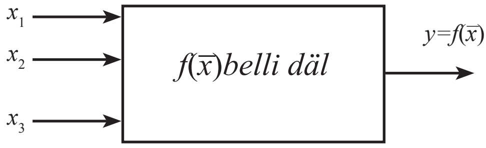
4) Eger alnan çözüw kesgitli takyklyk bilen çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrsa, bu proses bes edilýär.

Soraglar we ýumuşlar

1. Jerimeler funksiýalary usullarynyň esasy manysy nämeden ybarat?
2. Bu usulda meseleleriň nähili yzygiderligi ulanylýar?
3. Päsgelçilikleriň funksiýalary usulynyň aýratynlygy nämeden ybarat? Bu usulda meseleleriň nähili yzygiderligi ulanylýar? r_j koeffisiýentleriň bahalary nähili üýtgeýärler?
4. Jerime funksiýalarynyň görnüşleri barada gürrüň beriň.
5. Päsgelçilik funksiýalarynyň görnüşleri barada gürrüň beriň.

§ 1.7. Gözlegiň statistiki usullary

Statistiki usullar ýa-da tötänleýin gözlegiň usullary diýilýän usullar optimal çözüwleri gurmakda giňden ulanylýar. Onuň sebäbi ölçegiň ulalmagy bilen öňden belli (kesgitli) usullaryň netijeliliginiň peselýändigindedir. Beýleki bir tarapdan, kähalatlarda kesgitli usullary ulanmak üçin gerek bolýan maglumatlar ýetmezçilik edýär. Statistiki algoritmler, esasan dolandyryş ulgamlarynyň optimal çözüwleri gözlenilende ulanylýar (*1.9-njy surat*). Bu ulgamlarda netijeler diňe onuň girişinde $\bar{x}$-dolandyryş täsirleriniň ululyklary berlende emele gelýär. Şeýle ýagdaýlarda statistiki algoritmler kesgitli usullardan has netijelidir.



1.9-njy surat. Ulgamy optimal dolandyrmanyň statistiki usullaryny ulanmak bilen uly ölçegli meseleler çözülende ýa-da global ekstremum gözlenende has uly netijeler alynýar.

Statistiki usullar ýa-da tötänleýin gözlegiň usullary diýip maksat funksiýasy hakda maglumatlar ýygnalanda ýa-da onuň bahasyny gowulandyrmagyň işçi ädimleri saýlananda tötänlilik elementleri duş gelinýän usullara aýdylýar. Tötänlik bilen inme ugry, ädimiň uzynlygy, çäklendirmeleriň bozulan ýagdaýyndaky jerimäniň ululygy we şulara meňzeşler saýlanylmagy mümkin.

Statistiki usullar aşakda sanalýan artykmaçlyklara eýedir:

– programmalaryň işe girizilmeginiň ýönekeýligi;

– ähtibarlylygy we şowsuzlyga durnuklylygy;

– köp ýerlerde ulanylýanlygy;

– öwrediji amallaryň we gözlegiň algoritminiň girizilme mümkinçiligi;

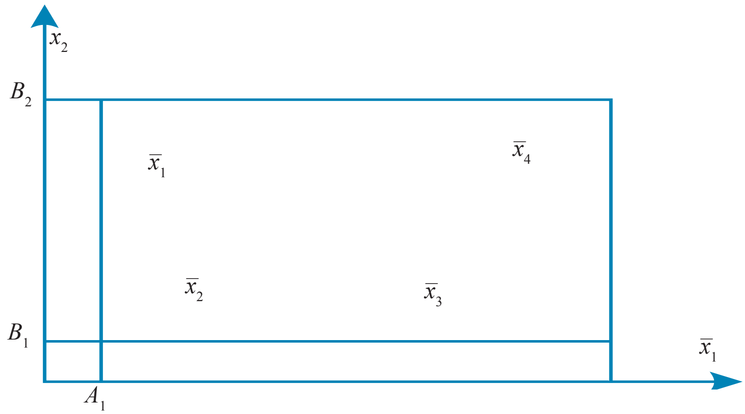
– optimal çözüwi çaklama amallarynyň girizilme mümkinçiligi.

Bu usullaryň esasy ýetmezçiliklerine minimumy gözlenýän funksiýanyň bahalarynyň köp gezek hasaplamaly bolýandygy we ekstremumyň töwereginde ýygnanma tizliginiň pesligi degişlidir.

Statistiki usullaryň artykmaçlygy meseleleriň ölçeginiň artmagy bilen ýokarlanýar diýlip hasap edilýär. Sebäbi meseleleriň ölçeginiň artmagy bilen hasaplamaga gidýän çykdajylar (meselem, wagt) kesgitli usullarda statistiki usullara garanda has çalt artýar (*1.10-njy surat*).

1.7.1. Ýönekeý tötänleýin gözleg

Goý, bize $\bar{x} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ şertde $f(\bar{x})$ funksiýany minimallaşdyrma meselesini çözmek gerek bolsun (*1.10-njy surat*).



1.10-njy surat. Ýönekeý tötänleýin gözleg

Bu oblastdan deňölçegli paýlaşdyrma kanuny boýunça $\bar{x}_1$ tötänleýin nokady tapyp, bu nokatdaky $f(\bar{x})$ funksiýanyň $y_1=f(\bar{x}_1)$ bahasyny tapalyň. Soňra edil şonuň ýaly edip $\bar{x}_2$ tötänleýin nokady tapyp, bu nokatdaky $f(\bar{x})$ funksiýanyň bahasyny ($y_2=f(\bar{x}_2)$) tapalyň. Bu bahalaryň kiçisini we funksiýanyň şol kiçi bahasynyň kabul edilýän nokadyny ýatda saklalyň. Soňra täze bir tötänleýin nokady tapyp, şol nokatdaky $f(\bar{x})$ funksiýanyň bahasyny tapalyň. N gezek geçirilen şeýle tejribeden soň, olaryň arasyndan iň gowusyny, ýagny funksiýanyň iň kiçi bahasy kabul edilýän nokady saýlaýarys.

Berlen takyklyk bilen çözüwi (funksiýanyň iň kiçi bahasy kabul edilýän nokady) tapmaga gerek boljak tejribäniň sanyny, ýagny gerek boljak nokatlaryň sanyny bahalandyralyň. Goý, n – üýtgeýän ululyklaryň wektorynyň ölçegi bolsun. n–ölçegli gönüburçlugyň göwrümi:

$$V = \prod_{i=1}^{n} (B_i - A_i)$$

bolar.

Eger berlen meseläniň çözüwini her bir üýtgeýän ululyk boýunça ε_i (i=1, 2,…, n) takyklyk bilen tapmak gerek bolsa, onda biz optimal nokadyň

$$V_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

göwrümli golaý töweregine düşmäge ymtylmalydyrys. Bu golaý töwerege bir synagda düşmegiň ähtimallygy $P_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V}$. Oňa düşmezligiň ähtimallygy 1-P_ε deň. Synaglaryň özara bagly dälligi sebäpli, N gezek geçirilen synagda bu golaý töwerege düşmezligimiziň ähtimallygy $(1-P_\varepsilon)^N$ deň bolar.

N gezek geçirilen synagda (tejribede) biziň çözüwi tapmagymyzyň ähtimallygy:

$$P=1-(1-P_\varepsilon)^N$$

bolar. Bu ýerden berlen takyklyk bilen çözüwi (funksiýanyň iň kiçi bahasy kabul edilýän nokady) tapmaga gerek boljak tejribäniň (synagyň) sanynyň bahalandyrmasynyň

$$N \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-P_\varepsilon)}$$

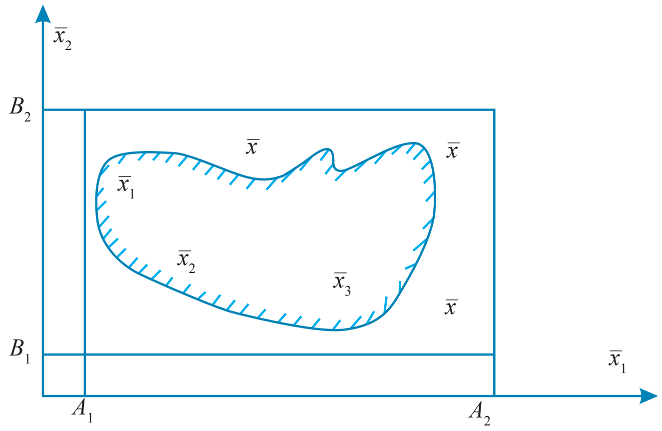
boljakdygy gelip çykýar.

Berlen ε_i (i=1, 2,…, n) takyklyga we V ululyga daýanyp, P_ε ähtimallygy kesgitläp bolar. Şeýle-de P ähtimallygy öňünden berip, oňa we P_ε ähtimallyga görä N synagyň (tejribäniň) sanynyň nähili üýtgeýändigini görmek bolar (*1.1-nji tablisa*).

Has çylşyrymly geometriýaly oblastlardaky ekstremal meseleler çözülende ol oblasty n ölçegli parallelepipediň içine salmaly. Soňra bu n ölçegli parallelepipedde tötänleýin nokatlar deňölçegli paýlaşdyrma kanuny boýunça saýlanyp alynýar we olaryň diňe berlen ýolbererli oblasta degişlilerini saklap galýarys (*1.11-nji surat*).

1.1-nji tablisa

P_ε	P				
0.8	0.9	0.95	0.99	0.999	
0.1	16	22	29	44	66
0.025	64	91	119	182	273
0.01	161	230	299	459	688
0.005	322	460	598	919	1379
0.001	1609	2302	2995	4603	6905



1.11-nji surat. Çylşyrymly oblastdaky ýönekeý tötänleýin gözleg

Gözlegler ugrukdyrylmadyk we ugrukdyrylan tötänleýin gözleg diýen görnüşlere bölünýär.

Ugrukdyrylmadyk tötänleýin gözlegde islendik soňky synaglar öňki synaglaryň netijesine bagly dällikde geçirilýär. Beýle gözlegde ýygnanma haýal bolýar. Ýöne bu usulyň artykmaçlygy onuň kömegi bilen köp ekstremal meseleleri çözmekde mese-mälim ýüze çykýar. Bu gözlege ýokarda seredilen ýönekeý tötänleýin gözleg mysal bolup biler.

Ugrukdyrylan tötänleýin gözlegde islendik dürli synaglar özara biri-biri bilen baglydyrlar. Geçirilen synaglaryň netijeleri soňky synaglary guramakda ulanylýar. Adatça, tötänlik gözlegiň ugry kesgitlenilende ulanylýar. Bu usullarda ýygnanma ýokarydyr, ýöne olar diňe lokal ekstremumlar gözlenende ulanmaga ýaramlydyrlar.

1.7.2. Ugrukdyrylan tötänleýin gözlegiň ýönekeý algoritmi

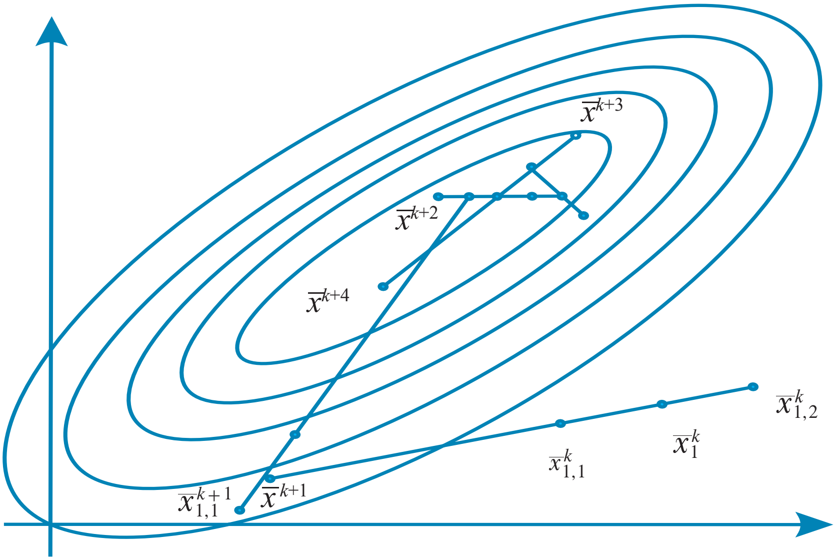
Jübüt synagyň algoritmi. Bu algoritmde synag we iş ädimleri anyk bölünendir (*1.12-nji surat*).

Goý, $\overline{x}^k$ nokat k-njy ädimdäki $f(\overline{x})$ – funksiýanyň kiçi bahasyny berýän nokat bolsun. Deňölçegli paýlaşdyrma kanuny boýunça paýlanan $\overline{\xi}$ tötänleýin wektor saýlanylyp, gözlenýän $\overline{x}^k$ nokadyň iki tarapy boýunça hem synag geçirilýär. Ýagny $f(\overline{x})$ funksiýanyň $\overline{x}^k_{1,2}=\overline{x}^k \pm g\cdot\overline{\xi}$ nokatlardaky bahalary tapylýar. Bu ýerde g – synag ädiminiň ululygy.

Iş ädimi maksat funksiýasynyň kemelýän tarapyna gabat gelýän ugur boýunça alnyp barylýar. Nobatdaky ýakynlaşma aşakdaky deňlik boýunça kesgitlenilýär:

$$\overline{x}^{k+1}=\overline{x}^k+\Delta\overline{x}^k=\overline{x}^k+a\cdot\overline{\xi}\cdot\text{sign}[f(\overline{x}^k-g\cdot\overline{\xi})-f(\overline{x}^k+g\cdot\overline{\xi})].$$

Bu algoritmiň aýratynlygy onuň «tolgunmaga» ýokary meýliniň barlygyndadyr. Ýagny, ekstremum tapylandan soň hem algoritmiň prosesi başga ugra alyp gitmegi mümkin.



1.12-nji surat. Jübüt synagy algoritmi

Iň gowy synagyň algoritmi (*1.13-nji surat*). *k*-njy ädimde biz $\bar{x}^k$-nokady alýarys. *m* sany tötän birlik wektorlary saýlap alalyň: $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_m . g\cdot\bar{\xi}_1, g\cdot\bar{\xi}_2, \ldots, g\cdot\bar{\xi}_m$ ugurlar boýunça synag ädimlerini ädip, $f(\bar{x})$ funksiýanyň $\bar{x}^k+g\cdot\bar{\xi}_1, \bar{x}^k+g\cdot\bar{\xi}_2, \ldots, \bar{x}^k+g\cdot\bar{\xi}_m$ nokatlardaky bahalaryny hasaplaýarys. Ugurlardan bu funksiýa has uly kiçelme berýän $\bar{\xi}^*=\arg\min\limits_{i=1,\ldots,m} f(\bar{x}^k+g\cdot\bar{\xi}_i)$ ugry saýlap alýarys. Şol ugur boýunça:

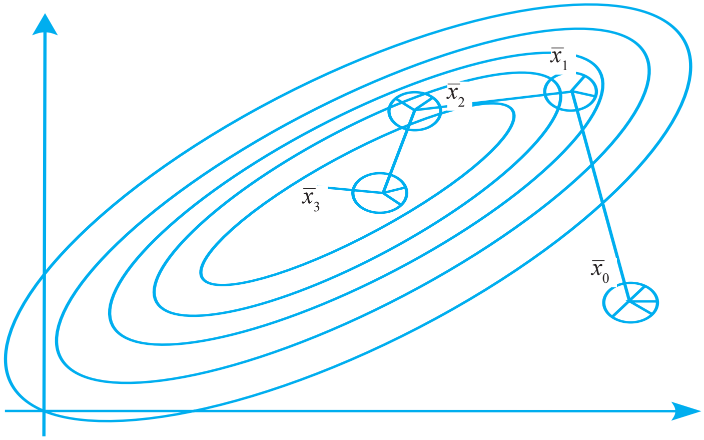
$$\Delta\bar{x}^k=\lambda\cdot\bar{\xi}^*$$

ululyga deň bolan ädim ädýäris.

λ parametr iň gowy synag boýunça minimallaşdyrmanyň netijesinde ýa-da başga kesgitli tertip boýunça kesgitlenýän ugra görä alynýar.

Synaglaryň sanynyň artmagy bilen saýlanan ugur $f(\bar{x})$ gradiýentiň ugruna ýakynlaşýar.

Eger $f(\bar{x})$ funksiýa çyzykly funksiýa ýakyn bolsa, onda iň gowy we iň pes netijeli synaglaryň arasyndan gözlegi çaltlandyrmaga ýardam berýänini saýlamaga mümkinçilik bardyr. Bu ýagdaýda iş ädimini iň gowy netijeli ugra gabat gelýän ugur boýunça ýa-da iň pes netije berýän ugra garşy ugur boýunça ätmek dogry bolar.



1.13-nji surat. Iň gowy synag algoritmi

1.7.3. Statistiki gradiýent usuly

Berlen $\overline{x}^k$ ýagdaýdan m sany tötänleýin ugur boýunça m sany baglanyşyksyz $g\cdot\overline{\xi}_1, g\cdot\overline{\xi}_2,\ldots,g\cdot\overline{\xi}_m$ synaglar edip, alnan nokatlarda funksiýanyň bahasyny hasaplaýarys. Her bir synag üçin funksiýanyň artdyrmasyny ýatda saklaýarys:

$$\Delta f_j = f(\overline{x}_k + g\cdot\overline{\xi}_j) - f(\overline{x}_k).$$

Soňra aşakdaky wektor jemini tapýarys:

$$\Delta\overline{f} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\xi}_j f_j.$$

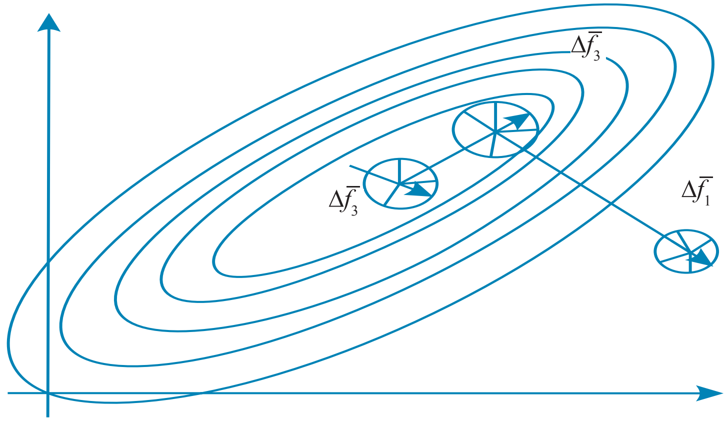
$m\to\infty$ bolanda $\Delta\overline{f}$ wektoryň ugry maksat funksiýasynyň gradiýentiniň ugry bilen gabat gelýär. m tükenikli bolanda $\Delta\overline{f}$ wektor gradiýentiň ugrunyň statistiki bahalandyrmasyny berýär. $\Delta\overline{f}$ wektoryň ugry boýunça iş ädimi ädilýär. Netijede, nobatdaky ýakynlaşma:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \lambda\cdot(\Delta\overline{f})/\|\Delta\overline{f}\|$$

aňlatma boýunça kesgitlener.

Berlen ugur boýunça funksiýany minimallaşdyrýan λ-nyň optimal bahasy kesgitlenende iň çalt inme usulynyň statistiki görnüşini alarys. Determinirlenen (tötänlikleriň ýok bolan) algoritmlerden tapawutlylykda bu usulda iş ädimini $m<n$ bolanda hem saýlamaga mümkinçilik bardyr. $m=n$ bolanda we koordinatalar oklarynyň ugru-

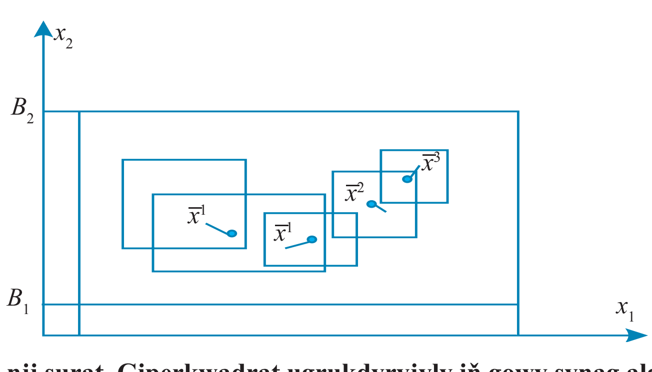
na ugrukdyrylan totänleýin däl ortogonal iş ädimlerinde bu algoritm gradiýent usulyna öwrülýär (*1.14-nji surat*).



1.14-nji surat. Statistiki gradiýent algoritmi

1.7.4. Giperkwadrat ugrukdyryjyly iň gowy synag algoritmi

Ýolbererli oblastyň içinde giperkwadrat gurulýar. Bu giperkwadratyň içinde m sany tötänleýin taşlanan $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ nokatlar alnyp, funksiýanyň şol nokatlardaky bahalary hasaplanylýar. Gurlan nokatlaryň arasyndan iň gowusyny saýlap alýarys. Şeýlelik bilen, giperkwadrat ugrukdyryjyly iň gowy synag algoritminiň 1-nji döwründe tötänleýin nokatlaryň koordinatalary $a_i^1 \leq x_i \leq b_i^1$ i=1, 2,…, n) deňsizlikleri kanagatlandyrýar. Bu ýerde $\overline{x}^1 = \arg\min\limits_{i=1,\ldots,m} \{f(\overline{x}_j)\}$ maksat funksiýasyny minimallaşdyrýan nokat (*1.15-nji surat*).



1.15-nji surat. Giperkwadrat ugrukdyryjyly iň gowy synag algoritmi

Bu nokada daýanyp täze giperkwadrat gurýarys. k-njy ädimde funksiýanyň minimumy gazanylýan nokat (k+1)-nji ädimdäki täze giperkwadratyň merkezi hökmünde alynýar.

(k+1)-nji ädimdäki täze giperkwadratyň depeleriniň koordinatalary aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenilýär:

$$a_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^k}{2}, \qquad b_i^{k+1} = x_i^{k+1} + \frac{b_i^k - a_i^k}{2},$$

bu ýerde x_i^k – k-njy ädimdäki giperkwadratdaky iň gowy nokat (funksiýanyň minimumy gazanylýan nokat).

Tötänlik bilen taşlanan m sany nokatlaryň üsti bilen täze giperkwadratda hem ýokarda beýan edilen amallaryň yzygiderligini gaýtalaýarys. Netijede, giperkwadratlaryň funksiýanyň kemelýän tarapyna ugrukdyrylan orun üýtgetmesi bolup geçýär.

Öwretme äheňli algoritmde giperkwadratlaryň taraplary ýörite girizilen düzgün boýunça ol taraplary üýtgedýän usuly kesgitleýän käbir α parametriň kömegi bilen tertipleşdirilip bilner. Bu ýagdaýda (k+1)-nji ädimdäki täze giperkwadratyň depeleriniň koordinatalary aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenilýär:

$$a_i^{k+1} = x_i^{k+1} - \frac{b_i^k - a_i^k}{2\alpha}, \qquad b_i^{k+1} = x_i^{k+1} + \frac{b_i^k - a_i^k}{2\alpha}.$$

Giperkwadratlaryň taraplaryny tertipleşdirýän dogry saýlanylyp alnan usul gözlegiň netijeli algoritmine getirýär.

Tötänleýin gözleg algoritmlerinde ugrukdyryjy giperkwadratlaryň deregine ugrukdyryjy gipersferalar, ugrukdyryjy giperkonuslar ulanylyp bilner.

1.7.5. Global gözleg algoritmi

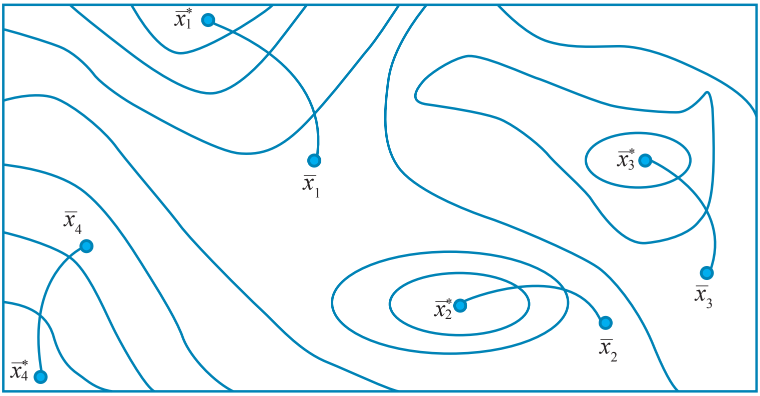
Tötänleýin gözleg köp ekstremumly meseleleri we çylşyrymly desgalar optimallaşdyrylanda aýgytlaýjy orna eýe bolýar. Umumy ýagdaýlarda köp ekstremumly meseleleri çözmek tötänleýin häsiýetli elementleri ulanmazdan mümkin däldir.

Global ekstremumy gözlemegiň käbir çemeleşmelerine seredeliň.

I algoritm. Ýolbererli çözüwleriň D oblastynda tötänlik bilen $\bar{x}_1 \in D$ nokady saýlaýarys. Bu nokady başlangyç nokat hökmünde kabul edip, käbir determinirlenen (tötänleýin häsiýetli elementleri ýok bolan) usullaryň biriniň ýa-da ugrukdyrylan tötänleýin gözlegiň algoritminiň kömegi bilen $\overline{x}_1$ nokadyň töwereginde bolan lokal ekstremumyň $\overline{x}_1^* \in D$ nokadyna inmäni amala aşyrýarys (*1.16-njy surat*).

Soňra täze tötänleýin $\overline{x}_2 \in D$ nokady saýlaýarys we ýokarda beýan edilen usul boýunça onuň töwereginde bolan lokal ekstremumyň $\overline{x}_2^* \in D$ nokadyna inmäni amala aşyrýarys we şuňa meňzeşler.

Gözleg berlen *m* san gezek gaýtalanylanda funksiýanyň öňki lokal minimum bahasyndan kiçi baha tapyp bolmaýan wagtynda togtadylýar.



1.16-njy surat. I algoritm

II algoritm. Goý, lokal ekstremumyň käbir $\overline{x}_1^* \in D$ nokady alnan bolsun. Ondan soň tä $f(\overline{x}_2) < f(\overline{x}_1^*)$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\overline{x}_2$ nokat tapylýança ugrukdyrylan tötänleýin gözlege geçýäris.

$\overline{x}_2$ nokatdan käbir determinirlenen (tötänleýin häsiýetli elementleri ýok bolan) usullaryň biriniň kömegi bilen ýa-da ugrukdyrylan tötänleýin gözlegiň algoritminiň kömegi bilen $f(\overline{x}_2^*)\ ) < f(\overline{x}_1^*)$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\overline{x}_2^*$ nokada geçýäris.

Soňra tötänleýin gözlegiň kömegi bilen $f(\overline{x}_3) < f(\overline{x}_2^*)$ deňsizligi kanagatlandyrýan täze $\overline{x}_3$ nokada geçýäris we ondan lokal ekstremumyň käbir $\overline{x}_3^*$ nokadyna inýäris we ş.m.

Gözleg täze saýlanan tötänleýin nokadyň islendigi üçin funksiýanyň bahasy öňki lokal ekstremumdan uly bolanda togtadylýar we soňky nokat lokal ekstremum çözüwiň deregine kabul edilýär.

III algoritm. Goý, $\overline{x}_1^0 \in D$ käbir başlangyç nokat bolup, ondan lokal ekstremumyň nokadyna inme amala aşyrylýan bolsun. Bu $\overline{x}_1^*$ nokatdan ýa-ha tötänleýin ugra, ýa-da $\overline{x}_1^* - \overline{x}_1^0$ nokada tarap funksiýa ýene-de kemelip başlaýança hereket edýäris (*1.17-nji surat*).

Alnan $\overline{x}_2^0$ nokat indiki gözlegiň başlangyjy hökmünde kabul edilýär. Netijede, lokal ekstremumyň täze $\overline{x}_2^*$ nokadyny taparys.

Eger $f(\overline{x}_2^*) < f(\overline{x}_1^*)$ deňsizlik dogry bolsa, onda $\overline{x}_1^*$ nokat ýatdan çykarylyp, onuň ýerini $\overline{x}_2^*$ nokat eýelär. Eger $f(\overline{x}_2^*) < f(\overline{x}_1^*)$ deňsizlik dogry bolsa, onda $\overline{x}_1^*$ nokada gaýdyp gelip, ondan tötänleýin ugra tarap hereket edýäris.

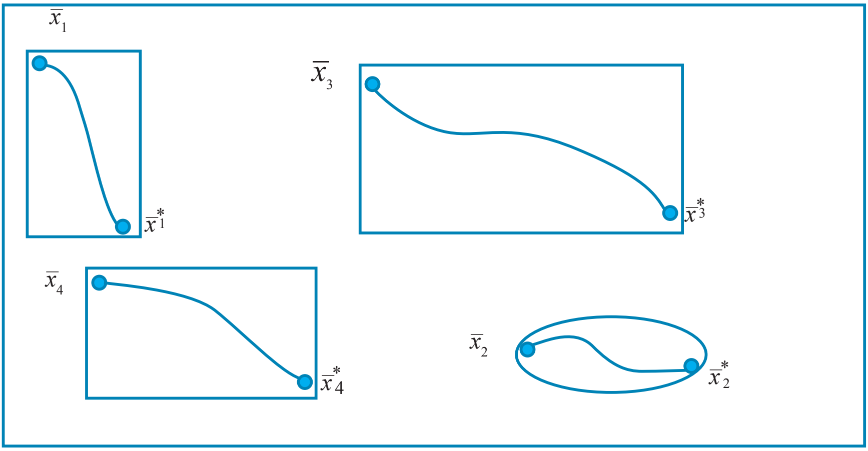
1.17-nji surat. III algoritm

Gözleg öňden berlen sanly synagdan soň täze lokal ekstremum nokadyny saýlamak başarylmadyk ýa-da funksiýanyň bahasy ýene-de kemelip başlaýan «tötänleýin» ugur tapylmadyk ýagdaýynda togtadylýar we soňky nokat lokal ekstremum çözüwiň deregine kabul edilýär.

Beýan edilen algoritm köpbaglanyşykly oblastlarda global ekstremun gözlenilende hem ulanylyp bilner.

IV algoritm. Ýolbererli çözüwleriň D oblastynda m sany tötanleýin nokatlary saýlap alýarys we olaryň arasyndan iň gowusyny, ýagny maksat funksiýasynyň bahasy minimum bolan nokady saýlap alýarys. Sýlanylan nokatdan lokal inmäni amala aşyrýarys. Inmäniň traýektoriýasynyň töweregini oňa gaýdyp gelmez ýaly belgileýäris (*1.18-nji surat*).

Oblastyň galan böleginden ýene-de tötänleýin nokatlaryň toplumyny saýlap alyp, olaryň iň gowusyndan lokal ekstremum nokadyna inýäris. Täze inmäniň traýektoriýasynyň töweregini hem oňa gaýdyp gelmez ýaly belgileýäris we ş.m.



1.18-nji surat. IV algoritm

Gözleg synaglarynyň berlen sanynda lokal ekstremumyň gowusy tapylmadyk ýagdaýynda togtadylýar.

Bellik. Tötänleýin gözleg usullarynyň determinirlenen usullar bilen utgaşdyrylmasy diňe köp ekstremally meselelerde ulanylman, eýsem ol determinirlenen usullarda käbir kynçylyklara, meselem, düwün nokadyna duşulanda hem ulanylyp bilner. Tötänleýin ugra ädilen ädim determinirlenen usullarda duş gelýän çykgynsyz ýagdaýlardan çykmaga hem ýardam berýär.

1. Ýönekeý tötänleýin gözleg usuly näme?
2. Ugrukdyrylan we ugrukdyrylmadyk tötänleýin gözleg usullary nähili kesgitlenilýär we olaryň tapawudy nämeden ybarat?
3. Ugrukdyrylan tötänleýin gözlege mysallar getiriň.
4. Ugrukdyrylmadyk tötänleýin gözlege mysallar getiriň.
5. Statistiki gradiýentler usulynyň algoritminiň aýratynlygy nämeden ybarat?
6. Global gözleg algoritminiň gurluşyna mysallar getiriň.

II bölüm

ÇYZYKLY PROGRAMMALAŞDYRMANYŇ MESELELERI

Matematikanyň ekstremal meseleleri we olary çözmegiň usullarynyny öwrenýän bölümine **matematiki programmalaşdyrma** diýlip at berilýär.

Umuman, ekstremal meseleler maksady görkezýän käbir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýanyň $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$ $(i=1, 2,\ldots,m)$, (f, g_i berlen funksiýalar, b_i belli hakyky sanlar) şertleriň ýerine ýetýän oblastynda iň uly ýa-da iň kici bahasyny tapmaklykdan ybaratdyr.

f, g_i funksiýalaryň görnüşlerine baglylykda matematiki programmalaşdyrma **çyzykly** we **çyzykly däl programmalaşdyrma** bölünýär. Eger bu funksiýalar çyzykly funksiýalar bolsalar, onda degişli meselelere **çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleri** diýilýär. Eger f, g_i funksiýalaryň iň bolmanda biri çyzykly däl funksiýa bolsa, onda degişli meselelere **çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleri** diýilýär.

Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleriniň arasynda has çuň öwrenilenleri **güberçek programmalaşdyrmanyň meseleleridir.** Bu meselelerde maksady görkezýän funksiýa güberçek funksiýa we çäklendirmeleriň oblasty güberçek köplüklerden ybaratdyr. Maksady görkezýän funksiýasynyň görnüşine baglylykda, güberçek programmalaşdyrmanyň meselesi **kwadrat, drob-çyzykly we parametrli, güberçek programmalaşdyrmanyň meselesine** we şulara meňzeşlere öwrülýär.

Häzirki informatikanyň amaly programmalaşdyrma bölüminiň ösüp ýokary mümkinçilikli derejä ýeten döwründe, matematiki programmalaşdyrma adalgasy ylmy dünýäde ýatdan çykma derejesine ýetdi. Indi matematiki programmalaşdyrmanyň çyzykly, çyzykly däl, parametrli we dinamiki programmalaşdyrma bölümleriniň meseleleri öňden bar bolan we ýokary derejede işlenip düzülen usullaryň, kompýuter tilsimatynyň soňky mümkinçilikleri bilen baýlaşdyrylan, seredilýän meseleleriň degişli ylmy pudaklarynyň çäklerinde alnyp barylýar. Matematiki programmalaşdyrmanyň has çuň özleşdirilen we giňden peýdalanylýan bölümi çyzykly programmalaşdyrmadyr. Onuň esasy meseleleriniň nusgawy görnüşleriniň ykdysadyýetden alnandygy sebäpli, onuň usullary ykdysadyýetde giňden ulanylýar. Çyzykly programmalaşdyrmada seredilýän meselelerdäki ahyrky maksat käbir, öz argumentlerine çyzykly bagly funksiýanyň çyzykly deňlemeler ýa-da deňsizlikler ulgamy görnüşindäki çäklendirmeleriň ýerine ýetýän şertlerindäki optimal (iň uly ýa-da iň kiçi) bahasyny tapmaklyga getirilýär.

§ 2.1. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerine mysallar

Islendik ykdysady mesele matematikanyň usullarynyň kömegi bilen çözülende ilki ykdysady meseläniň talaplary matematiki baglanyşyklaryň üsti bilen aňladylýar. Ykdysady manysy bolan nusgawy meseleleriň käbirine seredip geçeliň.

2.1.1. Harajatlary ýerlikli peýdalanmak meselesi

Goý, käbir ykdysady pudak (kärhana-zawod, fabrik) n dürli önüm öndürýän bolsun. Bu önümleri öndürmekde peýdalanylýan R_1, R_2, ..., R_m görnüşdäki harajatlaryň (işçi güýji, çig mal, gurallar we şuňa meňzeşler) mukdarlary, degişlilikde b_1, b_2, ..., b_m bolsun. Şu harajatlardan T_1, T_2, ..., T_n görnüşdäki harytlary öndürmeli bolsun. Bir birlik T_j harydy öndürmek üçin hökmany R_i harajatdan a_{ij} birlik önüm gerek diýip hasap edeliň (i=1, 2,…,m) (j=1, 2,…,n).

Goý, T_j harydyň bir birliginiň bahasy C_j, R_i harajadyň bir birliginiň bahasy d_i bolsun. Bazar her T_j görnüşli harytdan k_j mukdaryny göterýär diýip hasap edeliň. Ýagny, T_j görnüşli harydyň k_j-den köp öndürilmegi maksada laýyk däl.

Bu meseläni matematiki dile geçireliň. Goý, T_1, T_2, ..., T_n harytlaryň öndürilmeli mukdary, degişlilikde x_1, x_2, ..., x_n bolsun. Onda, bazaryň talabyna görä aşakdaky şertler ýerine ýeter:

$$x_1 \le k_1,\ x_2 \le k_2,\ ...,\ x_n \le k_n. \qquad (1)$$

Harajatlaryň mukdary T_1, T_2, ..., T_n önümleri taýýarlamaga ýetmeli. Meselem, T_1, T_2, ..., T_n önümleri öndürmek üçin R_1 harajatdan jemi sarp edilen mukdary aşakdaky şerti kanagatlandyrar:

$$a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1.$$

Beýleki harajatlardan sarp ediljek mukdarlaryny göz öňüne tutsak, aşaky ulgamy ýazyp bolar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \quad ... \qquad .... \qquad ... \qquad\quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

T_j önümiň bir birligini öndürmek üçin edilýän çykdajy (harydyň özüne düşýän gymmaty) S_j diýsek, onda ol:

$$S_j = a_{1j}\,d_1 + a_{2j}\,d_2 + ... + a_{mj}\,d_m \qquad (3)$$

bolar. T_j önümiň bir birligini ýerlemekden girýän arassa girdeji

$$q_j = c_j - s_j \qquad (4)$$

bolar. Hemme harytlary ýerlemekden girýän girdeji

$$L = q_1\,x_1 + q_2\,x_2 + ... + q_n x_n \qquad (5)$$

diýsek, seredilýän mesele (1) we (2) çäklendirmeleri kanagatlandyrýan

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0$$

(otrisatel däl) çözüwleriň içinden (5) funksiýany maksimuma öwürýän çözüwi tapmaklyga getirilýär.

2.1.2. Iýmit garyndysyny taýýarlamak meselesi

Iýmit garyndysyny taýýarlamak hakdaky meseleleriň toplumy, esasan berlen önümlerden talap edilýän häsiýetlere eýe bolan iň arzan önümi-garyndyny taýýarlamakdan ybaratdyr.

Goý, $Ö_1$, $Ö_2, \ldots, Ö_n$ görnüşdäki önümlerden iýmit garyndysyny taýýarlamak talap edilsin. Bu önümleriň bir birliginiň bahasy, degişlilikde $c_1, c_2,\ldots,c_n$ bolsun. Şu önümlerden aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan iň arzan bahaly iýmit garyndysyny taýýarlamaly.

Garyndynyň düzüminde: B_1 görnüşli madda (meselem, belok) b_1 ululykdan, B_2 görnüşli madda (meselem, uglewod) b_2 ululykdan, B_3 görnüşli madda (meselem, ýag) b_3 we şolara meňzeş, B_m görnüşli madda (komponent) b_m ululykdan az bolmaly däl.

$\ddot{O}_1, \ddot{O}_2,\ldots,\ddot{O}_n$ görnüşdäki önümleriň her birligindäki belogyň, uglewodyň, ýagyň we beýleki maddalaryň mukdarlary *2.1-nji tablisada* berlen.

2.1-nji tablisa

Önümler	Önümleriň bir birliginiň bahasy	Maddalar				
		B_1	B_2	B_3	...	B_m
$\ddot{O}_1$	c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1m}
$\ddot{O}_2$	c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2m}
…	...	…	…	…	...	...
$\ddot{O}_n$	c_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	a_{nm}
Garyndydaky maddalaryň zerur mukdary		b_1	b_2	b_3	...	b_m

Berlen meseläniň matematiki modelini düzeliň. Garyndy taýýarlamak üçin $\ddot{O}_1, \ddot{O}_2,\ldots,\ddot{O}_n$ görnüşdäki önümlerden alnan mukdarlary degişlilikde $x_1, x_2,\ldots,x_n$ diýip belgilesek, onda çäklendiriji şertler aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + ... + a_{n1}x_n \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + ... + a_{n2}x_n \geq b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{n3}x_n \geq b_3, \\ \ldots \; \ldots \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \ldots \ldots \; \ldots \ldots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_3 + ... + a_{nm}x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0.$$

Garynda sarp edilýän çykdajy:

$$L=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+...+c_nx_n \tag{7}$$

4. Sargyt № 2463

bolar. Diýmek, iýmit garyndysyny taýýarlamak meselesi (6) deňsizlikler ulgamynyň $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ (otrisatel däl) çözüwini tapmaklyga getirildi. Bu çözüwleriň içinden (7) funksiýany minimuma öwürýän çözüwini gözlemeli. Bu diýildigi iň az çykdajy talap edýän, (6) şerti kanagatlandyrýan iýmit garyndysyny taýýarlamak gerek diýmekdir.

2.1.3. Ulag meselesi

Goý, birmeňzeş ýükleri bolan m sany $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ugradyjy nokatlar we bu ýüklere isleg bildirýän n sany $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sarp (kabul) ediji nokatlar berlen bolsun. Bu nokatlar özara haýsy hem bolsa bir ýol bilen birikdirilen diýeliň. Ugradyjy nokatlaryň ýükleriniň mukdary degişlilikde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bolsun. Sarp ediji nokatlaryň isleg bildiren ýükleriniň mukdary degişlilikde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bolsun. Ugradyjy nokatlardan sarp ediji nokatlara ýük daşamaklygyň iň az çykdajyly meýilnamasyny tapmak meselesine **ulag meselesi** diýilýär. Ugradyjy nokatlaryň ýükleriniň jemi mukdary sarp ediji nokatlaryň isleg bildiren ýükleriniň jemi mukdaryna deň bolsun. Bu ýagdaý ulag meselesiniň

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8}$$

görnüşli balans şerti ýerine ýetirýän nusgasyna degişlidir. (8) şerti ýerine ýetirýän ulag meselesine **ulag meselesiniň ýapyk (dogry balansly) modeli** diýilýär. A_i-den B_j-e bir birlik ýüki daşamak üçin çykdajy c_{ij} bolsun (i=1, 2,…,m) (j=1, 2,…,n). Az çykdajy edip, ugradyjy nokatlaryň haýsysyndan haýsy sarp ediji nokatlara näçe mukdarda ýük ugratmaklygyň meýilnamasyny düzmeli. Ulag meselesiniň matematiki modelini ýazalyň.

x_{ij} bilen A_i-den B_j-e ugradylan ýüküň mukdaryny belgilesek, onda aşakdaky ulgam alnar:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \tag{9}$$

Edil ýokardaky ýaly edip, sarp ediji nokatlaryň isleg bildiren ýükleriniň mukdarlarynyň, degişlilikde b_1, b_2, ..., b_n bolýandygyny göz öňünde tutsak:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{cases} \tag{10}$$

deňlemeler ulgamyny alarys. Ýükleri daşamaklyga çykarylýan umumy çykdajy:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{11}$$

bolar. Diýmek, (8) şert bilen (9) we (10) şertleri kanagatlandyrýan otrisatel däl ($x_{ij} \geq 0$) bu meýilnamalaryň içinden (11) çyzykly funksiýany minimuma öwürýän meýilnamany tapmaly.

Biz çyzykly programmalaşdyrmanyň has köp duş gelýän üç sany nusgawy meselesiniň matematiki modellerini gurduk. Bu meselelerde duş gelýän funksiýalar ýa-da baglanyşyklar çyzykly funksiýalaryň üsti bilen berildi. Bu meselelerden görnüşi ýaly, deňlemeler ýa-da deňsizlikler görnüşdäki çäklendiriji şertlerde çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň maksadyny görkezýän funksiýanyň maksimumy (bu ýerde iň uly bahasy göz öňünde tutulýar) ýa-da minimumy (iň kiçi bahasy) tapylýar. Seredilen meselelerden görnüşi ýaly, çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi aşakdaky üç bölekden ybarat:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n * b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n * b_m; \end{cases} \tag{12}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n + c_0 \rightarrow \text{optimum}. \tag{14}$$

(12)–(13) ulgama çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň **çäklendiriji şertler toplumy** diýilýär. (14) funksiýa çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň **maksat funksiýasy** diýilýär. (12) ulgamda «*» belginiň ýerine «=», «≥», «≤» alamatlaryň bolmagy mümkin. Bu alamatlaryň garyşyk görnüşde bolmagy hem mümkin.

Çyzykly programmalaşdyrmada gözegçilik edilýän ulgamyň matematiki modeli (12), (13) ýaly çyzykly aňlatmalaryň we (14) görnüşli funksiýalaryň üsti bilen berilýär. Matematiki modeli çyzykly aňlatmalaryň ýa-da çyzykly funksiýalaryň üsti bilen aňladylan (12)-(14)-görnüşdäki meselelere **çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi** diýilýär.

§ 2.2. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi

Eger çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesinde (12) çäklendirmeler deňlemeler görnüşinde bolup, maksady görkezýän (14) funksiýanyň iň kiçi bahasy gözlenilýän bolsa, onda oňa **çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi** (ÇPEM) diýilýär. Diýmek, çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesinde çäklendiriji şertler deňlemeler görnüşinde berlen, ýagny:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{15}$$

bolup, olary kanagatlandyrýan otrisatel däl ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$) çözüwleriň arasyndan:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \to \min \tag{16}$$

şerti kanagatlandyrýan çözüwi tapmak gerek bolsa, onda ol çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesidir.

2.1-nji kesgitleme. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň (15) – deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ otrisatel däl çözüwine onuň **ýolbererli çözüwi** diýilýär.

2.2-nji kesgitleme. (15) deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan ýolbererli çözüwleriň içinden (16) funksiýany minimuma öwürýän çözüwe **optimal (iň amatly) çözüw** diýilýär.

Diýmek, çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň çözüwi onuň ýolbererli çözüwleriniň içinden gözlenýär. Eger (15) ulgamy kanagatlandyrýan çözüwleriň içinde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ (otrisatel dällik) şerti kanagatlandyrýan çözüwler ýok bolsa, onda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň çözüwi ýok.

Ilki bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň islendik meselesini (çäklendirmeleriň ulgamy dürli deňsizlik görnüşinde bolanda) çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getirip bolýandygyny belläliň. Umumylygy bozman, turuwbaşdan (12) çäklendirmeler ulgamynda b_i (i=1, 2,…,m) azat agzalaryň ählisi otrisatel däl ($b_i \geq 0$, i=1, 2,…,m) diýip hasap edip bileris. Eger ulgamda bu şert ýerine ýetmeýän deňsizlik bar bolsa, onda ony (-1)-e köpeltmek ýeterlikdir. Eger çäklendirme ≥ (≤) görnüşli deňsizlik bolsa, onda onuň çep tarapyndan täze goşmaça girizilen näbellini aýryp (goşup), ony deňleme görnüşine getirip bolar. Eger maksady görkezýän L (14) funksiýanyň iň uly bahasy gözlenýän bolsa, onda ony (-L) bilen çalşyp, çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getireris. Aýdylanlardan çyzykly programmalaşdyrmanyň islendik görnüşli meselesini çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getirip bolýandygy gelip çykýar. Şol sebäpli, çyzykly programmalaşdyrmanyň islendik görnüşli meselesini çözmek üçin ilki bilen ony çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getirip, alnan meseläni çözmegi başarmak ýeterlikdir.

Indi (15) deňlemeler ulgamynyň çözüwleri hakyndaky Kronekeriň-Kapelliniň teoremasyny ýatlalyň. Oňa laýyklykda, eger:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

görnüşde (15) deňlemeler ulgamynyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen esasy matrtisa diýilýän A matrisanyň we oňa deňlemeler ulgamynyň azat agzalarynyň sütüni goşulyp alnan B matrisanyň ranglary deň däl bolsa, onda (15) deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur. Bu ýagdaýda (15) deňlemeler ulgamynyň deňlemeleriniň käbirisi beýlekilerine garşylyklydyr. Diýmek, bu ýagdaýda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň hem çözüwi ýokdur. Eger bu matrisalaryň ranglary deň bolsa, ýagny $r_A = r_B$, onda (15) deňlemeler ulgamynyň çözuwi bar (ol kökdeş). Eger şol çözüwleriň arasynda otrisatel dällik şertini kanagatlandyrýan çözüwler bar bolsa, onda bu ýagdaýda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi boş köplük däl. Bu ýagdaýda matrisalaryň rangy $r \leq n$ ýa-da $r \leq m$ we ol (15) ulgamdaky çyzykly bagly däl deňlemeleriň sanyny görkezýär. $r=n$ ýagdaýda, ýagny çyzykly bagly däl deňlemeleriň sany näbellileriň sanyna we A matrisanyň rangyna deň ýagdaýynda ($\Delta = \det A \neq 0$) (15) ulgamdaky deňlemeleriň çyzykly kombinasiýasyndan durýan deňlemeleri taşlasak, onda (15) aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{17}$$

Seredilýän ýagdaýda (17) ulgamyň ýeke-täk cözüwi bar. Eger-de bu çözüw ýolbererli bolsa, onda ol çözüw optimaldyr. Eger ol ýolbererli çözüw däl bolsa, onda bu ýagdaýda hem çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň çözüwi ýokdur. $r<n$ bolanda çyzykly bagly däl deňlemeler näbellileriň sanyndan az. Bu ýagdaýda (15) deňlemeler ulgamy tükeniksiz köp çözüwe eýe. Sebäbi, bu ýagdaýda x_1, x_2, ..., x_n näbellileriň n-r sanysy **azat üýtgeýän ululyklar**, galanlary **bazis ululyklar** bolar. Bazis üýtgeýän ululyklar hökmünde koeffisiýentlerinden düzülen matrisanyň kesgitleýjisi nolgan tapawutly bolan islendik r sany üýtgeýän ululyklary alyp bolar. Ýönekeýlik üçin (15)-de $r=m$ diýeliň ($r=m<n$). Umumylygy bozman, bazis üýtgeýän ululyklar ilkinji x_1, x_2, ..., x_m-ler bilen gabat gelýär diýip hasap edip bileris. Bazis üýtgeýän ululyklary deňlemeleriň çep tarapynda goýup, azat üýtgeýän ululyklary deňlemeleriň sag tarapyna geçirip, deňlemeler ulgamyny aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - \dots - a_{mn}x_n, \end{cases}\right\} \tag{18}$$

(18) ulgamy bazis ululyklara görä çözüp, olary azat üýtgeýän ululyklaryň üsti bilen aňlatmak bolar. Azat üýtgeýän ululyklaryň islendik

otrisatel däl bahalary alyp bilýändigi sebäpli, alnan (18) deňlemeler ulgamynyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Ol çözüwleriň arasynda azat üýtgeýän ululyklaryň bahalaryny nola öwrüp alnan çözüwlere çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň **bazis çözüwleri** diýilýär.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini has gysga görnüşde hem ýazyp bolar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1, 2, ..., m)$$

deňlemeler ulgamynyň $x_j \geq 0$ (j=1, 2, .., n) şerti kanagatlandyrýan we:

$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ çyzykly funksiýany optimal baha getirýän $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, çözüwini tapmaly.

Eger m ölçegli giňişligiň:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad ... \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

wektorlaryny girizsek, onda (15) deňlemeler ulgamyny bir wektor deňlemesi görnüşinde ýazyp bileris:

$$A_1x_1+A_2x_2+...+A_nx_n=P. \qquad (19)$$

Kähalatlarda (15) deňlemeler ulgamyny aşakdaky matrisa görnüşde hem yazýarlar:

$$AX=P.$$

Bu ýerde A (15) deňlemeler ulgamynyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen matrisa,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, degişlilikde näbellileriň we azat agzalaryň sütün matrisalarydyr.

Girizilen belgilemelerde (15) deňlemeler ulgamynyň deňlemeleriniň çyzykly bagly däldigi A_1, A_2,…, A_n wektorlaryň arasynda diňe m sanysynyň çyzykly bagly däldigini aňladýar.

2.3-nji kesgitleme. Eger (19) dargatma girýän $A_1, A_2,\dots, A_m$ wektorlar çyzykly bagly däl bolsalar, onda položitel düzüm bölekleri bolan X wektora çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň **daýanç çözüwi** diýilýär.

§ 2.3. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy teoremalary

Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň tükeniksiz çözüwleriniň arasyndan optimal çözüwini nädip tapmaly? Bu soraga jogap bermek üçin çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy teoremalaryny teswirläliň.Onuň üçin $n-$ölçegi giňişligiň nazaryýetine degişli käbir kesgitlemeleri girizeliň:

2.4-nji kesgitleme. Jemi 1-e deň bolan $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n$ ortisatel däl sanlar üçin n-ölçegi giňişligiň $X_1, X_2,\dots, X_n$ wektorlarynyň (nokarlarynyň) $\alpha_1 X_1+ \alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n$ çyzykly kombinasiýasyna olaryň **güberçek çyzykly kombinasiýasy** diýilýär.

2.5-nji kesgitleme. Eger köplük özüniň islendik iki wektory (nokady) bilen bilelikde olaryň güberçek çyzykly kombinasiýasyny özünde saklaýan bolsa, onda oňa **güberçek köplük** diýilýär.

2.6-njy kesgitleme. Eger güberçek köplügiň nokady bu köplüge degişli iki sany nokadyň güberçek çyzykly kombinasiýasy görnüşinde ýazylyp bilinmese, onda oňa **burç nokad**y diýilýär.

2.1-nji teorema. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi güberçek köplükdir.

Subudy. Goý, mesele iň bolmanda iki sany X we Y çözüwlere eýe diýeliň. Onda $AX=P$ we $AY=P$ bolar. Eger $0\leq\alpha\leq1$ bolsa, onda $Z=\alpha X+(\alpha-1)Y$ n-ölçegi giňişlikde X we Y wektorlaryň güberçek kombinasiýalary bolarlar.

$Z=\alpha X+(\alpha\text{-}1)Y$ wektor $AX=P$ deňlemeler ulgamynyň çözüwidir. Hakykatdan hem,

$$AZ=A(\alpha X+(\alpha-1)Y)=\alpha AX+(\alpha-1)AY=\alpha P+(1-\alpha)P=\alpha P+P-\alpha P=P.$$

Diýmek, $AZ=P$, ýagny Z deňlemeler ulgamynyň çözüwi ekeni. $Z=\alpha X+(\alpha-1)Y$ wektoryň koeffisiýentleriniň otrisatel däl bolany üçin onuň ähli komponentleri otrisatel däldir. Şeýlelikde, ol meseläniň ýolbererli çözüwidir. Bu bolsa teoremany subut edýär.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi tükenikli çäklendirmeleriň (deňsizlikleriň ýa-da deňlemeleriň) kömegi bilen kesgitlenýär. Olaryň çözüwleri bolsa $n-$ölçegli giňişlikde ýarym giňişlikleri ýa-da gipertekizlikleri emele getirýärler. Şonuň üçin çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi, geometriýanyň dili bilen aýdylanda, güberçek köpgranlygy emele getirýär. Güberçek köpgranlyk tükenikli sanly burç nokatlara (depelere) eýedir.

2.2-nji teorema. Eger çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň ýeke-täk optimal çöwüwi bar bolsa, onda ol ýolbererli çözüwler köplügüniň burç nokatlarynyň biri bilen gabat gelýär.

Subudy. Goý, X_0 çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň optimal çöwüwi bolsun, onda $LX_0=L_{\min}$ bolar. Bu bolsa, islendik X_i çözüw üçin $LX_0 \leq LX_i$ bolýandygyny aňladýar. Eger X_0 ýolbererli çözüwler köplügüniň burç nokatlarynyň biri bilen gabat gelýän bolsa, onda teorema subut bolar. Eger ol ýolbererli çözüwler köplüginiň K_1, K_2, ..., K_s burç nokatlarynyň hiç biri bilen gabat gelmeýän bolsa, onda ony bu nokatlaryň güberçek kombinasiýasy hökmünde ýazyp bolar, ýagny şeýle $\alpha_j \geq 0$ (j=1, 2, ..., s, $\alpha_1+ \alpha_2+...+\alpha_\delta=1$) sanlar tapylyp:

$$X_0=\alpha_1 K_1+\alpha_2 K_2+...+\alpha_s K_s$$

görnüşde ýazyp bolar. K_1, K_2, ..., K_s nokatlaryň deregine degişli X_j çözüwleri ulanyp we L funksiýanyň çyzyklydygyndan peýdalanyp, alarys:

$$LX_0=L(\alpha_1 K_1+\alpha_2 K_2+...+\alpha_s K_s)=\alpha_1 LX_1+\alpha_2 LX_2+...+\alpha_s LX_s.$$

$\alpha_j \geq 0$ bolany sebäpli LX_i-leri olaryň iň kiçi bahalary bilen çalyşsak jem artmaýar. Goý, olaryň iň kiçisi LX_2 bolsun. Onda:

$$LX_0=\alpha_1 LX_1+\alpha_2 LX_2+...+\alpha_s LX_s \geq \alpha_1 LX_2+\alpha_2 LX_2+...+\alpha_s LX_2=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_s)LX_2=LX_2.$$

Şerte görä ähli çözüwler üçin $LX_0 \leq LX_i$ bolmaly. Diýmek, $LX_0 \leq LX_2$. Alnan netijä görä $LX_0 \geq LX_2$, bu ýerden $LX_0 = LX_2$ bolýandygy gelip çykýar. Diýmek X_2 wektor (K_2 burç nokady) optimal çözüw bolar. Teorema subut edildi.

Bu teoremadan çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini çözmek üçin onuň optimal çözüwini ýolbererli çözüwler köplüginiň tükenikli burç nokatlarynyň arasyndan gözlemelidigi gelip çykýar. Bu işi amala aşyrmak ýolbererli çözüwler köplügini gurmak mümkinçiligi bar halatynda mümkindir. Bu bolsa umumy ýagdaýda mümkin däldir.

Aşakdaky teoremalary subutsyz kabul edeliň:

2.3-nji teorema. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň her ýolbererli bazis çözüwine (daýanç çözüwine) ýolbererli çözüwler köplügininiň burç nokady degişlidir.

2.4-nji teorema (ters teorema). Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýolbererli çözüwler köplüginiň burç nokadynyň her birine ýolbererli bazis çözüwi (daýanç çözüwi) degişlidir.

Netije. Eger çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýeke-täk optimal çözüwi bar bolsa, onda ol ýolbererli bazis çözüwleriň (daýanç çözüwleriň) biri bilen gabat gelýär.

Soraglar we ýumuşlar

1. Matematiki programmalaşdyrma näme?
2. Çyzykly programmalaşdyrmanyň aýratynlyklary nämeden ybarat?
3. Harajatlary dogry peýdalanmak meselesini teswirläň.
4. Iýmit garyndysyny taýýarlamak meselesini düşündiriň.
5. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň kesgitlemesini aýdyň.
6. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň kesgitlemesini düşündiriň.
7. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň kesgitlenişi nähili?
8. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwiniň kesgitlenişini düşündiriň.
9. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň bazis çözüwleriniň kesgitlenişini aýdyň.
10. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy teoremalaryny düşündiriň.

2.1-2.12-nji mysallarda çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesie getirmeli:

2.1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

2.2.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2 \leq x_1 \leq 5, \\ 1 \leq x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$L=x_1+2x_2$ (max).

$L=2x_1+x_2$ (max).

2.3.

$$\begin{cases} x_1-2x_2\le 4, \\ -x_1+2x_2\le 4, \\ x_1+2x_2\le 6, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=x_1+2x_2$ (max).

2.4.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\ge 6, \\ 3x_1-2x_2+7\ge 0, \\ 2x_1-4x_2\le 8, \\ x_1-1\ge 0, \\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=3x_1+4x_2$(max).

2.5.

$$\begin{cases} x_1-x_2+4\le 0, \\ x_1+x_2\le 2, \\ x_1-1\le 0, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=x_1+7x_2$ (max).

2.6.

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 6, \\ x_1-2x_2\le 0, \\ 2x_1-4x_2\le 8, \\ 1\le x_1\le 3, \\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=x_1-x_2$ (min).

2.7.

$$\begin{cases} x_1-2x_2-2\le 0, \\ x_1+2x_2\ge 3, \\ x_1+2x_2-6\le 0, \\ x_1-x_2\ge 0, \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=x_1-3x_2$ (min).

2.8.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4\ge 0, \\ 2x_1+x_2\ge 4, \\ x_1-x_2+4\ge 0, \\ x_1+x_2\ge 6, \\ x_1-4\le 0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=x_1+x_2$ (min).

2.9.

$$\begin{cases} x_1+x_2-4\ge 0, \\ -2x_1+6x_2\ge -12, \\ x_1-2\ge 0, \\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=2x_1$-$6x_2$ (min).

2.10.

$$\begin{cases} x_1-2x_2-4\le 0, \\ x_1+x_2\ge 3, \\ x_1+x_2-7\ge 0, \\ x_1-2\le 0, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0; \end{cases}$$

$L=2x_1-x_2$ (max).

2.11.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+6x_3\le 12, \\ 3x_1+5x_2-12x_3=14, \\ -3x_1+6x_2+4x_3\le 18, \end{cases}$$

$L=-2x_1-x_2$

2.12

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3\le 12, \\ 6x_1-3x_2+4x_3=18, \\ 3x_1+3x_2-2x_3\ge 16, \end{cases}$$

$L=-2x_1+x_2+5x_3$ (min).

§ 2.4. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň geometriki çözülişi

Bu paragrafda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň çözülişiniň geometriki usulyna seredeliň. Bu usul çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözülişiniň aýdyň mysalydyr we özüniň ýönekeýligi bilen tapawutlanýar. Goý, çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi berlen bolsun:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \; \cdots \quad \cdots \quad \cdots \; \cdots \; \cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{20}$$

$$x_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \text{ (min).} \tag{21}$$

Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meseleleriniň geometrik çözülişine seredeliň. Ilki bilen ýolbererli çözüwleriň köplügini (*ÝÇK*) tapalyň.

Goý, rang $A=r=m$ bolsun. Ilki bilen iň ýönekeý ýagdaýa, ýagny n-m=2 bolýan ýagdaýa seredeliň. Näbellileriň sany deňlemeleriň sanyndan iki birlik artyk. Bu ýagdaýda iki sany näbelli azat, galan näbelliler bazis ululyklar bolar. Umumylygy bozman, x_1 we x_2 – azat ululyklar diýsek, x_3, x_4, ..., x_n – näbelliler bazis ululyklar bolar. Bazis ululyklary azat ululyklaryň üsti bilen aňladalyň. Onda (20) ulgam aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \\ \cdots \quad \cdots \; \cdots \quad \cdots \quad \cdots \; \cdots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \end{cases} \tag{22}$$

Deňlemeleriň sany m=n-2 deň. Ilki bilen ýolbererli çözüwleriň köplügini tapalyň. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ bolany üçin

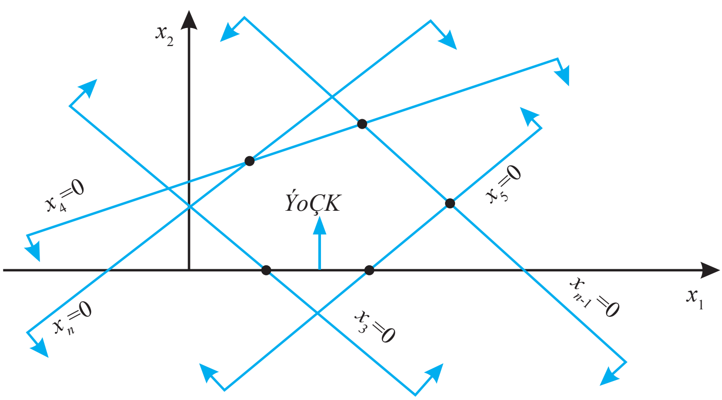
$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0, \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

bolar.

$\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\beta_3=0$ deňleme x_1Ox_2 tekizlikdäki göni çyzygyň deňlemesidir. Şonuň üçin (23) ulgamyň her bir deňsizligi x_1Ox_2 tekizlikde bir ýarym tekizligi kesgitlär. Ony guralyň.

$$x_3=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\beta_3\geq 0$$

deňsizlikden x_3 ululygyň iň kiçi bahasynyň nola deňdigi görünýär. $x_3=0$ deňlemäni kanagatlandyrýan göni çyzygyň bir tarapynda $x_3>0$, beýleki tarapynda $x_3<0$. Indi $x_3>0$ tarapy saýlamak gerek. Çyzgyda $x_3>0$ tarap peýkamlar bilen görkezilen (*2.1-nji surat*):

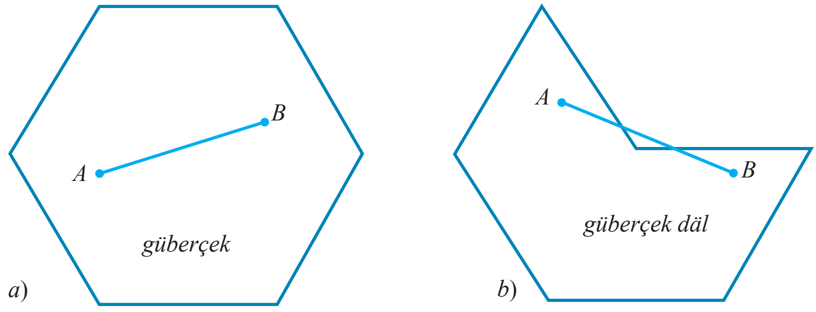


2.1-nji surat

2.4.1. Ýolbererli çözüwleriň köplügi

Edil ýokardaky pikir ýöretmäni dowam etdirsek, (23) ulgamdaky beýleki deňsizlikleriň emele getirýän ýarym tekizliklerini hem $x_4=0$, $x_5=0,\dots,$ $x_n=0$ deňlemeleri kanagatlandyrýan göni çyzyklaryň $x_1\geq 0, x_2\geq 0,\dots, x_n\geq 0$ deňsizlikleriň ýerine ýetýän tarapy hökmünde alarys. Hemme ýarym tekizlikleriň kesişmesini tapalyň. Bu kesişmeden emele gelýän köpburçluk ýolbererli çözüwleriň köplügini (oblastyny) berer (*2.1-nji surat*). Bu köplük güberçek köplükdir. Tekizlikde güberçek köplügiň kesgitlemesini ýatlalyň:

2.7-nji kesgitleme. Eger köplügiň islendik iki nokadyny birleşdirýän kesimiň ähli nokatlary şu köplüge degişli bolsa, onda bu köplüge **güberçek köplük** diýilýär. Bu kesgitleme has umumy 2.5-nji kesgitleme bilen deň güýçlüdir.



2.2-nji surat

Güberçek köplükleriň möhüm häsiýetini ýatlalyň:

2.5-nji teorema. Iki güberçek köplügiň kesişmesi hem güberçek köplükdir.

Subudy. Goý, M_1 we M_2 iki köplük güberçek bolsunlar. Eger olaryň kesişmesi boş ýa-da bir nokatdan ybarat köplük bolsa, onda teoremanyň tassyklamasy dogrudyr. Şol sebäpli olaryň kesişmesine iň bolmanda iki A we B nokatlar degişli diýip hasap edip bolar. Eger olar kesişmäniň islendik iki nokady bolsa, onda olar M_1 we M_2 köplükleriň ikisine hem degişlidirler. Şert boýunça M_1 we M_2 köplükleriň güberçek köplükdikleri sebäpli olara A we B nokatlar bilen bilelikde AB kesimiň ähli nokatlary degişlidir. Diýmek M_1 we M_2 köplükleriň kesişmesi A we B nokatlar bilen bilelikde AB kesimiň ähli nokatlaryny özünde saklaýar. Şol sebäpli ol güberçekdir (*2.2-nji a surat*).

Matematiki induksiýa usulynyň kömegi bilen tükenikli sanly güberçek köplükleriň kesişmesiniň hem güberçek köplük bolýandygyny görkezip bolar.

Ýarym tekizlikler güberçek köplükleriň aýdyň mysalydyr. Diýmek, çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meseleleriniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi hem güberçek köplükleriň kesişmesi hökmünde güberçek köpburçlugy emele getirýär. Bu tassyklama çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy teoremalaryndan hem gelip çykýar.

2.13-nji mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamynyň ýolbererli çözüwleriniň köplügini tapmaly:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 1 + 3x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 4 + x_1 + x_2, \\ x_6 = 5 - x_2, \\ x_7 = - x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6. \end{cases}$$

$n=7$, $m=5$, $n-m=2$ bolýar. Goý, x_1 we x_2 – azat üýtgeýän ululyklar, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 – bazis ululyklar bolsun. Bazis ululyklary x_1 we x_2 – azat üýtgeýän ululyklaryň üsti bilen aňladyp alarys:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 1 + 3x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 4 + x_1 + x_2, \\ x_6 = 5 - x_2, \\ x_7 = - x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6. \end{cases}$$

Çözüwleriň ýolbererli bolmagy üçin: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$ bolmaly. Bu näbellileri nola deňläp, degişli göni çyzyklaryň grafiklerini guralyň: *OABCDE* köpburçlugyň hemme nokatlarynda:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0.$$

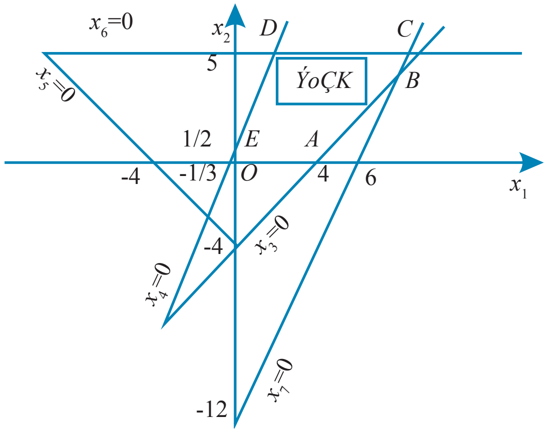
Köpburçlugyň islendik nokady ýolbererli çözüwdir (*2.3-nji surat*).

Ýolbererli çözüwleriň içinden iň oňaýly, optimal çözüwi nähili tapmaly? Ýagny L_{min}-i berýän nokady nähili tapmaly? Optimal çözüwi tapmak üçin ilki bilen (21) funksiýany azat üýtgeýän ululyklaryň üsti bilen aňlatmaly. (22) ulgamdan her bir bazis näbelliniň bahasyny (21)-de goýup toparlasak, onda aşakdaky görnüş emele geler:

$$L=\gamma_0+\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2. \qquad (24)$$

$$L'=\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_2 \qquad (25)$$

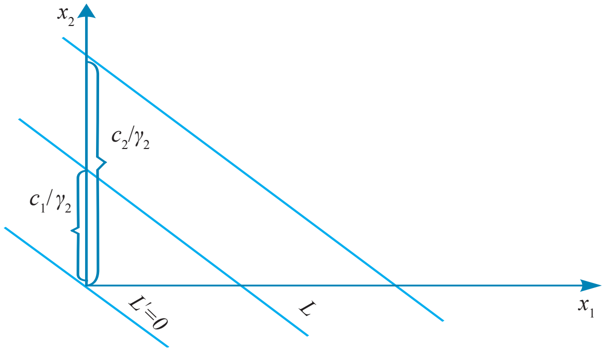
funksiýa seredeliň. L funksiýa x_1 we x_2-niň haýsy bahasynda minimuma eýe bolsa, onda L' funksiýa hem edil şol x_1 we x_2 bahalarda minimuma eýe bolar. Sebäbi, $L'=L-\gamma_0$.



2.3-nji surat

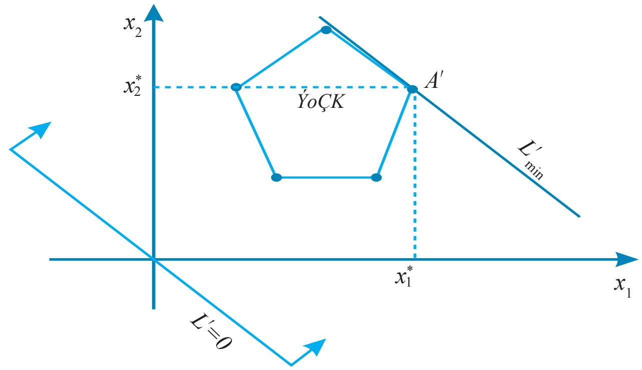
γ_0 baha x_1 we x_2-ä bagly däl. L'=0 koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzygyň deňlemesidir.

L=0 ýa-da $L'=c_1$, onda gönüleriň burç koeffisiýentleri $(-\gamma_1/\gamma_2)$ ululyga deňdir. $L'=c_1$ Ox_2 koordinatalar okundan c_1/γ_2 kesime deň kesim kesip alýan gönüdir. $L'=c_2$, $L'=c_3$ bahalary bersek, özara parallel gönüleri alarys (*2.4-nji surat*).



2.4-nji surat

Bu gönüleriň hemmesiniň grafigini gurman, diňe L'=0 ýagdaýdaky grafigi gurýarys. L'=0 gönini bir tarapa parallel süýşürsek L' funksiýa ösýär, beýleki tarapa parallel süýşürsek kemelýär. Matematiki seljermeden belli bolşy ýaly, iki argumentli L' funksiýa özüniň gradiýentiniň ugruna artýar. Onuň garşysyna bolsa kemelýär. Berlen L' çyzykly funksiýa üçin grad$L'=(\gamma_1, \gamma_2)$ bolar. Diýmek, L' funksiýa grad$L'=(\gamma_1, \gamma_2)$ wektoryň garşysyna kemelýär. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meseleleriniň optimal çözüwi bu funksiýanyň iň kiçi bahany alýan ýolbererli çözüwi bilen gabat geler (*2.5-nji surat*).



2.5-nji surat

(21) funksiýanyň minimumyny tapmaly bolsun. L'-iň kemelýän tarapy grafikde görkezilen. L'=0-y özüne parallel süýşürsek, L-iň kiçi bahasyny ýolbererli çözüwler köplüginiň çetde ýatan A nokadynda alar. Diýmek, L'_{min} $A(x_1^*, x_2^*)$ nokatda bolar. A nokadyň koordinatalaryny (22) ulgamda goýup, $x_3^*, x_4^*, \dots, x_n^*$ optimal bazis ululyklaryň bahalaryny we:

$$L_{min} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1^* + \gamma_2 x_2^* \text{ taparys.}$$

2.14-nji mysal. 2.4.1-nji mysalyň şertinde:

$$L = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + 5x_6 - 2x_7$$

funksiýanyň minimumyny tapmaly. L funksiýany hem azat x_1 we x_2 ululyklaryň üsti bilen aňladalyň. x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 – näbellileriň bahasyny goýup jemlesek aşaky görnüşi alararys:

$$L = -5x_1 - 6x_2 - 12.$$

$L' = -5x_1 - 6x_2 = 0$ diýip, degişli göni çyzygy guralyň. L' funksiýanyň kemelýän tarapy çyzgyda görkezilen (*2.5-nji surat*). L'_{min} A nokatda bolar. Bu nokadyň koordinatalary L'=0

$$\begin{cases} x_6 = 0, \\ x_7 = 0 \end{cases} \text{ gönüleriň kesişmesidir.}$$

Bu ýerden $x_1^* = 8,5,\ x_2^* = 5$.

Onda optimal çözüw:

$x_1^* = 8,5,;\ x_2^* = 5;\ x_3^* = 0,5;\ x_4^* = 16,5;\ x_5^* = 17,5;\ x_6^* = 0;$ $x_7^* = 0$.

Bu çözüwde $L_{min} = -84,5$.

Çyzykly programmalaşdyrmagiň esasy meselesinde $n-m=2$ şert ýerine ýetende ony geometrik usulda çözmegi özleşdirdik we ýokardakylardan aşakda getirilýän netijeleri almak bolar:

2.4.2. Iň gowy çözüwiň tapylyşy

Şeýlelik bilen, çyzykly programmalaşdyrmanyň optimal çözüwini geometrik usulda tapmak üçin:

1. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň çözuwi bar bolsa, onda ony ýolbererli çözüwleriň köplüginiň (köpburçlugynyň) içki nokatlarynyň arasyndan gözlemän, onuň burç nokatlaryndan gözlemeli.

2. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň optimal çözüwi ýeke-täk bolman tükeniksiz bolmagy mümkin (L' bilen ýolbererli çözüwleriň köplüginiň (köpburçlugynyň) bir tarapy parallel bolsa).

3. Çyzykly programmalaşdyrmagiň esasy meselesiniň optimal çözüwiniň bolmazlygy mümkin (ýolbererli çözüwleriň köplügi L' funksiýanyň kemelýän tarapynda çäklenmedik bolsa).

4. Optimal çözüw ýolbererli çözüwleriň köplüginiň (köpburçlugynyň) haýsy hem bolsa bir depesinde bolýar. Bu depelere **daýanç çözüwler** (**depeler**) diýilýär.

5. Optimal çözüwi tapmak üçin daýanç depelerde L funksiýanyň bahalaryny hasaplap olaryň arasyndan L-iň iň kiçi baha eýe bolan depesini optimal çözüw hökmünde almak bolar.

6. $n-m=2$ ýagdaýda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi çözüwe eýe bolsa, onda daýanç depelerde iň bolmanda iki sany üýtgeýän ululyk nola deňdir. Eger depede ikiden köp näbelli nola deň bolsa, onda oňa «şikesli» daýanç depe diýilýär.

Eger $n-m=3$ bolsa, çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi giňişlikde köpgranlygy emele getirer. Onda (3) ulgamyň her deňlemesiniň çözüwleri tekizligi emele getirerler. Her daýanç depede iň bolmanda üç näbelli nola deň bolar. Eger $n-m=k>3$ bolsa çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini geometrik usulda çözüp bilmeýäris. Bu ýagdaýda her daýanç depede iň bolmanda k sany näbelli nola deň bolar.

2.15–2.20-nji mysallarda çäklendirmeleriň ýerine ýetýän oblastynda L funksiýanyň iň uly bahasyny tapyň:

2.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 + 2x_2$.

2.16. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ 2 \le x_1 \le 5, \\ 1 \le x_2 \le 4; \end{cases}$ $L = 2x_1 + x_2$.

2.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 + 2x_2$

2.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ x_1 - 1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = 3x_1 + 4x_2$.

2.19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 1 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 + 7x_2$.

2.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$ $L = x_1 + 7x_2$.

2.21–2.26-njy mysallarda çäklendirmeleriň ýerine ýetýän oblastynda L funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapyň:

2.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 1 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 - x_2$.

2.22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 - 3x_2$

2.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - 4 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = x_1 + x_2$.

2.24. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \\ -2x_1 + 6x_2 \ge -12, \\ x_1 - 2 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$ $L = 2x_1 - 6x_2$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \le 0, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 7 \ge 0, \\ x_1 - 2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=2x_1-x_2.$

2.26 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge 5, \\ x_1 + x_2 - 8 \ge 0, \\ x_1 - 3 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L= -2x_1+x_2.$

§ 2.5. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini çözmegiň simpleks usuly

2.5.1. Simpleks usulyň manysy

Ýokarda bellenilişi ýaly, eger $n-m=k>3$ bolsa, onda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini geometrik usulda çözüp bolmaýar. Sebäbi ölçegi üçden uly bolan giňişligi geometrik şekillendirip bolmaýar. Bu ýagdaýda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi simpleks usul bilen çözülýär. Simpleks usul çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini çözmegiň has umumy usuly bolup, onuň kömegi bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň islendik meselesini çözüp bolýar.

Goý, çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi berlen bolsun:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\dots \quad \dots\ \dots \quad \dots \quad \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{26}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,\dots,n,$$

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \text{ (min)}. \tag{27}$$

Simpleks usulyň manysy aşakdakydan ybarat. Ilki bilen berlen meseläniň islendik bir bazis çözüwini tapmaly. Eger bu bazis çözüw ýolbererli bolsa (daýanç çözüw bolsa), onda onuň optimaldygy barlanylýar. Eger ol optimal däl bolsa, onda başga daýanç çözüwe geçilýär. Simpleks usul bolsa täze çözuw optimal bolmasa-da oňa has ýakynlaşmagyna ýardam berýär. Täze alnan daýanç çözüw bilen hem tä optimal çözuw tapylýança ýokardaky algoritm gaýtalanýar.

Eger birinji bazis çözüw ýolbererli däl bolsa, onda simpleks usulyň kömegi bilen, birnäçe ädimden soň başga ýolbererli bazis (daýanç) çözüwe ýa-da oňa has ýakyn çözüwe geçip bolýar. Soňra alnan daýanç çözüwiň üstünde ýokarda beýan edilen algoritm gaýtalanýar.

Seýlelikde, simpleks usuly peýdalanmak aşakdaky iki döwre bölünýär:

– ýolbererli bazis (daýanç) çözüwi tapmak;

– optimal çözüwi tapmak;

Bu döwürleriň ikisi hem çäkli sanly ädimlerden ybaratdyr. Sebäbi bu döwürlerde bir bazis çözüwden başgasyna geçmek amala aşyrylýar. Olaryň sany bolsa tükeniklidir.

2.5.2. Ýolbererli bazis (daýanç) çözüwi tapmak

Umumylygy bozmazdan, (26) deňlemeler ulgamy çyzykly bagly däl deňlemelerden ybarat diýip hasap edip bileris. Onda $m=\text{rang}A$ bolar. Eger $n-m=k$ bolsa, onda k sany näbelliler azat üýtgeýän ululyklar, galan $n-k=m$ näbelliler bolsa bazis üýtgeýän ululyklar bolar. Bazis üýtgeýän ululyklaryň deregine islendik koeffisiýentlerinden düzülen matrisanyň kesgitleýjisi noldan tapawutly $m=n-k$ sany näbellini saýlap almak bolar. Umumylygy bozmazdan, $x_1, x_2, ..., x_k$ ululyklar azat üýtgeýän ululyklar, $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ – ululyklary bolsa bazis ululyklar diýip hasap edip bileris. Onda (26) deňlemeler ulgamyny bazis üýtgeýän ululyklara görä çözup, aşakdaky görnüşde ýazyp bolar:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \beta_{k+1} + \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{k+1,k}x_k, \\ x_{k+2} = \beta_{k+2} + \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{k+2,k}x_k, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \cdots + \alpha_n x_k. \end{cases} \qquad (28)$$

Azat üýtgeýän ululyklara nol bahany bersek, bir bazis çözüw (daýanç depä degişli bazis çözüw) alarys:

$$x_1=0,\ x_2=0,\dots,\ x_k=0,\ x_{k+1}=\beta_{k+1},\dots,\ x_n=\beta_n. \qquad (29)$$

$\beta_i \geq 0$ bolanda ($i=k+1, ...,n$) (29) çözüw ýolbererli daýanç çözüw bolýar. Eger (28) deňlemeler ulgamynyň azat agzalarynyň arasynda ortisateli bar bolsa (meselem, i-nji deňlemä degişli $\beta_i < 0$ bolsa), onda oňa degişli esasy näbelliniň bazis çözüwdäki bahasy otrisatel bolar. Bu ýagdaýda (28) ulgamyň ýolbererli däl çözüwi alnar. Şol bazis çözüwden başga çözüwe geçmek üçin haýsy azat näbellini bazis näbellileriň arasyna geçirip, onuň deregine haýsy bazis näbellini azat näbellileriň arasyna geçirmelidigini kesgitlemeli. Azat näbelli bazis näbellileriň arasyna geçirilende onuň bahasy adatça artýar. Şonuň üçin bazis näbellileriň arasyna geçirilmeli azat näbelli kesgitlenende, ol artanda öňki bazis çözüwde otrisatel bahany alan bazis näbelli artar ýalysyny saýlap almaly. Indi *i*-nji deňlemä gaýdyp geleliň. Oňa degişli x_i bazis näbelli bu deňlemede položitel koeffisiýentli azat näbelliniň artýan halatynda artar. Bu ýerden bazis näbellileriň arasyna şol deňlemede položitel koeffisiýenti bolan azat näbellini geçirmelidigi gelip çykýar. Aşakdaky üç ýagdaýyň biri bolmagy mümkin:

1) *i*-nji deňlemede položitel koeffisiýentli azat näbelli ýok. Bu ýagdaýda (28) deňlemeler ulgamy kökdeş däl. Ýagny, onuň ýolbererli daýanç çözüwi ýok. Sebäbi bu ýagdaýda x_i bazis näbelli otrisatel däl baha eýe bolup bilmeýär. Diýmek, bu ýagdaýda çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň hem çözüwi ýokdur.

2) *i*-nji deňlemede bir položitel koeffisiýentli azat näbelli bar. Bu ýagdaýda şol koeffisiýente degişli azat näbelli bazis näbellileriň hataryna geçirilýär.

3) *i*-nji deňlemede birnäçe položitel koeffisiýentli azat näbelli bar. Bu ýagdaýda bazis näbellileriň hataryna şol položitel koeffisiýentlere degişli azat näbellileriň islendigini geçirip bolar.

Indi bazis näbellileriň hataryna geçiriljek azat näbelliniň deregine geçirilmeli bazis näbellini kesgitlemeli. Onuň üçin (28) deňlemeler ulgamynyň azat agzalarynyň bazis näbellileriň hataryna geçiriljek azat näbelliniň degişli, garşylykly alamatly koeffisiýentlerine gatnaşyklarynyň moduly boýunça iň kiçisini saýlap almaly. Bu ýagdaýda azat agzalar bilen alamaty gabat gelýän koeffisiýentleriň gatnaşygy ∞ deň hasap edilýär. Şol iň kiçi gatnaşyga degişli deňlemedäki bazis näbelli azat näbellileriň hataryna geçirilýär. Şol deňlemeden bazis näbellileriň hataryna geçirilmeli näbellini tapyp, onuň üçin alnan aňlatmany beýleki deňlemelerde ornunda goýup, täze bazis näbellileri täze azat näbellileriň üsti bilen aňladyp, täze bazis çözüwi alarys. Eger iň kiçi gatnaşyga degişli deňlemedäki azat agza otrisatel bolsa, onda täze bazis çözüwde otrisatel bahalar bir san azalar. Eger ol položitel bolsa, onda täze bazis çözüwde otrisatel bahalaryň sany üýtgemez. Islendik ýagdaýda alnan çözüw öňki çözüwden has gowudyr. Sebäbi, ol ýa-ha ýolbererli bazis çözüwdir, ýa-da ýolbererli çözüwleriň köplügine öňki çözüwden has ýakyndyr. Eger ol ýolbererli bazis çözüw däl bolsa, onda ýokarda beýan edilen algoritm tä ýolbererli bazis çözüw alynýança gaýtalanýar.

2.5.3. Optimal çözüwi tapmak

Goý, (29) ýolbererli daýanç çözüw bolsun. Onuň optimal çozüwdigi ýa-da däldigi heniz belli däl. Ony bilmek üçin L funksiýany hem azat ululyklaryň üsti bilen aňladalyň. Bazis üýtgeýän ululyklaryň bahasyny (27)-de goýsak we näbellileri toparlasak L funksiýa aşakdaky görnüşi alar:

$$L=\gamma_0+\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\cdots+\gamma_kx_k. \quad (30)$$

(29) çözüwde $L=\gamma_0$. Optimal çözüw L funksiýa mümkin bolan iň kiçi bahany bermeli. (30) aňlatmadan L funksiýanyň bahasyny mundan beýläk γ_0 bahadan kiçeldip bolýandygyny ýa-da bolmaýandygyny kesgitlemeli. Eger-de L funksiýanyň bahasyny kiçeldip bolýan bolsa, onda (29) çözüw optimal çözüw bolmaýar. L funksiýany γ_0-dan kiçeldip bolmaýan bolsa, onda (29) çözüw optimal çözüw bolar. Eger-de $\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_k$ koeffisiýentleriň iň bolmanda biri otrisatel bolsa, onda şeýle koeffisiýentli näbellini ulaldyp, L-iň bahasyny γ_0-dan kiçi bolar ýaly edip bolar.

Goý, γ_1 otrisatel bolsun. Onda x_1-i ulaldyp, L-i γ_0-dan kiçeldip bolýar. x_1 noldan uly bahany alsa ($x_1>0$), onda alynjak çözüw daýanç çözüw bolar ýaly bu näbelliniň ýerine bazis ululyklaryň biri nola öwrülmeli. Seýlelikde, (29) daýanç çözüwden başga daýanç çözüwe geçýäris. x_1 näbellini ulaldýarys. L funksiýa hem şoňa baglylykda kiçelýär. Ýöne x_1-iň çäksiz ulalmagy $x_{k+1},\ldots, x_n$ bazis ululyklaryň käbiriniň otrisatel baha almagyna getirmegi mümkin. Şonuň üçin $x_{k+1},\ldots, x_n$ bazis ululyklaryň hemmesi položitel bolup galar ýaly, x_1-i haýsy sana çenli ulaltmalydygyny kesgitläliň. x_1-i näçä çenli ulaldyp bolýanlygyny bilmek üçin (28) ulgama seredýäris. Eger, deňlemeler ulgamynda x_1-iň koeffisiýentleri otrisatel däl bolsa, onda x_1-iň ulalmagy bilen bazis näbellileriň bahalary diňe ulalarlar. L funksiýa bu ýagdaýda aşakdan çäklenmedik bolýar. Goý, l-nji deňlemede x_1-iň koeffisiýenti otrisatel bolsun.

$$x_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1k}x_k+\beta_1,$$
$$\beta_1\geq 0,\ \alpha_{11}<0,\ x_2=0,\ldots,\ x_k=0.$$

x_1 näbellini $(-\beta_l/\alpha_{l1})$ ululyga çenli ulaldyp bolar. Eger x_1-i bu sandan köp ulaltsak, onda $x_1<0$ bolar, bu bolsa daýanç çözüw däl. Eger-de (28) ulgamda otrisatel koeffisiýentli deňlemeler birden köp bolsa, onda x_1-i ulaldanymyzda degişli bazis näbellä otrisatel baha çalt öwrülmek howpy bar bolan deňlemäni saýlap alýarys. Şol deňlemeden x_1-i tapyp, onuň alnan bahasyny (28) ulgamyň beýleki deňlemelerinde ornuna goýup, x_1-i azat ululygyň hataryndan çykarýarys. x_1 azat ululygyň ornuna bir daýanç näbelli geler. Goý, ol x_1 diýeliň. Şeýlelikde:

$$x_2=0,\ x_3=0,\ldots,x_k=0,\ x_1=0,\ x_1=0,\ x_{k+1}\geq 0,\ldots,x_n\geq 0 \qquad (31)$$

daýanç çözüwi alarys. Alnan (31) daýanç çözüwiň optimaldygyny ýa-da däldigini kesgitläliň. Onuň üçin L maksat funksiýasyny täze azat ululyklar bilen aňladýarys. Eger L-iň koeffisiýentleri položitel bolsa, onda (31) daýanç çözüw optimal çözüw bolar. Eger L-de otrisatel koeffisiýentli näbelliler bar bolsa, onda (31) optimal çözüw däl. Bu ýagdaýda öňki usuldan peýdalanyp (31) çözüwden başga daýanç çözüwe (depä) geçýäris. Bu algoritmi L funksiýanyň näbellileriniň koeffisiýentleriniň ählisi položitele öwrülýänçä dowam etdirmeli.

2.27-nji mysal.
$$\begin{cases}-5x_1-x_2+2x_3\leq 2,\\ -x_1+x_3+x_4\leq 5,\\ -3x_1+5x_4\leq 7\end{cases} \qquad (32)$$

şertler ýerine ýetende

$$L=5x_1-2x_3 \qquad (33)$$

funksiýanyň minimumyny tapmaly. Bu mysal çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi däl. Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy däl meselesinden esasy meselesine geçeliň. (32) ulgamy deňlemeler ulgamyna öwürmek üçin, deňsizlikleriň çep tarapyna goşmaça y_1, y_2, y_3 näbellileri goşalyň we ol näbellileri tapalyň:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2, \\ y_2 = x_1 - x_3 - x_4 + 5, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases} \tag{34}$$

$n=7$, $m=3$, $n-m= 4$, bu ýerde 4 sany näbelli azat ululyklar, galanlary bazis ululyklar bolar. Goşmaça girizilen y_1, y_2, y_3 ululyklary bazis (goşmaça) diýip bellesek, x_1, x_2, x_3, x_4 azat ululyklar bolar. Onda:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=0, y_1=2, y_2=5, y_3=7 \tag{35}$$

çözüw daýanç çözüw bolar. Bu depede L=0. (35) çözüw optimalmy? (33)-de berlen L-e seredýäris. x_3-iň koeffisiýenti otrisatel, onda x_3-i ulaldyp, L-i noldan kiçi edip bolýar. Şol sebäpli (35) optimal çözüw däl. x_3-i näçe ulaldyp bolýar? Ony bilmek üçin (34) deňlemeler ulgamyna seredýäris. Bu ulgamyň birinji we ikinji deňlemelerinde x_3 näbelliniň koeffisiýentleri otrisatel. x_3-i ulaltsak y_1 ululyk y_2 ululykdan çalt otrisatel baha eýe bolýar. Onda birinji deňlemeden x_3-i tapyp, onuň bahasyny (34) deňlemeler ulgamynyň beýleki deňlemelerinde goýup alarys:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_1 + 1, \\ y_2 = \frac{-3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 - x_4 + 4, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7, \end{cases} \tag{36}$$

$$L=5x_1-5x_1-x_2+y_1-2=-x_2+ y_1-2; \tag{37}$$

$$x_1=0, x_2=0, y_1=0, x_4=0, x_3=1, y_2=4, y_3=7 \tag{38}$$

daýanç çözüwdir. Bu depede $L= - 2$. Alnan (38) çözüw optimal çözüwmi? Ony bilmek üçin (37) çyzykly funksiýanyň koeffisiýentlerine seredýäris. x_2 ululygyň koeffisiýenti otrisatel. Şol sebäpli (38) optimal çözüw däl. x_2-ni näçe ulaldyp bilýäris? Ony bilmek üçin (36) deňlemeler ulgamyna seredýäris. (36) ulgamyň diňe ikinji deňlemesinde x_2 otrisatel koeffisiýentli. Onda bu deňlemeden x_2-ni tapýarys we beýleki deňlemelerden x_2-ni ýok edýäris:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - y_2 - x_4 + 5, \\ x_2 = -3x_1 - 2y_2 + y_1 - 2x_4 + 8, \\ y_3 = 3x_1 - 5x_4 + 7. \end{cases} \tag{39}$$

$$L=3x_1+2y_2+2x_4-10.$$

(39) ulgamdan aşakdaky daýanç çözüwi alarys.

$$x_1=0, y_2=0, y_1=0, x_4=0, x_3=5, x_2=8, y_3=7.$$

Bu daýanç çözüwde L=–10 bolar. Alnan çözüw optimalmy? L çyzykly funksiýanyň argumentleriniň koeffisiýentleri položitel. Diýmek, funksiýanyň bahasyny mundan artyk kiçeldip bolmaýar. Onda $L_{\min}=-10$ we

$$x_1^* = 0, x_2^* = 8, x_3^* = 5, x_4^* = 0, y_1^* = 0, y_2^* = 0, y_3^* = 7$$

çözüw optimal çözüwdir.

Bu mysalyň üsti bilen çyzykly progammalaşdyrmanyň esasy däl meselesinden çyzykly progammalaşdyrmanyň esasy meselesine geçilişini gördük we alnan meseläni simpleks usul boýunça çözdük.

2.5.4. Simpleks usulyň algoritmi

Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesini simpleks düzgün bilen çözenimizde azat ululyk bilen bazis ululyklaryň ornuny çalyşýarys. Ýagny, haýsy hem bolsa bir deňlemeden azat ululygy tapyp, beýlekilerde ornunda goýýarys. Bu usul hasaplamany köpeldýär, ýalňyşlygyň goýberilmegine mümkinçilik döreýär. Bu usul bilen näbellileriň koeffisiýentleriniň üstünde belli bir tertipde şol bir amallar ýerine ýetirilýär. Bu usul bilen näbellileriň ornuny çalyşmaklyga **simpleks düzgüniniň algoritmi** diýilýär. Goý, bize aşakdaky deňlemeler ulgamynda x_j we y_i näbellileriň ornuny $(x_j y_i)$ simpleks algoritmi boýunça çalyşmak gerek bolsun.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \quad \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \ \cdots \ \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m. \end{cases} \tag{40}$$

Bu ulgamy simpleks düzgüniň algoritminde ulanylýan görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 + (\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n), \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_i = b_i - (\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n), \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_m = b_m - (\alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n). \end{cases} \tag{41}$$

Bu ýerde $\alpha_{ij}=-a_{ij}$, $i=1, ..., m, j=1, ..., n$.

(41) deňlemeler ulgamynyň koeffisiýentlerini 2.3-nji tablisada ýazalyň.

2.3-nji tablisa

	Azat agzalar	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n
y_1	b_1	α_{11}	α_{12}	...	α_{1i}	...	α_{1n}
y_2	b_2	α_{21}	α_{22}	...	α_{2j}	...	α_{2n}
:	:	...	...	...	...	...	...
y_i	b_i	α_{i1}	α_{i2}	...	α_{ij}	...	α_{in}
:	:	...	...	...	...	...	...
y_m	b_m	α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mj}	...	α_{mn}

Bu tablisa simpleks usulyň **standart tablisasy** diýilýär. Eger x_j we y_i näbellileriň ornuny ($x_j \leftrightarrow y_i$) çalyşmak gerek bolsa, onda x_j näbelliniň koeffisiýentleriniň ýerleşen sütünine **çözüji (ugrukdyryjy) sütin,** y_i näbelliniň koeffisiýentleriniň ýerleşen setirine **çözüji setir;** α_{ij} koeffisiýente – elemente **çözüji element**, onuň duran öýjügine bolsa, **çözüji öýjük** diýip at berilýär. ($x_j \leftrightarrow y_i$) orun çalşyrmany amala aşyrmak üçin aşakdaky amallar ýerine ýetirilýär we x_j, y_i ululyklaryň orny çalşyrylan indiki (täze) tablisa doldurylýar.

1.Tablisada çözüji element α_{ij} saýlanyp alynýar we onuň ters ululygyny hasaplap, $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_{ij}}$ san indiki täze tablisada şol öýjükde ýazylýar.

2. Çözüji setiriň hemme elementlerini λ köpeldip, alnan sanlar täze tablisanyň degişli setirlerinde ýazylýar (çözüji öýjükden başgalarynda).

3. Çözüji sütüniň elementlerini $(-\lambda)$-a köpeldip, alnan sanlar täze tablisanyň degişli sütüninde ýazylýar (çözüji öýjükden başgalarynda).

4. Çözüji setirde we sütünde ýatmaýan öýjükleriň köne elementleriniň ählisi üçin şol bir amallar toplumy ýerine ýetirilýär, ýagny köne element bilen bir setirde, çözüji sütünde duran elementi onuň bilen bir sütünde, çözüji setirde duran elemente köpeldip, netijäni çözüji elemente paýlap, alnan sany köne elementden aýryp, soňky netijäni täze tablisada degişli öýjükde ýazarys. 2.3-nji tablisada bu amallara degişli elementler α_{11} koeffisiýent üçin görkezilendir. Beýan edilen amallaryň yzygiderligi gysgaça

$$\alpha'_{lk} = \alpha_{lk} - \frac{\alpha_{lj}\alpha_{ik}}{\alpha_{ij}}, l \neq i, k \neq j, l = 1, \cdots, m,\ \ k = 1, \cdots n.$$

Beýan edilen algoritme **çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň simpleks tablisa algoritmi** diýilýär.

2.28-nji mysal.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 5, \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + 1, \\ y_3 = 2x_2 - x_3 - 1, \\ y_4 = - x_1 - x_3 + 2 \end{cases}$$

deňlemeler ulgamynda $x_1 \leftrightarrow y_2$, ýagny x_1 we y_2 ululyklaryň ornuny çalşalmaly. Ulgamy standart görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} y_1 = - 5 - (-x_1 + x_2 - 2x_3), \\ y_2 = 1 - (- 2x_1 + x_2), \\ y_3 = - 1 - (- 2x_2 + x_3), \\ y_4 = 2 - (x_1 + x_3). \end{cases}$$

Ilki 2.4-nji tablisany dolduralyň.

2.4-nji tablisa

	Azat agzalar	x_1	x_2	x_3
y_1	-5	-1	1	-2
y_2	1	-2	1	0
y_3	-1	0	-2	1
y_4	2	1	0	1

Eger ($x_1 \leftrightarrow y_2$) çalşyrmany amala aşyrmaly, ýagny x_1 we y_2 ululyklaryň ornuny çalyşmaly bolsa, onda α_{ij}=-2, λ=-$\frac{1}{2}$ bolar. Ýokarda beýan edilen algoritm boýunça indiki (täze) 2.5-nji tablisany dolduralyň.

2.5-nji tablisa

	Azat agzalar	y_1	y_2	y_3
y_1	-1/2	-1/2	1/2	-2
x_1	-1/2	-1/2	-1/2	0
y_3	-1	0	-2	1
y_4	5/2	1/2	1/2	1

$x_1 \leftrightarrow y_2$ orun çalşyrma amala aşyryldy.

2.5.5. Simpleks usulyň algoritminiň kömegi bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň daýanç çözüwiniň gözlenilişi

Biz näbellileriň ornuny simpleks tablisanyň algoritmi boýunça çalşyp bilýäris. Daýanç çözüwiniň gözlenilişini aşakdaky mysal arkaly düşüňdireliň:

2.29-njy mysal. Goý, deňlemeler ulgamy standart görnüşde berlen bolsun. Aşakda berlen deňlemeler ulgamynyň daýanç çözüwini tapmaly:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - (-x_1 - 2x_2 + x_3), \\ y_2 = -5 - (-2x_1 + x_2 - x_3, \\ y_3 = 2 - (x_1 + x_2), \\ y_4 = 1 - (-x_2 + x_3). \end{cases}$$

2.6-njy tablisany dolduralyň.

2.6-njy tablisa

	Azat agzalar	x_1	x_2	x_3
y_1	1	-1	-2	1
y_2	-5	-2	1	-1
y_3	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

Bu ýerde x_1=0, x_2=0, x_3=0, y_1=1, y_2= – 5, y_3=2, y_4=1 çözüwi alarys. Bu çözüw daýanç çözüw däl, sebäbi y_2 -niň bahasy otrisatel. Daýanç çözüwi tapmak üçin y_2-niň setirinden islendik otrisatel elementi saýlaýarys. (–2)-li sütüni çözüji sütün diýip belleýäris. Çözüji elementi çözüji sütünden gözlenýär. Nol çözüji element bolup bilmeýär. Çözüji elementi bu sütündäki alamaty azat agzalaryň alamaty bilen gabat gelýän elementleriň azat agza bilen gatnaşygy iň kiçisini tapmak bilen kesgitlenýär. min(–5/–2; 2/1)= min (2,5;2)=2, diýmek x_1 we y_3 ululyklaryň ornuny algoritm esasynda çalyşýarys: $\alpha_{ij}=1$, $\lambda=1$.

Indiki 2.7-njy tablisany dolduralyň.

2.7-nji tablisa

	Azat agzalar	y_3	x_2	x_3
y_1	3	1	-1	1
x_3	-1	2	3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	1	0	-1	1

Otrisatel azat agza absolýut ululygy boýunça kiçeldi. Daýanç çözüwe golaýlaýarys:

$$y_3=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ y_1=3,\ y_2=-1,\ x_1=2,\ y_4=1.$$

Bu çözüw hem daýanç çözüw däl: $y_2=-1$. y_2-niň setirinde azat agzadan başga diňe x_3-iň sütüni otrisatel elementi saklaýar. Onda x_3 sütüni çözüji sütün bolar. Öňki ýaly edip çözüji elementi α_{ij} saýlaýarys.

min(–1/–1; 1/1;3/1)=1 – iki gatnaşyk deň, onda çözüji element hökmünde (–1) ýa-da 1-i almaly. Goý, $\alpha_{ij}=-1$, ýagny $x_3 \leftrightarrow y_2$. Onda 2.8-nji tablisany alarys.

2.8-nji tablisa

	Azat agzalar	y_3	x_2	y_2
y_1	2	3	2	1
x_3	1	–2	–3	–1
x_1	2	1	1	0
y_4	0	2	2	1

Bu ýagdaýda bazis çözüw:

$$y_3=0,\ x_2=0,\ y_2=0,\ y_1=2,\ x_3=1,\ x_1=2,\ y_4=0.$$

Bu cözüwde ähli ululyklar položitel ýa-da nol bahalary alýarlar. Şol sebäpli ol daýanç cözüwidir.

2.5.6. Simpleks usulyň algoritminiň kömegi bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň optimal çözüwiniň gözlenilişi

Daýanç çözüwi gözlenende L funksiýa peýdalanylýar. Optimal çözüw gözlenende L funksiýany hem standart görnüşde ýazyp, standart tablisanyň ýokarky ýa-da aşaky setirinde ýerleşdirýärler:

$$L=l_0-(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n).$$

2.30-njy mysal.

$$\begin{cases} y_1 = 2-(x_1+x_2-2x_3), \\ y_2 = 1-(x_1-x_2+x_3), \\ y_3 = 5-(x_1+x_3), \\ y_4 = 2-(2x_1-x_2) \end{cases}$$

şertde $L=0-(-x_1+2x_2+x_3)$ funksiýanyň minimumyny tapmaly.
Azat näbellilere nol bahalary berlip alnan (0,0,0,2,1,5,2) çözüw daýanç çözüwidir (eger daýanç çözüwi bolmasa ilki bilen daýanç çözüwi tapmaly). Bu çözüw optimal däldir. Sebäbi x_2 ýa-da x_3 azat ululyklaryň bahasyny ulaltmak bilen, L funksiýanyň bahasyny kiçeldip bolýar. 2.9-njy tablisany dolduralyň.

2.9-njy tablisa

	Azat agzalar	x_1	x_2	x_3
L	0	–1	2	1
y_1	2	1	1	-2
y_2	1	1	–1	1
y_3	5	0	1	1
y_4	2	2	–1	0

L funksiýanyň setirinde x_2 we x_3 položitel bahalary alyp bilmeýär. Olaryň islendiginiň sütünini çözüji sütün diýip alyp bolýar. Simpleks usuly boýunça x_2-ni saýlamak bilen L-iň bahasyny has çalt kemeldip bolýan hem bolsa, ilki bilen x_3-üň sütünini çözüji sütün hökmünde saýlaýarys. Bu sütüniň haýsy elementini çözüji element deregine almalydygyny kesgitläliň. Bu element hökman položitel bolmaly (sebäbi azat agzalar položitel). Onda x_3-iň položitel koeffisiýentleri bilen azat agzalaryň gatnaşygyny hasaplap, iň kiçisini alýarys.

$$\min\left(\frac{1}{1};\frac{5}{1}\right) = \min(1;5) = 1.$$

Iň kiçi gatnaşyga degişli ikinji setir çözüji setir bolar. Çözüji setir bilen çözüji sütüniň kesişmesinde α_{23}=1 çözüji element dur. Diýmek x_3 we y_2 ululyklaryň ornuny çalyşmaly, ýagny $x_3 \leftrightarrow y_2$. Algoritm boýunça x_3 bilen y_2-niň ornuny çalyşsak, 2.10-njy tablisany alarys.

2.10-njy tablisa

	Azat agzalar	x_1	x_2	y_2
L	–1	–2	3	–1
y_1	4	3	–1	2
x_3	1	1	–1	1
y_3	4	–1	2	–1
y_4	2	2	–1	0

L-iň aňlatmasynda x_2 položitel, bahany alyp bilýär, onda bu ýagdaýda alnan (0,0,1,4,0,4,2) daýanç çözüw hem optimal däl. Öňki ýaly edip x_2-niň sütüninden çözüji elementi saýlaýarys: α_{32}=2 element, ýagny y_3-iň setiri saýlanylar. Diýmek, $x_2 \leftrightarrow y_3$ orun çalşyrma amala aşyrylýar. Netijede aşakdaky 2.11-nji tablisany alarys.

2.11-nji tablisa

	Azat agzalar	x_1	y_3	y_2
L	–7	–1/2	–3/2	1/1
y_1	6	5/2	1/2	3/2
x_3	3	1/2	1/2	1/2
x_2	2	–1/2	–1/2	–1/2
y_4	4	3/2	1/2	–1/2

Bu ýagdaýda alnyýan daýanç çözüw:

$$x_1=0,\ y_3=0,\ y_2=0,\ y_1=6,\ x_3=3,\ x_2=2,\ y_4=4,$$

ýagny (0,2,3,6,0,0,4) çözüw hem optimal däl. Sebäbi L-iň setirinde y_2-niň koeffisiýenti položitel. y_2-niň sütüninden çozüji elementi saýlalyň.

$$\min\left(6:\frac{3}{2};3:\frac{1}{2}\right)=\min(4;6)=4.$$

Bu ýagdaýda çözüji element α_{13}=3/2. Diýmek $y_2 \leftrightarrow y_1$ orun çalşyrma amala aşyrylmaly. Aşakdaky 2.12-nji tablisany alarys.

2.12-nji tablisa

	Azat agzalar	x_1	y_3	y_2
L	-9	–4/3	–5/3	–1/3
y_1	4	5/3	1/3	2/3
x_3	1	–1/3	1/3	–1/3
x_2	4	1/3	2/3	1/3
y_4	6	7/3	2/3	1/3

L funksiýanyň setirindäki näbellileriň koeffisiýentleriniň hemmesi otrisatel. Onda:

$$x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=1,\ y_1=0,\ y_2=4,\ y_3=0,\ y_4=6$$

çözüw optimal çözüw bolar. $L_{\min}=-9$.

Bellik. Birinji ädimde x_3-iň saýlanylmagy ädimleriň sanynyň artmagyna getirdi. Eger L-iň setirinde azat agzadan başga elementler otrisatel bolsa, onda optimal çözüwi tapdygymyz bolýar.

2.5.7. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerini *MS Excel* maksatnamasynyň kömegi bilen çözmek

Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerini *MS Excel* maksatnamasynyň kömegi bilen çözmek üçin «*Данные*» gurallar toplumyndaky «*Поиск решения*» guralyň penjiresinden peýdalanýarys.

Mysal hökmünde aşakdaky meselä seredeliň.

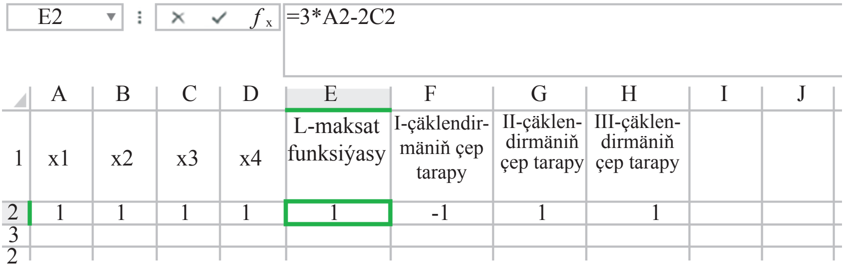
$$\begin{cases}-2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,\\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5,\\ -3x_1 + 6x_4 \le 7\end{cases}$$

şertler ýerine ýetende

$$L=3x_1-2x_3$$

funksiýanyň minimumyny tapalyň.

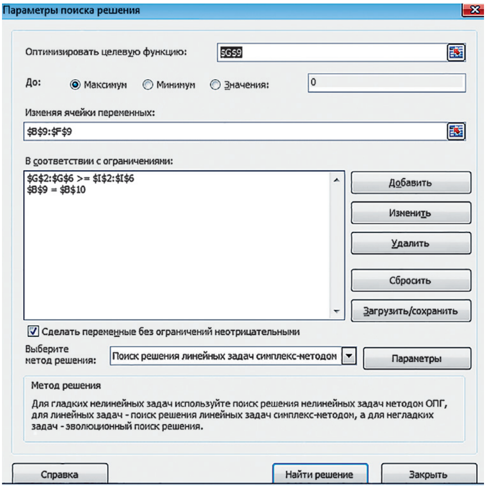
Ilki bilen *MS Excel* maksatnamasynyň iş meýdanynyň A2, B2, C2, D2 öýjüklerine x_1, x_2, x_3, x_4 näbellileriň başlangyç bahalaryny girizýäris (meselem, 1, 1, 1, 1). Şeýle hem, E2 öýjüge maksat funksiýasynyň bu bahalarda hasaplanan bahasyny (=3*A2-2*C2), F2 öýjüge deňsizlikler ulgamynyň I deňsizliginiň çep tarapynyň bu bahalarda hasaplanan bahasyny (=-2*A2-B2+2*C2), G2 öýjüge deňsizlikler ulgamynyň II deňsizliginiň çep tarapynyň bu bahalarda hasaplanan bahasyny (=-A2+C2+D2), H2 öýjüge bolsa, III deňsizliginiň çep tarapynyň bu bahalarda hasaplanan bahasyny (=-3*A2+6*D2) girizýäris (*2.6-njy surat*).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	x3	x4	L-maksat funksiýasy	I-çäklendirmäniň çep tarapy	II-çäklendirmäniň çep tarapy	III-çäklendirmäniň çep tarapy		
2	1	1	1	1	1	-1	1	1		
3										
2										

2.6-njy surat

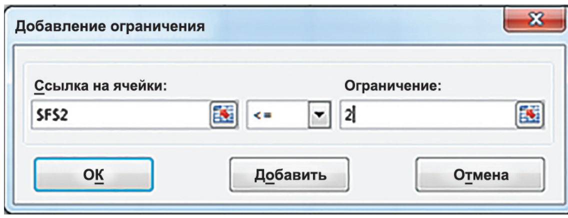
Soňra «*Данные*» gurallar toplumyndaky «*Поиск решения*» guralyň penjiresinden peýdalanýarys (*2.7-nji surat*).



2.7-nji surat

Penjiräniň «*оптимизировать целевую функцию*» öýjüginde maksat funksiýasynyň bahasynyň ýerleşýän ýerini görkezip, onuň minimumynyň tapylýandygyny degişli öýjükde görkezýäris.

«*Изменяя ячейки переменных*» öýjükde x_1, x_2, x_3, x_4 näbellileriň başlangyç bahalarynyň ýatan çägini görkezýäris. «*В соответствии с ограничениями*» penjirejige deňsizlikler ulgamynyň deňsizliklerini «*Добавить*» buýrugynyň kömegi bilen girizýäris. Onuň üçin aşakdaky penjireden peýdalanýarys (*2.8-nji surat*).



2.8-nji surat

«*Выберите метод решения*» buýrugynyň kömegi bilen meseläniň simpleks usulda çözülmelidigini görkezýäris. «*Найти решение*» buýrugynyň kömegi bilen x_1, x_2, x_3, x_4 näbellileriň başlangyç bahalarynyň ýatan çäginde meseläniň optimal çözuwiniň böleklerini, maksat funksiýasynyň bahalar öýjüginde bolsa onuň minimum bahasyny alarys:

$$x_1=0,\ x_2=8,\ x_3=5,\ x_4=0,\ L_{\min}=-10.$$

Soraglar we ýumuşlar

1. Simpleks usulyň manysy nämeden ybarat?
2. Simpleks usulyň algoritminiň kömegi bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň daýanç çözüwiniň gözlenilişiniň aýratynlyklaryny düşündiriň.
3. Simpleks usulyň algoritminiň kömegi bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesiniň optimal çözüwiniň gözlenilişiniň aýratynlyklaryny düşündiriň.

2.31 – 2.36-njy mysallarda çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getirmeli we simpleks usulda çözmeli.

2.31. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$
$I=x_1+2x_2$ (max).

2.32. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2 \leq x_1 \leq 5, \\ 1 \leq x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$L=x_1+2x_2$ (max).

2.33. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1+2x_2$ (max).

2.34. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ x_1 - 1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=3x_1+4x_2$(max).

2.35. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 1 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1+7x_2$ (max).

2.36. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5 \ge 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge -3, \\ 2x_1 + x_2 - 14 \le 0, \\ x_1 - 5 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1+x_2$ (max).

2.37-2.42-njy mysallarda çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini simpleks usulda çözmeli.

2.37. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 1 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1-x_2$ (min).

2.38. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1-3x_2$ (min).

2.39. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - 4 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1+x_2$ (min).

2.40. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \\ -2x_1 + 6x_2 \ge -12, \\ x_1 - 2 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=2x_1-6x_2$ (min).

2.41. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 7 \ge 0, \\ x_1 - 2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=x_1-2x_2$ (min).

2.42. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2 \ge 0, \\ x_1 - 3 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$

$L=2x_1-x_2$ (min).

§ 2.6. Çyzykly programmalaşdyrmanyň çatyrymlanan meseleleri

2.6.1. Çatyrymlanan meseleleriň kesgitlemesi we berlen meselä çatyrymlanan meseläniň düzüliş tertibi

Çyzykly programmalaşdyrmanyň çatyrymlanan meseleler nazaryýeti bir tarapdan onuň berk matematiki pikir ýöretmä ýugrulan ylmy akym hökmünde ýaýramagyna, beýleki tarapdan çyzykly programmalaşdyrmanyň amaly we ykdysady taýdan ulanylan matematiki serişdä öwrülmegine itergi berdi.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň iki meselesine seredeliň:

I mesele. $F=c_1 x_1+\dots+c_n x_n$ funksiýanyň iň uly bahasyny aşakdaky şertlerde tapmaly:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{42}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1, 2, \dots, n). \ .$$

II mesele. $Z=b_1 y_1+\dots+b_m y_m$ funksiýanyň iň kiçi bahasyny aşakdaky şertlerde tapmaly:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1, \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \le c_2, \\ \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \le c_m; \end{cases} \tag{43}$$

$$y_i \ge 0; \ (i=1, 2, \dots, m).$$

Bu meseleler aşakdaky häsiýetlere we meňzeşliklere eýedir:

1) I meselede çyzykly maksat funksiýasynyň iň uly bahasy, II meselede bolsa, iň kiçi bahasy gözlenilýär.

2) I meseledäki çyzykly maksat funksiýasynyň üýtgeýän ululyklarynyň öňündäki koeffisiýentler beýleki meseläniň çäklendirmeler ulgamynyň azat agzalary bolýarlar we tersine, II meseläniň çäklendirmeler ulgamynyň azat agzalary I meselede maksady görkezýän çyzykly funksiýanyň üýtgeýän ululyklarynyň koeffisiýentleri bolýarlar.

3) Her bir meselede cäklendirmeler ulgamy bir manyly deňsizlikler görnüşinde berilýär: maksat funksiýasynyň iň uly bahasy gözlenende «≤», iň kiçi bahasy gözlenende «≥» alynýar.

4) Çäklendirmeler ulgamyndaky üýtgeýänleriň koeffisiýentleri biri birine transponirlenen matrisa görnüşinde ýazylýar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}\,a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{we} \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12}\,a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{1n}\,a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5) Bir meseläniň çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikleriň sany beýleki meseledäki üýtgeýänleriň sany bilen deň gelýär.

6) Üýtgeýänleriň otrisatel dällik şerti iki meselede hem saklanýar.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň ýokardaky şertleri kanagatlandyrýan iki meselesine **özara çatyrymlanan meseleler** diýilýär.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleriniň özara çatrymlanmasy simmetriklik häsiýete eýedir. Ýagny II meselä çatyrymlanan mesele I mesele bolar. Muňa garamazdan, çatyrymlanan meselä görä berlen meselä **göni mesele** diýilýär.

Şeýlelikde, çyzykly programmalaşdyrmanyň her bir meselesine degişlilikde çatyrymlanan meseläni ýazyp bolýar. Özara çatyrymlanan meseleleriň islendigini I mesele hökmünde ýa-da oňa çatyrymlanan mesele hökmünde alyp bolar.

Berlen çyzykly programmalaşdyrma meselesine çatyrymlanan meseläni düzmegiň düzgünleri aşakdaky ýalydyr:

1. Çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikler aşakdaky bir görnüşe getirýärler: eger iň uly baha gözlenýän bolsa ≤ görnüşe, iň kiçi baha gözlenýän bolsa ≥ görnüşe getirýärler. Munuň üçin şertler ýerne ýetmeýän deňsizlikleri (-1)-e köpeltmek ýeterlikdir.

2. Berlen meseläniň üýtgeýän ululyklarynyň koeffisiýentlerinden (1-nji düzgündäki şertlerden soňra) A matrisa ýazylýar we A matrisa görä transponirlenen A^{T} matrisa düzülýär.

3. A^{T} matrisanyň elementlerinden çatyrymlanan meseläniň cäklendirmeler ulgamy düzülýär. Çäklendirmeler ulgamyndaky azat agzalar hökmünde birinji meseläniň maksady görkezýän funksiýasyn-

daky üýtgeýän ululyklaryň koeffisiýentleri alynýar we garşylykly manyly deňsizlik ýazylýar.

4. Çatyrymlanan meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisiýentlerini birinji meseläniň çäklendirmeler ulgamyndaky azat agzalaryny peýdalanyp ýazýarlar.

5. Eger I meselede maksat funksiýasynyň iň uly bahasy gözlenýän bolsa, oňa çatyrymlanan meselede maksat funksiýasynyň iň kiçi bahasyny gözlemeli. Tersine, I meselede iň kiçi baha gözlenýän bolsa, oňa çatyrymlanan meselede maksat funksiýasynyň iň uly bahasyny gözlemeli.

6. Düzülýän çatyrymlanan meseläniň näbellileriniň otrisatel dällik şerti ýazylýar.

2.43-nji mysal. Aşakdaky çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine çatyrymlanan meseläni düzmeli.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ çäklendirmelerde $F = 3x_1 + x_2$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Deňsizlikler ulgamynyň üçünji deňsizliginde çatyrymlanan meseläni düzmegiň birinji şerti kanagatlandyrylmaýar. Bu deňsizligi (-1)-e köpeldýäris:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 + x_2 \le 5. \end{cases}$$

Berlen meselede çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikleriň sany dört, näbellileriniň sany bolsa iki. Diýmek, oňa çatyrymlanan meselede çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikleriň sany iki, näbellileriniň sany bolsa dört bolmaly. Berlen meseläniň çäklendirmeler ulgamyndaky näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen martisany ýazyp, oňa transponirlenen matrisany düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{we} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bulary göz öňünde tutup, ýokardaky düzgünleri peýdalanyp, çatyrymlanan meseläni düzýäris.

Çatyrymlanan mesele: Aşakdaky çäklendirmelerde, ýagny

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 3, \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0.$$

şertlerde $L = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4 \to \min$ tapmaly.

2.6.2. Çatyrymlanan meseleler hakda esasy teoremalar

Özara çatyrymlanan meseleleriň birini çözmek beýlekini çözmezden oňa degişli maglumatlary almaga mümkinçilik berýär. Şeýle hem, bu meseleleriň ykdysady manysynda uly öňegidişligi gazanmaga ýol açýar. Çyzykly programmalaşdyrmada çatyrymlanan meseleler hakynda ikitaraplaýynlyk nazaryýeti aşaky teoremalar esasynda gurulýar.

2.6-njy teorema. Eger çyzykly programmalaşdyrmanyň bir meselesiniň ahyrky optimumy bar bolsa, onda oňa çatyrymlanan meseläniň hem ahyrky optimumy bardyr we iki meseläniň hem maksat funksiýasynyň optimal bahalary deňdir, ýagny, $F_{max} = Z_{min}$ ýa-da $F_{min} = Z_{max}$. Eger çatyrymlanan meseleleriň birinde maksat funksiýasy çäklenmedik bolsa, onda beýleki meseläniň çäklendirmeler ulgamy özara gapma-garşy deňsizliklerden ybaratdyr.

Ilki bilen özara çatyrymlanan meseleleriň üýtgeýän ululyklarynyň arasynda birbelgili degişliligi guralyň. Onuň üçin berlen çyzykly programmalaşdyrma meselesi simpleks usul bilen çözülende deňsizlikler ulgamyny oňa deňgüýçli deňlemeler ulgamyna öwürmek üçin m sany goşmaça otrisatel bolmadyk $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$ üýtgeýän ululyklaryň girizilýändigini ýatlalyň. Bu ýerde $i = 1, 2, \ldots, m$ sanlar x_{n+i} täze girizilen näbellilere degişli deňsizlikleriň tertibidir.

Çatyrymlanan meseläniň çäklendirmeler ulgamy m üýtgeýän ululyklary özünde saklaýan n sany deňsizliklerden ybarat. Bu mesele simpleks usul bilen çözülende n sany goşmaça otrisatel bolmadyk $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+i}, \ldots, x_{m+n}$ üýtgeýänler girizilýär. Özara çatyrymlanan meseleleriň üýtgeýän ululyklarynyň arasyndaky degişlilik aşakdaky görnüşde gurulýar:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1, & x_2, & \ldots, & x_j, & \ldots, & x_n & x_{n+1}, & x_{n+2}, & \ldots, & x_{n+i}, & x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_{m+1}, & y_{m+2}, & \ldots, & y_{m+j}, & \ldots, & y_{n+m}, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_i & y_m
\end{array}
$$

Başgaça aýdylanda, berlen meseläniň deňsizlikler ulgamynyň x_j (j=1, 2,…,n) näbellilerine çatyrymlanan meselede emele gelýän goşmaça y_{m+j} näbelliler, berlen meselede girizilen her bir goşmaça üýtgeýän x_{n+i} ululyga çatyrymlanan meseledäki başky y_i (i=1, 2,…,m) üýtgeýän ululyklar degişli edilip goýulýar.

2.7-nji teorema. Özara çatyrymlanan meseleleriň biriniň optimal çözüwiniň düzüjileri beýleki meseläniň maksady görkezýän funksiýasynyň optimal çözüwiniň (ol ýeke-täk we şikessiz bolanda) gazanylýan wagtyndaky degişli koeffisiýentleriniň modulyna deňdir.

2.8-nji teorema. Goý, $x^*= x_1^*, x_2^*, \cdots, x_j^*, \cdots, x_n^*$ – berlen meseläniň, $y^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots, y_i^*, \cdots, y_m^*)$ j=1, 2, …,n, i=1, 2,…,m, çatyrymlanan meseläniň ýolbererli cözüwleri bolsun. x^* we y^*-yň degişlilikde göni we çatyrymlanan meseleleriň çözüwi bolmagy üçin aşakdaky şertleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir:

$$
\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) \cdot x_j^* = 0, \;\; j = 1, 2, \cdots, n,
$$
$$
\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_j\right) \cdot y_i^* = 0, \;\; i = 1, 2, \cdots, m.
$$

Teoremalardan görnüşi ýaly, özara çatyrymlanan meseleleriň biriniň çözüwini tapyp, şol optimal çözüwiň kömegi bilen beýleki meseläniň hem optimal çözüwini ýazyp bolýar.

2.44-nji mysal. 2.43-nji mysaly simpleks usuly bilen çözeliň.

Ilki bilen berlen meseläniň çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikleriň ulgamyna goşmaça otrisatel bolmadyk näbelli üýtgeýänler girizilýär:

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\
-x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\
x_1 + x_2 - x_5 = 1, \\
x_1 + x_2 + x_6 = 5;
\end{cases}
$$

$x_j \geq 0$, (j=1, 2,…,6).

1-nji ädimde x_3, x_4, x_5, x_6 – goşmaça üýtgeýänler bazis üýtgeýänler hökmünde alynýar. x_1, x_2 – azat üýtgeýänler. Bazis üýtgeýänleri, azat üýtgeýänleriň üsti bilen aňladalyň:

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 2 + x_1 - x_2, \\ x_5 = -1 + x_1 - x_2, \\ x_6 = 5 - x_1 - x_2. \end{cases}$$

Başlangyç bazis çözüwi almak üçin x_1-üýtgeýäni bazis üýtgeýänleriň düzümine girizýäris. min (2/1; ∞; 1/1, 5/1) =1 deňlemeden x_5 üýtgeýän ululygy azat üýtgeýänleriň düzümine geçmelidigi görünýär.

2-nji ädimde bazis üýtgeýänler x_1, x_3, x_4, x_5, azat üýtgeýänler: x_2, x_5.

Bazis üýtgeýän ululyklary we maksat funksiýasyny azat üýtgeýänler bilen aňladalyň:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_5, \\ x_3 = 1 + 3x_2 - x_5, \\ x_4 = 3 - 2x_2 + x_5, \\ x_6 = 4 - x_5; \end{cases}$$

$$F=3-2x_2+3x_5 \text{ (max).}$$

x_5 üýtgeýän ululygy bazis üýtgeýän ululyklaryň arasyna geçireliň. min (∞;1/1; ∞;4/1)=1 deňlikden x_3 bazis üýtgeýän uluygy azat üýtgeýän ululyklaryň arasyna geçirmelidigi görünýär. 3-nji ädimde azat üýtgeýänler: x_2, x_3; Onda:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 4 + x_2 - x_3, \\ x_5 = 1 + 3x_2 - x_3, \\ x_6 = 3 - 3x_2 + x_3; \end{cases}$$

$$F=6+7x_2-3x_3 \text{ (max).}$$

x_2 üýtgeýän ululygy bazis üýtgeýän ululyklaryň arasyna geçireliň. x_2= min (∞; ∞; ∞; 1/1)=1 deňlikden onuň deregine azat näbelli üýtgeýän ululyklaryň arasyna x_6-ny geçirmelidigi kesgitlenýär.

4-nji ädimde esasy üýtgeýänler: x_1, x_2, x_4, x_5; azat üýtgeýänler x_3, x_6, onda:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - (1/3)x_3 - (2/3)x_6, \\ x_2 = 1 + 1/3x_3 - (1/3)x_5, \\ x_4 = 5 - (2/3)x_3 - (1/3)x_6, \\ x_5 = 4 - x_6; \end{cases}$$

$$F=13-(2/3)x_3-(7/3)x_6 \text{ (max)}.$$

Optimallyk kriterisi ýerine ýetýär. Optimal çözüw (4;1;0;5;4;0) deň bolup, bu çözüwde $F_{max}=13$ bolar.

Edil ýokardaka meňzeşlikde, çatyrymlanan meseläniň çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlikleri goşmaga näbellileriň kömegi bilen deňlemeler ulgamyna getirip, goşmaça goşulan näbellileri bazis üýtgeýän ululyklar hökmünde kabul edip, ädimme-ädim meseläniň optimal çözüwini tapyp bolar. Ýöne biz çözülen meselä çatyrymlanan meseläni çözmän, onuň optimal çözüwini guralyň. Onuň çäklendirmelerini deňlemeler görnüşinde ýazanymyzda iki sany goşmaça näbelli ululyk girizilýär: y_5, y_6. Bu meseleleriň näbelli üýtgeýän ululyklarynyň arasynda degişlilik guralyň:

$$\begin{array}{cccccc} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & x_5, & x_6, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5, & y_6, & y_1, & y_2, & y_3, & y_4. \end{array}$$

Bu degişlilikden we ýokardaky teoremalardan çatyrymlanan meseläniň optimal çözüwi (2/3;0;0;7/3;0;0) bolup, bu çözüwde $Z=13=5y_2+4y_3+4y_5+y_6$ bolýandygy gelip çykýar. Diýmek, $F_{max}=13=Z_{max}$.

Eger göni mesele haýsydyr bir kesgitli ykdysady meseläni beýan edýän bolsa, onda oňa çatyrymlanan mesele hem berlen meselä görä käbir manyny berer. Mysal üçin, göni meselede çäklendirmeler (42) görnüşde bolsun. Şol meseledäki ululyklara ykdysady many-mazmun bereliň:

Göni (I) mesele: $x_j \geq 0$ ($j=1, 2,\ldots,n$) mukdarda n dürli önüm öndürmek hakynda bolsun. a_{ij} ($i=1, 2,\ldots,m$), ($j=1, 2,\ldots,n$) j görnüşli önümiň bir birligini öndürmek üçin gerek bolan i görnüşli harajadyň mukdary bolsun. b_i – bu i-nji görnüşli harajadyň ätiýaçlyk mukdary. c_j j görnüşli önümiň bir birligini ýerlemekden gelýän girdeji bolsun.

Çatyrymlanan (II) mesele: $y_i \geq 0$ (i=1, 2,…,m) i-nji görnüşli harajadyň gymmatynyň şertlenilen bahasy bolsun.

Ýokarda aýdylanlardan, göni meselede girizilen her bir x_{n+i} goşmaça üýtgeýän ululyga çatyrymlanan meseläniň ilkinji y_i (i=1, 2,…, m) üýtgeýän ululyklary degişlidir. Bu meseleleri seljermek şeýle netijelere gelmäge mümkinçilik berýär:

Netije. Eger çatyrymlanan meseläniň optimal çözüwiniň i-nji düzüjisi nola deň bolsa, onda göni meseläniň optimal çözüwindäki oňa degişli goşmaça üýtgeýän ululyk položiteldir we bu ululyk göni meseläniň i-nji deňsizliginde ornunda goýlanda ol deňsizlik deňlige öwrülmeýär.

Eger çatyrymlanan meseläniň optimal çözüwiniň i-nji düzüjisi položitel sana deň bolsa, onda göni meseläniň optimal çözüwindäki oňa degişli goşmaça üýtgeýän ululyk nola deňdir we bu ululyk göni meseläniň i-nji deňsizliginde ornunda goýlanda ol deňsizlik deňlige öwrülýär.

Çatyrymlanan meseläniň optimal çözüwiniň ilkinji m-k düzüjileri **obýektiw şertlenen bahalar** diýlip atlandyrylýar. Şeýle atlandyrmak öz gözbaşyny özara çatyrymlanan meseleleriň arasynda ýokarda guralan ykdysady nukdaý nazardaky baglanyşykdan alýar. Ondan görnüşi ýaly, eger göni mesele harajatlary rejeli peýdalanyp, önüm öndürmek hakynda bolsa, onda çatyrymlanan meseläniň obýektiw şertlenen bahalary şol harajatlaryň her biriniň ýokary peýda almakdaky zerurlygyny görkezýär. Meselem, ýokardaky meselelerde çatyrymlanan meseläniň optimal çözüwiniň ilkinji m düzüjileriniň (obýektiw şertlenen bahalarynyň) arasynda nol bahanyň bolmagy, göni meseledäki degişli harajadyň gyt däl harajatdygyny görkezýär. Obýektiw şertlenen bahalarynyň arasynda noldan tapawutly düzüjiniň bolmagy degişli harajadyň gyt harajatdygyny, aýamak gerekdigini görkezýär.

Şeýlelikde, şertlenen bahalar göni meseläniň optimal meýilnamasy bilen berk baglanyşyklydyr. Göni meseläniň berlenleriniň üýtgemegi onuň optimal meýilnamasyna-da, çatyrymlanan meseläniň optimal meýilnamasyna hem täsir edýär.

2.6.3. Çäklendirmeleriň sag tarapynyň optimal çözüwe täsiri

Goý, cyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi kanoniki görnüşde berlen bolsun.

$F=c_1 x_1+\cdots+c_n x_n$ maksat funksiýasyny aşakdaky:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ \cdots \quad \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2,\ldots,n)$$

çälendirmelerde maksimallasdyryan $x_1,\ldots,x_n$ näbellileri tapmaly.

Duýgurlygyň derňewi meseläniň parametrleriniň göni we çatyrymlanan meseleleriň optimal cozüwlerine tasirlerini bahalandyrmakdan ybaratdyr [10].

Çäklendirmeleriň b_i sag taraplarynyň göni we çatyrymlanan meseleleriň optimal çözüwine tasir edişini öwreneliň.

2.7-nji kesgitleme. Eger b_k parametriň bahasy käbir $[b_k^q, b_k^p]$ aralyga degişli bolup üýtgände göni meseläniň optimal bazis näbellileriniriniň düzümi üytgemese, onda bu aralyga b_k **parametriň durnuklylyk aralygy** diyilýär.

$b_k^- = b_k - b_k^q$, $b_k^+ = b_k^s - b_k$ ululyklara, degişlilikde b_k ululygyň **maksimal ýol berilýän azalmasy we artdyrmasy** diýilýär. Şeýlelik bilen, durnuklylyk aralygy aşakdaky görnüşde ýazylar:

$$[b_k - b_k^-, \ b_k + b_i^+].$$

Kesgitlemeden optimal çatyrymlanan bahalaryň üýtgemeýändikleri gelip çykýar.

Çäklendirmeleriň sag taraplarynyň üýtgemegi bilen ýüze çykýan optimal meýilnamanyň üýtgemegine seredeliň.

Goý, b_i ululyk Δb_i ululyga, onuň täze $b_i+\Delta b_i$ bahasy durnuklylyk aralygynda bolar ýaly üýtgän bolsun, ýagny $b_i + \Delta b_i \in [b_i - \Delta b_i^-, b_i + \Delta b_i^+]$. Goý, simpleks usul bilen meseläniň başky parametrler boýunça çözüwi tapylan bolsun. Soňky parametrlerde meseläni simpleks usulda çözmän onuň optimal çözüwini tapyp bolar. X^* we $X(\Delta b_i)$ bilen, degişlilikde başdaky we täze meseläniň bazis näbellileriniň optimal bahalaryndan duran matrisa sütünleri, G bilen bolsa çäklendirmeler ulgamynyň A matrisasyny bazis sütünlerinden duran matrisany belgiläliň. Täze meseläniň bazis näbellileriniň optimal bahalary aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$X(\Delta b_i)=G^{-1} B_i=G^{-1} B+\Delta b_i\, G_i^{-1}.$$

Bu ýerde G_i^{-1} – ol G matrisanyň ters matrisasy, G_i^{-1} bolsa G^{-1} matrisanyň i-nji sütünini aňladýar. Başda berlen meseläniň optimal çözüwini $X^*=G_i^{-1} B$ deňdigini göz öňünde tutup, alarys [10]:

$$X(\Delta b_i)=X^*+\Delta b_i\, G_i^{-1}.$$

Bu ýerde ähli bazis däl näbelliler 0-a deňdir. Soňky deňlikden G_i^{-1} matrisanyň i-nji sütüniniň çäklendirmeler ulgamynyň sag tarapynyň birlik ululyga artmagy bilen ($\Delta b_i=1$) ýüze çykan başdaky meseläniň bazis näbellileriniň üýtgemelerini görkezýändigi gelip çykýar.

Bazis näbellileriň üýtgemegi maksat funksiýasynyň hem üýtgemegine getirýär. Goý, y_i seredilýän b_i azat agza laýyk gelýän çatyrymlanan meseläniň näbellisi bolsun. Aşakda getirilýän teorema harajatlaryň üýtgemegine baglylykda önümleri ýerlemekden gelýän F girdejileriň üýtgemesini beýan edýär.

2.9-njy teorema (bahalandyrma barada teorema). Goý, i-nji harajadyň mukdary Δb_i ululyga üýtgände onuň täze bahasy durnuklylyk aralygyna degişli bolsun, ýagny $b_i + \Delta b_i \in [b_i - b_i^-, b_i + b_i^+]$. Onda önümleri ýerlemekden gelýän girdejiler aşakdaky ululyga üýtgärler:

$$\Delta F=y_i\, \Delta b_i.$$

Teoremadan, eger harajatlar bir birlige üýtgese, ýagny $\Delta b_i=1$ bolsa, onda $\Delta F=y_i$ bolýandygy, bu bolsa y_i bahalaryň degişli harajatlaryň önümçilik üçin gymmatlyklaryny görkezýändigi gelip çykýar.

$\Delta F=y_i$ deňlikden kölege y_i bahanyň bu harajadyň gorunyň 1 birlik üýtgemegi netijesinde ýüze çykýan ýerlemekden gelen serişdeleriň ΔF üýtgemegini görkezýändigi gelip çykýar, ýagny bu kölege baha bu harajadyň önümçilik üçin gymmatlylygyny kesgitleýär. Deňagramlyk teoremasyndan, gyt däl harajadyň kölege bahasynyň 0-a deňdigi gelip çykýar. Onda bol harajadyň üýtgemegi ýerlemekden gelen serişdeleriň ululygyny üýtgetmeýär, ýagny onuň gymmatlylygy 0-a deňdir.

Maksat funksiýasynyň bahasy $\Delta F = F^{*} + y_i\, \Delta b_i$. deň bolar. *i* harajadyň gorunyň üýtgemegi netijesinde optimal meýilnamanyň üýtgemegini simpleks tablisasyndan tapalyň. Optimal simpleks tablisasynyň ikinji sütüniniň berlen meselede önümçiligiň möçberlerini we başdaky meseläniň harajatlarynyň galyndylaryny kesgitleýändigi öň aýdylypdy. Harajadyň gorunyň üýtgemegi bu sütünde aşakdaky düzgünler boýunça üýtgemelere getirýär:

Olaryň öňki bahalaryna (ikinji sütüniň elementlerine) x_{i+n} näbelliniň sütüniniň degişli elementleri harajadyň gorunyň üýtgemeginiň Δb_i ululygyna köpeldilmek bilen goşulýarlar.

Özi hem, ähli bazis däl näbelliler 0-a deň bolmaklygyna galýarlar. Harajadyň maksimal ýol berilýän azalmagyny, artdyrylmagyny we durnuklylyk aralygyny alnan optimal meýilnamadan tapyp bolýar.

Indi bolsa durnuklylyk aralygynyň serhetlerini tapalyň.

$$X(\Delta b_i) = X^{*} + \Delta b_i\, G_i^{-1}$$

matrisa deňligini koordinatalarda aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$x_i(\Delta b_i) = x_i^{*} + \Delta b_i\, g_{ji}^{-1},$$

bu ýerde g_{ji}^{-1} belgileme G_i^{-1} matrisanyň elementini aňladýar.

Sag tarapyň Δb_i üýtgemesiniň ähli $x_i\ (\Delta b_i)$ ululyklar otrisatel däl bolanlarynda ýolbererli bolýandyklaryny belläliň. Bu şertden durnuklylyk aralygynyň serhetlerini tapyp bolar.

Sag tarapyň maksimal ýolbererli azalmagyny aşakdaky formula boýunça tapyp bolar:

$$x_i(b_i) = x_i^{*} + b_i g_{ji}^{-1},$$

bu ýerde minimum ähli g_{ji}^{-1} boýunça alynýar, ýagny başdaky optimal X^{*} çözüwiň sütüniniň G_i^{-1} matrisanyň *i*-nji sütüniniň položitel elementlerine bolan gatnaşyklaryny düzmeli we olaryň içinden iň kiçisini saýlap almaly. Eger bu sütünde položitel elementler ýok bolsa, onda $b_i^{-} = +\infty$ deň bolar.

Sag tarapyň maksimal ýol berilýän artmasy aşakdaky formula bilen kesgitlenilýär:

$$b_i^{+} = \min\left(\frac{x_j^{*}}{|\, g_{ji}^{-1} |}\right),$$

bu ýerde minimum ähli $g_{ji}^{-1} < 0$ boýunça alynýar, ýagny başdaky optimal X^{*} çözüwiň sütüniniň G_i^{-1} matrisanyň *i*-nji sütüniniň otrisatel elementlerine bolan gatnaşyklaryny düzmeli we olaryň içinden absolýut bahasy boýunça in kiçisini almaly. Eger bu sütünde otrisatel elementler ýok bolsa, onda $\Delta b_i^- = +\infty$ deň bolar.

Aýdylanlary jemläp, optimal meýilnamalaryň ykdysady seljermesini geçirmek üçin aşakdaky teorema (subutsyz) hem uly kömek berýär:

2.10-njy teorema. Çatyrymlanan meseläniň optimal meýilnamasynyň y_i düzüjileri F maksat funksiýasynyň optimal bahasy gazanylan wagtynda b_i ululyklara bagly bölek önümlerine deňdir:

$$\frac{\partial F_{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)}{\partial b_i} = y_i.$$

Bellik. Teorema b_i-leriň üýtgemeginiň $F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ bahasynyň üýtgemegine getirýändigini we bu üýtgeýşi berlen meselä çatyrymlanan meseläniň çözüwiniň üsti bilen seljerip boljakdygyny tassyklaýar. Meselem, çatyrymlanan meseläniň çözüwiniň y_i komponentasynyň ýeterlik uly bolmagy berlen meselede i-nji harajadyň üýtgeýiş mukdarynyň $F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ baha (berlen meselede maksat funksiýasynyň iň uly bahasynyň) edýän täsirini bahalandyrýar. Hususan hem, y_i=0 bolmagy i-nji harajadyň önümçiligiň ýagdaýyna täsiriniň ýokdugyny aňladar.

Sorag we ýumuşlar

1. Özara çatyrymlanan meseleleriň meňzeşliklerini sanaň.
2. Özara çatyrymlanan meseleleriň çözüwleriniň arasynda nähili degişlilik gurulýar?
3. Çatyrymlanan meseleler hakda teoremalary teswirläň.
4. Obýektiw şertlenen bahalaryň ykdysady manysyny teswirläň.

2.45-2.56-njy mysallarda çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerine çatyrymlanan meseleleri gurmaly we olaryň çözüwleriniň berlen meseleleriň çözüwleri boýunça tapmaly.

2.45. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$

L=x_1+2x_2(max).

2.46. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2 \leq x_1 \leq 5, \\ 1 \leq x_2 \leq 4; \end{cases}$

L=2x_1+x_2(max).

2.47. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 + 2x_2 (\max)$.

2.48. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ x_1 - 1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = 3x_1 + 4x_2 (\max)$.

2.49. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4 \le 0, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 1 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 + 7x_2$ (max).

2.50. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5 \ge 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge -3, \\ 2x_1 + x_2 - 14 \le 0, \\ x_1 - 5 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 + x_2$ (max).

2.51. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8, \\ 1 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 - x_2$ (min).

2.52. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 - 3x_2$ (min).

2.53. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 + 4 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 - 4 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 + x_2$ (min).

2.54. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \ge 0 \\ -2x_1 + 6x_2 \ge -12 \\ x_1 - 2 \ge 0 \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = 2x_1 - 6x_2$ (min).

2.55. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 - 7 \ge 0, \\ x_1 - 2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = 2x_1 - x_2 (\min)$.

2.56. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2 \ge 0, \\ x_1 - 3 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$
$L = x_1 - 2x_2$ (min).

III bölüm

ÇYZYKLY PROGRAMMALAŞDYRMANYŇ ÝÖRITE MESELELERI

§ 3.1. Ulag meselesi

3.1.1. Ulag meselesiniň matematiki modeli

II bölümde ulag meselesini çyzykly programmalaşdyrmanyň nusgawy meseleleriniň biri hökmünde teswirledik.Ýöne onuň çözülişi bilen meşgullanmandyk. Ulag meselesiniň ýapyk modelini matematiki dile geçiripdik. Meselä laýyklykda, A_1, A_2, A_3,…,A_m ugradyjy nokatlardan B_1, B_2, B_3,…,B_n kabul (sarp) ediji nokatlara, degişlilikde ugradylyp bilinjek ýükleriň mukdarlary a_1, a_2, a_3,…,a_m deň. Sarp ediji nokatlaryň isleg bildiren ýükleriniň mukdarlary, degişlilikde b_1, b_2, b_3,…,b_n deň. A_i-den B_j-e ugradylan ýükleriň bir birligine tölenýän töleg (çykdajy) c_{ij} belli ululyklar. x_{ij} – A_i-den B_j-e ugradylan ýüküň näbelli (kesgitlemeli) mukdary. Onda ulag meselesiniň ýapyk nusgasy aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m1} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_m; \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i=1,2,...,\ m;\ j=1,2,...,\ n.$$

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} (\min). \tag{4}$$

(1) – (4) topluma **ulag meselesiniň ýapyk nusgasy** diýilýär. Ulag meselesinde x_{ij} (j=1, 2,…,n), (i=1, 2,…,m) çözüwe **meýilnama** diýilýär. Meselä laýyklykda (2) we (3)-şertleri kanagatlandyrýan, (4) maksady görkezýän funksiýa iň kiçi baha berýän (x_{ij}) meýilnamany tapmaly. (2), (3) we (4) mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesidigi sebäpli ony simpleks düzgüniň algoritmi bilen çözüp bolýar. Ýöne, ulag meselesinininiň aýratynlygy näbellileriň koeffisiýentleriniň 1-e deň bolmagy, bir tarapdan ony simpleks usulda çözmäge kynçylyk döretse, beýleki tarapdan ýörite, has elýeter, özboluşly çözüliş usulynyň döremegine getirdi. Ulag meselesi çyzykly programmalaşdyrmanyň beýleki meselelerinden düýpli tapawutlanýar.Ýapyk ulag meselesiniň hemişe optimal çözüwi bar. Onuň deňlemeler ulgamlarynyň näbelli ululyklarynyň koeffisiýentleriniň ählisi bire deň.

(1) şert meseläniň $m+n$ deňlemeleriniň özara çyzykly baglydygyny görkezýär. Ony (2) we (3) ulgamlardaky deňlemeleri goşaňda görmek bolýar.

Hakykatda $n+m$-1 deňleme çyzykly bagly däl. Diýmek, (2) we (3) deňlemeler ulgamynyň rangy $r=n+m-1$ deň. (2) we (3) deňlemeler ulgamynda $n+m-1$ näbelliler bazis ululyklar, galan $k=nm-(n+m-1)=(m-1)(n-1)$ sany ululyklar erkin üýtgeýän ululyklar bolar. Optimal çözüw ýolbererli çözüwler köplüginiň bir depesinde ýerleşýär. Bu depede iň bolmanda k sany ululyk nola deň. Eger (1), (2) we (3) şertler kanagatlandyrylsa, onda (x_{ij}) – meýilnama **ýolbererli meýilnama** diýilýär. Eger meýilnamada $r=n+m-1$ sany düzüji noldan tapawutly bolsa, onda (x_{ij}) meýilnama **dayanç meýilnama** diýilýär. Eger-de bu meýilnama L funksiyasyny minimuma öwürýän bolsa, onda oňa **optimal meýilnama** diýilýär. Ulag meselesi ýönekeý 3.1-nji ulag tablisasynyň kömegi bilen çözülýär.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	...	B_n	Ýükler: a_i
A_1	$c_{11}+$	$-c_{12}$	c_{13}	...	c_{1n}	a_1
A_2	$c_{21}-$	$+c_{22}$	c_{23}	...	c_{2n}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	...	c_{3n}	a_3
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	...	c_{mn}	a_m
Isleg b_j	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Bu ýerde: KN – kabul ediji nokat. UN – ugradyjy nokat.

Her öýjügiň ortasynda ugradylýan ýükleriň mukdary ýazylýar. c_{ij} çykdajylar öýjügiň ýokarky sag burçunda ýazylýar. Onda eger (x_{ij}) meýilnama daýanç meýilnama bolsa, 3.1-nji tablisanyň $n+m-1$ öýjüginde $x_{ij}\neq 0$ bolar, galan $(n-1)(m-1)$ öýjükde $x_{ij}=0$ bolar.

3.1.2. Daýanç meýilnamasynyň tapylyşy

Daýanç meýilnamany tapmaklygyň birnäçe düzgünleri bar. Olardan daýanç meýilnamasyny tapmanyň **«demirgazyk – günbatar burç»** düzgüni bilen **«iň az çykdajylar»** usuly boýunça tapylyşy mysal bolup biler. Bu usullaryň manysy $n+m-1$ ädimiň dowamynda boş öýjükleri yzly-yzyna doldurmakdan ybaratdyr. Başlangyç daýanç meýilnamasynyň **«demirgazyk – günbatar burç»** düzgüni bilen tapylyşyna mysal arkaly seredeliň:

3.1-nji mysal. Aşakdaky 3.2-nji tablisada ulag meselesiniň ilkinji daýanç meýilnamasyny gurmaly:

3.2-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	^{10} − 18	^{8} 27	^{6} + 3	^{5}	^{9}	48
A_2	^{6} +	^{5}	^{8} 30 −	^{6}	^{5}	30
A_3	^{8}	^{7}	^{10} 9	^{8} 12	^{7} 6	27
A_4	^{7}	^{5}	^{4}	^{6}	^{8} 20	20
b_i	18	27	42	12	26	125

Tapylan meýilnamanyň daýanç meýilnamadygyny barlalyň. Daýanç meýilnamada $n+m-1$ öýjükde $x_{ij}\neq 0$ bolmaly: $n+m-1=4+5-1=8$. Ýokardaky 2-nji tablisada 8 öýjükde $x_{ij}\neq 0$. Galanlarynda $x_{ij}=0$. Diýmek, tapylan meýilnama daýanç meýilnamadyr. Şu meýilnama boýunça tölenýän tölegiň mukdary

$$L=18\cdot 10+27\cdot 8+3\cdot 5+30\cdot 8+9\cdot 10+12\cdot 8+6\cdot 7+20\cdot 8=1039$$

deň bolar. Eger doly öýjükleriň sany $n+m-1$-den az bolsa, onda daýanç meýilnama nähili tapylýar? Munuň üçin 3.3-nji tablisada berlen ulag meselesine seredeliň:

3.3-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	10				20
A_2			20	10		30
A_3				25		25
A_4					20	20
b_i	10	10	20	35	20	95

Öňki düzgün bilen daýanç meýilnamany gurmaklyga synanyşalyň. $n+m-1=4+5-1=8$, diýmek, 8 öýjükde $x_{ij}\neq 0$ bolmaly. 3.3-nji tablisada 6 öýjükde $x_{ij}\neq 0$. Diýmek, gurlan meýilnama doly manysyndaky daýanç meýilnamasy däl ekeni. Bu ýagdaýyň diňe başlangyç meýilnama tapylanda bolman, optimal meýilnama gözlenende hem bolmagy mümkin. Şunuň ýaly meýilnamalara **şikesli** (**kemli**) **meýilnama** diýilýär. Şeýle bolanda kemsiz daýanç meýilnamany gurmak üçin käbir ugradyjy nokadyň ýa-da kabul ediji nokadyň ýükleriniň mukdaryny umumy balans şerti ýerine ýeter ýaly azajyk (ε san) üýtgedýäris. Umumy çykdajy hasaplananda meýilnamada $\varepsilon=0$ diýip almak bolar.

3.4-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	10	ε			$20+\varepsilon$
A_2			$20-\varepsilon$	$10+\varepsilon$		30
A_3				$25-\varepsilon$	ε	25
A_4					$20-\varepsilon$	$20-\varepsilon$
b_i	10	10	20	35	20	95

3.4-nji tablisada 8 öýjük noldan tapawutly. Şonuň üçin tapylan meýilnama (x_{ij}) kemsiz daýanç meýilnamadyr.

Daýanç meýilnama **«iň az çykdajylar»** usuly boýunça gurulanda meýilnamany düzmek c_{ij} çykdajylaryň iň kiçi öýjüginden başlanýar. Bu usul ýokarda beýan edilen **«demirgazyk-günbatar burç»** usulyna garanda has gowy çözüwi berýär. Sebäbi onda çykdajylary azaltmak maksady göz öňünde tutulýar. Meselem, 3.1-nji tablisadaky mysalda daýanç meýilnama «iň az çykdajylar» usuly boýunça gurulanda aşakdaky meýilnamany alarys (*3.5-nji tablisa*).

3.5-nji tablisa

UN \ KN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	^{10}	^{8}	^{5} 42	^{6} 6	^{9}	48
A_2	^{6} 18	^{7}	^{8}	^{6}	^{5} 12	30
A_3	^{8}	^{7} 7	^{10}	^{8} 6	^{7} 14	27
A_4	^{7}	^{5} 20	^{4}	^{6}	^{8}	20
b_i	18	27	42	12	26	125

Alnan meýilnamadadaky jemi çykdajyny L maksat funksiýasynyň bahasyny) tapalyň:

$$L=42\cdot5+6\cdot6+18\cdot6+12\cdot5+7\cdot7+6\cdot8+14\cdot7+20\cdot5=709.$$

Tapylan baha L maksat funksiýasynyň öňki bahasyndan (1039) has kiçi. Şol sebäpli, bu meýilnama öňki daýanç meýilnamadan gowy.

3.1.3. Daýanç meýilnamasynyň gowulandyrylyşy (optimal meýilnamanyň gözlenilişi)

Ulag meselesinde alnan daýanç meýilnamasyny gowulandyrmak üçin (ýagny optimal meýilnama tarap ymtylmak üçin) **ulag tablisasynyň sikli** diýilýän öýjükleriň toplumyna seredilýär.

3.1-nji kesgitleme. Boş öýjükde başlanyp, balansy bozman ony doldurmak üçin birnäçe doly öýjükleri birleşdirýän, burçlary 90° deň bolan ýapyk döwük çyzyk bilen birleşdirilen öýjükleriň yzygiderligine **ulag tablisasynyň sikli** diýilýär.

Sikl ýönekeý we çylşyrymly bolup biler. Sikliň depeleriniň sany jübüt. Ýönekeý siklde dört öýjük, çylşyrymly siklde dörtden köp jübüt sanly öýjükler bolýar. Sikl boýunça meýilnama üýtgedilende (ýük hereket etdirilende-geçirilende) ýüküň köpelýän öýjügindäki depäni (+), kemelýänini (–) bilen belgileýäris. Siklde şol alamatlar bilen alnan çykdajylaryň jemine **sikliň bahasy** diýilýär. 3.1-nji tablisada ýönekeý sikliň bahasy $\gamma = c_{11} - c_{12} + c_{22} - c_{21}$ deň. 3.2-nji tablisada görkezilen sikliň bahasy $\gamma = 6 - 10 + 5 - 8 = -4$ deň. Eger sikl boýunça k birlik ýüki hereket etdirsek we $\gamma > 0$ bolsa, onda L maksat funksiýasynyň bahasy $k \cdot \gamma$ ululyga ulalar, ýa-da eger $\gamma < 0$ bolsa $k \cdot \gamma$ kiçeler. 3.2-nji tablisada sikl boýunça 18 birlik ýüki hereket etdirip bolýar. Onda L-iň bahasy 18(–4) ululyga kiçeler. Ýagny

$$L_1 = L + k_\gamma = 1039\text{-}18 \cdot 4 = 913 \text{ bolar.}$$

Alnan meýilnama başlangyç meýilnamadan gowy. Bu meýilnamanyň optimaldygyny kesgitlemek üçin meýilnamadaky ähli boş öýjükler üçin siklleri gurup, olaryň bahalaryny hasaplap görmeli. Eger alnan meýilnama kemsiz daýanç meýilnama bolsa, onda her boş öýjük (x_{ij}=0) üçin diňe bir hasap sikli bar. Sikliň bir depesi boş öýjükde, beýleki depeleri doly öýjükde bolýar we şol boş öýjügi doldurmak maksady bilen gurulýar. Eger şol sikleriň arasynda otrisatel bahaly sikl ýok bolsa, onda alnan daýanç meýilnama optimal meýilnamadyr. Eger otrisatel bahaly sikl bar bolsa, onda alnan meýilnama optimal meýilnama däl we ony gowulandyrmagy dowam etdirmeli. Onuň üçin siklleriň arasyndan bir otrisatel bahaly sikli saýlap alyp, şol sikl boýunça ýüki hereket etdirmeli. Optimal meýilnama diňe bir bolman, onuň birnäçe bolmagy hem mümkindir. Aýdylanlardan, daýanç meýilnamany gowulandyrmak üçin (optimal meýilnamany tapmak üçin) her gezek boş öýjükler üçin hasap siklini düzüp, olaryň arasyndaky otrisatel bahaly sikl boýunça ýüki hereket etdirmeli. Bu bolsa birnäçe hasaplamalary geçirmekligi talap edýär. Eger ulag meselesi potensiallar usuly (düzgüni) diýilýän usul bilen çözülse otrisatel bahaly sikl aýdyň görünýär.

3.1.4. Ulag meselesiniň potensiallar düzgüni bilen çözülişi

Ýene-de (1)-(4) ulag meselesine seredeliň. Goý, A_i ugradyjy nokat bir birlik ýüki ugratmak üçin α_i çykdajy, B_j kabul ediji nokat bolsa β_j çykdajy edýär diýeliň. $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j$ ululyga A_i-den B_j-e ugradylan bir birlik ýüke edilýän **«psewdobaha» (şertli baha)** diýilýär. Bu tölegleri gysgaça $(\alpha_i\ \beta_j)$ bilen belgiläliň.

Berlen $(\alpha_i\ \beta_j)$-de islendik (x_{ij}) ýolbererli meýilnamada

$$\bar{L}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ \tilde{c}_{ij}\,x_{ij}=C=const,$$

ýagny

$$\bar{L}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i+\beta_j)x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{ij}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\alpha_i x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\beta_j\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j=C=const$$

Diýmek $\bar{L}\,x_{ij}$-lere bagly däl.

1-nji teorema. Hemme bazis öýjükler üçin ($x_{ij}>0$, $n+m-1$ sany öýjükde) $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ bolsa, boş öýjükler üçin ($x_{ij}=0$) $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j\leq c_{ij}$ bolsa, onda meýilnamany gowulandyrmak mümkin däl, ýagny bu meýilnama optimal meýilnamadyr.

$\tilde{c}_{ij}$ – baha ulag tablisasynyň öýjükleriniň ýokarky çep burçunda ýazylýar. Islendik boş öýjük üçin hasap sikliniň bahasy c_{ij}- $\tilde{c}_{ij}$ deň.

3.1-nji tablisada (2;2) öýjügi boş öýjük diýsek, onda bu öýjük üçin gurlan hasap sikliniň galan depeleri doly öýjüklerde bolar. Bu sikliň bahasy üçin alarys.

$$\gamma_{22}=c_{22}-c_{21}+c_{11}-c_{12}=c_{22}-(\alpha_2+\beta_1)+(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_1+\beta_2)=c_{22}-\alpha_2-\beta_2=$$
$$=c_{22}-(\alpha_2+\beta_2)=c_{22}-\tilde{c}_{22}.$$

Doly öýjüker üçin $\qquad \alpha_i+\beta_j=c_{ij}\ (x_{ij}>0) \qquad$ (5)

görnüşli deňlemeleriň sany $n+m-1$, näbellileriniň sany $n+m$ sany. Näbellileriň birine başlangyç baha berip (nol) beýlekilerini tapmak bolar. Eger doly öýjüklerde ($x_{ij}>0$) $\tilde{c}_{ij}=c_{ij}$ bolsa, galan boş öýjüklerde ($x_{ij}=0$) $\tilde{c}_{ij}\leq c_{ij}$ bolsa, onda tapylan meýilnama optimal. Eger-de boş ($x_{ij}=0$) öýjüklerde $\tilde{c}_{ij}\geq c_{ij}$ bolsa, onda şu öýjük üçin otrisatel bahaly hasap sikli bar, bu ýagdaýda meýilnama-da optimal däl. Beýan edilen algoritm teoremanyň şerti ýerine ýetýänçä dowam etdirilýär.

3.2-nji mysal. Ulag meselesini potensiallar düzgüni bilen çözeliň (*3.6-njy tablisa*).

3.6-njy tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	1	2	20
A_2	6	2	4	40
b_j	15	20	25	60=60

Başlangyç daýanç meýilnamany demirgazyk-günbatar burç düzgüni bilen tapalyň (*3.7-nji tablisa*).

3.7-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	4 15	1 5	2	20	α_1
A_2	6	2 15	4 25	40	α_2
b_j	15	20	25	60=60	
β_j	β_1	β_2	β_3		

Doly öýjükler üçin $\tilde{c}_{ij}=c_{ij}$ bolýar. Onda

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 4, \end{cases}$$

Bu ýerden $\alpha_1=0$; $\alpha_2=1$; $\beta_1=4$; $\beta_2=1$; $\beta_3=3$. Boş öýjükler üçin:

$$\tilde{c}_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 3 > 2, \ \tilde{c}_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 1 + 4 = 5 < 6.$$

Diýmek (*3.8-nji tablisa*).

3.8-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	4 15	1 5	2	20	0
A_2	6	2 15	4 25	40	1
b_j	15	20	25	60=60	
β_j	4	1	3		

3.8-nji tablisada (1, 3) öýjükde $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, onda bu öýjük üçin (–) bahaly hasap sikli bar. Onuň bahasy $\gamma=2-3=-1$. Sikl boýunça 5 birlik ýüki aýlap, täze meýilnama alarys. Bu meýilnamany 3.9-njy tablisada ýazalyň:

3.9-njy tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i	α_i
A_1	4 15	1	2 5	20	$\alpha_1=0$
A_2	6	2 20	4 20	40	$\alpha_2=2$
b_j	15	20	25	60=60	
β_j	$\beta_1=4$	$\beta_2=0$	$\beta_3=2$		

Öňki ýaly edip, doly öýjükler üçin α_i we β_j-ni hasaplalyň.

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 = 4, \\ \alpha_1+\beta_3 = 2, \\ \alpha_2+\beta_2 = 2, \\ \alpha_2+\beta_3 = 4, \end{cases}$$

deňlemelerden: $\alpha_1=0$; $\beta_1=4$; $\beta_3=2$; $\alpha_2=2$; $\beta_2=0$ alarys.

Boş öýjükler üçin $\tilde{c}_{21}=\alpha_2+\beta_2=2+4=6=6$; $\tilde{c}_{12}=\alpha_1+\beta_2=0+0<1$

Teoremanyň şertleri ýerine ýetýär, diýmek tapylan meýilnama optimal meýilnama we bu meýilnamada:

$$L_{\min}=15\cdot4+5\cdot2+20\cdot2+20\cdot4=190.$$

Eger (1)-(4) ulag meselesinde (1) balans şerti ýerine ýetmeýän bolsa, $\sum a_i \neq \sum b_j$ (başgaça $\sum a_i > \sum b_j$ ýa-da $\sum a_i < \sum b_j$ bolanda) onda, ulag meselesine **ulag meselesiniň açyk görnüşi** diýilýär. Ulag meselesiniň açyk görnüşini çözmek üçin ilki bilen ol ulag meselesiniň ýapyk modeline getirilýär. Eger $\sum a_i > \sum b_j$ bolsa, ugradyjy nokatlardaky ýükleriň mukdary kabul ediji nokatlaryň isleg bildiren ýükleriniň mukdaryndan köp. Bu ýagdaýda B_f ýalan kabul ediji nokat girizilýär we onuň «isleg» bildiren ýüküniň mukdary $b_f = \sum a_i - \sum b_j$ deň diýip göz öňünde tutulýar. Bu ýagdaýda ulag meselesi ýapyk nusga gelýär. L hasaplananda ýalan kabul edijä birlik ýüküň daşalmagyndan edilýän çykdajy $c_{if}= 0$ deň diýlip hasap edilýär. Eger $\sum a_i < \sum b_j$ bolsa, onda **ýalan A_f ugradyjy nokat** girizýäris. Ondaky «ugratmaly» ýüküň mukdary $a_f = \sum b_j - \sum a_i$ diýip hasap edýäris. Bu ýagdaýda hem L hasaplananda $c_{fj}=0$ diýip hasap edilýär.

3.3-nji mysal. Aşakdaky ulag meselesiniň açyk modelinde ýalan ugradyjy nokat girizmeli (*3.10-njy tablisa*).

3.10-njy tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	4	3	20
A_2	1	5	2	30
b_j	35	20	25	80>50

Ýalan A_f ugradyjy nokat girizýäris. Bu nokadyň «ugratmaly» ýükleriniň mukdary a_f=80–50=30 onda ýokardaky 3.10-njy tablisa aşaky görnüşe (*3.11-nji tablisa*), ýagny meseläniň ýapyk nusgasyna gelindi.

3.11-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	4	3	20
A_2	1	5	2	30
A_f	0	0	0	30
b_j	35	20	25	80

Biziň sereden ulag meselämize **baha boýunça ulag meselesi** diýilýär. Wagt boýunça, ýagny ýükleri ugradyjy nokatlardan kabul ediji nokatlara mümkin boldugyça az wagt sarp edip daşamak boýunça ulag meselesi hem bar.

Soraglar we ýumuşlar

1. Ulag meselesini matematiki modelini nädip düşündirmeli?
2. Ulag meselesiniň ýolbererli meýilnamasyny kesgitlemeli.
3. Ulag meselesiniň daýanç meýilnamasyny kesgitlemeli.
4. Ulag meselesiniň daýanç meýilnamasynyň potensiallar düzgüni bilen tapylyşyny düşündiriň.
5. Ulag tablisasynyň siklini kesgitläň.
6. Ulag meselesiniň açyk görnüşini nädip düşündirmeli?

3.4–3.9-njy mysallarda tablisalar bilen berlen ulag meselesiniň ýapyk modelini çözüň:

3.4.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	5	3	4	100
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
b_j	80	80	60	80	300

3.5.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	5	3	4	120
A_2	3	2	7	5	100
A_3	1	4	3	2	160
b_j	70	130	100	80	300

3.6.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	3	4	70
A_2	3	2	5	3	100
A_3	4	5	3	2	60
b_j	40	50	60	80	230

3.7.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	2	4	70
A_2	3	4	5	130
A_3	1	2	3	60
A_3	4	6	7	40
b_j	100	140	60	300

3.8.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	70
A_2	3	4	5	130
A_3	1	2	3	50
A_4	4	5	1	80
b_j	170	100	60	330

3.9.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	3	2	4	70
A_2	3	4	5	130
A_3	1	2	3	50
A_4	4	5	1	80
b_j	170	100	60	330

3.10.–3.12-nji mysallarda tablisalar bilen berlen ulag meselesiniň açyk modelini çözüň:

3.10.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
b_j	80	80	80	80	

Jogaby: L_{min}=780, optimal meýilnama:

$x_{13}=60$; $x_{14}=80$; $x_{21}=20$; $x_{22}=80$; $x_{31}=60$.

3.11.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
b_j	80	50	50	70	

Jogaby: L_{min}=720, optimal meýilnama: $x_{13}=10$; $x_{14}=70$; $x_{21}=10$; $x_{22}=50$; $x_{23}=40$; $x_{31}=70$.

3.12.

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
b_j	45	45	100	160	

Jogaby: L_{min}=800, optimal meýilnama:

$x_{13}=100$; $x_{14}=35$; $x_{22}=45$; $x_{31}=45$; $x_{34}=125$.

3.1.5. Wagt boýunça ulag meselesi

Durmuşyň käbir ulag meselelerinde önümçiligiň çykdajylary gyzyklandyrman, eýsem ýükleri berlen T wagtda isleg bildirilen ýerlere ugratmak gyzyklandyrýar. Diýmek, ýükleri T wagtda ýerleşdirmeli. Tiz zaýalanýan önümleri ugratmak ýa-da gerekli enjamlary we däri-dermanlary gerek ýerlerine gysga wagtda ýetişdirmek we şuňa meňzeşler muňa mysal bolup bilerler. Iň gowy (x_{ij}) meýilnama diýlip gysga wagtda ($T_{\min}$ wagtda) ýükleriň gerekli ýerine dargadylmagyny üpjün edýän meýilnama aýdylýar.

Iň az wagtly (x_{ij}) meýilnama **optimal meýilnama** diýilýär. Ulag meselesiniň bu görnüşine **wagt boýunca ulag meselesi** diýilýär. Goý, (1)-(4) ulag meselesi berlen bolsun. A_i-ugradyjy nokatlardan (*UN*) B_j-kabul ediji nokatlara (*KN*) ýük eltmek üçin t_{ij} wagt berlen x_{ij} – ýüküň mukdaryna bagly däl, ýagny A_i-den B_j-e ýük ugratmak üçin ulag ýeterlik. Ulag meselesiniň bu görnüşi üçin hem tablisa doldurylýar. Bu tablisanyň öňki tablisadan tapawudy c_{ij}-leriň ýerine t_{ij}-ler ýazylýar. Diýmek, şeýle (1)–(4) şertleri kanagatlandyrýan iň gysga wagtda ýükleri gerekli ýerlerine ugradýan (x_{ij}) meýilnamany tapmaly. Iň köp wagt sarp edilip, ýükler gerekli ýerine eltilende hemme B_j-kabul ediji nokatlar kanagatlandyrylýar. Şonuň üçin maksat şol $T = \max t_{ij}$ wagty mümkin boldugyça kiçeltmekden ybarat. Diýmek:

$$T = \max t_{ij} \to \min \tag{6}$$

üpjün edýän şeýle (x_{ij}) meýilnamany tapmaly.

Ulag meselesiniň bu görnüşi çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi däl. Sebäbi, T funksiýa a_{ij}-e çyzykly bagly funksiýa däl. Ýöne bu meseläni hem çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesine getirip çözüp bolýar. Ony aşakdaky mysal arkaly görkezeliň.

3.12-nji mysal. Ulag meselesi 3.12-nji tablisa arkaly berlen. Gysga wagtda ýerine ýetirilýän (x_{ij}) meýilnamany tapmaly.

3.12-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10 21	8 4	5	6	7	25
A_2	5	6 33	6 1	6	9	34
A_3	4	8	7 39	8 3	5	42
A_4	11	4	5	8 8	9 15	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Ilki «demirgazyk-günbatar burçy» düzgüni bilen başlangyç meýilnamany gurýarys (*3.12-nji tablisa*).

Gurlan meýilnama kemsiz. (1,1) öýjükde iň uly wagt bar (T=10). Bu öýjükden gaçmaly, edil şonuň ýaly-da (4,1) öýjüge hem barmaly däl, sebäbi onda T = 11.

Bu öýjükleri meýilnamadan aýrmak maksady bilen, «iň az çykdajylar» usuly boýunça täze meýilnama gurýarys (*3.13-nji tablisa*).

3.13-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8	5 25	6	7	25
A_2	5 21	6 13	6	6	9	34
A_3	4	8 1	7 15	8 11	5 15	42
A_4	11	4 23	5	8	9	23
b_j	21	27	40	11	15	124

3.13-nji tablisada ýüki daşamaklygyň wagty 8-de gutarýar. Ol (3, 4) we (3, 2) öýjüklerde. Meýilnamany gowulandyrmaga synanyşalyň. Onuň üçin 11 birlik ýüki (1,4) öýjügiň sikli boýunça hereketlendirýäris. Netijede, täze daýanç meýilnamany alarys:

3.14-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8	5 14	6 11	7	25
A_2	5 21	6 13	6	6	9	34
A_3	4	8 1	7 26	8	5 15	42
A_4	11	4 23	5	8	9	23
b_j	21	37	40	11	15	124

3.14-nji tablisada ýüküň daşalyp gutarýan wagty T=8. Bu (3,2) öýjüge degişli. Meýilnamany gowulandyrmak üçin bu öýjükdäki ýüki aýyrmaly. Onuň üçin 1 birlik ýüki 3.14-nji tablisada görkezilen sikl boýünça hereketlendirýäris we täze daýanç meýilnamasyny alarys (*3.15-nji tablisa*).

3.15-nji tablisa

KN / UN	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	10	8	5 14	6 11	7	25
A_2	5 20	6 14	6	6	9	34
A_3	4 1	8	7 26	8	5 15	42
A_4	11	4 23	5	8	9	23
b_j	21	37	40	11	15	124

Meýilnamany ýene-de gowulandyrmaga synanyşalyň. (3, 3) öýjükdäki 26 birlik ýüki aýyrmaly. Bu ýüki (3, 4) öýjüge geçirmek mümkin däl, sebäbi bu öýjükde wagt 8-e deň. Bu ýüki (2, 3) öýjüge geçirmek hem (3, 3) öýjükde 6 birlik ýüküň galmagyna getirýär. Şeýlelikde 3.15-nji tablisada tapylan meýilnama optimal meýilnamadyr. $T_{\min}$=7.

§ 3.2. Çyzykly programmalaşdyrmanyň bitin sanly meseleleri

Üýtgeýän ululyklary bitin bahalary alýan ekstremal meselelere **bitin sanly programmalaşdyrma meseleleri** diýilýär. Şeýle meseleleriň matematiki modelinde çäklendirmelerdäki funksiýalar-da, maksady görkezýän funksiýa hem çyzykly, çyzykly däl we garyşyk görnüşli bolup biler. Biz diňe çyzykly ýagdaýlara serederis.

3.13-nji mysal. Kärhanada goşmaça enjamlary oturtmak karar edildi. Onuň üçin $6\frac{1}{3}m^2$ meýdan bölünip berildi. Iki dürli enjamy satyn almak üçin 10 müň manat pul harçlamak karar edildi. I görnüşli enjamyň biriniň bahasy 1000 manat, II görnüşli enjamyň biriniň bahasy bolsa 3000 manat. I görnüşli enjamyň biriniň satyn alynmagy önümiň öndürilişini 2 esse artdyrmaga, II görnüşli bolsa 4 esse artdyrmaga mümkinçilik berýär. I görnüşli enjamyň birini guramaga $2m^2$, II görnüşliniň birisi üçin bolsa $1m^2$ meýdanyň zerurdygyny göz öňünde tutup, enjamlaryň haýsy görnüşini satyn almagyň önüm öndürmegi maksimal ýokarlandyryp biljekdigini kesgitlemeli.

Çözülişi. Meseläniň matematiki modelini düzeliň. Goý, kärhana I görnüşli enjamyň x_1 sanysyny, II görnüşliniň bolsa x_2 sanysyny satyn almagy meýilleşdirsin. Onda bu üýtgeýän ululyklar aşakdaky deňsizlikler ulgamyny kanagatlandyrarlar:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6\frac{1}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 10. \end{cases} \tag{7}$$

Eger karhana bu enjamlary satyn alan bolsa, onda önümçiligiň artymy

$$F=2x_1+4x_2 \tag{8}$$

funksiýanyň üsti bilen aňladylar.

Meseläniň ykdysady manysyna görä, x_1, x_2 üýtgeýän ululyklar otrisatel däl we bitin bahalara eýe bolmaly bolarlar:

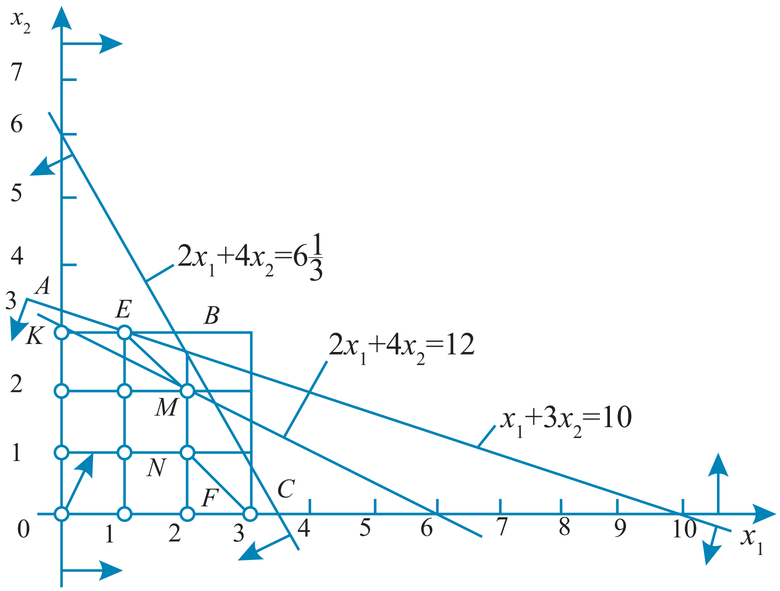
$$x_1\ge0,\ x_2\ge0, \tag{9}$$

$$x_1,\ x_2 - \text{bitin ululyklar.} \tag{10}$$

Şeýlelik bilen, berlen mesele (7), (9) we (10) şertler ýerine ýetende $F=2x_1+4x_2$ funksiýanyň maksimumyny tapmaklyga getirýär. x_1, x_2 näbelli ululyklaryň diňe bitin baha eýe bolup bilýändigi sebäpli, me-

8. Sargyt № 2463

sele bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesidir. Näbellileriň sany ikä deň bolany sebäpli, bu meseläni geometriki usulda çözüp bolar. Onuň üçin x_1Ox_2 koordinatalar tekizliginde (7), (9) we (10) şertleriň ýerine ýetýän oblastyny guralyň (*3.1-nji surat*).



3.1-nji surat

Gurlan *OAEBC* köpburçlugyň ähli nokatlary (7) deňsizlikler ulgamyny we (9) otrisatellik şertini kanagatlandyrýar. (10) bitin sanly bahalylyk şertini bolsa diňe çyzgyda tegelejikler bilen belgilenen 12 sany nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Berlen meseläniň çözüwini tapmak üçin *OABC* köpburçlugy *OKEMNF* köpburçluk bilen çalyşalyň. Bu köpburçluk bitin sanly koordinataly ähli ýolbererli çözüwleri özünde saklaýar. Bu köpburçlugyň depeleriniň koordinatalary hem bitin sanlardyr. Şol sebäpli, eger $F=2x_1+4x_2$ funksiýanyň *OKEMNF* köpburçlukdaky maksimum bahany alýan nokadyny tapsak, onda ol nokat seredilýän meseläniň optimal çözüwi bolar.

Şeýle nokady tapmak üçin $\vec{C}=(2;4)$ wektory we *OKEMNF* köpburçlugyň üstünden geçýän $2x_1+4x_2=12$ göni çyzygy guralyň. (12 san tötänleýin, bu göni çyzyk *OKEMNF* köpburçlugyň üstünden geçer ýaly saýlanyldy). Gurlan gönini $\vec{C}$ wektoryň ugruna onuň *OKEMNF* köpburçluk bilen soňky umumy nokadynyň üstünden geçýänçe süýşüreliň. Şol nokadyň koordinatalary meseläniň optimal çözüwi bolar, sebäbi maksat funksiýasynyň bu nokatdaky bahasy iň uly bolar.

Çyzgydan görnüşi ýaly, şeýle nokat E(1;3) nokatdyr. $F_{max}=14$. Şeýlelik bilen, E nokadyň koordinatalary (7)-(10) meseläniň optimal meýilnamasyny kesgitlär. Bu meýilnama görä, kärhana I görnüşli enjamyň birini we II görnüşli enjamyň üçüsini satyn almaly. Bu meýilnama kärhana bar bolan pul serişdelerinde we önümçilik meýdanynda maksimal mukdarda önüm öndürmäge mümkinçilik berer.

Ýene bir meselä seredeliň. Goý, kärhana ýerine ýetirmeli işleri üçin n sany enjam (mehanizm) ulanmak gerek bolsun. i-nji enjamyň (i=1, 2,…, n) j-nji işi (j=1, 2,…, n) ýerine ýetirmekdäki iş öndürijiligi c_{ij} deň bolsun. Her bir enjam diňe bir işde ulanylyp bilinýär we her bir iş diňe bir enjam tarapyndan ýerine ýetirilip bilinýär diýlen şertde enjamlaryň işlere dogry berkidilip, iň ýokary iş öndürijiligini gazanmagyň meýilnamasyny tapmaly.

Meseläniň matematiki modelini guralyň. j-nji işi ýerine ýetirmekde i-nji enjam ulanylanda 1-e deň bolýan, beýleki ýagdaýda 0-a deň bolýan x_{ij} üýtgeýän ululygy girizeliň. Ýagny:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, j\text{-nji işi ýerine ýetirmekde } i\text{-nji enjam ulanylanda;} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{beýleki ýagdaýda.} \end{cases} \tag{11}$$

Onda her bir enjamyň diňe bir işde ulanylyp bilinýändigi hakdaky şert:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, (i = 1, 2, ..., n) \tag{12}$$

görnüşe, her bir işiň diňe bir enjam tarapyndan ýerine ýetirilip bilinýändigi hakdaky şert bolsa:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, (j = 1, 2, ..., n) \tag{13}$$

görnüşe eýe bolar.

Şeýlelik bilen, mesele (11), (12) we (13) şertler kanagatlandyrylanda

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{14}$$

funksiýanyň iň uly bahasy gazanylýan x_{ij} (i=1, 2,…,n; j=1, 2,…,n) üýtgeýän ululyklaryň bitin bahalaryny tapmaklyga getirilýär. Bu teswirlenen mesele hem bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesidir.

Bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwiniň tapylyşy. Çäklendirmelerindäki funksiýalary hem, maksat funksiýasy hem çyzykly bolan bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesine garalyň. Onuň üçin üýtgeýän ululyklary diňe bitin bahalary alýan çyzykly programmalaşdyrmanyň umumy meselesini teswirläliň:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{15}$$

funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{16}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

$$x_j \ (j=1, 2, \ldots, n) \text{ – bitin bahaly ululyklar} \tag{18}$$

şertleri kanagatlandyrýan köplükde iň uly bahasyny tapmaly.

Eger bu meseläni simpleks usul bilen çözsek, onda onuň çözüwi bitin bahaly bolup hem biler, bolman hem biler. Çyzykly programmalaşdyrmanyň mydama bitin bahaly çözüwi bolýan meselesine ulag meselesi mysal bolup biler. Umumy ýagdaýda (15)-(18) meseläni çözmek üçin ýörite usullar gerek bolar. Şeýle usullaryň biri hem esasynda simpleks usul ýatan Gomoriniň usulydyr.

3.2.1. Gomoriniň usuly

Bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini Gomoriniň usuly bilen tapmak (15)-(17) meseläni çözmekden, ýagny seredilýän meseläni näbellileriň bitin bahany almak şertini göz öňünde tutmazdan çözmekden başlanýar. (15)-(18) meseläniň optimal çözüwi tapylandan soňra ol çözüw seljerilip başlanylýar. Eger şol çözüwiň düzüm bölekleriniň arasynda drob san ýok bolsa, onda tapylan çözüw seredilýän (15)-(18) meseläniň, ýagny bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwidir. Eger (15)-(17) meseläniň optimal çözüwiniň düzüm bölekleriniň arasynda drob san bar bolsa, onda (16) deňlemä aşakdaky deňsizlik goşulýar:

$$\sum_j f(a_{ij}^*)x_j \geq fb_i^* \tag{19}$$

we (15)-(17), (19) mesele çözülýär.

(19) deňsizlikde a_{ij}^* we b_i^* ululyklar degişli a_{ij}, b_i ululyklaryň soňky simpleks tablisadan alnan bahalary, $f(a_{ij}^*)$ we $f(b_{ij}^*)$ ululyklar bolsa şol ululyklaryň drob bölekleri (bu ýerde sanyň drob bölegi diýlip ondan aýrylanda bitin sany berýän iň kiçi otrisatel däl sana düşünilýär). Eger (15)–(17) meseläniň optimal çözüwinde birnäçe üýtgeýän ululyk drob baha eýe bolsa, onda (19) deňsizlik olaryň iň uly drob böleklisi üçin alynýar.

Eger (15)–(17), (19) meseläniň çözüwinde hem drob bahaly düzüm bölegi bar bolsa, onda ýokarda beýan edilen proses gaýtalanylýar. Tükenikli gezek gaýtalamadan soňra ýa-ha bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwi tapylar, ýa-da onuň çözüwiniň ýoklugy aýan bolar.

Eger (18) bitin bahalylyk şerti diňe käbir üýtgeýän ululyklara degişli bolsa, onda meselä **bölekleýin bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselesi** diýilýär. Şeýle meseleler hem ýokardaky ýaly täze goşmaça şert girizmek bilen çözülýär. Ýöne bu ýagdaýda goşmaça çäklendirme

$$\sum_j \gamma_{ij}x_j \geq f(b_i^*) \tag{20}$$

görnüşde bolar. Bu ýerde γ_{ij} aşakdaky gatnaşyklardan kesgitlenýär:

1) Bitin däl bahany kabul edýän x_j-ler üçin,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^*, & a_{ij}^* \geq 0 \ \text{ bolanda,} \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1-f(b_i^*)}|\,a_{ij}^*|, & a_{ij}^* < 0 \ \text{ bolanda.} \end{cases} \tag{21}$$

2) Bitin bahany kabul edýän x_j-ler üçin,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*), & f(a_{ij}^*) \leq f(b_i^*) \ \text{ bolanda,} \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1-f(b_i^*)}|1-f(a_{ij}^*)|, & f(a_{ij}^*) > f(b_i^*) \ \text{ bolanda.} \end{cases} \tag{22}$$

Ýokarda beýan edilenlerden Gomoriniň usuly boýunça bitinsanly programmalaşdyrmanyň optimal çözüwini tapmagyň aşakdaky döwürleri öz içine alýandygy mälim bolýar:

1. Üýtgeýän ululyklaryň bitin bahalylygy talaby göz öňünde tutulmazdan simpleks usul boýunça (15)–(17) meseläniň çözüwi tapylýar.
2. (15)–(17) meseläniň optimal çözüwinde maksimal drob bahasy bolan, (15)–(18) meseläniň optimal çözüwinde bitin bahaly bolmaly üýtgeýänler üçin goşmaça çäklendirmeler düzülýär.
3. Çatyrymlanan simpleks usulyň kömegi bilen (15)–(17) meselä goşmaça çäklendirmeler birikdirilenden soň alnan meseläniň çözüwi tapylýar.
4. Tapgyrlaýyn iş prosesi, zerur halatynda ýene-de bir goşmaça çäklendirme düzülip, tä (15)–(18) meseläniň optimal çözüwi tapylýança, ýa-da meseläniň çözüwiniň ýokdugy anyklanylýança dowam etdirilýär.

3.14-nji mysal. Gomoriniň usuly bilen

$$F=3x_1+2x_2 \tag{23}$$

funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=13, \\ x_1-x_2+x_4=6, \\ -3x_1+x_2+x_5=9, \end{cases} \tag{24}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2,\dots,5), \tag{25}$$

$$x_j \ (j=1, 2,\dots,5) \text{ – bitin bahaly ululyklar,} \tag{26}$$

çäklendirmeleriň kanagatlandyrylýan şertlerinde tapmaly. Meseläniň çözüwine geometriki interpretasiýa bermeli.

Çözülişi. Ilki bilen (23)–(25) meseläni çözeliň (*3.16-njy tablisa*).

3.16-njy tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	P_3	0	13	1	1	1	0	0
2	P_4	0	6	1	–1	0	1	0
3	P_5	0	9	–3	1	0	0	1
4			0	–3	–2	0	0	0
1	P_3	0	7	0	2	1	–1	0
2	P_1	3	6	1	–1	0	1	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	P_5	0	27	0	–2	0	3	1
4			18	0	–5	0	3	0
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	–1/2	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1
4			71/2	0	0	5/2	1/2	0

Bu tablisadan görnüşi ýaly, (23)–(25) meseläniň tapylan çözüwi $X = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$ (23)–(26) meseläniň optimal çözüwi däl. Sebäbi onuň iki komponentleri (x_1 we x_2) bitin baha eýe däldirler. Olaryň drob bölekleri deň. Şol sebäpli, olaryň biri üçin goşmaça çäklendirme düzülýär. Meselem, x_2 üçin şeýle çäklendirme düzeliň. Soňky tablisadan alarys:

$$x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)x_3 - \left(\frac{1}{2}\right)x_4 = 7/2.$$

Şeýlelik bilen, (23)-(25) meseläniň çäklendirmeler ulgamyna

$$f(1)x_2 + f\left(\frac{1}{2}\right)x_3 + f\left(-\frac{1}{2}\right)x_4 \geq 7/2$$

ýa-da

$$\left(\frac{1}{2}\right)x_3 + \left(\frac{1}{2}\right)x_4 \geq \frac{1}{2},$$

ýagny

$$x_3+x_4 \geq 1 \tag{27}$$

deňsizlik goşulýar (*3.17-nji tablisa*).

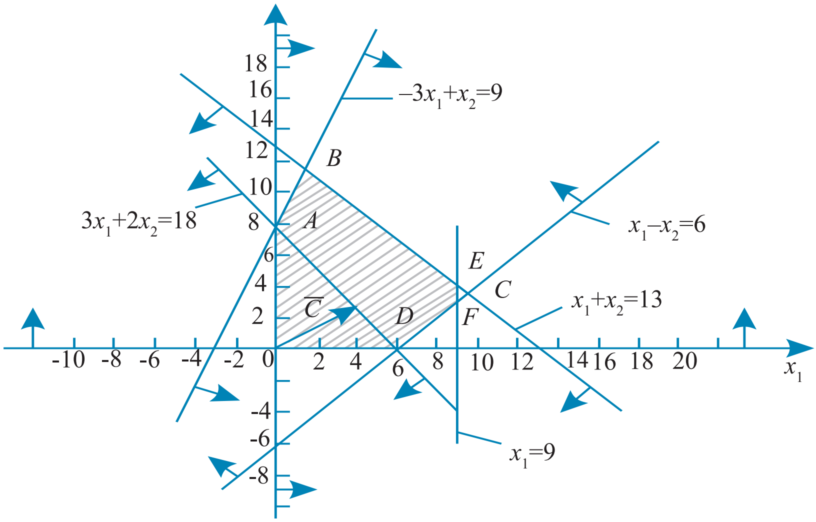
3.17-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	–1/2	0	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1	0
4	P_6	0	–1	0	0	–1	–1	0	1
5			71/2	0	0	5/2	1/2	0	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	P_2	2	4	0	1	1	0	0	–1/2
2	P_1	3	9	1	0	0	0	0	1/2
3	P_5	0	32	0	0	–1	0	1	2
4	P_4	0	1	0	0	1	1	0	–1
5			35	0	0	2	0	0	1/2

Indi bu tablisadan (23) funksiýanyň (26), (24) we (27) şertler ýerine ýetendäki maksimal bahasyny tapýarys.

3.17-nji tablisadan bitinsanly programmalaşdyrmanyň başky berlen meselesiniň optimal çözüwiniň X^*=(9;4;0;1;32) bolýandygy görünýär. Bu meýilnamada maksat funksiýasynyň bahasy $F_{max}=35$. Meseläniň geometrik manysyna garalyň. (23)–(25) meseläniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi bolup, 3.2-nji suratdaky *OABCD* köpburçluk hyzmat eder. Bu suratdan görnüşi ýaly maksat funksiýasy öz maksimal bahasyny $C\left(\frac{19}{2};\frac{7}{2}\right)$nokatda kabul edýär, ýagny $X=\left(\frac{19}{2};\frac{7}{2};0;0;34\right)$ çözüw optimal meýilnama bolup hyzmat edýär. Bu 3.16-njy tablisadan hem görünýär.

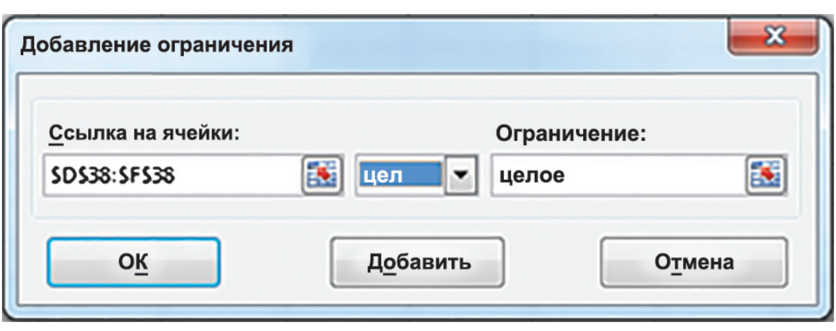


3.2-nji surat

$X = \left(\frac{19}{2}; \frac{7}{2}; 0; 0; 34\right)$ çözüw (23)-(26) meseläniň optimal çözüwi däldigi sebäpli goşmaça çäklendirme ($x_3+x_4 \geq 1$) girizilýär. x_3 we x_4 ululyklaryň bahalaryny (24) deňlemeler ulgamyndan tapyp, bu deňsizlikden $x_1 \leq 9$ deňsizligi alarys. Bu deňsizlige $x_1=9$ göni çyzyk bilen çäklenen, *OABCD* köpburçlukdan *EFC* üçburçlugy kesip alýan ýarymtekizlik degişlidir.

3.2-nji suratdan görnüşi ýaly, alnan meseläniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi bolup *OABEFD* köpburçluk hyzmat edýär. Bu köpburçlugyň E(9;4) nokadynda berlen meseläniň maksat funksiýasy maksimal baha eýe bolýar. E nokadyň koordinatalary bitin sanlar bolany sebäpli, $x_1=9$ we $x_2=4$ bahalary (18) deňlemeler ulgamynda orunlarynda goýanymyzda x_3, x_4 we x_5 näbelli ululyklar hem bitin bahalara eýe bolýarlar. Şol sebäpli $X^*=(9;4;0;1;32)$ çözüw berlen (23)-(26) meseläniň optimal çözüwi bolar. Bu 3.17-nji tablisadan hem gelip çykýar.

Bitin sanly programmalaşdyrmanyň meselelerini *MS Excel* maksatnamasynyň kömegi bilen çözmek. Bitinsanly programmalaşdyrmanyň meselelerini *MS Excel* maksatnamasynyň kömegi bilen çözmek üçin «*Данные*» gurallar toplumynyň «*Поиск решения*» penjiresinden peýdalanýarys. Bu guralyň çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini simpleks usul boýunça çözülişinden (1.5.6-njy bölümçede beýan edilen) tapawutlylykda, häzirki çözülýän meseläniň näbellileriniň bitin baha eýe bolmalydygy hakdaky şerti penjiräniň «*Добавить*» buýrugynyň kömegi bilen girizýäris, ýagny 3.3-nji suratdaky penjireden peýdalanýarys:



3.3-nji surat

Meseleler we gönükmeler

Bitinsanly programmalaşdyrmanyň meseleleriniň çözüwlerini tapmaly.

3.15. $F = 3x_1+x_2$ funksiýanyň minimumyny:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$,

x_j $(j = 1, 2)$ – bitin bahaly ululyklar,

çäklendirmeleriň kanagatlandyrylýan şertlerinde tapmaly.

Jogaby: $F_{min}=19$; $X^*=(0;19)$.

3.16. $F = 5x_1+7x_2$ funksiýanyň minimumyny:

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \geq 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j=1, 2)$,

x_j $(j=1, 2)$ – bitin bahaly ululyklar,

çäklendirmeleriň kanagatlandyrylýan şertlerinde tapmaly.

Jogaby: $F_{min}= 52$; $X^*=(2;6)$.

3.17. $F = 2x_1+x_2$ funksiýanyň maksimumyny:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 \geq 9, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ $(j=1, 2, ..., 5)$,

x_j $(j=1, 2, ..., 5)$ – bitin bahaly ululyklar,

çäklendirmeleriň kanagatlandyrylýan şertlerinde tapmaly.

Jogaby: $F_{max}=7$; $X^*=(3;1;2;3;3)$.

3.18. Her ikisiniň arasyndaky uzaklyk c_{ij} – deň bolan n sany şäher bar. Bir şäherde başlanyp, şol şäherde hem gutarýan we ýeke-ýekeden beýleki ähli şäherleri öz içine alýan iň kiçi uzynlykly ýoly tapmaly (meseläniň matematiki modelini gurmaly).

§ 3.3. Parametrli programmalaşdyrmanyň meseleleri

1. Parametrli programmalaşdyrmanyň meseleleriniň ykdysady we geometriki manysy. Çyzykly programmalaşdyrmanyň köpsanly meseleleriniň başlangyç maglumatlary käbir parametrlere bagly bolýar. Şeýle meselelere **parametrli programmalaşdyrmanyň meseleleri** diýilýär.

Ilki bilen çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesinde başlangyç maglumatlarynyň käbir parametre bagly ýagdaýyna seredeliň.

Maksat funksiýasynyň koeffisiýentleri t parametre bagly bolup, şol parametriň üýtgeýän $[\alpha, \beta]$ aralygyna degişli her bir bahasy üçin

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j' + c_j'' t) x_j \tag{28}$$

funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)\ , \tag{29}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

şertleri kanagatlandyrýan köplükde iň uly bahasyny tapmaly bolsun.

Eger çäklendirmeler ulgamynyň azat agzalary t ululyga çyzykly bagly bolsa, onda bu mesele t-niň käbir $[\alpha, \beta]$ aralykdaky her bir bahasy üçin

$$F = \sum\nolimits_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{31}$$

funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i'' t, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{32}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

şertleri kanagatlandyrýan köplükde iň uly bahasyny tapmak meselesine getirilýär. Bu ýerde c_j, a_{ij}, b_i' we b_i'' berlen hemişelik sanlar.

Maksat funksiýasynyň koeffisiýentleri çäklendirmeler ulgamynyň azat agzalary ýaly t parametre bagly bolsalar, onda mesele t-niň käbir $[\alpha, \beta]$ aralykdaky her bir bahasy üçin:

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j^{'} + c_j^{''} t) x_j \tag{34}$$

funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i^{'} + b_i^{''} t, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{35}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

şertleri kanagatlandyrýan köplükde iň uly bahasyny tapmak meselesine getirilýär.

Bu meseleleriň umumylaşdyrylan görnüşi parametrli programmalaşdyrmanyň umumy meselesidir. Şeýle meselede t parametre maksat funksiýasynyň koeffisiýentleri hem-de çäklendirmeler ulgamyndaky koeffisiýentler we azat agzalar baglydyr. Parametrli programmalaşdyrmanyň umumy meselesi şeýle teswirlenýär: t parametriň käbir $[\alpha, \beta]$ aralykdaky her bir bahasy üçin

$$F = \sum_{j=1}^{n} (c_j^{'} + c_j^{''} t) x_j \tag{37}$$

funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{'} + a_{ij}^{''} t) x_j = b_i^{'} + b_i^{''} t, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{38}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

şertleri kanagatlandyrýan köplükde iň uly bahasyny tapmaly.

Teswirlenen meseleleriň çözüwlerini çyzykly programmalaşdyrmanyň usullary bilen hem tapyp bolýar. (28)–(30) görnüşli parametrli programmalaşdyrmanyň meselesiniň geometriki manysyny beýan edeliň. Goý, (29) deňlemeler ulgamynyň otrisatel däl çözüwler köplügi (çözüwler köpgranlygy) boş köplük däl bolup, birden köpräk nokatlary özünde saklaýan bolsun. Onda berlen mesele t parametriň käbir $[\alpha, \beta]$ aralykdaky her bir bahasy üçin çözüwler köpgranlygynyň (28) funksiýanyň maksimal bahany alýan nokadyny tapmaklyga getirilýär. Beýle nokady tapmak üçin $t = t_0$ deň diýip hasap edip, geometriki interpretasiýanyň kömegi bilen (28)–(30) meseläniň çözüwini taparys, ýagny ýa-ha çözüwler köpgranlygynyň (28) funksiýanyň maksimal bahany alýan depesini taparys, ýa-da bu meseläniň $t=t_0$ bolanda çözüwiniň ýokdugyny kesgitläris. $t=t_0$ bolanda (28) funksiýanyň maksimal bahany alýan nokady tapylandan soň, t parametriň (28)–(30) meseläniň optimal çözüwini kesgitleýän bahasyny gözleýäris. Soňra t parametriň tapylan bahasy taşlanylyp, onuň $[\alpha, \beta]$ aralyga degişli beýleki bir bahasy saýlanylýar we şol saýlanan t_1 baha üçin alnan meseläniň optimal çözüwi tapylýar, ýa-da onuň çözüwiniň ýokdugy anyklanylýar. Soňra t parametriň (37)–(39) meseläniň optimal çözüwi bar bolan ýa-da çözüwi ýok nokatlarynyň $[\alpha, \beta]$ aralyga degişli kesimi kesgitlenilýär. Netijede, käbir tükenikli ädimden soň t parametriň $[\alpha, \beta]$ aralykdaky her bir bahasy üçin ýa-ha berlen meseläniň optimal çözüwi tapylýar, ýa-da çözüwiniň ýokdugy görkezilýär.

3.19-njy mesele. Kärhana üç hili çig mal ulanyp, iki hili (*A* we *B*) önüm öndürýär. *A* we *B* önümleriň bir birligini öndürmäge her bir çig malyň sarp edilýän mukdary 3.18-nji tablisada berlen. Şol tablisada çig mallaryň bar bolan mukdarlary hem görkezilen.

A önümiň bahasynyň 2-den 12-ä çenli, *B* önümiň bahasynyň 13-den 3-e çenli üýtgeýändigi belli bolup, bu üýtgeme degişlilikde $c_1=2+t$ we $c_2=13-t$ (bu ýerde $0\le t\le 10$) aňlatmalar bilen berlen bolsun.

Mümkin bolan bahalaryň her biri üçin önümleriň umumy bahasy maksimal bolar ýaly önümçilik meýilnamasyny tapmaly.

3.18-nji tablisa

Çig mallaryň görnüşleri	Önümleriň bir birligini öndürmäge her bir çig malyň sarp edilýän mukdary		Çig mallaryň bar bolan mukdarlary
	A	*B*	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

Çözülişi. Goý, kärhana *A* görnüşli önümiň x_1 mukdaryny, *B* görnüşli önümiň bolsa x_2 mukdaryny öndürýän bolsun. Onda meseläniň matematiki goýluşy t (bu ýerde $0\le t\le 10$) parametriň her bir bahasy üçin:

$$F=(2+t)x_1+(13-t)x_2 \qquad (40)$$

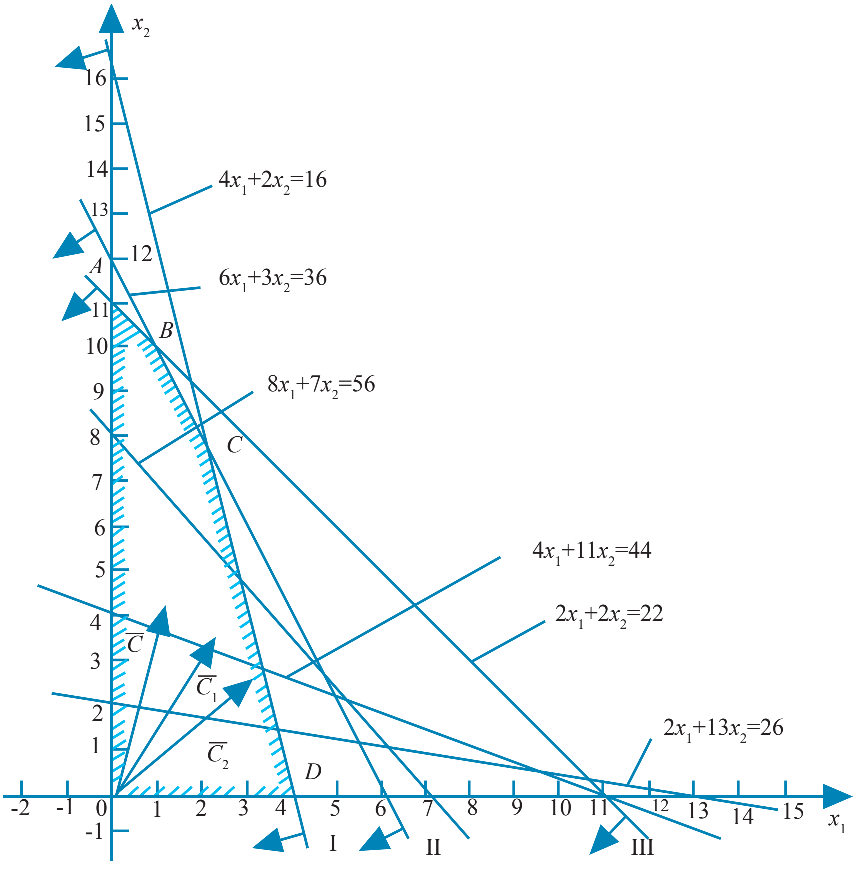
funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36, \end{cases} \tag{41}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0 \tag{42}$$

çäklendirmeleriň kanagatlandyrylýan şertlerinde tapmaly.

Meseläni çözmek üçin x_1Ox_2 koordinatalar ulgamynda (41) deňsizlikler ulgamyny we üýtgeýänleriň (42) otrisatel dällik şertlerini kanagatlandyrýan çözüwleriň köpburçlugyny guralyň (*3.4-nji surat*).



3.4-nji surat

Çyzgyda $t=1$ hasap edip $2x_1+13x_2=26$ (bu ýerde 26 san ýöne alnan) gönini we $\vec{C}=(2;13)$ wektory gurýarys. Gurlan gönini $\vec{C}$ wektoryň ugry boýunça parallel süýşürip, onuň *OABCD* çözüwler köpburçlugy bilen soňky umumy nokadynyň $A(0;11)$ nokatdygyny görýäris.

Diýmek, (40)-(42) meselede $t=1$ deň edilip alnan meseläniň optimal çözüwi (meýilnamasy) $X_0^*=(0;11)$ bolar. Bu eger A önümiň bir birliginiň bahasy 2+0=2 manat, B önümiň bir birliginiň bahasy 13 – 0=13 manat, onda optimal çözüwe görä B önümiň 11 birligi öndürilýär, A önüm öndürilenok diýmekdir. Önüm öndürmegiň bu meýilnamasynda onuň bahasy maksimaldyr we $F_{max}=143$.

Indi $t=2$ hasap edip $(2+2)x_1+(13-2)\ x_2=4x_1+11x_2=44$ (bu ýerde 44 san ýöne alnan) gönini we $(\vec{C}_1)=(2;11)$ wektory gurýarys. Gurlan gönini $(\vec{C}_1)$ wektoryň ugry boýunça parallel süýşürip, onuň $OABCD$ çözüwler köpburçlugy bilen soňky umumy nokadynyň $A(0;11)$ nokatdygyny görýäris. Diýmek, (40) – (42) meselede $t = 2$ deň edilip alnan meseläniň optimal çözüwi (meýilnamasy) $X_0^*=(0;11)$ bolar. Bu eger A önümiň bir birliginiň bahasy 2+2=4 manat, B önümiň bir birliginiň bahasy 13 – 2=11 manat bolsa, onda optimal çözüwe görä B önümiň 11 birligi öndürilýär, A önüm bolsa öndürilmese oňaýlydyr diýmekdir. Önüm öndürmegiň bu meýilnamasynda onuň bahasy maksimaldyr we $F_{max}=(2+2)\cdot 0+(13\text{-}2)\cdot 11=121$.

3.4-nji suratdan görnüşi ýaly, alnan meýilnama t-niň $(2+t)x_1+$ $+(13–t)x_2=h$ göni $2x_1+2x_2=22$ parallel bolýança optimal meýilnama bolmagynda galar. Bu gönüler $\frac{2 \pm t}{2} = \frac{13 - t}{2}$ deň bolanda, ýagny $t=5{,}5$ bolanda parallel bolarlar. t-niň bu bahasynda AB kesimiň islendik nokady (40)-(42) meseläniň optimal çözüwini berýär.

Şeýlelik bilen, islendik $0\leq t\leq 5$, 5 üçin (40) – (42) mesele $X_0^*=(0;11)$ deň bolan optimal çözüwe eýedir we bu ýagdaýda maksat funksiýasynyň bahasy:

$$F_{max}=(2+t)\cdot 0+(13\text{-}t)\cdot 11=143\text{-}11t.$$

Indi t-niň 5,5-den uly bahasyny, meselem, $t=6$ deň bahasyny alyp, oňa degişli (13) – (15) meseläniň çözüwini tapalyň. Onuň üçin $(2+6)x_1+(13–6)x_2=8x_1+7x_2=56$ (bu ýerde 56 san ýöne alnan) gönini we $(\vec{C}_2)=(8;7)$ wektory guralyň. Gurlan gönini $(\vec{C}_2)$ wektoryň ugry boýunça parallel süýşürip, onuň çözüwler köpburçlugy bilen soňky umumy nokadynyň $B(1;10)$ nokatdygyny görýäris. Diýmek, (40) – (42) meselede $t = 6$ deň edilip alnan meseläniň optimal çözüwi (meýilnamasy) $X_1^*=(1;10)$ bolar. Bu bolsa eger A önümiň bir birliginiň bahasy 2+6=8 manat, B önümiň bir birliginiň bahasy 13 – 6=7 manat bolsa, onda optimal çözüwe görä *A* önümiň bir birligi, *B* önümiň bolsa 10 birligi öndürilýär diýmekdir. Önüm öndürmegiň bu meýilnamasynda onuň bahasy maksimaldyr we F_{max}=8·1+7·10=78.

3.4-nji suratdan görnüşi ýaly, X_1^*=(1;10) çözüw (40)-(42) mesele üçin islendik $t>5$ üçin tä $(2+t)x_1+(13–t)x_2=h$ göni $6x_1+3x_2=36$ parallel bolýança optimal meýilnama bolmagynda galar. Bu $\frac{2+t}{6}=\frac{13-t}{3}$ deň bolanda, ýagny $t = 8$ bolanda bolar. *t*-niň bu bahasynda *BC* kesimiň islendik nokady (13)–(15) meseläniň optimal çözüwini berýär.

Şeýlelik bilen, islendik $5{,}5 \leq t \leq 8$ üçin (40)-(42) mesele X_0^*=(1;10) deň bolan optimal çözüwe eýedir we bu ýagdaýda maksat funksiýasynyň bahasy

$$F_{max}=(2+t)\cdot 1+(13-t)\cdot 10 = 132-9t.$$

3.4-nji suratdan peýdalanyp, meňzeş pikir ýöretmäniň kömegi bilen islendik $8 \leq t \leq 10$ üçin (40)–(42) meseleäniň optimal çözüwiniň X_0^*=(2;8) bolýandygyny göreris. Bu bolsa eger *A* önümiň bir birliginiň bahasy 10 we 12 sanlaryň özlerine ýa-da olaryň arasynda ýerleşen sanlara deň bolsa, *B* önümiň bir birliginiň bahasy 3 we 5 sanlaryň özlerine, ýa-da olaryň arasynda ýerleşen sanlara deň bolsa, onda optimal çözüwe görä *A* önümiň 2-si, *B* önümiň bolsa 12 birligi öndüriler diýmekdir. Önüm öndürmegiň bu meýilnamasynda onuň bahasy *t*-niň islendik $8 \leq t \leq 10$ deňsizligi kanagatlandyrýan bahasynda $F_{max}=108-6t$.

Şeýlelik bilen, (40)-(42) meseläniň şeýle çözüwini alýarys: $0 \leq t \leq 5{,}5$ üçin optimal çözüw X_0^*=(0;11) bolar, bu ýagdaýda F_{max}=143-11t; 5,5≤t≤8 üçin optimal çözüw X_1^*=(1;10) bolar, bu ýagdaýda $F_{max}=132-9t$; $8 \leq t \leq 10$ üçin optimal çözüw X_2^*=(2;8) bolar, bu ýagdaýda $F_{max}=108-6t$ bolar.

2. Parametrli programmalaşdyrmanyň meselesiniň maksat funksiýasynyň parametrini özünde saklaýan görnüşiniň çözülişi. (28)-(30) meselä seredeliň. *t* parametr käbir $t_0 \in [\alpha, \beta]$ sana deň diýip hasap edip, alnan çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini simpleks usul boýunça taparys.

Netijede, *t* parametriň berlen t_0 bahasy üçin (28)–(30) meseläniň ýa-ha optimal çözüwini taparys, ýa-da onuň çözüwiniň ýokdugyny anyklarys. Birinji ýagdaýda soňky simpleks tablisanyň *m*+1-nji setiriniň $\Delta_j(t_0) = \Delta_j^{'} + \Delta_j^{''} t_0$ elementlerini ulanyp taparys:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{eger} \quad \Delta''_j > 0 \text{ bar bolsa} \\ -\infty, & \text{eger} \quad \Delta''_j \le 0 \text{ bar bolsa} \end{cases} \tag{43}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{eger} \quad \Delta'_j < 0 \text{ bar bolsa} \\ \infty, & \text{ähli} \quad \Delta''_j \ge 0 \quad \text{üçin} \end{cases} \tag{44}$$

t parametriň islendik $\underline{t} \le t \le \bar{t}$ bahasy üçin (28)-(30) mesele $t=t_0$ bahada alynýan optimal meýilnama eýe bolýar.

$t=t_0$ bolanda (28)-(30) meseläniň çözüwi ýok bolsa, onda soňky simpleks tablisanyň m+1-nji setirinde $x_{ik}<0$ üçin $\Delta_k = \Delta'_k + t_0\Delta''_k<0$ (i=1, 2,…,m). Onda:

1) Eger Δ''_k =0 bolsa (28)-(30) meseläniň islendik t üçin çözüwi ýok;

2) Eger $\Delta''_k<0$ bolsa (28)-(30) meseläniň islendik $t<t_1=-\Delta'_k/\Delta''_k$ üçin çözüwi bardyr.

3) Eger $\Delta''_k>0$ bolsa (28)-(30) meseläniň islendik $t>t_1$ üçin çözüwi bardyr.

(28)–(30) meseläniň şol bir optimal çözüwleri bar bolan t parametriň ähli bahalaryny we (28)–(30) meseläniň çözüwleri ýok bolan t parametriň ähli bahalaryny bir san aralyklarynyň köplügine ýygnap, ony meseläni çözmegiň indiki tapgyryndan aýyrýarys. Ýene-de t parametri [α, β] aralygyň galan bölegine degişli käbir sana deň diýip hasap edip, alnan meseläniň çözüwini tapýarys.

Käbir tükenikli ädimden soň ýa-ha ähli nokatlarynda berlen (28)-(30) meseläniň şolbir optimal çözüwe eýe bolýan san aralygyny alarys, ýa-da t parametriň ähli bahalarynda bu meseläniň çözüwiniň ýok bolan aralygyny alarys.

Şeýlelik bilen, (28)–(30) meseläniň çözüwini tapmak aşakdaky döwürleri öz içine alýar:

1) t parametriň bahasy käbir $t_0 \in [\alpha, \beta]$ sana deň diýip hasap edip, alnan çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwi X_0^* tapylýar ýa-da meseläniň bu baha üçin çözüwiniň ýokdugy anyklanylýar.

2) (28)–(30) meseläniň optimal çözüwleri bar bolan t parametriň ähli bahalaryny we (28)–(30) meseläniň çözüwleri ýok bolan t para-

metriň ähli bahalaryny bir san aralyklarynyň köplügine ýygnap, ony meseläni çözmegiň indiki döwürlerinden aýyrýarys.

3) Ýene-de t parametri $[\alpha, \beta]$ aralygyň galan bölegine degişli käbir sana deň diýip hasap edip, alnan meseläniň çözüwini simpleks usul boýunça taparys.

t parametriň täze optimal çözüwiniň optimal bolup galýan bahalaryny we berlen meseläniň çözüwleri ýok bahalaryny tapýarys. Hasaplama t parametriň $[\alpha, \beta]$ aralyga degişli ähli bahalary barlanylýança dowam edilýär.

3.20-nji mesele. Islendik $-\infty < t < \infty$ üçin

$$F = 2x_1 + (3+4t)x_2 \qquad (45)$$

funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad (46)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0 \qquad (47)$$

şertlerde tapmaly.

Çözülişi. Maksat funksiýasynda t parametriň bahasyny 0 deň (bu ýerde 0 san erkin alnan) diýip hasap edip, alnan meseläniň optimal çözüwini simpleks-tablisa usuly boýunça tapalyň (*3.19-njy tablisa*).

3.19-njy tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**2**	**3+4*t***	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	P_3	0	12	1	1	1	0	0
2	P_4	0	10	1	–1	0	1	0
3	P_5	0	6	–1	1	0	0	1
4			0	-2	–3–4t	0	0	0
1	P_3	0	6	2	0	1	0	–1
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	3+4t	6	–1	1	0	0	1
4			18+24t	–5–4t	0	0	0	3+4t
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	P_1	2	3	1	0	1/2	0	–1/2
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	3+4t	9	0	1	1/2	0	1/2
4			33+36t	0	0	2, 5+2t	0	0, 5+2t

Bu tablisanyň kömegi bilen alnan X_0^*=(3; 9; 0; 16; 0) çözüw simpleks-tablisanyň 4-nji setiriniň elementleri otrisatel däl, ýagny $0{,}5+2t\geq 0$ we $2{,}5+2t\geq 0$ bolanda optimal bolar. Ýagny $t\geq -0{,}25$ bolanda bu çözuw optimal çözüwdir. Şeýlelik bilen, eger $t\in[-0{,}25;\infty)$ bolsa, meseläniň optimal çözüwi X_0^*=(3; 9; 0; 16; 0) we bu ýagdaýda $F_{max}=33+36t$ deňdir.

Indi t parametriň $-0{,}25$ sandan kiçi bahasyny alalyň. Onda soňky simpleks-tablisanyň 4-nji setiriniň we P_5-e degişli sütünine degişli element otrisatel baha eýe bolar. Diýmek, t-niň bu bahalarynda X=(3; 9; 0; 16; 0) optimal çözüw däldir. Şol sebäpli bazis näbellileriň arasyndan P_4-i aýryp, P_5-i bazise girizýäris (*3.20-nji tablisa*).

3.20-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**2**	**3+4t**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	11	1	0	1/2	1/2	0
2	P_5	0	16	0	0	0	0	1
3	P_2	$3+4t$	1	0	1	1/2	–1/2	0
4			$25+4t$	0	0	$2,5+2t$	$-0,5-2t$	0

Bu tablisanyň kömegi bilen alnan X_1^*=(11; 1; 0; 0; 16) çözüw $2{,}5+2t\geq 0$ we $-0{,}5-2t\geq 0$ bolanda, ýagny $-1{,}25\leq t\leq -0{,}25$ bolanda optimal çözüwdir. Şeýlelik bilen, eger $t\in[-1{,}25; -0{,}25]$ bolsa, onda (45)–(47) mesele X_1^*=(11; 1; 0; 0; 16) optimal çözüwe eýedir we bu ýagdaýda $F_{max}=25+4t$.

Indi meseläniň t parametriniň –1, 25 sandan kiçi bahasyny alalyň. Onda soňky 3.20-nji simpleks-tablisanyň 4-nji setiriniň we P_3-e degişli sütünine degişli element otrisatel baha eýe bolar. Diýmek, t-niň bu bahalarynda degişli daýanç çözüw optimal däldir. Şol sebäpli bazis näbellileriň arasyndan P_2-ni aýryp, P_3-i bazise girizýäris (*3.21-nji tablisa*).

3.21-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**2**	**3+4t**	**0**	**0**	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	10	1	–1	0	1	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_3	0	2	0	2	1	-1	0
4			20	0	$-5-4t$	0	2	0

Bu tablisanyň kömegi bilen alnan çözüw $-5-4t \geq 0$ bolanda, ýagny $t \leq -1,25$ bolanda optimal çözüwdir.

Şeýlelik bilen, eger $t \in (-\infty; -1,25]$ bolsa, onda (45)–(47) mesele $X_2^* = (10;\ 0;\ 2;\ 0;\ 16)$ optimal çözüwe eýedir we bu ýagdaýda $F_{max} = 20$. Eger $t \in [-1,25; -0,25]$ bolsa, meseläniň optimal çözüwi $X_1^* = (11;1;0;0;\ 16)$ we bu ýagdaýda $F_{max} = 25+4t$, eger $t \in [-0,25; \infty)$ bolsa, meseläniň optimal çözüwi $X_0^* = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$ we bu ýagdaýda $F_{max} = 33+36t$.

3. Çäklendirmeler ulgamynyň sag taraplary parametri özünde saklaýan meseläniň ((31)–(33) görnüşli meseläniň) çözülişi. (31)–(33) meseläniň çözüliş algoritmi hem ýokarda beýan edilen (28)–(33) meseläniň çözülişine meňzeşdir.

t parametr käbir t_0 sana deň diýip hasap edip, alnan çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini simpleks usul boýunça taparys.

Netijede, t parametriň berlen t_0 bahasy üçin (31)–(33) meseläniň ýa-ha optimal çözüwini taparys, ýa-da onuň çözüwiniň ýokdugyny anyklarys. Birinji ýagdaýda tapylan meýilnama t parametriň islendik $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ bahasy üçin optimaldyr. Bu ýerde:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\left(\frac{q_t}{p_i}\right), \text{ eger} & p_i > 0 \text{ bar bolsa;} \\ -\infty, \text{ eger ähli} & p_i \leq 0 \text{ bar bolsa;} \end{cases} \tag{48}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min\left(\frac{q_t}{p_i}\right), \text{ eger} & p_i > 0 \text{ bar bolsa;} \\ -\infty, \text{ eger ähli} & p_i \leq 0 \text{ bar bolsa.} \end{cases} \tag{49}$$

q_i we p_i sanlar t_0-a bagly bolup, optimal meýilnamanyň düzüm bölekleriniň üsti bilen aňladylýar:

$$x_i^* = q_i + t_0 p_i$$

Eger $t = t_0$ bolanda (31)–(33) meseläniň çözüwi ýok bolsa, onda ýa-ha maksady görkezýän funksiýa meseläniň ýolbererli çözüwleriniň köplüginde çäklenmedikdir, ýa-da (32) deňlemeler ulgamynyň otrisatel däl çözüwi ýokdur. Birinji ýagdaýda meseläniň t parametriň $[\alpha, \beta]$ aralyga degişli ähli bahalary üçin çözüwi ýokdur. Ikinji ýagdaýda t parametriň (32) ulgamyň deňlemeleriniň bilelikde däl bolýan bahalaryny kesgitläp, olary meseläniň indiki çözüliş prosesinden aýyrýarys.

t parametriň (31)–(33) meseläniň şol bir optimal çözüwe eýe bolýan ýa-da çözüwiniň ýok bolan bahalarynyň köplügini kesgitläp, onuň bu köplüge degişli däl bolan täze bahasyny saýlaýarys we şol baha üçin emele gelen çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini oňa çatyrymlanan meseläniň üsti bilen (çatyrymlanan simpleks tablisanyň kömegi bilen) tapýarys. Bu prosesi dowam etdirip, käbir tükenikli ädimden soň (31)–(33) meseläniň çözüwini tapýarys.

Şeýlelik bilen, (31)–(33) meseläniň çözüwini tapmak aşakdaky döwürleri öz içine alýar:

1. t parametriň bahasy käbir $t_0 \in [\alpha, \beta]$ sana deň diýip hasap edip, alnan çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň optimal çözüwi (X_0^*) tapylýar ýa-da meseläniň bu baha degişli çözüwiniň ýokdugy anyklanylýar.

2. t parametriň (31)–(33) meseläniň şol bir optimal çözüwe eýe bolýan ýa-da çözüwiniň ýok bolan bahalarynyň köplügini kesgitläp, şol köplügi meseläni çözmegiň indiki döwürlerinden aýyrýarys.

3. Ýene-de t parametri $[\alpha, \beta]$ aralygyň galan bölegine degişli käbir täze sana deň diýip hasap edip, alnan meseläniň çözüwiniň bardygyny anyklap, ony çatrymlanan simpleks-tablisanyň kömegi bilen tapýarys.

4. t parametriň täze optimal çözüwiň optimal bolup galýan bahalaryny we berlen meseläniň çözüwleri ýok bahalaryny tapýarys. Hasaplama t parametriň $[\alpha, \beta]$ aralyga degişli ähli bahalary barlanylýança dowam etdirilýär.

3.21-nji mesele. Islendik $-\infty < t < \infty$ üçin

$$F=3x_1-2x_2+5x_3-4x_5 \tag{50}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \end{cases} \tag{51}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0 \qquad 52)$$

şertlerde tapmaly.

Çözülişi. (51) deňlemeler ulgamynynda t parametriň bahasyny 0-a deňläp, (50)–(52) meseläniň çözüwini tapýarys (*3.22-nji tablisa*).

3.22-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**3**	**-2**	**5**	**0**	**–4**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$12+t$	1	1	1	0	0
2	P_4	0	$8+4t$	2	–1	0	1	0
3	P_5	–4	$10-6t$	–2	2	0	0	1
4			$20+29t$	10	–1	0	0	0
1	P_3	5	$7+4t$	2	0	1	0	–1/2
2	P_4	0	$13+t$	1	0	0	1	1/2
3	P_2	–2	$5–3t$	–1	1	0	0	1/2
4			$25+26t$	9	0	0	0	1/2

Bu tablisadan görnüşi ýaly, X_0^* =(0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0) çözüw $t=0$ bolanda berlen meseläniň optimal çözüwidir. Bu çözüw onuň düzüm bölekleriniň arasynda otrisatel sanlar ýok bolanda hem optimaldy. Diýmek, $5–3t\geq0$, $7+4t\geq0$, $13+t\geq0$ ýa-da $–7/4\leq t\leq5/3$ bolanda, ýagny $t\in\left[-\frac{7}{4};5/3\right]$ bolanda X_0^* =(0; 5–3t; 7+4t; 13+t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda $F_{max}=25+26t$.

Indi berlen meseläniň $t>5/3$ bolanda çözüwiniň barlygyny barlalyň. Eger $t>5/3$ bolsa, ýagny $5–3t<0$ bolanda X=(0; 5–3t; 7+4t; 13+t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwi däldir. Şol sebäpli, $t>5/3$ bolanda täze optimal çözüwe geçmeli. Onuň üçin P_2 wektora degişli setirde otrisatel sanyň bar bolany sebäpli, bu wektory bazisden çykaryp, onuň deregine P_1 wektory girizýäris *(3.22-nji tablisa*).

3.23-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**3**	**-2**	**5**	**0**	**–4**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$17–2t$	0	2	1	0	1/2
2	P_4	0	$18-2t$	0	1	0	1	1
3	P_1	3	$–5+3t$	1	–1	0	0	–1/2
4			$70–t$	0	9	0	0	5

Tablisadan görnüşi ýaly, X_1^*=(–5+3t; 0; 17–2t; 18–2t; 0) çözüw $17–2t\geq0$, $18–2t\geq0$ we $–5+3t\geq0$ bolanda, ýagny $5/3\leq t\leq17/2$ bolanda berlen meseläniň optimal çözüwidir. Diýmek, $t \in \left[\frac{5}{3}; 17/2\right]$ bolanda X_1^*=(–5+3t; 0; 17–2t; 18–2t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda F_{max}=70–t.

t>17/2 bolanda X_1^*=(–5+3t; 0; 17–2t; 18–2t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwi däldir. Sebäbi bu ýagdaýda 17–2t aňlatma otrisateldir. 3.23-nji tablisanyň I setirinde otrisatel sanlaryň ýokdugy sebäpli t>17/2 bolanda berlen meseläniň çözüwi ýokdur.

t<17/2 bolanda X=(0; 5–3t; 7+4t; 13+t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwi däldir. Sebäbi bu ýagdaýda 7+4t aňlatma otrisateldir. t parametriň bu bahalarynda P_3 wektora degişli setirde otrisatel sanyň (–1/2 sanyň) bar bolany sebäpli, bu wektory bazisden çykaryp, onuň deregine P_5 wektory girizýäris (*3.24-nji tablisa*).

3.24-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**3**	**–2**	**5**	**0**	**–4**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	–4	–14–8t	–4	0	–2	0	1
2	P_4	0	20+5t	3	0	1	1	0
3	P_1	–2	12+t	1	1	1	0	0
4			32+30t	11	0	1	0	0

Soňky tablisadan görnüşi ýaly, X_2^*=(0;12+t; 0; 20+5t; –14–8t) çözüw –14–8t≥0, 20+5t≥0 we 12+t≥0 bolanda, ýagny –4≤t≤–7/4 bolanda berlen meseläniň optimal çözüwidir. Diýmek, t ∈[–4; –7/4] bolanda X_1^*=(0;12+t; 0; 20+5t; –14–8t) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda F_{max}=32+30t.

2.43-nji tablisanyň II setirinde (P_4 wektora degişli setirinde) otrisatel sanlaryň ýokdugy sebäpli t<–4 bolanda berlen meseläniň çözüwi ýokdur.

Şeýlelik bilen, eger t∈(–∞;–4] bolsa, onda (18)–(20) meseläniň çözüwi ýok, t∈[–4;–7/4] bolanda X_2^*=(0;12+t; 0; 20+5t; –14–8t) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda F_{max}=32+30t deňdir. t∈(–7/4;5/3] bolanda X_0^* =(0; 5–3t; 7+4t; 13+t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda F_{max}=25+26t. t∈[5/3;17/2] bolsa X_1^*=(–5+3t; 0; 17–2t; 18–2t; 0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda $F_{max}=70-t$. Eger $t\in[17/2;\infty)$ bolsa berlen meseläniň optimal çözüwi ýokdur.

4. Maksady görkezýän funksiýa we çäklendirmeler ulgamynyň sag taraplary parametri özünde saklaýan meseläniň ((37)–(39) görnüşli meseläniň) çözülişi. (37)–(39) meseläniň çözüliş algoritmi hem ýokarda beýan edilen meseleleriň çözülişine meňzeşdir.

3.22-nji mesele. Islendik $-\infty<t<\infty$ üçin

$$F=(8-5t)x_1+(9-3t)x_2+(-3+5t)x_3-(2+4t)x_4 \tag{53}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10t, \end{cases} \tag{54}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_4 \geq 0 \tag{55}$$

şertlerde tapmaly.

Çözülişi. Maksat funksiýasynyň (53) aňlatmasynda we (54) deňlemeler ulgamynda t parametriň bahasyny 2-ä deňläp (2 san erkin alyndy), alnan çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini simpleks-tablisa usuly boýunça tapýarys (*3.25-nji tablisa*).

3.25-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$24-12t$	1	-1	1	0
2	P_4	$-2-4t$	$-18+10t$	-1	2	0	1
3			$-36+208t-100t^2$	$14t-9$	$-10t-10$	0	0
1	P_3	$-3+5t$	$15-7t$	1/2	0	1	1/2
3	P_2	$9-3t$	$-9+5t$	$-1/2$	1	0	1/2
4			$-126+168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5t+5$

3.25-nji tablisadan görnüşi ýaly, eger $t=2$ bolsa, onda $X_0^*=$ $=(0;-9+5t;\ 15-7t;0)$ çözüw meseläniň optimal çözüwidir. Bu çözüw

$9t-14\geq0$ we $5t+5\geq0$ bolanda, ýagny $t\geq14/9$ bolanda hem berlen meseläniň optimal çözüwidir. t-niň şeýle bahalaryna seredeliň.

Tapylan X_0^* çözüw $15-7t\geq0$ we $-9+5t\geq0$, ýagny $9/5\leq t\leq15/7$ bolanda optimal çözüwdir. Diýmek, eger $9/5\leq t\leq15/7$ bolsa, onda

X_0^*=(0;–9+5t; 15–7t;0) çözüw meseläniň optimal çözüwidir. Bu çözüwde F_{max}=126+168t-50t^2.

Eger t<9/5, bolsa, onda –9+5t<0 bolar we bu ýagdaýda X_0^*=(0;–9+5t; 15–7t; 0) çözüw meseläniň optimal çözüwi däldir. Şol sebäpli, t<9/5 bolanda täze simpleks tablisa geçmeli bolar. 3.25-nji tablisanyň P_2-li setirinde (–1/2) sana deň bolan otrisatel sanyň barlygy sebäpli, ony çözüji element hökmünde saýlap alyp, P_2-niň deregine bazis näbellileriň düzümine P_1 näbellini girizeliň we 3.26-njy tablisany düzeliň.

3.26-njy tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**8–5*t***	**9–3*t***	**–3+5*t***	**–2–4*t***
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	–3+5t	6–2t	0	1	1	1
2	P_1	–8-5t	18–10t	1	–2	0	–1
3			126–134t+40t^2	0	–28+18t	0	14t–9

3.26-njy tablisadan görnüşi ýaly, t≥14/9 bahalaryň ählisi üçin X_1^*=(18–10t;0; 6–2t;0) çözüw meseläniň optimal çözüwidir. (Bu ýagdaýda 6–2t≥0 we 18-10t≥0 deňsizlikler, diýmek, t≤9/5 deňsizlik ýerine ýetýär). Diýmek, t∈(14/9;9/5] bolsa, onda X_1^*=(18–10t;0; 6–2t;0) çözüw meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda F_{max}=126– –134t+40t^2.

Eger indi t >15/7 bolsa, onda bu bahalarda X=(0;–9+5t; 15–7t;0) çözüw berlen meseläniň optimal çözüwi bolmaz. Sebäbi bu ýagdaýda 15–7t<0 bolar. 3.26-njy tablisadaky P_3-li setirde otrisatel sanyň ýoklugy sebäpli, t>15/7 bolanda meseläniň çözüwi ýokdur.

Eger indi t<14/9 bolsa, onda 3.26-njy tablisanyň soňky setirinde 18t–28 aňlatmanyň otrisateldigi sebäpli, bazise P_3-e derek P_2-i näbellini girizip, aşakdaky 3.27-nji tablisanyň kömegi bilen täze çözüw alarys.

3.27-nji tablisa

i	**Bazis**	C_b	P_0	**8–5*t***	**9–3*t***	**–3+5*t***	**–2–4*t***
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	9-3t	6–2t	0	1	1	1
2	P_1	–8–5t	30-14t	1	0	2	1
3			294–298t+76t^2	0	0	28–18t	19–4t

3.27-nji tablisadan görnüşi ýaly, eger indi $t<14/9$ bolsa, onda X_2^* =(30–104t; 6–2t;0;0) çözüw meseläniň optimal çözüwidir we bu ýagdaýda $F_{max}=294-298t+76t^2$.

Şeýlelik bilen, $t\in(-\infty,14/9]$ bolsa, meseläniň optimal çözüwi X_2^*=(30-104t; 6-2t;0;0), $t\in(14/9,9/5]$ bolanda, optimal çözüw X_1^*=(18–10t;0; 6-2t;0), $t\in[9/5,15/7]$ bolanda optimal çözüw X_0^*=(0;–9+5t; 15-7t;0), $t>15/7$ bolanda bolsa, meseläniň çözüwi ýokdur.

Meseleler. Parametrli programmalaşdyrmanyň meselesiniň geometriki interpretasiýasyndan peýdalanyp we $-\infty<t<\infty$ hasap edip, aşakdaky meseleleriň çözüwini tapmaly:

3.23. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0.$$

şertlerde $F=6x_1+(4+t)x_3+(12-t)x_4 \to \max$

3.24. $F=5x_1-(3+t)x_2+(4+t)x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0.$$

3.25-3.26-njy meseleleriň matematiki modelini gurmaly.

3.25. Bazarda ýerleme kynçylygy ýok bolan n görnüşli önümi öndürmek üçin m görnüşli çig mal ulanylýar. j görnüşli önümiň bir birligini öndürmek üçin i görnüşli çig-malyň sarp edilýän mukdary a_{ij} (i=1, 2,…,m; j=1, 2,…,n) deň. j görnüşli önümiň bir birligini satmakdan alnan girdeji c_j (j=1, 2,…,n) deň. Kärhana i görnüşli çig-malyň $b_i^{'} + b^{''} t$ (i=1, 2,…,m) mukdaryny ulanyp bilýär. Bu ýerde t bahalary (α, β) aralyga degişli bolan parametr. t parametriň (α, β) aralyga degişli her bir bahasy üçin kärhana ýokary girdeji alar ýaly önüm öndürmegiň meýilnamasyny tapmaly.

3.26. n görnüşli önüm öndürýän önümçilik birleşiginde m görnüşli tehnologiki usul ulanylýar. Her bir görnüşli önüme bolan isleg b_i (i=1, 2,…,m) deň. j görnüşli tehnologiki usulyň kömegi bilen öndürilýän i görnüşli önümiň mukdary $a_i^{'} + a^{''} t$ (i=1, 2,…,m; j=1, 2,…,n) deň. Bu ýerde t – bahalary (α, β) aralyga degişli bolan parametr. t parametriň (α, β) aralyga degişli her bir bahasy üçin öndürilmesi zerur bolan önümleriň mukdarynyň iň az wagtda öndürilmeginiň meýilnamasyny gurmaly.

§ 3.4. Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleri

Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleriniň ykdysady we geometriki manysy. Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň umumy meselesi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{56}$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{57}$$

şertler ýerine ýetende

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{F_1}{F_2} \tag{58}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny kesgitlemekden ybaratdyr.

Bu ýerde c_j, d_j, b_i we a_{ij} – käbir hemişelik sanlar. (56) çyzykly deňlemeleriň ulgamynyň otrisatel däl çözüwleriniň çäginde $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0\,(j = 1,\cdots,n)$ we $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$. Şunlukda $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ diýip hasap ederis (şeýle şert meseläniň umumylygyny bozmaýar, çünki bu ululyk otrisatel bolsa, minus belgisi sanawja degişli edilip bilner).

Çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesindäki ýaly, (56)–(58) meseläniň optimal çözüwi bar bolsa, onda onuň maksat funksiýasy özüniň maksimal bahasyny çözüwler köpgranlygynyň depeleriniň birinde kabul edýär. Bu köpgranlyk (56) we (57) çäklendirmeler ulgamy bilen kesgitlenýär. Eger meseläniň maksat funksiýasy maksimal bahasyny çözüwler köpgranlygynyň birden köp depelerinde kabul etse, onda ol ony şol depeleriň güberçek kombinasiýasy bolan islendik nokatda hem alyp biler.

$$a_{ij}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i (i = 1,\cdots,m), \tag{59}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{60}$$

şertler ýerine ýetende

$$F = \frac{(c_1x_1 + c_2x_2)}{(d_1x_1 + d_2x_2)}$$

maksat funksiýasynyň maksimal bahasyny kesgitlemekden ybarat bolan meselä garap geçeliň. $d_1x_1+d_2x_2\neq 0$ diýip hasap edeliň.

(58)–(60) meseläniň çözüwini tapmak üçin 2.4-nji bölümdäki (21)–(23) meseläniň çözülişi ýaly, ilki bilen (59)–(60) çäklendirmeler bilen kesgitlenýän köpburçlugy gurýarys. Bu köplük boş köplük däl diýip hasap edip, maksat funksiýasynyň bahasyny koordinatalar başlangyjyndan geçýän

$$\frac{(c_1x_1+c_2x_2)}{(d_1x_1+d_2x_2)}=h \tag{61}$$

göni çyzyk şol köplükden geçer ýaly saýlalyň. Gurlan (61) gönini koordinatalar başlangyjyna görä aýlap ýa-ha maksat funksiýasynyň bahasy maksimuma deň bolan depäni taparys, ýa-da bu funksiýanyň bu köplükde (çözüwler köpgranlygynda) çäklenmedikdigini kesgitläris.

Bellik. (61) deňlemäni kanagatlandyrýan gönüleriň dessesi (h parametre görä)

$$(c_1x_1+c_2x_2)=h(d_1x_1+d_2x_2)$$

deňlemäni ýa-da

$$x_2=\frac{hd_1-c_1}{c_2-hd_2x_1}=k(h)x_1$$

deňlemäni kanagatlandyrýarlar. Bu gönüleriň burç koeffisiýentleri:

$$k(h)=\frac{hd_1-c_1}{c_2-hd_2x_1}$$

h-a görä funksiýadyr. F funksiýanyň maksimumy $h=\frac{c_1+c_2k}{c_2-d_2k}$ funksiýanyň k görä maksimum bahany alýan, ýolbererli çözüwler köplüginden geçýän göniniň üstünde gazanylar.

Şeýlelik bilen (58)-(60) meseläniň çözüwini tapmak prosesi aşakda sanalýan tapgyrlary öz içine alýar:

1. Çäklendirmeler ulgamyndaky deňsizlik alamatlaryny deňlik alamatlaryna öwrüp, emele gelen deňlemelere degişli göni çyzyklary gurýarys.

2. Gurlan gönüler boýunça deňsizlikleriň her birine degişli ýarymtekizlikleri tapýarys.

3. Meseläniň çäklendirmeleri bilen kesgitlenýän köpburçlugy gurýarys.

4. Maksat funksiýasynyň bahasyny käbir h sana deňläp alynýan (61) deňleme bilen kesgitlenýän gönini guryarys.

5. Maksat funksiýasynyň maksimum nokadyny kesgitleýäris, ýa-da meseläniň çözüwsizdigini kesgitleýäris.

6. Maksat funksiýasynyň maksimum bahasyny tapýarys.

3.27-nji mesele. A we B görnüşli iki önüm öndürmek üçin kärhana üç dürli tehnologiki enjamy ulanýar. Önümleriň her biri bu enjamlaryň ählisinde işlenilip taýýarlanylýar. Olaryň bu enjamlarda işlenilip taýýarlanylyş wagtlary aşakdaky 3.26-njy tablisada berlen. Bu tablisada önümleriň her biriniň bir birligini öndürmäge çykýan çykdajy hem görkezilen.

3.26-njy tablisa

Enjamlaryň görnüşleri	Önümleriň biriniň enjamlarda işlenilip taýýarlanylyş wagtlary (sagat)	
	A	B
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Önümleriň birini öndürmäge çykýan çykdajy	2	3

Kärhana I we III görnüşli enjamlary, degişlilikde 26 we 39 sagatlap ulanyp bilýär. Şonuň bilen bir hatarda, II görnüşli enjamy 4 sagatdan köp ulanmak maksada laýyk.

Önümleriň her biriniň özüne düşýän gymmaty iň az bolar ýaly olaryň hersini näçe mukdarda öndürmek amatly boljakdygyny anyklamaly.

Çözülişi. Goý, kärhana A görnüşli önümiň x_1 sanysyny, B görnüşli önümiň x_2 sanysyny öndürýän bolsun. Onda olary öndürmäge çykýan jemi çykdajy $2x_1+3x_2$ manat bolar. Önümleriň her biriniň özüne düşýän gymmaty

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2} \tag{62}$$

bolar.

Bu önümleri enjamlarda işlemegiň wagtlary her bir enjamda, degişlilikde $2x_1+8x_2$, x_1+x_2 we $12x_1+3x_2$ sagat bolar. Önümleri I we III görnüşli enjamlarda, degişlilikde 26 we 39 sagatdan köp bolmadyk wagtda, II görnüşli enjamda 4 sagatdan az bolmadyk wagtda işlemegiň zerurdygy sebäpli:

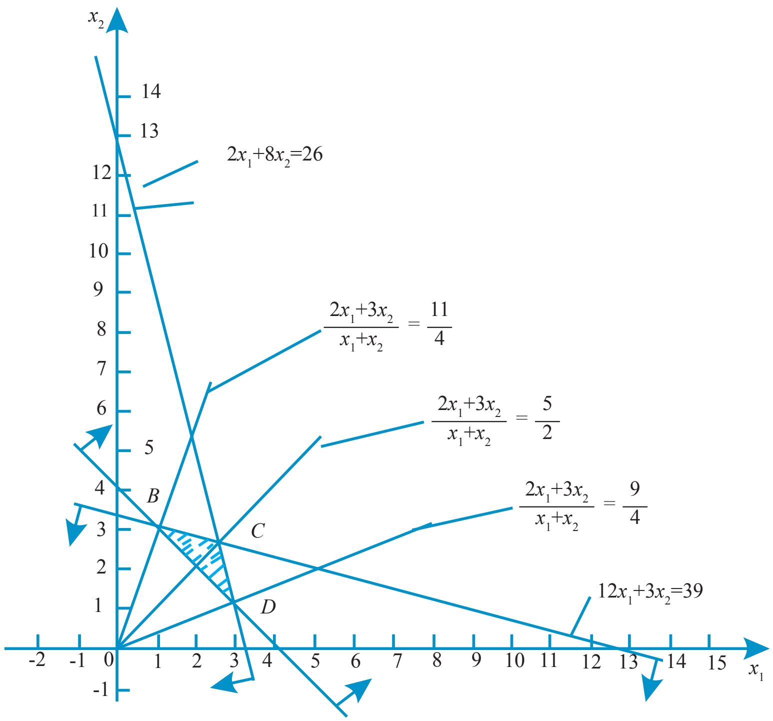
$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \leq 26, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \leq 39 \end{cases} \tag{63}$$

deňsizlikleri ýerine ýetýär.

Ykdysady manysyna görä x_1 we x_2 üýtgeýän ululyklar diňe otrisatel däl bahalary alyp bilerler:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{64}$$

Şeýlelik bilen, berlen meseläniň matematiki modeli (63) deňsizlikler ulgamynyň otrisatel däl çözüwleriniň içinden F funksiýa iň kiçi baha berýän çözüwi tapmaklykdan ybaratdyr. Meseläniň çözüwini tapmak üçin ilki bilen çözüwleriň köpburçlugyny (köplügini) guryarys (*3.5-nji surat*).



3.5-nji surat

3.5-nji suratdan görnüşi ýaly, bu köpburçluk BCD üçburçlukdyr. Diýmek, F funksiýa özüniň iň kiçi bahasyny B, C ýa-da D nokatlaryň birinde alýar. Minimum bahanyň bu nokatlaryň haýsynda gazanylýandygyny kesgitlemek üçin F funksiýanyň bahasyny bir kesgitli sana, meselem, 11/4 deň edip alalyň. Onda:

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=11/4$$

ýa-da

$$-3x_1+x_2=0 \tag{65}$$

deňlemäni alarys.

(65) deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzygy kesgitleýär. Bu gönä we çözüwler köpburçlygyna degişli nokatlaryň koordinatalary meseläniň maksadyny görkezýän F funksiýanyň bahasy 11/4 deň bolan ýolbererli çözüwleridirler. Seredilýän ýagdaýda görkezilen nokatlara diňe bir B nokat degişlidir: (1;3). Onuň koordinatlary hem meseläniň meýilnamasyny kesgitleýär we bu nokatda-da maksady görkezýän F funksiýanyň bahasy 11/4 deň bolýar.

Indi $h = 5/2$ deň diýip hasap edeliň, ýagny:

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=\frac{5}{2}$$

ýa-da

$$-x_1+x_2=0. \tag{66}$$

(66) deňleme edil (65) deňleme ýaly, koordinatlar başlangyjyndan geçýän göni çyzygy kesgitleýär. Oňa koordinatlar başlangyjynyň daşyndan sagat diliniň ugruna aýlanmagynyň netijesinde alnan (65) göni çyzyk hökmünde garamak bolar. Şunlukda birbada (66) göni çyzyga we çözüwler köplügine degişli bolan nokatlaryň koordinatlary meseläniň meýilnamalary bolup hyzmat ederler we bu ýagdaýda (62) funksiýanyň bahasy 5/2 deň bolup, ol (65) göni çyzygyň nokatlaryndaky baha bilen deňeşdirilende kiçidir. Diýmek, eger (62) funksiýanyň bahasyny haýsydyr bir h_0 sana deň diýip alsak, ýagny

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h_0 \tag{67}$$

we ony koordinatlar başlangyjyndan geçýän göni çyzyk hökmünde koordinatlar başlangyjynyň daşyndan sagat diliniň ugruna aýlasak, onda aşaky göni çyzyklaryň dessesini alarys:

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h, \quad \text{şu ýerde} \quad h<h_0.$$

Indi aýlanýan göni çyzygyň çözüwler köplügi bilen soňky umumy nokadyny tapalyň. Bu nokat D (3;1) (*3.5-nji sur. ser.*) nokat bolup, onda maksady görkezýän F funksiýanyň bahasy iň kiçi bolar.

Şeýlelik bilen, önümiň önümçiliginiň optimal meýilnamasynda A görnüşli önümiň üçüsini we B görnüşli önümiň birini öndürmek amatlydyr. Şunuň ýaly meýilnamada önümiň biriniň özüne düşýän gymmaty iň az baha eýe bolýar we ol $F_{\min}=\dfrac{2\cdot 3+3\cdot 1}{1+3}=\dfrac{9}{4}$ deň bolar.

Çözüwler köplüginiň maksadyny görkezýän F funksiýanyň iň kiçi bahasyny kabul edýän burç nokadyny tapanymyzda, biz funksiýanyň bahasy käbir iki sany hemişelik sana deň diýip hasap etdik we funksiýanyň bahasynyň kemelmesini kesgitleýän göni çyzygyň aýlanmasynyň ugruny kesgitledik. Ýöne, muny başgaça hem edip bolardy. Hususan-da: F funksiýanyň bahasyny haýsydyr h sana deňdir diýip hasap etmek bilen,

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h \tag{68}$$

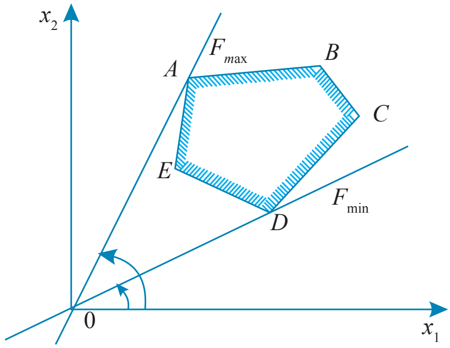
deňlemeli, koordinatalar başlangyjyndan geçýän we burç koeffisiýenti h bagly bolan göni çyzygy almak bilen, önümiň kömegi arkaly h artanda (68) göni çyzygyň aýlanýan ugruny kesgitläp bolar.

Hakykatda işiň ýagdaýy has ýönekeýdir. (62) funksiýanyň iň kiçi baha eýe bolaýjak B(1;3) we D(3;1) (*3.5-nji sur. ser.*) nokatlaryny tapyp, onuň bu nokatlardaky bahalaryny hasaplalyň: $F(B)=11/4$, $F(D)=9/4$. Diýmek $F(B)>F(D)$, şol sebäpli, D nokatda maksady görkezýän funksiýa iň kiçi baha eýe bolýar diýip, tassyklap bolar. Şunuň bilen bir hatarda, B nokatda F funksiýanyň iň uly baha eýe bolýandygyny bellemelidiris.

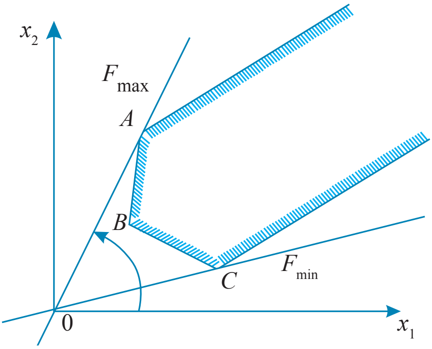
Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleriniň çözüwini grafiki usulda tapmaklyga garamaklygy tamamlamak bilen, anyk meseleler çözülende dürli ýagdaýlaryň bolmagynyň mümkindigini bellemek isleýäris:

1. Çözüwler köpgranlygy çäklendirilende, maksat funksiýasynyň iň uly we iň kiçi (maksimum we minimum) bahalaryna onuň burç nokatlarynda ýetilýär (*3.6-njy surat*).

2. Çözüwler köpgranlygy çäklendirilmedik, emma meseläniň maksat funksiýasynyň, degişlilikde iň uly we iň kiçi bahalara eýe bolýan burç nokatlary bar (*3.7-nji surat*).



3.6-njy surat



3.7-nji surat

3. Çözüwler köpgranlygy çäklendirilen däl we ektremumlaryň biri gazanylýar. Meselem, iň kiçi baha çözüwleriň köpgranlygynyň depeleriniň birinde ýetilýär we F funksiýanyň iň uly asimptotik baha diýlip atlandyrylýan bahasyny alýar (*3.8-nji surat*).

4. Çözüwler köpgranlygy çäklendirilen däl, maksimum hem, minimum hem asimptotik bahalar bolup durýar (*3.9-njy surat*).

Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň geometriki çözülişinden peýdalanyp, 3.28–3.31-nji meseleleriň çözüwlerini tapyň.

3.28. $F = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3.29. $F = \dfrac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

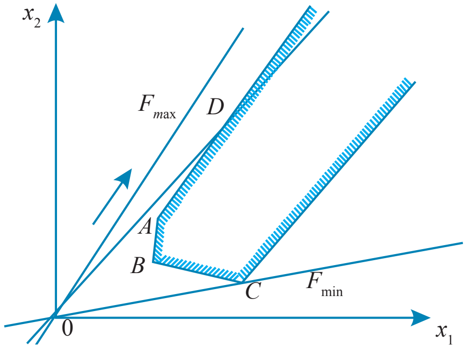
3.30. $F = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0.$$

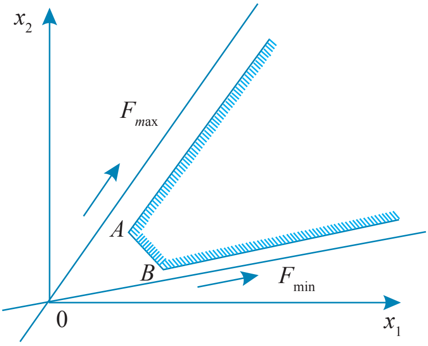
3.31. $F = \dfrac{x_1 + x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \ge 0.$$

10. Sargyt № 2463



3.8-nji surat



3.9-njy surat

3.32–3.34-nji meseleleriň matematiki modellerini düzüň.

3.32-nji mesele. Kärhana n görnüşli önümleri öndürmek üçin m görnüşli biri-biriniň deregini tutýan enjamlardan peýdalanýar. Önümleriň her bir görnüşini b_i (i=1, 2,…,n) mukdarda öndürmeli. Şunlukda enjamlaryň her bir görnüşi şu önümleri öndürmekde a_j(j=1, 2,…,m) sagatdan köp wagt ulanylyp bilinmeýär. Önümiň i görnüşiniň birini j görnüşdäki enjamda öndürmek üçin sarp edilýän wagt a_{ij} sagada deň, enjamyň şu görnüşinde bir önümi öndürmek bilen baglanyşykly harajatlar c_{ij} manada deň. Önümiň biriniň özüne düşýän gymmatynyň iň az ululyga deň bolmagy üçin her bir görnüşdäki enjamda her görnüşdäki önümiň näçesini öndürmelidigini kesgitlemeli.

3.33-nji mesele. Aýakgap önümçilik birleşigi n görnüşindäki dürli nusgaly aýakgaplary öndürmek üçin gaýyş we gön harytlarynyň m görnüşlerinden peýdalanýar. Bir jübüt aýakgabyň j (j=1, 2,…,n) nusgasyny öndürmek üçin i (i=1, 2,…,m) görnüşli gaýyş we gön harytlarynyň a_{ij} m^2 möçberi gerek, olaryň bolsa b_j m_2 möçberiniň ulanylmagy mümkin. Bir jübüt aýakgabyň j nusgasyny öndürmek üçin ulanylýan önümçilik gaznasynyň ululygy c_j manada deň, ýerlemekden gelýän girdeji bolsa d_{ij} manada deň. Birleşik islendik gatnaşyklarda aýakgaplaryň dürli nusgalaryny çykaryp biljekdigini çaklamak bilen, kärhananyň iň uly girdejililigini üpjün etjek önümçilik meýilnamasyny düzmeli.

3.34-nji mesele. Dürli işleriň n görnüşlerini ýerine ýetirmek üçin m hünär derejeleri bolan işçiler toparyndan peýdalanylyp bilner. Işiň j görnüşi işçileriň i topary tarapyndan ýerine ýetirilende wagt birligindäki iş öndürijilik c_{ij} (i=1, 2,…,m), (j=1, 2,…,n) manada deň. Işçileriň i topary tarapyndan işleri ýerine ýetirmek bilen meşgullanýan umumy wagt gaznasy b_i wagt birliginden geçmeýär, işiň j görnüşiniň möçberi bolsa a_j manada deň. Şulary nazara almak bilen, zähmetiň iş öndürijiligi iň uly baha eýe bolar ýaly işleri ýerine ýetirmegiň meýilnamasyny düzmeli.

3.4.1. Drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerini çyzykly programmalaşdyrmanyň meselelerine getirmek

Ýokarda kesgitlenen (56)-(58) mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine getirilip bilner. Onuň üçin

$$y_0 = \left\{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\right\}^{-1} \tag{69}$$

belgileme girizip,

$$y_j = y_0\, x_j \ (j=1, 2, \ldots, n) \tag{70}$$

täze üýtgeýän ululyklary girizmeli.

Girizilen belgilemeleri ulanyp, (56)–(58) meseläni aşakdaky meselä getirýäris:

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{71}$$

funksiýanyň iň uly bahasyny

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i - b_i y_0 = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m); \tag{72}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{73}$$

$$y_j \geq 0 \ (j=1, 2, \ldots, n),\ y_0 \geq 0 \tag{74}$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

(71)–(74) mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesidir. Diýmek, onuň çözüwini belli bolan usullar bilen tapyp bolar. Bu meseläniň optimal meýilnamasyny bilmek bilen, (70) gatnaşyklaryň esasynda başlangyç (56)–(58) meseläniň optimal meýilnamasyny alarys.

Şeýlelik bilen, drob çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini tapmak işine aşakdaky tapgyrlar girýär:

1. (56)-(58) mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň (71)–(74) meselesine getirilýär;

2. (71)–(74) meseläniň çözüwi tapylýar;

3. (70) gatnaşygy ulanmak bilen, (56)–(58) meseläniň optimal meýilnamasy kesgitlenilýär we (58) funksiýanyň maksimal bahasy tapylýar.

3.35-nji mesele. $F=\dfrac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}$ (75)

funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9, \end{cases} \quad (76)$$

$$x_1, x_2,\ldots,x_5 \geq 0 \quad (77)$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

Çözülişi. Şu meseläni çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine getireliň. Onuň üçin $y_0=(x_1+x_2)^{-1}$ belgileme we täze $y_j=y_0\, x_j$ (j=1, 2,…,5) üýtgeýän ululyklary girizýäris. Netijede, aşakdaky meseläni alarys:

$$F=2y_1+3y_2 \quad (78)$$

funksiýanyň iň uly bahasyny

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0, \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0, \end{cases} \quad (79)$$

$$y_1+y_2=1,$$

$$y_0, y_1,\ldots,y_5 \geq 0 \quad (80)$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

(78)–(80) mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi bolup durýar. Onuň çözüwini emeli bazis usuly bilen tapýarys (*3.27-nji tablisa*).

3.27-nji tablisa

i	**Bazis**	C_0	P_0	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**0**
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_0
1	P_2	1	1/10	0	1	-8/30	–11/30	0			0
2	P_1	2	9/10	1	0	8/30	11/30	0			0
3	P_5	0	15/10	0	0	5/3	7/6	1			0
4	P_0	0	1/10	0	0	2/30	–1/30	0			1
5			19/10	0	0	8/30	11/30	0			0

3.27-nji tablisadan (78)–(80) meseläniň optimal çözüwi: $y_1^* = \frac{9}{10}; y_2^* = \frac{1}{10}; y_3^* = y_4^* = 0; y_5^* = \frac{15}{10}; y_3^* = 1/10.$

$y_j = y_0\, x_j$ bolýandygyny nazara almak bilen, (75)–(77) meseläniň optimal çözüwi tapýarys: $X^*=(9;1;0;15)$. Şu çözüwde $F_{max}=19/10$.

3.36–3.39-njy meseleleriň çözüwlerini tapyň.

3.36-njy mesele

$$F = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 0, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0.$

3.37-nji mesele

$$F = \frac{-3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0.$

3.38-nji mesele. $F = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 340, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Jogaby: $F_{max} = 8 \cdot X^* = (70;0;0;0;0).$

3.39-njy mesele. $F = \frac{5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \to \max;$

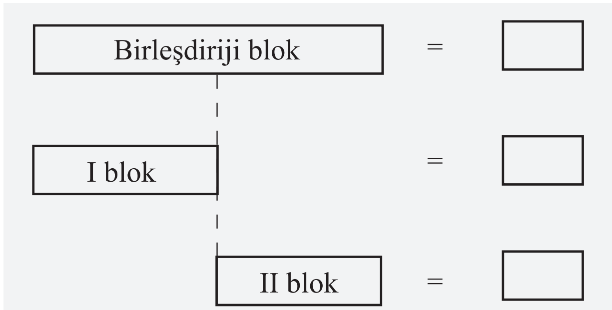
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 40, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30, \end{cases}$$

$x_j \geq 0\ (j=1, 2, \ldots, 6).$

Jogaby: $F_{max} = 489/62.\ X^* = (6{,}8;0;9{,}2;8{,}8;0;0).$

§ 3.5. Blok programmaladyrmanyň meseleleri

Amalyýetde, çäklendirmeler ulgamynda meselä degişli ähli üýtgeýän ululyklary özünde saklaýan bölekleri (bu böleklere **birleşdiriji bloklar** diýilýär) we üýtgeýän ululyklaryň käbirini özünde saklaýan bölekleri (bu böleklere **bloklar** diýilýär) bar bolan anyk ykdysady meseleler duş gelýär. Iki sany blokdan ybarat çäklendirmeler ulgamyndan ybarat meseläniň çyzgysy 3.10-njy suratda görkezilendir.



3.10-njy surat

Umumy ýagdaýda bloklaryň sany köp, blok çyzgyly meseläniň hem çyzykly we çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselelsi bolup biler.

Çyzykly programmalaşdyrmanyň blok çyzgyly meselelerini çözmek üçin birnäçe blogy özünde saklaýan anyk meseläni bloklar bilen kesgitlenýän aýry-aýry kiçi meseläni çözmäge getirip, olary soňra birleşdirmegiň ýoluny berýän **Dansigiň-Wulfuň dekompozisiýa usulyny** ulanyp bolar. Bu ýagdaýda bloklaryň sany baş meseläni çözmegiň her bir tapgyrynda çözülýän aýry-aýry kiçi meseleleriň sanyny kesgitleýär. Ony iki sany blogy özünde saklaýan, umumy ýagdaýda

$$F=c_1 x_1+c_2 x_2+\ldots+c_{n_1} x_{n_1}+c_{n_1 n_1+1} x_{n_1+1}+\ldots+c_n x_n \qquad (81)$$

funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n_1}x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{kn,1}x_{n_1} + a_{kn_1+1}x_{n_1+1} + \cdots + a_{k,n}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \cdots + a_{k+1,n_1}x_{n_1} = b_{k+1}, \\ \quad \ldots \ \ldots \qquad \ldots \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n_1}x_{n_1} = b_i, \\ \quad \ldots \ \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad \begin{cases} a_{i+1,n_1+1}x_{n_1+1} + \cdots + a_{i+1,n}x_n = b_{i+1}, \\ a_{m,n_1+1}x_{n_1+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m, \end{cases} \end{cases} \qquad (82)$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1, 2, \ldots, n) \qquad (83)$$

şertler ýerine ýetende tapmak meselesi görnüşinde ýazmak bolar.

Berlen esasy (baş) meseläni beýan etmek üçin belgilemeler girizeliň:

$$C^{(1)}=(c_1;\, c_2;\, \dots;\, c_{n_1},\ C^{(2)}=(c_{n_1+1};\, c_{n_1+2};\, \dots;\, c_n);$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn_1} \end{pmatrix} \quad A^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{1n_1+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n_1+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{kn_1+1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{k+11} & a_{k+12} \cdots a_{k+1n_1} \\ a_{k+21} & a_{k+22} \cdots a_{k+2n_1} \\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in_1} \end{pmatrix}; \quad P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \quad \tilde{P}_0^{(1)}=\begin{pmatrix} b_{k+1} \\ b_{k+2} \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{i+1,n_1+1} & a_{i+1,n_1+2} \cdots a_{i+1n} \\ a_{i+2,n_1+1} & a_{i+2,n_1+2} \cdots a_{i+2n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m,n_1+1} & a_{m,n_1+2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{P}_0^{(2)}=\begin{pmatrix} b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (84)$$

D_1 we D_2 bilen, degişlilikde aşakdaky deňlemeler ulgamynyň çözüwler köplügini belgiläliň:

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1+\cdots+a_{k+1,n_1}x_{n_1}=b_{k+1}, \\ \qquad\cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n_1}x_{n_1}=b_i, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \geq 0;$

$$\begin{cases} a_{i+1,n_1+1}x_{n_1+1}+\cdots+a_{i+1,n}x_n=b_{i+1}, \\ \qquad\cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m,n_1+1}x_{n_1+1}+\cdots+a_{m,n}x_n=b_m, \end{cases}$$

$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_n \geq 0.$

Goý, $X_j^{(1)}$ (j=1, 2,…,$N_j^{(1)}$) we $X_j^{(2)}$ (j=1, 2,…,$N_j^{(2)}$), $R_j^{(1)}$) (j= $N_j^{(1)}$)+1,…,$N^{(1)}$) we $R_j^{(2)}$ (j= $N_l^{(2)}$+1,…,$N^{(2)}$), degişlilikde D_1 we D_2 köpgranlyklaryň çäksiz gapyrgalarynyň depeleri we ugrukdyryjy wektorlary bolsunlar.

$$P_1^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_j^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,N_1^{(1)};\ P_j^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}R_j^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ j=N_1^{(1)}+1,\cdots,N^{(1)};$$

$$P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_j^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = 1,2,\cdots,N_1^{(2)}; P_j^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}R_j^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = N_1^{(2)} + 1,\cdots,N^{(2)}; \quad (85)$$

Belgilemeleri girizeliň:

$$\widetilde{P_0} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \sigma_j^{(1)} = (C^{(1)},X_j^{(1)}),\ j = 1,2,\cdots,\ N_1^{(1)};\ \sigma_j^{(1)} = (C^{(1)},R_j^{(1)}),$$

$$j = N_1^{(1)} + 1,\cdots,\ N^{(1)}; \quad (86)$$

$$\sigma_j^{(2)} = (C^{(2)},\ X_j^{(2)}),\ j = 1,2,\cdots,N_1^{(2)};\ \sigma_j^{(2)} = (C^{(2)},\ R_j^{(2)}),\ j = N_1^{(2)} + 1,\cdots,N^{(2)}.$$

Girizilen belgilemelerde baş mesele

$$F = \sigma_1^{(1)}y_1^{(1)} + \cdots + \sigma_{N^{(1)}}^{(1)}y_{N^{(1)}}^{(1)} + \sigma_1^{(2)}y_1^{(2)} + \cdots + \sigma_{N^{(2)}}^{(2)}y_{N^{(2)}}^{(2)} \quad (87)$$

funksiýanyň

$$y_1^{(1)}P_1^{(1)} + \cdots + y_{N^{(1)}}^{(1)}P_{N^{(1)}}^{(1)} + y_1^{(2)}P_1^{(2)} + \cdots + y_{N^{(2)}}^{(2)}P_{N^{(2)}}^{(2)} = \widetilde{P_0} \quad (88)$$

$$y_j^{(1)} \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,N^{(1)};\ y_j^{(2)} \geq 0,\ j = 1,2,\cdots,N^{(2)} \quad (89)$$

şertler maksimimuny tapmaklyga getirilýär.

Eger $Y^* = (y_1^{*(1)}, y_2^{*(1)},\cdots,y_k^{*(1)}, y_1^{*(2)}, y_2^{*(2)},\cdots,y_q^{*(2)})$ baş meseläniň optimal çözüwi, $P_1^{(1)}, P_2^{(1)},\cdots, P_k^{(1)}$ – D_1 köpgranlygyň degişli depeleri, $P_1^{(2)}, P_2^{(2)},\cdots, P_k^{(2)}$ – D_2 köpgranlygyň çäksiz gapyrgalarynyň ugrukdyryjy wektorlary bolsa, onda berlen meseläniň optimal çözüwi $X^* = (X_1^*,X_2^*)$ bolar. Bu ýerde:

$$X_1^* = y_1^{*(1)}X_1^{(1)} + y_2^{*(1)}X_2^{(1)} + \cdots + y_k^{*(1)}X_k^{(1)} = (x_1^*,x_2^*,\cdots,x_{n_1}^*); \quad (90)$$

$$X_2^* = y_1^{*(2)}X_1^{(2)} + y_2^{*(2)}X_2^{(2)} + \cdots + y_q^{*(2)}X_q^{(2)} = (x_{n_1+1}^*,x_{n_1+2}^*,\cdots,x_n^*). \quad (91)$$

Baş meseläniň maksat funksiýasy onuň ýolbererli çözüwleriniň köplüginde çäklenmedik bolsa, onda berlen meseläniň maksat funksiýasy hem degişli ýolbererli çözüwleriň köplüginde çäklenmedikdir.

3.40-njy mesele.

$$F=2x_1+3x_2-x_3-2x_4 \quad (92)$$

funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 17, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ -4x_1 - x_2 \leq 8, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 \leq 22, \\ \qquad\quad -2x_3 + x_4 \leq 13, \end{cases} \quad (93)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad (94)$$

şertlerde tapmak hakda meseläniň baş meselesini gurmaly.

Çözülişi. Berlen meseläniň çäklendirmeler ulgamy birinji deňsizlik bilen kesgitlenýän baglanyşdyryjy blokdan we biri ikinji we üçünji deňsizlikler bilen kesgitlenýän, beýlekisi dördünji we bäşinji deňsizlikler bilen kesgitlenýän iki blokdan ybaratdyr. Diýmek,

$$C^{(1)} = (2; 3), C^{(2)} = (-1; -2), A^{(1)} = (1; 1), A^{(2)} = (-2; 1),$$

$$P_0=(17),\ \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}, P_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

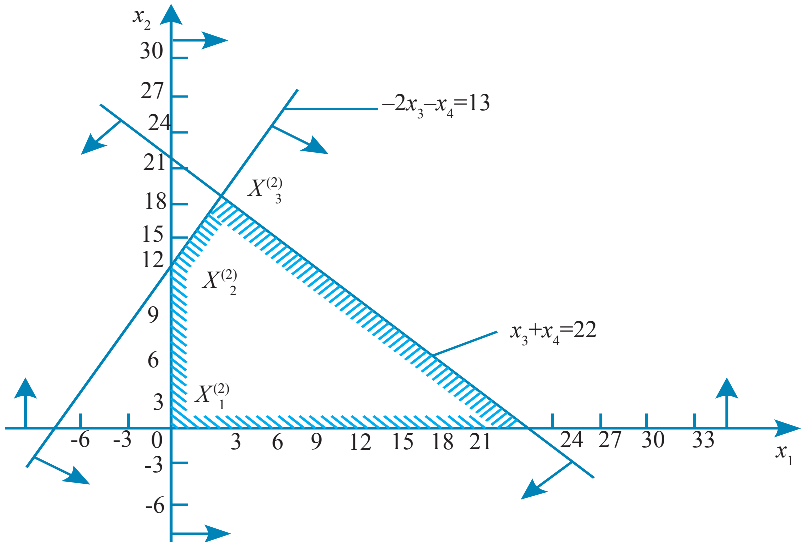
Degişlilikde

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 \leq 22, \\ -2x_3 + x_4 \leq 13, \end{cases}$$

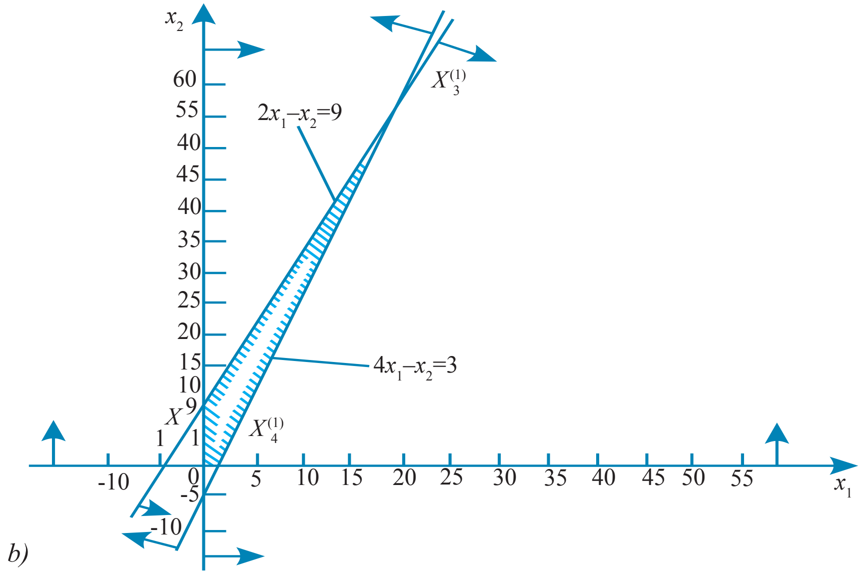
$$x_1, x_2 \geq 0, \qquad x_1, x_2 \geq 0,$$

deňsizlikler ulgamlary bilen kesgitlenýän D_1 we D_2 çözüwler köpburçluklarynyň depelerini tapalyň.

Berlen meselede bu işi geometriki şekillendirip ýerine ýetirmek aňsatdyr (*3.11-nji surat*).



a)



3.11-nji surat

3.11-nji *a, b* suratlardan görnüşi ýaly, $X_1^{(1)} = (0;0)$; $X_2^{(1)} = (0;9)$; $X_3^{(1)} = (17;60)$; $X_4^{(1)} = (2;0)$; $X_1^{(2)} = (0;0)$; $X_2^{(2)} = (0;13)$; $X_3^{(2)} = (3;19)$; $X_4^{(2)} = (22;0)$;.

(85) we (86) formulalar boýunça alarys:

$$\sigma_1^{(1)} = (C^{(1)}, X_1^{(1)}) = ((2;3),(0;0)) = 0;$$
$$\sigma_2^{(1)} = (C^{(1)}, X_2^{(1)}) = ((2;3),(0;9)) = 27;$$
$$\sigma_3^{(1)} = (C^{(1)}, X_3^{(1)}) = ((2;3),(17;60)) = 214;$$
$$\sigma_4^{(1)} = (C^{(1)}, X_4^{(1)}) = ((2;3),(2;0)) = 4;$$
$$\sigma_1^{(2)} = (C^{(2)}, X_1^{(2)}) = ((-1;-2),(0;0)) = 0;$$
$$\sigma_2^{(2)} = (C^{(2)}, X_2^{(2)}) = ((-1;-2),(0;13)) = -26;$$
$$\sigma_3^{(2)} = (C^{(2)}, X_3^{(2)}) = ((-1;-2),(3;19)) = -41;$$
$$\sigma_4^{(2)} = (C^{(2)}, X_4^{(2)}) = ((-1;-2),(22;0)) = -22;$$

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_1^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_1^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_2^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_3^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_4^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_4^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_3^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_3^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_4^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_4^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Şeýlelik bilen, baş mesele

$$F = 27y_2^{(1)} + 214y_3^{(1)} + 4y_4^{(1)} - 26y_2^{(2)} - 41y_3^{(2)} - 22y_4^{(2)} \tag{95}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny:

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)} + 77y_3^{(1)} + 2y_4^{(1)} + 13y_2^{(2)} + 13y_3^{(2)} - 44y_4^{(2)} \leq 17, \\ y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 1, \\ y_1^{(2)} + y_2^{(2)} + y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 1, \end{cases} \tag{96}$$

$$y_j^{(1)} \geq 0, y_j^{(2)} \geq 0 \; (j = 1, 2, 3, 4) \tag{97}$$

şertlerde tapmaklyga getirilýär.

(95)–(97) baş meseläni çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi görnüşinde ýazalyň:

$$F = 27y_2^{(1)} + 214y_3^{(1)} + 4y_4^{(1)} - 26y_2^{(2)} - 41y_3^{(2)} - 22y_4^{(2)} \tag{98}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny:

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)} + 77y_3^{(1)} + 2y_4^{(1)} + 13y_2^{(2)} + 13y_3^{(2)} - 44y_4^{(2)} + y_5 = 17, \\ y_1^{(1)} + y_2^{(1)} + y_3^{(1)} + y_4^{(1)} = 1, \\ y_1^{(2)} + y_2^{(2)} + y_3^{(2)} + y_4^{(2)} = 1, \end{cases} \tag{99}$$

$$y_j^{(1)} \geq 0, y_j^{(2)} \geq 0, y_5 \geq 0 \; (j = 1, 2, 3, 4) \tag{100}$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

Eger indi (92)–(94) mesele bilen (95)–(97) meseläni deňeşdirsek, onda birinji meselede deňsizlik görnüşindäki çäklendirmeleriň sanynyň 5-e, näbellileriniň 4-e deňdigini, ikinji meselede bolsa, degişlilikde 3-e we 8-e deňdigini göreris. Şeýlelik bilen, (92)–(94) meseleden (95)–(97) meselä geçilende çäklendirmeleriň sany azalyp, üýtgeýän ululyklaryň sany köpeldi. Şeýle hem bize D_1 we D_2 köpgranlyklaryň ähli depelerini kesgitlemek gerek boldy, bu bolsa elmydama mümkin däldir. Şol sebäpli (92)–(94) meseläniň çözüwi tapylanda (95)–(97) meseläniň optimal çözüwini tapmaklyga geçmek zerurmy diýen soragyň ýüze çykmagy tebigydyr. Bu soraga položitel jogaby, (95)–(97) baş meseläniň çözüwini D_1 we D_2 köpgranlyklaryň ähli depelerini we olaryň sanyny kesgitlemezden, diňe bir bazis çözüwiň üsti bilen tapmaga Dansigiň-Wulfuň usuly mümkinçilik berýär. Bu usulyň manysy barada, ýagny onuň kömegi bilen (81)–(83) mesele üçin (87)–(89) baş meseläniň çözüwiniň tapylyşyna has giňişleýin garap geçeliň. Onuň bilen baglylykda (87)–(89) meseläni çözmek üçin gurulýan tapgyrlaýyn işiň başlangyjyny berlen meseläniň daýanç çözüwini kesgitleýän haýsy hem bolsa bir bazis çözüwi bilmegiň ýeterlikdigini belläliň. Bu bazis çözüwi göni ýazyp hem bolar ýa-da emeli bazis usulynyň kömegi bilen gurup bolar.

Goý, baş meseläniň daýanç çözüwini kesgitleýän haýsy hem bolsa bir bazis belli bolsun we B^{-1} bu bazise görä düzülen wektorlaryň komponentleriniň matrisasynyň ters matrisasy bolsun. Daýanç çözüwiň optimaldygyny barlamak üçin

$$\overline{\Omega} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}) = \sigma_b B^{-1}$$

wektory tapalyň we $\mathbf{\Omega}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ belgileme girizeliň. Soňra

$$F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)})$$

funksiýanyň (81)-(83) meseläniň birinji blogy bilen kesgitlenýän

$$A^{(1)}X^{(1)} = \widetilde{P}_0^{(1)}, \ X^{(1)} \geq 0$$

şertlerinde maksimum bahasyny tapma meselesini çözeliň. Eger bu mesele $X_s^{(1)}$ optimal çözüwe eýe bolup, $F_1^{(1)}(X_s^{(1)}) = \lambda_{m+1}$ bolsa, onda ikinji bölek meseläniň, ýagny

$$F_1^{(2)} = (C^{(2)} - \Omega A^{(2)}, X^{(2)})$$

funksiýanyň (81)-(83) meseläniň birinji blogy bilen kesgitlenýän

$$A^{(2)}X^{(2)} = \widetilde{P}_0^{(2)}, \quad X^{(2)} \geq 0$$

şertlerinde maksimum bahasyny tapma meselesiniň çözüwini taparys. Bu mesele $X_s^{(2)}$ optimal çözüwe eýe bolup, $F_1^{(2)}(X_s^{(2)}) = \lambda_{m+2}$ bolsa, onda başky bazis (87)-(89) baş meseläniň optimal çözüwini kesgitleýär. Şeýlelikde, onuň tapylan çözüwi we (90), (91) formulalar boýunça berlen (81)-(83) meseläniň optimal çözüwini tapyp bolar.

$F_1^{(1)}(X_s^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$ ýa-da $F_1^{(2)}(X_s^{(2)}) \neq \lambda_{m+2}$ bolsa, onda başky daýanç çözüw optimal çözüw däldir we baş meseläniň başga daýanç çözüwini kesgitlejek beýleki bir bazise geçmek zerurdyr. Eger onda-da $F_1^{(1)}(X_s^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$ bolsa, ikinji bölek meseläniň çözüwini tapmagyň manysy ýokdur.

Şeýlelik bilen, goý, $F_1^{(1)}(X_s^{(1)}) \neq \lambda_{m+1}$ bolsun. Onda baş meseläniň başga daýanç çözüwini kesgitlejek beýleki bir bazise geçmek zerurdyr. Onuň üçin bazisden haýsy hem bolsa bir wektory aýryp, onuň deregine başga bir täze wektory girizmek zerur. Şeýle wektor $\lambda_{m+1} - (C^{(1)}\Omega A^{(1)}, X_s^{(1)}), \lambda_1, \lambda_2, , \lambda_m$, sanlaryň iň kiçi otrisatel ululygy bilen kesgitleniler. Eger şeýle san $\lambda_{m+1} - (C^{(1)}\Omega A^{(1)}, X_s^{(1)})$ bolsa, onda bazise $P_s^{(1)}$ wektory, eger-de şeýle san λ_j bolsa, onda bazise bu san bilen kesgitlenýän $P_j^{(1)}$ wektory girizeris.

Bazise girizmeli wektor kesgitlenenden soňra ondan çykarmaly wektor kesgitlenýär. Onuň üçin $P_s^{(1)}$ (ýa-da $P_j^{(1)}$) we baş meseläniň daýanç çözüwini kesgitleýän P_0 wektory bu bazise görä dargadýarys we P_0 wektoryň komponentleriniň $P_s^{(1)}$ wektoryň bu bazisdäki degişli položitel komponentlerine gatnaşyklarynyň minimumyny kesgitleýäris. Bu gatnaşyklaryň iň kiçisi bazisden çykarylmaly wektory kesgitleýär. Netijede, indiki daýanç çözüwi kesgitleýän täze bazisi alarys. Bu çözüwiň optimaldygyny barlamak üçin degişli bölek mesele düzüp, onuň çözüwini tapalyň. Şol çözüw degişli daýanç çözüwiň optimaldygyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Eger ol optimal däl bolsa, onda täze daýanç çözüwi kesgitlejek bazise geçýäris. Ýöne tapgyrlaýyn işiň dowamynda $P_s^{(1)}$ wektoryň alnan bazis boýunça dargatmasyndaky komponentleriniň arasynda položitelleriniň ýok bolan ýagdaýlaryň bolmagy mümkin. Bu ýolbererli çözüwler köplüginde baş meseläniň maksat funksiýasynyň çäklenen däldigini aňladýar. Bu bolsa, öz gezeginde, berlen meseläniň maksat funksiýasynyň çäklenen däldigini aňladýar.

Netijede, käbir tükenikli ädimden soň ýa-ha baş we berlen meseläniň çözüwiniň ýokdugy kesgitlenilýär ýa-da olaryň optimal çözüwi tapylýar.

Ýokarda çyzykly programmalaşdyrmanyň blok düzümli meselesiniň iki blokly ýagdaýyna seredildi. Eger bloklaryň sany ikiden uly bolsa, meselem, *k* deň bolsa, onda beýle meseläni çözmegiň algoritmi öňki seredilen ýagdaýdan her tapgyrlarda iki däl-de *k* bölek meseläni çözmek bilen tapawutlanýar. Ýöne tapgyryň dowamynda bir bölek meseläniň çözüwi ýok bolup çyksa, onda soňky bölek meseleleri çözmegiň zerurlygy ýokdur. Sebäbi bu ýagdaýda berlen meseläniň optimal çözüwi ýokdur.

3.41-nji mesele.

$$F = 2x_1+3x_2-x_3-2x_4 \tag{101}$$

funksiýanyň maksimal bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 17, \\ -3x_1 + x_2 \le 9, \\ -4x_1 - x_2 \le 8, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 \le 22, \\ \qquad\quad -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases} \tag{102}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \tag{103}$$

şertlerde tapmaly.

Çözülişi. Berlen meseläni matrisa we wektor görnüşinde ýazalyň:

$$C^{(1)} = (2;3),\ C^{(2)} = (-1;-2),\ A^{(1)} = (1;1),\ A^{(2)} = (-2;1),$$

$$P_{0=(17)};\ \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ P_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix},\ P_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

3.41-nji meselede ýazylan baş meseläniň bazisini kesgitläliň:

(101)-(103) meseledäki çäklendirmeler ulgamynyň baglanyşdyryjy blogy «≤» görnüşli deňsizlik bolany sebäpli, baş meseledäki birinji çäklendirme hem şeýle görnüşde bolar. Şol sebäpli baş mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň esasy meselesi görnüşine getirilende birinji çäklendirmäniň sag tarapyna y_5 görnüşde belgilenen goşmaça üýtgeýän ululygy goşarys. Bu üýtgeýän ululyga $P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ görnüşli birlik wektor degişli bolar. Şeýle hem, (101)-(103) meseläniň (102) çäklendirmeler ulgamyndan görnüşi ýaly birinji we ikinji bloklar bilen degişlilikde kesgitlenýän çözüwler köpburçlugynyň depeleri $X_1^{(1)} = (0;0)$; $X_1^{(2)} = (0;0)$ bolar. Bu depelere:

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_1^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_1^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektorlar degişli bolar.

Baş meseläniň azat agzalarynyň wektory bolan

$$\widetilde{P_0} = \begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektoryň otrisatel komponentleriniň ýokdugy sebäpli P_5, $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ wektorlar baş meseläniň daýanç çözüwini kesgitleýän bazisi emele getirýärler. Onda noldan tapawutly komponentler $y_5=17$, $y_1^{(1)}=1$ we $y_2^{(1)}=1$ deňdirler.

Tapylan bazisiň baş meseläniň daýanç çözüwini kesgitleýändigini barlamak üçin $F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)})$ funksiýanyň $A^{(1)}X^{(1)} = \widetilde{P_0}^{(1)}, X^{(1)} \geq 0$ şertlerdäki maksimal bahasyny tapalaýň.

Berlen ýagdaýda B matrisa P_5, $P_1^{(1)}$ we $P_2^{(1)}$ birlik wektorlaryň komponentlerinden düzülendigi sebäpli $B^{-1}=E$ deňdir. Şeýle hem, $\sigma_5=0$,

$\sigma_1^{(1)} = (C^{(1)}, X_1^{(1)}) = ((2;3),(0;0)) = 0,$

$\sigma_1^{(2)} = (C^{(2)}, X_1^{(2)}) = ((-1;3),(0;0)) = 0;$

$$\overline{\Omega} = (0,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0); \; \Omega = (0); \; \lambda_2 = \lambda_{m+1} = 0; \; \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0.$$

1-nji bölek meseläni çözeliň:

$$F_1^{(1)} = (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X^{(1)}) = ((2;3) - 0(1;1),(x_1;x_2)) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ 4x_1 - x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Bu meseläniň optimal çözüwi $X_3^{(1)}$=(17;60) bolup, $F_1^{(1)}$ $X_3^{(1)}$ =214>$\lambda_2=\lambda_{m+1}$=0. Diýmek, P_5, $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ wektorlar bilen döredilen bazis baş meseläniň optimal däl bolan daýanç çözüwini kesgitleýär.

Birinji uly tapgyr. $\lambda_{m+1}-(C^{(1)}-\Omega A^{(1)}, X_3^{(1)}), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sanlardan, ýagny berlen ýagdaýdaky -214 we 0 sanlardan iň kiçi otrisatel san -214-dir. Şol sebäpli bazise:

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_3^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wektory girizýäris. Onuň üçin $\sigma_3^{(1)}=(C^{(1)}, X_3^{(1)})$=((2; 3), (17;60))=214. $P_3^{(1)}$ wektoryň we $\widetilde{P_0}\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wektoryň birinji bazis boýunça dargatmasy bu wektorlar bilen gabat gelýär. Şol sebäpli, bazisden aýyrmaly wektory kesgitlemek üçin $\tilde{P}_0$ wektoryň komponentleriniň $P_3^{(1)}$ wektoryň položitel komponentleri bilen gatnaşyklarynyň iň kiçisini tapmaly: $\min\left(\frac{17}{77};\frac{1}{1}\right) = 17/77$. Diýmek, bazisden birinji wektory, ýagny P_5 wektory aýyrýarys, şeýlelik bilen täze bazisi $P_3^{(1)}$, $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ wektorlar emele getirýärler. Bu wektorlaryň komponentlerinden düzülen matrisa:

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deň bolar. Bu matrisanyň ters matrisasy:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolar. $\overline{\Omega}$, Ω we $C^{(1)}$-$\Omega A^{(1)}$ wektorlary kesgitläliň:

$$\overline{\Omega} = \sigma_b B^{-1} = (\sigma_3^{(1)}; \sigma_1^{(1)}; \sigma_1^{(2)})B^{-1} = (214;0;0)\begin{pmatrix} \frac{1}{77} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{77} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{214}{77};0;0\right);$$

$$\Omega = \left(\frac{214}{77}\right); \lambda_2 = \lambda_{m+1} = 0; \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0; C^{(1)} - \Omega A^{(1)} =$$

$$= \left((2;3) - \left(\frac{214}{77}\right)(1;1)\right) = \left(-\frac{60}{77};\frac{17}{77}\right).$$

Birinji bölek mesele

$$F_2^{(1)} = \left(-\frac{60}{77}\right)x_1 + \left(\frac{17}{77}\right)x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

görnüşe eýe bolýar. Bu meseläniň optimal çözüwi $X_2^{(1)} = (0;9)$ bolar. $F_2^{(1)}$ $(X_2^{(1)}) = 153/77 > \lambda_2 = 0$. Diýmek, $P_3^{(1)}$, $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$ täze bazis baş meseläniň optimal däl bolan daýanç çözüwini kesgitleýär.

Ikinji uly tapgyr. $\lambda_2 - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_2^{(1)}), \lambda_2$ sanlardan, ýagny şu ýagdaýdaky -153/77 we 0 sanlardan iň kiçi otrisatel san $-153/77 = \lambda_2 - (C^{(1)} - \Omega A^{(1)}, X_2^{(1)})$ sandyr. Şol sebäpli bazise

$$P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wektory girizýäris. Onuň üçin $\sigma_2^{(1)} = (C^{(1)}, X_2^{(1)}) = ((2;3),(0;9)) = 27.$ Şonuň üçin bazisden aýyrmaly wektory kesgitlemek üçin $P_2^{(1)}$ we $\tilde{P}_0$ wektorlary seredilýän bazisiň wektorlary boýunça dagydýarys, ýagny

$$B^{-1}P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/77 \\ 68/77 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1}\widetilde{P_0} = \begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/77 \\ 60/77 \\ 1 \end{pmatrix}$$

we $\min\left(\left(\frac{17}{77}\right):\left(\frac{9}{77}\right);\left(\frac{60}{77}\right):\left(\frac{68}{77}\right)\right) = \min\left(\frac{17}{9};\frac{15}{17}\right) = \frac{15}{17}$. Diýmek, bazisden ikinji wektory, ýagny $P_1^{(1)}$ wektory aýyrýarys, şeýlelik bilen täze bazisi:

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} P_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektorlar emele getirýärler. Bu wektorlaryň komponentlerinden düzülen matrisa:

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolar. Bu matrisanyň ters matrisasy

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolar. $\overline{\Omega}$, Ω we $C^{(1)} - \Omega A^{(1)}$ wektorlary kesgitläliň: $\overline{\Omega} = (\sigma_3^{(1)}; \sigma_2^{(1)}; \sigma_1^{(2)})$

$$B^{-1} = (214;27;0)\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{4};9/4;0\right); \quad \Omega = \left(\frac{9}{4}\right);$$

$$\lambda_2 = \lambda_{m+1} = \frac{9}{4}; \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 0; C^{(1)} - \Omega A^{(1)} =$$

$$= \left((2;3) - \left(\frac{11}{4}\right)(1;1)\right) = \left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right).$$

Birinji bölek meseläni düzeliň we çözeliň:

$$F_3^{(1)} = \left(-\frac{3}{4}\right)x_1 + \left(\frac{1}{4}\right)x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Bu meseläniň optimal çözüwi $X_2^{(1)}$=(0;9) bolar. Bu çözüwde $F_1^{(2)}\ X_2^{(1)}=\frac{9}{4}=\lambda_2$.

Ikinji bölek meseläni düzeliň we çözeliň:

$$F_1^{(2)} = (C^{(2)} - \Omega A^{(2)}, X^{(2)}) = \left((-1;-2) - \left(\frac{9}{4}\right)(-2;1), (x_3; x_4)\right) =$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)x_3 + \left(\frac{13}{4}\right)x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Bu meseläniň optimal çözüwi $X_4^{(2)}$=(22;0) bolar. Bu çözüwde $F_3^{(1)}\ (X_4^{(2)})= 99 > \lambda_3 = 0$. Diýmek, seredilýän täze bazis baş meseläniň optimal däl bolan daýanç çözüwini kesgitleýär.

Üçünji uly tapgyr. $\lambda_3 - (C^{(2)} - \Omega A^{(2)}, X_4^{(2)}) = -99, \lambda_2 = 11/4$ sanlardan, iň kiçi otrisatel san (-99) sandyr. Şol sebäpli bazise

$$P_4^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_4^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektory girizýäris. Degişlilikde $\sigma_4^{(2)} = (C^{(2)}, X_4^{(2)}) = (-1;-2)$ $(22;0)) = -22$. Şonuň üçin bazisden aýyrmaly wektory kesgitlemek üçin $P_4^{(2)}$ we $\widetilde{P}_0$ wektorlary seredilýän bazisiň wektorlary boýunça dargadýarys, ýagny

$$B^{-1}P_4^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/68 & 9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/17 \\ 11/17 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1}\widetilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/17 \\ 15/17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

we $\min\left(\left(\frac{15}{17}\right):\left(\frac{11}{17}\right); 1/1\right) = 1$. Diýmek, bazisden $P_1^{(2)}$ wektory aýyrýarys, şeýlelik bilen täze bazisi:

$$P_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4^{(2)} = \begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektorlar emele getirýärler. Bu wektorlaryň komponentlerinden düzülen matrisa:

$$B = \begin{pmatrix} 77 & 9 & -44 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolar. Bu matrisanyň ters matrisasy:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bolar. $\overline{\Omega}$, Ω, $C^{(1)} - \Omega A^{(1)}$ we $C^{(2)} - \Omega A^{(2)}$ wektorlary kesgitläliň:

$$\overline{\Omega} = (\sigma_3^{(1)}; \sigma_2^{(1)}; \sigma_4^{(2)})$$

$$B^{-1} = (214; 27; -22)\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{4}; 9/4; 99\right);$$

$$= \left(\frac{11}{4}; 9/4; 99\right); \quad \Omega = \left(\frac{11}{4}\right);$$

$$\lambda_2 = \lambda_{m+1} = \frac{9}{4}; \lambda_3 = \lambda_{m+2} = 99; C^{(1)} - \Omega A^{(1)} = \left((2;3) - \left(\frac{11}{4}\right)(1;1)\right)$$

$$= \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right). \quad C^{(2)} - \Omega A^{(2)} = \left((-1;-2) - \left(\frac{11}{4}\right)(-2;1)\right) = \left(\frac{9}{2}; -\frac{19}{4}\right).$$

Birinji bölek meseläni düzeliň we çözeliň:

$$F_3^{(1)} = \left(-\frac{3}{4}\right)x_1 + \left(\frac{1}{4}\right)x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Bu meseläniň optimal çözüwi $X_2^{(1)}=(0;9)$ bolar. Bu çözüwde $F_1^{(2)}(X_4^{(2)}) = 9/4 = \lambda_2$.

Ikinji bölek meseläni düzeliň we çözeliň:

$$F_1^{(2)} = \left(\frac{9}{2}\right)x_3 - \left(\frac{19}{4}\right)x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 22, \\ -2x_3 + x_4 \le 13, \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \ge 0.$$

Bu meseläniň optimal çözüwi $X_4^{(2)}$=(22;0) bolar. Bu çözüwde $F_1^{(2)}(X_4^{(2)}) = 99 = \lambda_3$. Diýmek, baş meseläniň seredilýän täze bazis bilen kesgitlenýän daýanç çözüwi optimal çözüwdir. Ony tapmak üçin ($\widetilde{P}_0$) wektory bazisiň wektorlary boýunça dargadalyň:

$$B^{-1}\widetilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/17 \\ 4/17 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diýmek, baş meseläniň optimal çözüwinde noldan tapawutly komponentleri $y_3^{(1)} = 13/17, y_2^{(1)} = 4/17 \;\; y_4^{(2)} = 1$ bolar.

(124) we (125) formulalary ulanyp, (135)–(137) meseläniň optimal çözüwini taparys:

$$X_0^* = (X_1^*; X_2^*) = \left(y_2^{(1)}X_2^{(1)} + y_3^{(1)}\, X_3^{(1)};\, y_4^{(2)}\, X_4^{(2)}\right) =$$

$$\left(\left(\frac{4}{17}\right)\cdot(0;9) + \left(\frac{13}{17}\right)\cdot(17;60);1\cdot(22;0)\right) = (13;48;22;0).$$

Maksat funksiýasynyň maksimal bahasy:

$$F_{\max}=2\cdot13+3\cdot48-22=148.$$

Uly ölçegli meseleleri kiçi ölçegli bölek meselelere getirip çözmegiň Dansigiň-Wulfuň usulyndan başga-da usullarynyň bardygyny belläliň.

Dansigiň-Wulfuň usulyndan peýdalanyp, 3.42-3.47-nji meseleleri çözmeli.

3.42-nji mesele

$F=3x_1-2x_2+3x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ -3x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_3 - 3x_4 \le 12, \\ x_3 + 3x_4 \le 15, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

3.43-nji mesele

$F=2x_1+3x_2-2x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_3 + x_4 \le 4, \\ -x_3 + x_4 \le 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

3.44-nji mesele

$F=5x_1+4x_2\to\max;$

3.45-nji mesele

$F=5x_1+6x_2+4x_3+7x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ge 0.$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 150, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 80, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ x_3 + x_4 \le 90, \\ 2x_3 + 4x_4 \le 80, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

3.46-njy mesele

$F = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \le 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 102, \\ x_1 - 2x_2 \le 16, \\ x_3 + 2x_4 \le 14, \\ x_3 - 2x_4 \le 18, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

3.47-nji mesele

$F = 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 50, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 - 3x_2 \le 27, \\ 2x_3 + 3x_4 \le 28, \\ -x_3 + 2x_4 \le 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$

§ 3.6. Oýunlar nazaryýetiniň meseleleri

3.6.1. Oýunlar nazaryýetiniň esasy düşünjeleri

Ykdysadyýetiň meseleleriniň aglabasynda oňa gatnaşyjylaryň öz çözgütlerini emele gelen ýagdaýa görä üýtgetmekleri netijesinde dürli jedelli ýagdaýlar emele gelýär. Şeýle ýagdaýlary dogry çözmek üçin jedele gatnaşýan taraplar öňden kesgitlenen belli bir düzgünler boýunça hereket edýän bolsalar, onda şol düzgünlere laýyklykda olar bu ýagdaýy çözmegiň ýollaryny kesgitläp bilerler. Jedelli ýagdaýlaryň aglabasynda oňa gatnaşýan taraplaryň biri üçin käbir görkezijiler gowulandyrylanda beýlekiler üçin şeýle görkezijileriň erbetleşýändigine duş gelinýär. Başgaça aýdylanda, haýsy hem bolsa bir görkezijiniň gowulandyrylmasy beýleki bir görkezijiniň erbetleşmeginiň hasabyna amala aşýar. Bu görkezijileriň wekilleri bolup çykyş edýän degişli taraplar özboluşly jedele goşulýarlar. Şeýle jedelli ýagdaýlary öwrenmek zerurlygy **oýunlar nazaryýetiniň** döremegine getirdi.

Bu nazaryýetiň esasy düşünjesiniň biri oýundyr. **Oýun** – bu jedelli ýagdaýyň modelidir. Oýunlar nazaryýeti bolsa jedelli ýagdaýlaryň matematiki nazaryýetidir.

Jedele gatnaşýan ykdysady görkezijilere (ýa-da olaryň wekilleri bolup çykyş edýän taraplara) **oýunçylar** diýilýär. Oýunlar nazaryýetiniň maksady her bir oýunça özüni alyp barmagyň iň dogry ýoluny saýlap bermekden, ýagny eger oýunçy şol ýoldan çykanda onuň utuşy kemelýän ýagdaýy saýlap bermekden ybaratdyr.

Oýunlar nazaryýetiniň esasy adalgalaryny kesgitläliň.

3.2-nji kesgitleme. Eger käbir dörän ýagdaýa gatnaşyjylaryň gyzyklanmalary doly ýa-da bölekleýin gapma-garşy bolsa, onda bu ýagdaýa **jedelli ýagdaý** diýilýär.

3.3-nji kesgitleme. Gyzyklanmalary gapma-garşy bolan iň bolmanda iki sany gatnaşyjysy bolan hakyky ýa-da formal jedelli ýagdaýa **oýun** diýilýär.

3.4-nji kesgitleme. Her bir oýunçynyň käbir maksada ýetmek üçin ýerine ýetirýän ýolbererli hereketlerine **oýnuň düzgünleri** diýilýär.

3.5-nji kesgitleme. Oýnuň netijeleriniň san taýdan bahalandyrmasyna **töleg** diýilýär.

Oýna gatnaşýan oýunçylaryň sanyna görä oýunlar **jübüt** we **köpçülikleýin oýunlara** bölünýärler.

3.6-njy kesgitleme. Eger oýna diňe jedelleşýän iki tarap gatnaşýan bolsa, onda oňa **jübütleýin oýun** (**iki bolup oýnalýan oýun**) diýilýär.

3.7-nji kesgitleme. Eger jübütleýin oýunda bir oýunçynyň utuşy beýleki oýunçynyň utulyşyna deň bolsa, ýagny oýundaky tölegleriň jemi nola deň bolsa, onda şeýle oýna **nol jemli oýun** diýilýär.

Öňden belli bolan ýagdaýlaryň birini saýlap almaklyga we ony amala aşyrmaklyga **göçüm** diýilýär. Her bir göçümde täsir wariantyny saýlap almaklygy bir belgili kesgitleýän düzgünleriň toplumyna **strategiýa** diýilýär. Ýa-da strategiýa – bu göçüm kabul edilýän düzgünnamadyr.

3.8-nji kesgitleme. Oýunçynyň her bir ýagdaýda ýerine ýetirmeli hereketiniň beýanyna bu **oýunçynyň strategiýasy** diýilýär.

Eger her bir oýunçynyň strategiýalarynyň sany tükenikli bolsa, onda tükenikli oýny alarys. Strategiýalarynyň sany tükeniksiz ýagdaýda tükeniksiz oýun alnar.

3.9-njy kesgitleme. Oýun köp gezek gaýtalananda oýunça mümkin bolan maksimal orta utuşy (ýa-da mümkin bolan minimal orta utulyş, şol bir zat) üpjün edýän strategiýa **optimal strategiýa** diýilýär.

Goý, biri özüniň mümkin bolan m sany strategiýalaryndan i-nji strategiýany (i=1, 2,…,m) saýlap alyp bilýän, beýlekisi özüniň mümkin bolan n sany strategiýalaryndan j-nji strategiýany (j=1, 2,…,n) saýlap alyp bilýän iki sany oýunçy bar bolsun. Netijede, birinji oýunçy a_{ij} ululyga deň utuşy alar, ikinji oýunçy bolsa, a_{ij} ululygy utdurar.

Biz aşakda iki oýunçynyň nol jemli oýnuna serederis.

Goý, A we B oýunçylar bar bolsun.

A oýunçynyň m sany (A_1, A_2,...,A_m), B oýunçynyň n sany (B_1, B_2, ..., B_n) strategiýalary bar diýeliň. Goý, A oýunçy A_i, B oýunçy B_j strategiýany saýlady diýeliň. A oýunçynyň utuşyny φ_1 (A_i, B_j), B oýunçynyň utuşyny φ_2 (A_i, B_j) diýip belgileýäris. Onda alarys:

$$\varphi_1(A_i, B_j)+\varphi_2(A_i, B_j)=0\ .$$

Eger $\varphi_1(A_i, B_j)=\varphi(A_i, B_j)$ diýsek, onda $\varphi_2(A_i, B_j)=-\varphi(A_i, B_j)$ bolar. Bu halatda $\varphi(A_i, B_j)$ funksiýa **töleg funksiýasy** diýilýär. Bu funksiýany kesgitlemek oýunlar nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biridir.

3.10-njy kesgitleme. Eger $\varphi(A_i, B_j)=a_{ij}$ bolsa, onda **matrisaly oýunlary** alarys. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ matrisa, ýagny:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa **töleg matrisasy** diýilýär.

3.11-nji kesgitleme. m setirli we n sütünli $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ matrisa bilen kesgitlenýän oýna $m \times n$ **ölçegli tükenikli oýun** diýilýär.

Töleg matrisasyny gurmaklyga mysal hökmünde aşakdaky mysala seredeliň.

3.6.2. «Köne we täze harytlar» oýny

Goý, A satyjy (oýunçy) A_1, A_2, A_3 görnüşli «köne» harytlaryň satuwy bilen meşgullanýar diýeliň. Onuň harytlary öňden bäri bazarda hereket edýär we bu harytlara bildirilýän isleg belli diýeliň. Käbir wagtdan başlap bazara B satyjy (oýunçy) B_1, B_2, B_3 « täze» harytlaryny çykaryp başlaýar. «Täze» harytlar « köne» harytlary çalşyp bilýärler. Diýmek, köne harytlara isleg azalýar.

Goý, «köne» harytlaryň «täze» harytlar ýüze çykanda satuw ähtimallyklary belli diýeliň (islegiň deslapky derňewinden) (*3.28-nji tablisa*).

3.28-nji tablisa

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0, 5	0, 6	0, 8
A_2	0, 9	0, 7	0, 8
A_3	0, 7	0, 5	0, 6

Eger B_1 haryt satuwa goýberilse, onda A_1 haryda bolan isleg başdaky islegiň 0,5 bölegine, A_2 haryda bolan isleg başdaky islegiň 0, 9 bölegine deň bolar we şuňa meňzeşler.

Mesele «köne» we «täze» harytlaryň bazara goýberiliş strategiýasyny «täze» we «köne» harytlaryň satylan mukdarlarynyň arasynda optimal gatnaşyk bolar ýaly saýlap almakdan ybaratdyr. A we B satyjylar gapma-garşylykly islegleri bolan oýunçylardyr. A satyjynyň «köne» harytlaryna bolan islegiň ýitirilen bölegi B satyjynyň «täze» harytlaryna geçýär. 3.28-nji tablisanyň setirleri A oýunçynyň strategiýalaryny, sütünleri bolsa B oýunçynyň strategiýalaryny aňladýar.

Şeýlelikde, A we B oýunçylaryň her biriniň üç strategiýasy (harydy) bar. A oýunçynyň maksady öz utuşyny maksimal ýagdaýda saklamak, B oýunçynyň maksady bolsa öz utduryşyny we beýlekiniň utuşyny minimallaşdyrmaga çalyşmakdyr.

Oýnuň bahasy, onuň aşaky we ýokarky çäkleri. $m \times n$ tertipli matrisaly oýna seredeliň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisanyň setirleri birinji (I) oýunçynyň strategiýalaryny, sütünleri ikinji (II) oýunçynyň strategiýalaryny aňladýar.

Her bir oýunçynyň maksady özüniň iň gowy strategiýasyny tapmakdan ybaratdyr. I oýunçynyň iň gowy strategiýasyny tapalyň. Matrisanyň her setirindäki elementleriň iň kiçisini α_i, i=1,…,m bilen belgiläliň:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Bu α_i sany, ýagny dürli A_i strategiýalaryndaky iň az utuşlary bilip, I oýunçy iň erbet ýagdaýda uly utuşa eýe bolmak üçin bu sanlaryň iň ulusyny saýlap alýar. Ony α bilen belgiläliň, ýagny:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

3.12-nji kesgitleme. $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ ululyga **oýnuň bahasynyň aşaky çägi** ýa-da **maksimini** diýilýär. Bu ululyga degişli strategiýa (setire) **maksimin strategiýa** (setir) diýilýär.

Eger II oýunçy B_j strategiýany saýlasa we bu ýagdaý I oýunça belli bolsa, onda ikinji oýunçynyň utulyşy iň erbet ýagdaýda $\max_i a_{ij}$ bolar. Ýöne II oýunçy öz utulyşy minimal bolar ýaly strategiýany saýlaýar:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

3.13-nji kesgitleme. $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ ululyga o**ýnuň bahasynyň ýokarky çägi** ýa-da **minimaksy** diýilýär. Bu ululyga degişli strategiýa (setire) **minimaks strategiýa** (setir) diýilýär.

3.3-nji teorema. Oýnuň aşaky bahasy elmydama onuň ýokarky bahasyndan geçmeýär, ýagny:

$$\alpha \leq \beta.$$

3.14-nji kesgitleme. Eger $\alpha \leq \vartheta \leq \beta$ deňsizligi kanagatlandyrýan ϑ san bar bolsa, onda bu sana **oýnuň bahasy** diýilýär.

3.15-nji kesgitleme. Oýun üçin $\alpha = \beta = \vartheta = a_{ij}^*$ deňlik ýerine ýetýän oýna **eýer nokatly oýun,** a_{ij}^* elemente matrisanyň eýer elementi diýilýär.

Bu ýagdaýda töleg matrisasynyň **eýer elementi** bar diýilýär. Töleg matrisasynyň eýer elementi bar bolsa, onda oýun meselesi çözülen hasap edilýär. Çözüw «arassa» strategiýalarda berilýär. Eger töleg matrisasynyň eýer elementi ýok bolsa ($\alpha<\beta$), onda oýun meselesiniň çözüwi garyşyk strategiýalarda berilýär. Garyşyk strategiýalar oýunçylaryň strategiýalaryna degişli ähtimallyklardan düzülen wektorlar ýaly aňladylýar.

Birinji oýunçynyň garyşyk strategiýasy $X=(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ – ähtimallyklar toplumy bilen berilýär, ýagny x_i– I oýunçynyň A_i strategiýany saýlap almagynyň ähtimallygy. $Y=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$–ikinji oýunçynyň garyşyk strategiýasy. Bu ýerde y_j II oýunçynyň B_j strategiýasyny saýlamagynyň ähtimallygydyr. Diýmek aşakdaky şertler ýerine ýetmeli:

$$0 \le x_i \le 1, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;\ 0 \le y_j \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} y_j = 1\,.$$

Garyşyk strategiýalar ulanylanda II oýunçynyň utuşynyň matematiki garaşmasyny, ýagny

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

ululygy onuň utuşynyň ululygy hökmünde kabul etmek bolar.

3.4-nji teorema. (Oýunlar nazaryýetiniň esasy teoremasy). Iki oýunçynyň nol jemli islendik tükenikli oýnunyň iň bolmanda bir çözüwi bardyr, ýagny optimal strategiýalar jübüti bardyr. Umumy ýagdaýda garyşyk optimal strategiýalar bardyr.

Optimal strategiýanyň kömegi bilen oýnuň bahasyna (ϑ) deň utuşy tapmaklyga mümkinçilik bardyr: $\alpha \le \vartheta \le \beta$.

I oýunçynyň $X_{i\ \mathrm{optim}}$ strategiýany saýlap almagy oňa II oýunçynyň islendik göçüminde oýnuň bahasyndan az bolmadyk utuşy özüne üpjün etmäge esas berýär, şol sebäpli:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_{i\ \mathrm{optim}} \ge \vartheta.$$

Edil şoňa meňzeşlikde, II oýunçynyň $y_{j\ \mathrm{optim}}$ strategiýany saýlap almagy oňa I oýunçynyň islendik göçüminde oýnuň bahasyndan köp bolmadyk utulyşy üpjün etmäge mümkinçilik berýär, şol sebäpli:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_{j\ \mathrm{optim}} \le \vartheta.$$

Eger töleg matrisasynda eýer nokady ýok bolsa, onda garyşyk strategiýany tapmak meselesi matrisanyň ölçegi ulaldygyça kynlaşýar. Bu ýagdaýda uly ölçegli töleg matrisasynyň ölçegini peseltmäge ymtylynýar. Onuň üçin matrisadaky biri-birini gaýtalaýan ýa-da oýunça beýleki strategiýalardan az bähbitli strategiýalary ýok etmeklige ymtylynýar. Meselem,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

töleg matrisasynda:

$$\alpha = \max_i(2,2,2,1) = 2,\ \beta = \min_j(5,8,4,4,8) = 4,\ \text{ýagny } \alpha \neq \beta.$$

Matrisanyň üçünji setiriniň elementleri degişlilikde birinji setiriň elementlerinden kiçidir, şeýlelikde oňa degişli strategiýa I oýunça bähbitsizdir. Edil şoňa meňzeşlikde, dördünji setiriň elementleri, degişlilikde birinji setiriň elementlerinden kiçidir we oňa degişli strategiýa I oýunça bähbitsizdir. Şol sebäpli, matrisanyň üçünji we dördünji setirlerini taşlap bolar. Ikinji oýunçynyň I, II we V strategiýalaryna degişli sütünleri deňeşdirip, matrisanyň ikinji we bäşinji sütünlerini taşlap bolar. Netijede, aşakdaky 2×3 tertipli

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

töleg matrisa bilen berilýän, çözmesi ýeňil matrisa oýnuny alarys.

Oýunlar töleg matrisanyň tertibine görä $2\times n$; $m\times 2$; $m\times n$ tertipli bolýarlar.

2×*n* we *m*×2 görnüşli matrisa oýunlarynyň grafiki usulda çözülişi. Matrisaly oýunlarda iň bolmanda bir oýunçyda bary-ýogy iki strategiýasy bolanda meseläni grafiki usulda çözüp bolýar. $2\times n$ görnüşli (ölçegli) töleg matrisaly oýunlaryň, ýagny I oýunçysynyň iki srategiýasy bolan oýunlaryň grafiki usulda çözülişine garalyň. Oýnuň eýer nokady ýok ýagdaýyna seredeliň. Oýunçylaryň strategiýasyny 3.29-njy tablisada bereliň.

3.29-njy tablisa

	Ikinji oýunçynyň strategiýalary						
Birinji oýunçynyň strategiýalary		y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	$x_2=1-x_1$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}

Tablisada aşakdaky belgilemeler kabul edilendir:

x_1 – bu I oýunçy tarapyndan 1-nji strategiýanyň ulanylmagynyň ähtimallygy;

$x_2=1\text{-}x_1$ – bu I oýunçy tarapyndan 2-nji strategiýanyň ulanylmagynyň ähtimallygy;

y_j – bu II oýunçy tarapyndan j-nji (j=1,…,n) strategiýanyň ulanylmagynyň ähtimallygy.

II oýunçy j-nji (j=1,…,n) strategiýany ulanan halatynda I oýunçynyň garaşýan utuşy:

$$a_{1j}x_1+a_{2j}x_2=a_{1j}x_1+a_{2j}(1-x_1)=a_{1j}x_1+a_{2j}-a_{2j}x_1=(a_{1j}\text{-}a_{2j})x_1+a_{2j},(\mathrm{j}=1,\dots,n)$$

ululyga deňdir. Bu maglumatlary 3.30-njy tablisada ýerleşdireliň.

3.30-njy tablisa

II oýunçynyň arassa strategiýasy	I oýunçynyň garaşylýan utuşlary
1	$(a_{11}-a_{21})\ x_1+a_{21}$
2	$(a_{12}-a_{22})\ x_1+a_{22}$
...	...
j	$(a_{1j}-a_{2j})\ x_1+a_{2j}$
...	...
n	$(a_{1n}-a_{2n})\ x_1+a_{2n}$

Bu ýerden I oýunçynyň garaşylýan utuşynyň x_1 ululyga çyzykly baglydygy görünýär. I oýunçynyň garaşylýan utuşlaryny x_1 ululykdan çyzykly funksiýa hökmünde X_1 oka görä guralyň.

I oýunçy öz garaşýan iň az utuşyny maksimallaşdyrmaga ymtylyp strategiýalary saýlaýar. Şol sebäpli, I oýunçynyň optimal strategiýasy onuň garaşýan iň az utuşyny maksimallaşdyrýan gönüleriň kesişýän nokady hökmünde kesgitlenilýär. Degişlilikde, II oýunçynyň optimal strategiýasy onuň garaşýan utduryşlaryny minimallaşdyrýan gönüleriň kesişýän nokady hökmünde kesgitleniler.

3.48-nji mesele

$$A = \begin{pmatrix} 5\,6\,4\,2\,8 \\ 3\,8\,2\,4\,7 \\ 4\,5\,3\,2\,6 \\ 2\,6\,1\,2\,5 \end{pmatrix}$$

töleg matrisasy bolan oýnuň bahasyny we oýunçylaryň optimal strategiýalaryny tapmaly.

Çözülişi

Berlen oýnuň A matrisanyň oýunçylara bähbitli däl strategiýalary taşlanylandan soňra alnan oýun bilen, ýagny:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisaly oýun bilen deňgüýçli boljakdygy görünýär.

Ýokarda girizilen belgilemeleri ulanalyň:

x_i – bu I oýunçy tarapyndan i-nji (i=1, 2, 3, 4) strategiýanyň ulanylmagynyň ähtimallygy;

y_j – bu II oýunçy tarapyndan j-nji (j=1, 2, 3, 4, 5) strategiýanyň ulanylmagynyň ähtimallygy.

Bu ähtimallyklaryň $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ we $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=1$ deňlikleri kanagatlandyrýandygy bellidir. Ýöne ýokarda geçirilen ýönekeýleşdirmeden soň $x_2=x_4=0$ we $y_2=y_5=0$ deňlik alynýar.

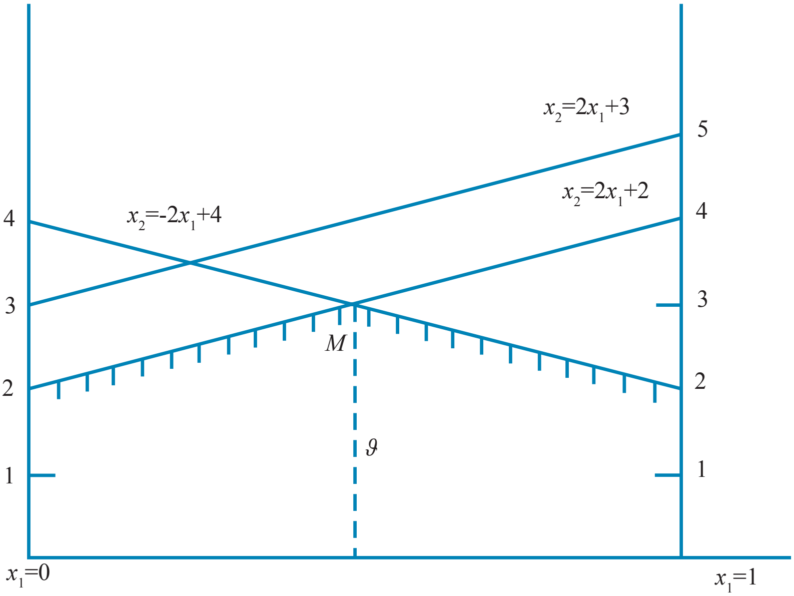
Bu maglumatlary 3.31-nji tablisada ýerleşdireliň:

3.31-nji tablisa

II oýunçynyň arassa strategiýalary	I oýunçynyň garaşylýan utuşlary
1	$(a_{11}-a_{21})\,x_1+a_{21}=(5-3)\,x_1+3=2x_1+3$
3	$(a_{12}-a_{22})\,x_1+a_{22}=(4-2)\,x_1+2=2x_1+2$
4	$(a_{13}-a_{23})\,x_1+a_{23}=(2-4)\,x_1+4=-2x_1+4$

Tablisada berlen oýnuň çözüwini grafiki usulda çözmek üçin X_1 okda x_1=0 we x_1=1 nokatlary ýerleşdireliň. Olaryň üsti bilen X_1 oka perpendikulýar bolan gönüleri geçireliň. x_1=0 we x_1=1 bahalary

$2x_1+3$, $2x_1+2$,$-2x_1+4$ aňlatmalarda ornunda goýup we alnan nokatlary birleşdirip, degişli gönüleri alarys (*3.12-nji surat*).



3.12-nji surat

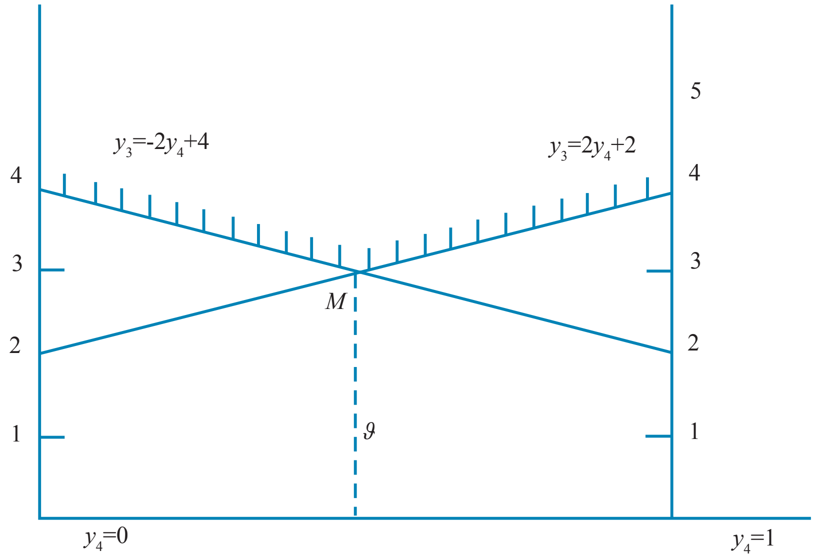
Suratdan I oýunçynyň optimal strategiýasynyň $2x_1+2$ we $-2x_1+4$ aňlatmalaryň deňliginden kesgitlenýändigi görünýär: $2x_1+2=-2x_1+4$, $x_1=1/2$, $x_2=1-x_1=1/2$, $\vartheta=2x_1+2=2\cdot1/2+2=3$. Birinji oýunçynyň optimal çözüwi $\bar{X}_{\text{optim}}=(1/2,\ 1/2,\ 0,\ 0)$, oýnuň bahasy bolsa $\vartheta=3$.

II oýunçynyň optimal strategiýasyny tapalyň. $2x_1+2$ we $-2x_1+4$ aňlatmalar II oýunçynyň 3-nji we 4-nji arassa strategiýalaryna laýyk gelýärler, şonuň üçin $y_1=y_2=y_5=0$ we $y_3=1-y_4$. Aşakdaky 3.32-nji tablisany guralyň.

3.32-nji tablisa

I oýunçynyň arassa strategiýalary	II oýunçynyň garaşylýan utuşlary
1	$(4\text{-}2)\ y_4+2=2y_4+2$
2	$(2\text{-}4)\ y_4+4=-2y_4+4$

Tablisada berlen oýnuň çözüwini grafiki usulda çözmek üçin Y_4 okda $y_4=0$ we $y_4=1$ nokatlary ýerleşdireliň. Olaryň üsti bilen Y_4 oka perpendikulýar bolan gönüleri geçireliň. $y_4=0$ we $y_4=1$ bahalary $2y_4+2$, $-2y_4+4$ aňlatmalarda ornunda goýup we alnan nokatlary birleşdirip, degişli gönüleri alarys.



3.13-nji surat

Gönüleriň kesişýän nokadynda $2y_4+2=-2y_4+4$ deňdir. Bu ýerden $y_4=1/2$, $y_3=1-y_4=1/2$, $\vartheta=2y_4+2=2\cdot1/2+2=3$. II oýunçynyň optimal çözüwi $\overline{Y}_{\text{opt}im}=(0, 0, 1/2, 1/2, 0)$, oýnuň bahasy bolsa $\vartheta=3$ bolar.

3.6.3. Oýunlar nazaryýetiniň meselesiniň çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine getirilişi

Umumy ýagdaýa, ýagny $m\times n$ ölçegli oýna seredeliň. Ol:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

töleg matrisasy bilen berlen bolsun. Goý, töleg matrisasynyň eýer elementi ýok diýeliň. Onda oýnuň çözüwini garyşyk strategiýalardan gözlemeli. Birinji oýunçynyň garyşyk strategiýasy $X=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$– ähtimallyklar toplumy bilen berilýär, ýagny x_i I oýunçynyň A_i

strategiýany saýlap almagynyň ähtimallygy. $Y=(y_1, y_2,\dots,y_n)$ – ikinji oýunçynyň garyşyk strategiýasy. Bu ýerde y_j ikinji oýunçynyň B_j strategiýasyny saýlamagynyň ähtimallygydyr. Diýmek aşakdaky şertler ýerine ýetmeli:

$$0 \le x_i \le 1, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;\ 0 \le y_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Optimal ýagdaýda birinji oýunçynyň aljak utuşy (matematiki garaşmasy) oýnuň bahasyndan az bolmaly däl (ikinji oýunçynyň haýsy strategiýany saýlaýandygyna garamazdan ikinji oýunçynyň aljak utuşy oýnuň bahasyndan uly bolmaly däl). Onda optimal garyşyk strategiýalarda aşakdaky şertler kanagatlandyrylmaly bolar, ýagny
birinji oýunçy üçin:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \vartheta \qquad (j=1, 2,\dots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \qquad 0 \le x_i \le 1,$$

ikinji oýunçy üçin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \le \vartheta \qquad (i=1, 2,\dots,m),$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ 0 \le y_j \le 1.$$

$$x_i^* = \frac{x_i}{\vartheta}, \qquad y_j^* = \frac{y_j}{\vartheta}$$

belgilemeleri girizip, ýokarky meseleleri başga görnüşde ýazýarys:
birinji oýunçy üçin:

$$F=\sum x_i^*=\frac{1}{\vartheta}\to\min, \qquad \begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i^* \ge 1, & j = 1,\cdots,n,\\ x_i^* \ge 0, & i = 1,\cdots,m,\end{cases}$$

ikinji oýunçy üçin:

$$F^*=\sum y_i^*=\frac{1}{\vartheta}\to\max, \qquad \begin{cases}\sum_j a_{ij}y_j^* \le 1, & i = 1,\cdots,m,\\ y_j^* \ge 0, & j = 1,\cdots,n,\end{cases}$$

meseleler alnar. Ýokarky meselelerde $x_1+x_2+\dots+x_m=1$ we $y_1+y_2+\dots+y_n=1$ deňlikleri ϑ sana bölenimizde x_i^* y_j^* näbellilere görä:
Emele gelýän

$$F = \frac{x_1}{\vartheta} + \frac{x_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{x_m}{\vartheta} = x_1^* + x_2^* + \cdots + x_m^* = \frac{1}{\vartheta} \text{ we}$$

$$F^* = \frac{y_1}{\vartheta} + \frac{y_2}{\vartheta} + \cdots + \frac{y_n}{\vartheta} = y_1^* + y_2^* + \cdots + y_n^* = \frac{1}{\vartheta}$$

deňlikleri ulandyk. Birinji oýunçynyň oýnunyň ϑ bahasyny maksimallaşdyrmaly, ikinji oýunçynyň öz oýnunyň ϑ bahasyny minimallaşdyrmaly. Onda, birinji oýunçy üçin $\vartheta \to$max bolmalydygy sebäpli, $F' = \frac{1}{\vartheta} \to$min bolmaly bolýar. Diýmek, $F = x_1^* + x_2^* + \cdots + x_m^* \to \min$ gözlenilmeli. Ikinji oýunçy öz oýnunyň ϑ bahasyny minimallaşdyranda, $\frac{1}{\vartheta}$ ululygy maksimallaşdyrmaga ($\frac{1}{\vartheta} \to$max) ymtylýar. Ýagny, ikinji oýunçy üçin $F^* = y_1^* + y_2^* + + y_n^* \to$max gözlenilmeli.

Bu meseleler çyzykly programmalaşdyrmanyň çatyrymlanan meseleleridir.

Şeýlelik bilen, oýunlar nazaryýetiniň $m \times n$ ölçegli matrisaly oýun meselesini aşakdaky ýol boýunça çözýärler:

1) Berlen töleg matrisasynyň eýer elementiniň bardygyny barlamaly. Eger eýer element bar bolsa, onda çözüw «arassa» strategiýalardadyr.

2) Eger eýer element ýok bolsa, onda mümkin bolsa matrisanyň ölçegini kiçeltmeli (gaýtalanýan we bähbitsiz strategiýalary ýok etmeli).

3) Optimal strategiýalary (garyşyk strategiýalary) tapmaly.

3.6.4. Oýnuň ýönekeýleşdirilişi

Eger $m \times n$ ölçegli oýnuň töleg matrisasynyň eýer elementi ýok bolsa, onda m we n ululyklaryň uly bahalarynda oýny çözmek kyn düşýär. Şonuň üçin oýun meselesi çözülende oýny ýönekeýleşdirmegiň (töleg matrisasynyň ölçegini kiçeltmegiň) dürli usullaryny ulanmak peýdaly bolýar.

Şeýle usullaryň iki sanysyna seredip geçeliň.

Gaýtalanýan strategiýalary ýok etmek.

Eger töleg matrisasynda meňzeş setirler ýa-da sütünler bar bolsa, onda olaryň birinden galanlaryny taşlamaly.

Oýunçylar üçin bähbitsiz strategiyalary ýok etmek.

Eger bir setiriň elementleri beýleki setiriň degişli elementlerinden uly bolmasa (kiçi ýa-da deň bolsa), onda kiçi elementleri bolan setire degişli strategiýa birinji oýunçy üçin bähbitsiz hasaplanýar we bu setir taşlanýar. Şeýle ýol bilen ähli setirler jübüt-jübütden deňeşdirilýär.

12. Sargyt № 2463

Eger bir sütüniň elementleri beýleki sütüniň degişli elementlerinden kiçi bolmasa (uly ýa-da deň bolsa), onda uly elementleri bolan sütüne degişli strategiýa ikinji oýunçy üçin bähbitsiz hasaplanýar we bu sütin taşlanyar. Şeýle ýol bilen ähli sütünler jübüt-jübütden deňeşdirilýär.

3.6.5. Töwekgelçilik şertlerindäki matrisaly oýunlar

Käbir ýagdaýlarda oýunçylaryň çözüw kabul edýän ýagdaýlarynda, oýnuň şertleri barada ýeterlik maglumatlar bolmaýar. Meselem, haýsy hem bolsa bir haryda bolan isleg baradaky maglumatlar ýeterlik däl bolup biler. Şeýle ýagdaýlarda çözüw kabul etmeklik oýunçylara bagly däl-de, obýektiw şertlere bagly bolýar. Şol obýektiw şertlere oýunlar nazaryýetinde «tebigy şertler» ýa-da şol şertleriň degişli oýunçysyna «tebigat» diýip at berýärler, oýna bolsa **«tebigat bilen oýun»** diýilýär.

Goý, A oýunçynyň m sany dürli $A_1, A_2,\ldots,A_m$ strategiýalary, «tebigatyň» (T-niň) n sany dürli $T_1, T_2,\ldots,T_n$ ýagdaýlary bar bolsun. Goý, A oýunçynyň a_{ij} utuşlary belli bolsun. Onda töleg matrisasyny şeýle ýazyp bolar (*3.33-nji tablisa*).

3.33-nji tablisa

$A \backslash T$	T_1	T_2	…	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

A oýunçynyň iň gowy netije berjek strategiýasyny tapmak talap edilýär.

Oýunlar nazaryýetinde **töwekgellik** (ýitgi) diýen düşünje girizilýär.

«Tebigat» T_j ýagdaýda bolanda A oýunçynyň A_i strategiýany saýlanda emele gelen töwekgellikli ýagdaýyň bahalary r_{ij} bilen belgilenýär. r_{ij} ululyk iki utuşyň arasyndaky tapawutdyr. Birinji utuş A

oýunçynyň «tebigatyň» T_j ýagdaýda boljagyny öňünden bilen ýagdaýyndaky utuşydyr. Ikinji utuş galan ýagdaýlardaky utuşdyr.

Eger A oýunçy «tebigatyň» T_j ýagdaýda boljagyny öňünden bilse, onda ol T_j sütündäki maksimal utuşy berýän A_i strategiýany (setiri) saýlar. Ýagny

$$\beta_j = \max a_{ij} \text{ bolar. Onda } r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \geq 0.$$

Töleg matrisasynyň her bir elementi üçin töwekgelligiň ululygyny kesgitläp bolýar. Ýagny töleg matrisasyndan töwekgellikleriň matrisasyna geçip bolýar.

Mysala seredeliň. Goý, T bazaryň emele gelen ýagdaýynyň (konýunkturasynyň) anyk dällik şertlerinde söwda operasiýasy meýilleşdirilýän bolsun. Bazaryň bolup biljek dört sany T_1, T_2, T_3, T_4 diskret ýagdaýlary çaklanylýan bolsun. A oýunçynyň üç sany A_1 A_2, A_3 arassa strategiýalary bar bolsun. Töleg matrisasy aşakdaky görnüşde bolsun (*3.34-nji tablisa*).

3.34-nji tablisa

T / A	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	6	2	9
A_2	3_1	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Bu matrisanyň her bir sütüniniň maksimal elementlerini tapalyň: $\beta_1=a_{31}=4$ – birinji sütün üçin, $\beta_2=a_{22}=8$ – ikinji sütün üçin, $\beta_3=a_{33}=6$ – üçünji sütün üçin, $\beta_4=a_{14}=9$ – dördünji sütün üçin.

Indi j-nji sütüniň ähli elementlerini β_j ululykdan aýralyň we netijäni degişli öýjükde ýazalyň (*3.35-nji tablisa*).

3.35-nji tablisa

T / A	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	2	4	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Bu matrisa töwekgellikleriň matrisasydyr. Bu matrisalardan görnüşi ýaly, eger bazaryň ýagdaýy T_1 bolsa, onda biz 4 birlige deň bolan iň uly utuşy alyp bileris. Diýmek, A_2 strategiýany saýlamak ýeterlik derejede gowudyr. Eger bazar T_4 ýagdaýda bolsa, onda A_2 strategiýany saýlamak has ýaramaz bolardy.

Bu ýerde r_{13}=4-e deň bolan kiçi maksimal töwekgellikli A_1 strategiýany saýlamak has gowy bolmagy mümkin.

3.6.6. «Tebigatyň» ýagdaýyny bahalandyrmagyň kriterileri

Kesgitsizlik şertlerde esaslandyrylan çözüw kabul etmek üçin T «tebigatyň» ýagdaýlaryny bahalandyrmagyň kriterileri barada şertleşmek zerurdyr. «Tebigatyň» ýagdaýlary baradaky maglumatlaryň (doly däl maglumatlaryň) görnüşine baglylykda şeýle kriteriler dürli-dürli bolýarlar we kabul edilýän çözüwler hem dürli-dürlüdir.

Goý, tebigatyň T_1, T_2, T_3, .., T_n ýagdaýlaryna degişli ähtimallyklar belli bolsun. Bu ähtimallyklary Q_1, Q_2, Q_3,…,Q_n görnüşde belgiläliň.

Onda $Q_1+Q_2+Q_3+\cdots+Q_n=1$ deňlik ýerine ýetýär. Çözüwi kabul etmegiň kriterisi hökmünde utuşyň orta bahasyny (matematiki garaşmasyny) alalyň. A oýunçynyň her bir strategiýasy üçin orta utuşy $\bar{a}_i$ bilen belgiläliň. $\bar{a}_i$ ululyk şeýle kesgitlenýär:

$$\bar{a}_i=a_{i1}Q_1+a_{i2}Q_2+\cdots+a_{in}Q_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Q_j.$$

Optimal strategiýa $\bar{a}_i$ orta utuşlary maksimallaşdyrýan strategiýadyr.

$a_i^* = \max\limits_i \bar{a}_i$ – oýnuň berlen şertlerinde A oýunçynyň maksimal orta utuşy.

Mysala seredeliň.

Goý, haryt daşarda, açyk asmanyň aşagynda saklanýan bolsun. Bu şertde howanyň harydyň hiline täsir etjegi düşnüklidir.

Goý, howanyň ýagdaýlary öňünden belli bolmadyk T_1, T_2, T_3, T_4 ýagdaýlar bolsun, olara degişli bolan ähtimallyklar Q_1=0,1; Q_2=0,2; Q_3=0,5; Q_4=0,2 bolsun. Goý, A oýunçyň üç sany A_1, A_2, A_3 hereket ediş strategiýalary bar bolsun. (Oýunçy harytlara dürli bahalary bellemek bilen bu haryda bolan islege täsir edip bilýär). Dürli strategiýalar oýunça (satyja) dürli girdeji berer. Goý, aşakdaky matrisa berlen bolsun (*3.36-njy tablisa*).

3.36-njy tablisa

A \ T	T_1	T_2	T_3	T_4	$\overline{a}_i$
A_1	1	4	5	9	5,2
A_2	3	8	4	3	4,5
A_3	4	6	6	2	5,0
Q_j	0,1	0,2	0,5	0,2	-

Tablisanyň iň soňky sütüninde her bir strategiýa degişli orta utuşlar görkezilen. Bu orta utuşlar aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\overline{a}_1 = 1\cdot0,1+4\cdot0,2+5\cdot0,5+9\cdot0,2 = 0,1+0,8+2,5+1,8 = 5,2;$$
$$\overline{a}_2 = 3\cdot0,1+8\cdot0,2+4\cdot0,5+3\cdot0,2 = 0,3+1,6+2+0,6 = 4,5;$$
$$\overline{a}_3 = 4\cdot0,1+6\cdot0,2+6\cdot0,5+2\cdot0,2 = 0,4+1,2+3+0,4 = 5.$$

Bu tablisanyň iň soňky sütüninden görnüşi ýaly, A_1 strategiýa optimal strategiýadyr:

$$a_i^* = \max_i \bar{a}_i \,(5, 2; 4, 5; 5, 0) = 5,2.$$

Köplenç ýagdaýda çözüw kabul edilende «tebigatyň» bolup biljek ýagdaýlaryna degişli ähtimallyklar barada hiç zat bilmeýäris. Şeýle ýagdaýda näbelli ähtimallyklary gipotezalaryň üsti bilen bahalandyrmak gerek.

Eger «tebigatyň» ähli ýagdaýlary birmeňzeş bolsa, onda bu ýagdaýlar deň ähtimallykly diýen gipotezany öňe sürüp, şeýle ýazmak bolar:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = \frac{1}{n}.$$

Bu gipoteza «Laplasyň ýeterlik däl esasly prinsipi» diýlip atlandyrylýar.

Çözüw kabul etmegiň kriterisini «tebigatyň» ýagdaýlaryna degişli ähtimallyklary ulanman hem düzüp bolýar. Onuň üçin «maksimin» we «minimaks» diýlen düşunjelere esaslanmaly.

3.6.7. Waldanyň maksiminli kriterisi

Bu kriteri boýunça oýunçy minimal utuşy maksimallaşdyrýan strategiýany saýlamaly. Bu strategiýa oýunça iň ýaramaz şertlerde töleg matrisasynyň maksimininden az bolmadyk utuşy kepillendirýär:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}$$

Mysala seredeliň. Goý, aşakdaky töleg matrisasy berlen bolsun (*3.37-nji tablisa*).

3.37-nji tablisa

$A \backslash T$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\bar{a}_i$
A_1	1	4	5	9	1
A_2	3	8	4	3	3
A_3	4	6	6	2	2

$$a_i = \min_i a_{ij};$$

$$W = \max_i a_i = \max(1;3;2) = 3.$$

Waldanyň kriterisine görä A oýunçy A_2 strategiýany saýlamaly. Oýunçy iň ýaramaz ýagdaýda üçden az bolmadyk utuşy alýar.

3.6.8. Sewijiň minimaksly kriterisi

Bu kriteri boýunça kabul edilýän çözüw (A_i strategiýa) iň ýaramaz ýagdaýda r_{ij} töwekgelligi minimallaşdyrýar:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Bu kriteri boýunça çözüw kabul edilende islendik şertlerde uly töwekgellikden daşda durulýar.

Mysala seredeliň:

Goý, bize aşakdaky töwekgellikler matrisasy berlen bolsun (*3.38-nji tablisa*).

3.38-nji tablisa

$A \backslash T$	T_1	T_2	T_3	T_4	r_i
A_1	3	4	1	0	4
A_2	2	0	2	6	6
A_3	0	2	0	7	7

Tablisanyň soňky sütüninde $r_i = \max_j r_{ij}$ ululyklar kesgitlenip goýlan. (Her bir setirde iň uly töwekgellik kesgitlenýär).

Sewijiň kriterisi boýunça oýunçy A_1 strategiýany saýlamaly. Çünki A_1 strategiýa oýunça minimal töwekgelligi üpjün edýär:

$$S = \min_i r_{ij} = 4.$$

Waldanyň we Sewijiň kriterilerine **aşa göwnüçökgünlik** (pessimizm) **kriterileri** diýilýär.

3.6.9. Gurwisiň kriterisi. Göwnüçökgünlik – göwnüýetijilik (pessimizm – optimizm) kriterisi

Bu kriteri çözüw kabul edilende aşa göwnüçökgünlikden we aşa göwnüýetijilikden daşda durmaklygy maslahat berilýär.

$$H = \max_i\left[x\min_j a_{ij} + (1-x)\max_j a_{ij}\right].$$

$0 \leq x \leq 1$ $x=1$ bolanda Waldanyň kriterisi alnar.

$$H = \max_i\left[1\min_j a_{ij} + (1-1)\max_j a_{ij}\right] = \max_i \min_j a_{ij} = W$$

$x = 0$ bolanda aşa göwniýetijilik kriterisi alnar.

$$H = \max_i\left[0\min_j a_{ij} + (1-0)\max_j a_{ij}\right] = \max_i \max_j a_{ij}$$

Bu ýerde iň gowy ýagdaýda maksimal utuş alnar.

3.6.10. Köpçülikleýin oýunlar barada

Umumy ýagdaýda oýna köp oýunçy gatnaşyp bilýär. Bu oýunlar «birleşme döretmek usuly» bilen ýönekeýleşdirilýär. Oýna gatnaşýan oýunçylar iki sany birleşme dörär ýaly wagtlaýyn birleşýärler. Mysal üçin, eger oýna $n = 5$ oýunçy gatnaşýan bolsa, onda olar birinde 2 oýunçy, beýlekisinde 3 oýunçy bolar ýaly wagtlaýyn 2 topary döredýärler. Her birleşmä girýän oýunçylaryň islegleri wagtlaýynça birleşýärler. Şeýlelikde, bäş oýunçynyň oýny 2 oýunçynyň oýnuna getirilýär. Utuş kesgitlenenden soň her bir birleşme dargaýar we birleşmäniň içinde täze oýun başlanýar.

3.6.11. Oýunlar nazaryýetiniň meselesine getirilýän käbir mysallar

Ekişi meýilleşdirmek. Goý, bugdaýyň A_1, A_2, A_3 görnüşleri ekilýän bolsun. Goý, tebigat B_1, B_2, B_3 ýagdaýlarda bolup bilýän bolsun:

B_1– gurak howa; B_2 – adaty howa; B_3 – ýagyşly howa. Hasyllylyk diňe howa ýagdaýyna bagly diýeliň.

Ekinleriň görnüşleriniň dürli howa şertlerine görä hasyllylygy baradaky maglumatlar we ekinleriň 1 sentneriniň bahasy 3.39-njy tablisada berlen.

3.39-njy tablisa

Başlangyç şertler	**Ekiniň sentnerdäki hasyllylygy**		
	A_1	A_2	A_3
B_1 – gurak howa	20	7, 5	0
B_2 – adaty howa	5	12, 5	7, 5
B_3 – ýagyşly howa	15	5	10
Bir sentneriň manatdaky bahasy	2	4	8

Ekişiň maksimal girdeji berjek meýilnamasyny düzmeli.

1. Meseläniň çözülişi. Eger bize howa şertleri barada çyn statistiki maglumatlar belli bolsa, onda optimallyk kriterisi hökmünde alynjak girdejiniň matematiki garaşmasyny alyp bileris. Ekişiň optimal meýilnamasy girdejiniň matematiki garaşmasyny maksimuma ýetirmeli. Eger şeýle maglumatlar ýok bolsa, onda meýilnamany has erbet howa şertlerini göz öňünde tutup düzmeli. (Sebäbi howa şertleri ekine maksimal zyýan ýetirip biler).

Ekişiň görnüşi 1-nji oýunçy, howa şertleri 2-nji oýunçy bolup biler.

1-nji oýunçynyň töleg matrisasy (utuş matrisasy) şeýle bolar:

$$H = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}.$$

Matrisanyň elementleri manatda aňladylan girdejileri aňladýar.

Oýnuň bahasynyň aşaky we ýokarky çäklerini tapmaly:

$$\alpha = \max(10;20;0) = 20,$$

$$\beta = \min(40;60;80) = 40;\ 20 \leq V \leq 40.$$

$x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ – oýunçylaryň garyşyk strategiýalary. Oýny çözüp, aşakdaky optimal strategiýalary alýarys:

$$x = \left(\frac{22}{45}, \frac{18}{45}, \frac{5}{45}\right); \qquad y = \left(\frac{25}{45}, \frac{9}{45}, \frac{11}{45}\right).$$

V=31,5 – maksimal ortaça girdeji.

Optimal ýagdaýda $\frac{22}{45}$ ähtimallyk bilen A_1 ekin, $\frac{18}{45}$ ähtimallyk bilen A_2 ekin, $\frac{5}{45}$ ähtimallyk bilen A_3 ekin ekilýär.

Eger A_1, A_2, A_3 ekinleri 22:18:5 gatnaşykda eksek, onda islendik howa şertlerinde azyndan gektardan 31,5 manat girdeji alarys.

2. Gapma-garşylykly bäsleşik. Goý, A firma bazar şertlerinde käbir möwsümleýin harydy öndürýän bolsun. Bu haryda n wagt birliginiň dowamynda isleg bar bolsun (meselem, 45 gün, 3 aý, 1 ýyl döwürlerde). Bu haryt i wagt pursatynda bazara gelýär (i = 1, 2,....,n).

Başga bir B firma öz hususy girdejisi barada alada etmän, A firmanyň öndürýän harydyny öndürýär. Bu haryt j wagt pursatynda bazara gelýär (j = 1, 2, ..., n).

Netijede, bäsleşik ýüze çykýar. B firma D konserne daýanýar. B firmanyň maksady A firmany çökermek, soňra D konserniň maýasyna daýanyp, öňki çykdajylaryny dolmak. Bu maksada ýetmek üçin B firma öz harydyny pes bahadan satmaly (sada usul). Ýöne bu usuly gadagan edýän kanun ýa-da ylalaşyk hem bolup biler. Şeýle ýagdaýda B firmanyň ýeke-täk edip biljek zady harydyň bazara geliş wagt pursadyny saýlamakdyr.

A firmany çökermek üçin B firma A firmanyň girdejisini minimallaşdyrmaly.

Goý, bäsleşige girýän harytlaryň hili olaryň bazara gelen wagt pursadyna bagly diýeliň. Ýagny haryt näçe giç bazara getirilse şonçada onuň hili ýokary we diňe ýokary hilli haryt bazarda geçýär.

Onda, eger A firma harydyny i wagt pursatynda, B firma harydyny $j > i$ pursatda bazara getirse onda A firma $j - i$ wagt birliginde garşydaşsyz $c(j - i)$ girdeji alar. Bu ýerde c – wagt birliginde haryt satuwyndan alynýan girdeji.

j wagt pursatynda B firmanyň harydy bazara çykýar (ýokary hilli haryt). j – pursatdan soň A firmanyň harydy bazarda geçmeýär, firma girdeji almaýar. Eger $i>j$ bolsa, onda A firma ýokary hilli haryt çykaryp $[i; n]$ wagt kesiminde girdeji alar. Onuň girdejisi $c(n - i + 1)$ bolar.

Eger $i=j$ bolsa, onda harytlaryň ikisi hem deň islege eýe bolar we A firma:

$$\frac{c(n-i+1)}{2} \text{ girdeji alar.}$$

A firma *i*-nji wagt birligini saýlamak bilen öz girdejisini maksimallaşdyrmaga ymtylýar. *B* firma *j*-nji wagt birligini saýlamak bilen *A* firmanyň girdejisini minimallaşdyrýar.

Bu ýerde *A* firma birinji oýunçy, *B* firma ikinji oýunçy bolýar.

1-nji oýunçynyň strategiýasy x=(1, 2, …., n), 2-nji oýunçynyň strategiýasy

$$y=(1, 2, \ldots, n) \text{ bolar:}$$

Töleg (utuş) funksiýasy şeýle görnüşde bolar.

$$H(i,j) = \begin{cases} c(j-i), & i < j \\ \frac{1}{2}c(ni+1), & i = j \\ c(ni+1), & i > j. \end{cases}$$

Hususy hala seredeliň. Goý, $n = 4$ bolsun. Onda $x = (1, 2, 3, 4)$, $y = (1, 2, 3, 4)$ bolar. Töleg funksiýasynyň bahalary aşakdaky matrisany düzýärler:

$$H = \begin{pmatrix} 2c & c & 2c & 3c \\ 3c & 3c/2 & c & 2c \\ 2c & 2c & c & c \\ c & c & c & c/2 \end{pmatrix}$$

Bu oýny çözüp, optimal strategiýalary tapýarys:

$$x^* = \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0\right), \quad x^* = \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), \quad V = \frac{3c}{2}.$$

Diýmek *A* firma deň ähtimallyk bilen birinji we üçünji wagt birliginde, *B* firma deň ähtimallyk bilen ikinji we üçünji wagt birliginde bazara haryt getirmeli.

Bu ýagdaýda *A* firmanyň girdejisiniň matematiki garaşmasy $\frac{3c}{2}$ bolar.

Soraglar we ýumuşar

1. Oýun diýlip nämä aýdylýar?
2. Töleg matrisasynyň elementleriniň manysyny düşündiriň.
3. Oýnuň bahasy we onuň aşaky we ýokarky çäkleri nähili tapylýar?
4. «Arassa», garyşyk we optimal strategiýalar diýlip nämä aýdylýar?
5. Töleg matrisasynyň ölçegini nähili kiçeltmeli?
6. «Tebigat bilen oýun» nähili çözülýär?
7. Matrisaly oýunlar meselesiniň çyzykly programmalaşdyrma meselesine getirilişini düşündiriň.

3.49-njy mesele. Töleg matrisasy berlen.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oýnuň bahasynyň aşaky we ýokarky çäklerini tapmaly.
Jogaby. $\alpha = 2, \beta=5$.
3.50-nji mesele. Aşakdaky (2×2) tertipli oýny çözmeli:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.51-nji mesele. Töleg matrisasynyň ölçegini kiçeltmeli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.52-nji mesele. Aşakdaky oýun üçin çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesini düzmeli:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.53-nji mesele. Aşakdaky töleg matrisasy üçin töwekgellikler matrisasyny düzmeli:

$T \backslash A$	A_1	A_2	A_3
T_1	3	5	2
T_2	5	1	4
T_3	4	3	5

IV bölüm

ÇYZYKLY DÄL PROGRAMMALAŞDYRMANYŇ MESELELERI

§ 4.1. Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleri

4.1.1. Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleriniň ykdysady we geometriki manysy

Umumy ýagdaýda çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesi käbir $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ funksiýanyň maksimum (minimum) bahasyny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) \le b_i, & (i=1,2,\cdots,k), \\ g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = b_i, & (i=k+1,k+2,\cdots,m) \end{cases} \quad (1)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmakdan ybaratdyr. Bu ýerde f we g_i käbir öz argumentlerine görä çyzykly däl, berlen funksiýalar, b_i – berlen sanlar.

Eger f we g_i funksiýalar çyzykly bolsalar, onda mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine öwrülýär.

(1) çäklendirmeler ulgamy zerur halatynda $x_1, x_2,\dots,x_n$ üýtgeýän ululyklaryň otrisatel dällik şertlerini hem özünde saklaýar. Üýtgeýän ululyklaryň otrisatel dällik şertleri ýörite çäklendirmeler ulgamyndan aýry hem berlip bilner.

E_n ýewklid giňişliginde (1) çäklendirmeler ulgamy **meseläniň ýolbererli çözüwleriniň oblastyny** kesgitleýär. Çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesiniňkiden tapawutlylykda, çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesiniň ýolbererli çözüwleriniň oblastynyň güberçek köplük bolmazlygy mümkin.

Eger ýolbererli çözüwleriniň oblasty kesgitlenen bolsa, onda çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesini çözmek bu oblastyň iň ýokarky (ýa-da iň aşaky) $f(x_1, x_2,\dots,x_n)=h$ derejeler giperüstüniň geçýän nokadyny tapmaklyga getirilýär. Beýle nokat ýolbererli çözüwleriniň oblastynyň içinde ýa-da çäginde ýerleşmegi mümkin.

Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini onuň geometriki beýanyny ulanmak bilen tapmak prosesi aşaky tapgyrlary özünde saklaýar:

1. Meseläniň (1) çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýan ýolbererli çözüwleriniň oblasty kesgitlenýär (eger ol boş köplük bolsa, onda meseläniň çözüwi ýok).

2. $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)=h$ derejeler giperüstleri gurulýar.

3. Giperüstleriň iň ýokarky (ýa-da iň aşaky) derejelisi kesgitlenýär ýa-da $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)=h$ funksiýanyň ýolbererli çözüwler oblastynda ýokardan (aşakdan) çäklenmedikdigi görkezilýär.

4. Ýolbererli çözüwler oblastynyň $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)=h$ funksiýanyň iň ýokarky (ýa-da iň aşaky) derejeler giperüstüniň geçýän nokady tapylýar we bu nokatda funksiýanyň bahasy hasaplanylýar.

4.1-nji mesele.

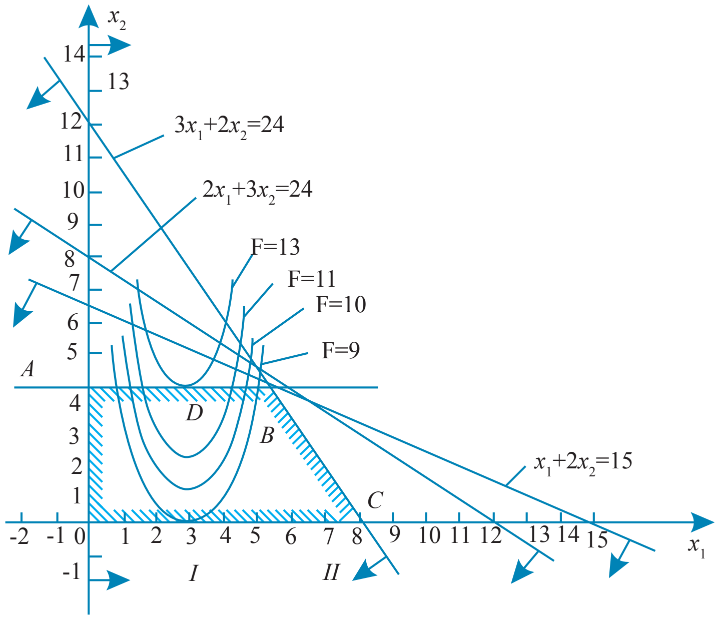
$$F=x_2-x_1^2+6x_1 \tag{2}$$

funksiýanyň maksimum bahasyny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24, \\ x_1+2x_2\le 15, \\ 3x_1+2x_2\le 24, \\ x_2\le 4, \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases} \tag{3}$$

deňsizlikler ulgamyny kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

Çözülişi. Maksat funksiýasynyň çyzykly däl bolandygy üçin berlen mesele çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesidir. Meseläniň ýolbererli çözüwleriniň oblasty *OABC* köpburçlukdyr (*4.1-nji surat*). Şol sebäpli berlen meseläniň optimal çözüwini tapmak üçin *OABC* köpburçlugyň $F=x_2-x_1^2+6x_1$ funksiýanyň maksimum bahasyny kabul edýän nokadyny tapmalydyr. Onuň üçin funksiýanyň $F=x_2-x_1^2+$ $+6x_1=h$ (bu ýerde h käbir hemişelik parametr) deňleme bilen kesgitlenilýän derejeler çyzyklaryny guralyň we bu çyzyklaryň h parametriň dürli bahalarynda özüni alyp barşyny barlalyň. h parametriň her bir bahasynda $x_2-x_1^2+6x_1=h$ deňleme bir parabolany kesgitleýär we ol parabola h-yň bahasynyň artmagy bilen Ox_1 koordinatalar okundan daşlaşýar. Diýmek, F funksiýa özüniň maksimum bahasyny bu parabolalaryň biriniň *OABC* köpburçlugyň bir tarapy bilen galtaşýan nokadynda kabul edýär. Bu ýagdaýda şeýle nokat *D* nokatdyr (*4.1-nji surat*).



4.1-nji surat

D nokatda $x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ derejeler çyzygy *OABC* köpburçlugyň *AB* tarapyna galtaşýar. *D* nokadyň koordinatalaryny

$$\begin{cases} x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4 \end{cases} \tag{4}$$

deňlemeler ulgamyny çözüp tapyp bolar.

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp, $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$ bahalary alarys. Şeýlelikde, $F_{max}=13$ baha $X^*=(3;4)$ optimal çözüwde kabul edilýär.

Seredilen meseläniň seljermesi onuň maksat funksiýasynyň maksimal bahasynyň ýolbererli çözüwler oblastynyň (*OABC* köpburçlugyň) depelerinde däldigini görkezýär. Şol sebäpli çyzykly programmalaşdyrmanyň çözüwi tapylanda onuň ýolbererli çözüwler köpburçlugyň depeleriniň içinden saýlanylyş usuly bu meselelerde ulanarlyk däldir.

4.2-nji mesele.

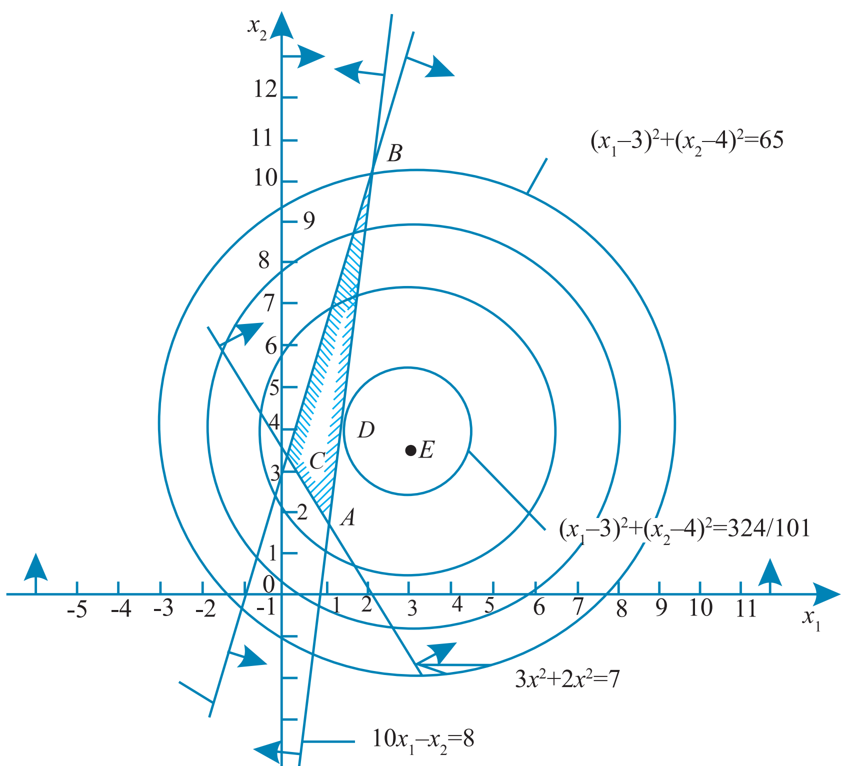
$$F=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \tag{5}$$

funksiýanyň maksimum we minimum bahalaryny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (6)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

Çözülişi. Berlen meseläniň ýolbererli çözüwleriniň oblasty ABC üçburçlukdyr (*4.2-nji surat*). Maksat funksiýasynyň bahasy käbir h hemişelik parametre deň diýip hasap edip, $F=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h$ deňleme bilen kesgitlenilýän derejeler çyzyklaryny alarys. Belli bolşy ýaly, bu çyzyklar merkezi $E(3;4)$ nokatda ýerleşen, radiusy $\sqrt{h}$ deň bolan töwereklerdir. h-yň bahasynyň artmagy (kemelmegi) bilen F funksiýanyň bahasy artýar (kemelýär).



4.2-nji surat

$E(3;4)$ nokatda merkezi bolan dürli radiusly töwerekleri geçirip, F funksiýanyň maksimal bahasynyň bu töwerekleriň biriniň ýolberli çözüwleriniň oblastynyň çägi bilen galtaşýan D nokadynda ýerleşýändigini göreris. Bu nokadyň koordinatalaryny kesgitlemek üçin şol töwerege galtaşýan göni çyzygyň burç kooeffisiýentiniň $10x_1$-x_2=8 deňlemeli göni çyzygyň burç koeffisiýenti bilen deňdiginden peýdalanalyň. Göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesinden (x_2=10x_1-8) onuň burç koeffisiýentiniň 10-a deňdigini görýäris. Töwerege galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentini tapmak üçin onuň deňlemesiniň $((x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h)$ kömegi bilen x_2-niň x_1-e görä önümini tapalyň. Bu deňlemäni x_1-e görä differensirläp alarys:

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)x_2'=0. \tag{7}$$

Bu ýerden

$$x_2'=-(x_1-3)/(x_2-4). \tag{8}$$

Soňky deňlemäni 10-a deňläp, alnan deňlemäni töwerege galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi bilen bilelikde çözeliň, ýagny

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \tag{9}$$

deňlemeler ulgamyny çözeliň. Netijede, $x_1^* = \dfrac{123}{101}$; $x_2^* = \dfrac{422}{101}$ çözüwi we bu nokatdaky $F_{\min} = \left(\dfrac{123}{101} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{422}{101} - 4\right)^2 = \dfrac{324}{101}$ bahany alarys.

4.2-nji suratdan F funksiýanyň öz maksimum bahasyny $B(2;12)$ nokatda kabul edýändigi görünýär. Onuň koordinatalaryny bu nokatdan geçýän göni çyzyklaryň deňlemelerini bilelikde çözüp tapyp bolar. Şeýlelik bilen, F_{max}=65.

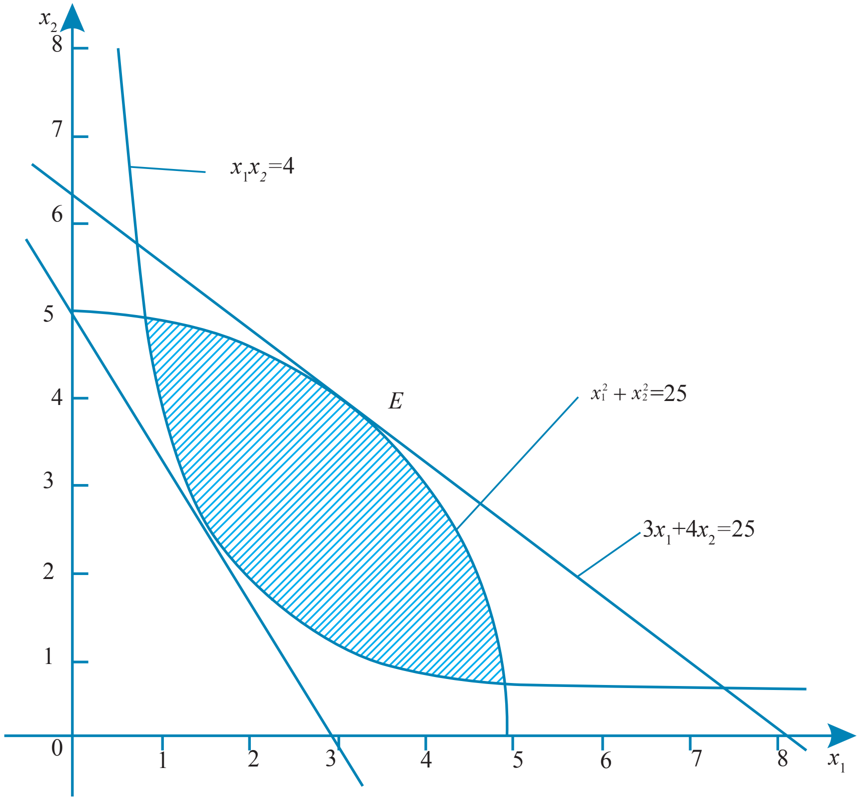
4.3-nji mesele. $F=3x_1+4x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 \cdot x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

Çözülişi. Berlen meseläniň ýolbererli çözüwleriniň oblasty 4.3-nji suratda berlendir. Suratdan görnüşi ýaly, maksat funksiýasy öz maksimum bahasyny E nokatda, ýagny $3x_1+4x_2=h$ (bu ýerde h – käbir san) derejeler göni çyzyklarynyň biriniň ýolbererli çözüwleriniň oblastynyň çägi bolan $x_1^2+x_2^2=25$ töwerek bilen galtaşýan nokadynda kabul edýär. E nokadyň koordinatalaryny kesgitlemek üçin $3x_1+4x_2=h$ göni çyzygyň burç koeffisiýenti bilen töwerege galtaşýan göni çyzygyň burç koeffisiýentiniň deňliginden peýdalanalyň. $x_1^2+x_2^2=25$ deňlemäni x_1-e görä differensirläp alarys:

$$2x_1 + 2x_2x_2' = 0 \quad \text{ýa-da} \quad x_2' = -\frac{x_1}{x_2}. \tag{11}$$



4.3-nji surat

13. Sargyt № 2463

Alnan aňlatmany göni çyzygyň burç koeffisiýentine (k=– 3/4) deňläp, E nokadyň koordinatalaryny kesgitlemäge zerur bolan bir deňlemäni alarys. Ikinji deňleme hökmünde töweregiň deňlemesini alyp, aşaky deňlemeler ulgamyna geleris:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25. \end{cases}$$

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp, $x_1^* = 4; x_2^* = 3$ bolýandygyny, diýmek, $F_{max} = 3^2+4^2=25$ deňdigini göreris.

4.5-4.10-njy meseleleri çözmeli.

4.4-nji mesele. $F = x_1\, x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny onuň argumentleriniň:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (12)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

4.5-nji mesele. $F = 9(x_1\text{-}5)^2+4(x_2\text{-}6)^2$ funksiýanyň minimum bahasyny onuň argumentleriniň:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (13)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

4.6-njy mesele. $F = 4x_1+3x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (14)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

4.7-nji mesele. $F = x_1\, x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny onuň argumentleriniň

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (15)$$

çäklendirmeleri kanagatlandyrýan şertlerinde tapmaly.

4.8-nji mesele. Pudagyň üç sany kärhanasyny ösdürmäge meýilnama ýylynda 220 müň manat goýberildi. Kärhanalaryň arasynda bu serişdäniň paýlanylmagy pudaga ýylyň ahyrynda kesgitli girdeji berýär. Bu serişdäniň kärhanalaryň arasynda dürli görnüşde paýlanylmagy netijesinde alynjak girdejiler 4.1-nji tablisada berlen. Bu maglumatlary göz öňünde tutup, kärhanalaryň arasynda pul serişdesini paýlamagyň pudak üçin iň köp peýda berjek görnüşini saýlap almaly.

4.1-nji tablisa

Kärhanalar	**Berlen maýa goýum (müň manat)**	**Girdeji (müň manat)**	**Berlen maýa goýum (müň manat)**	**Girdeji (müň manat)**	**Berlen maýa goýum (müň manat)**	**Girdeji (müň manat)**
I	10-dan 30-a çenli	14, 3	30-dan 60-a çenli	16, 2	60 we ondan köp	17, 2
II	10-dan 40-a çenli	13, 5	40-dan 70-e çenli	17, 8	70 we ondan köp	18, 3
III	10-dan 50-ä çenli	18, 4	50-den 60-a çenli	19, 3	60 we ondan köp	19, 4

4.9-njy mesele. Pudagyň n sany kärhanalarynyň arasynda birmeňzeş önümi öndürmegi guramaly. j-nji kärhanada x_i ($i = 1, 2,\ldots,n$) sany önümi öndürmegiň çykdajylary öndürilýän önümiň göwrümine bagly we $f_j(x_i)$ funksiýalar bilen kesgitlenilýär. Önümiň jemi b-den az bolmadyk sanysyny öndürmelidigi belli bolsa, pudakda önüm öndürmegiň iň az çykdajy talap etjek önümçiligini guramaly.

4.10-njy mesele. m sany ugradyjy ambarlarda birmeňzeş önümiň, degişlilikde $a_1, a_2,\ldots,a_m$ mukdarlary jemlenen. Bu önümleri her birine degişlilikde $b_1, b_2,\ldots,b_m$ mukdarlarda önüm gerek bolan bellenilen n sany nokatlara ugratmak gerek. Önümleriň bir birligini daşamak bilen bagly çykdajylar daşalýan önümleriň göwrümine bagly we $f_{ij}(x_{ij})$ (bu ýerde x_{ij} (i=1, 2,…,m), (j=1, 2,…,n) i-nji ugradyjy ambardan j-nji bellenilen nokatlara daşaljak önümiň göwrümi) funksiýalar bilen kesgitlenilýär. Bellenilen nokatlara zerur bolan ähli önümler daşalanda önüm daşamagyň jemi çykdajylary iň az bolar ýaly meýilnamany gurmaly.

4.1.2.Lagranžyň köpeldijileri usuly

Goý, çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesinde çäklendirmeler ulgamy diňe deňlemelerden ybarat bolup, üýtgeýän ululyklaryň otrisatel dällik şertleri ýok bolsun. Şeýle hem, $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ we $g_i\ (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ funksiýalar öz hususy önümleri bilen bilelikde käbir oblastda kesgitlenen bolsunlar. Şeýlelik bilen, aşakdaky meselä seredeliň:

$$f(x_1, x_2,\ldots,x_n)\rightarrow\max(\min); \tag{16}$$

$$g_i\ (x_1, x_2,\ldots,x_n) = b_i(i =1,2,...,m). \tag{17}$$

Matematiki seljermede (16)-(17) meselä **şertli ekstremumyň meselesi** diýilýär.

(16)-(17) meseläniň çözüwini tapmak üçin **Lagranžyň köpeldijileri** diýilýän $(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$ kömekçi parametrler we **Lagranžyň funksiýasy** diýilýän aşakdaky funksiýa girizilýär:

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m) &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \\ &+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i - g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Goý, bu funksiýanyň $x_1, x_2,\ldots,x_n, \lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m$ argumentleri boýunça hususy bölek önümleri $\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\ (j = 1,2,\cdots,n), \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\ (i = 1,2,\cdots,m)\right)$ bar bolsun. Şeýlelikde, $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ funksiýa üçin şertli ekstremumy tapmak meselesi $n+m$ argumentli $L(x_1, x_2,\ldots,x_n, \lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ funksiýa üçin şertsiz (adaty) ekstremumy tapmak meselesine getirilýär. Bu funksiýa üçin ekstremumyň bolmagynyň zerur şerti aşakdaky teoremanyň üsti bilen berilýär:

1-nji teorema. Goý, $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ we $g_i\ (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ funksiýalar (17) deňlemeler ulgamynyň çözüwi bolan $M_0\,(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ nokadyň käbir golaýtöwereginde differensirlenýän bolsunlar. Eger $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ funksiýa $M_0\,(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ nokatda şertli ekstremuma eýe bolsa we grad $g_i\,(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0) \neq 0$ bolsa, onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{19}$$

şertler ýerine ýetýändir. Bu şerti kanagatlandyrýan $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0)$ nokada **Lagranžyň stasionar nokady** diýilýär.

Teoremanyň subudy matematiki seljerme boýunça edebiýatlarda bar [8, 12]. Şol sebäpli ony subutsyz kabul edeliň.

$n+m$ sany deňlemeleriň (19) ulgamynyň çözüwler köplügi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiýanyň şertli ekstremumyny, ýagny (16)-(17) meseläniň çözüwini özünde saklaýar. Şol sebäpli (19) deňlemeler ulgamyny çözüp, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiýanyň şertli ekstremumynyň boljak nokatlaryny tapýarys. Şol nokatlaryň haýsysynyň $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiýanyň şertli ekstremumydygy babytdaky seljerme köp argumentli funksiýanyň ekstremumynyň barlygynyň ýeterlik şertleriniň kömegi bilen alnyp barylýar. Meselem, iki argumentli $f(x_1, x_2)$ funksiýanyň $M_0(x_1^0, x_2^0)$ nokatda şertli ekstremumynyň barlygynyň ýeterlik şerti aşakdaky subutsyz kabul ediljek teoremada berilýär.

2-nji teorema. (Şertli ekstremumynyň barlygynyň ýeterlik şerti). Goý, $f(x_1, x_2)$ we $g(x_1, x_2)$ funksiýalar Lagranžyň (x_1^0, x_2^0, λ) stasionar nokadynyň käbir golaý töwereginde ikinji tertipli üznüksiz hususy bölek önümlere eýe bolsunlar. Onda, eger bu nokatda Lagranžyň funksiýasynyň ikinji tertipli:

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2$$

differensialy noldan kiçi bolsa, $f(x_1, x_2)$ maksat funksiýasy bu nokatda şertli maksimuma, eger $d^2 L>0$ bolsa, şertli minimuma eýedir. $d^2L=0$ bolanda şertli ekstremumy tapmak meselesi açyk galýar.

Şeýlelikde, (16)–(17) meseläniň ekstremal çözüwini Lagranžyň köpeldijileri usuly boýunça tapmak aşakdaky tapgyrlardan ybaratdyr:

1. Lagranžyň funksiýasy düzülýär.

2. Lagranžyň funksiýasynyň $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ argumentleri boýunça hususy bölek önümleri tapylýar we olar nola deňlenilip (19) deňlemeler ulgamy düzülýär.

3. (19) deňlemeler ulgamyny çözüp, maksat funksiýasynyň ekstremumy kabul etjek nokatlary tapylýar.

4. Maksat funksiýasynyň $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stasionar (ekstremumy kabul etjek) nokatlarynyň arasyndan ekstremum nokatlary tapylýar we bu nokatlardaky $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiýanyň bahalary hasaplanylýar.

4.11-nji mesele. Önüm öndürmegiň meýilnamasyna görä, kärhana 180 sany önüm taýýarlamaly. Bu önümler iki dürli tehnologiýa boýunça taýýarlanylyp bilinýär. x_1 sany önüm I tehnologiki usul boýunça taýýarlanylanda çykdajylar $4x_1+x_1^2$ manada, x_2 sany önüm II tehnologiki usul boýunça taýýarlanylanda çykdajylar $8x_2+x_2^2$ manada deň. Önümçilikdäki umumy çykdajy iň az bolar ýaly her tehnologiki usul boýunça näçe önüm öndürmelidigini kesgitlemeli.

Çözülişi. Meseläniň matematiki modeli

$$f = 4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2$$

funksiýanyň minimum bahasyny

$$x_1+x_2=180,$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertleriň ýerine ýetýän oblastynda kesgitlemekden ybaratdyr.

Meseläni Lagranžyň köpeldijileri usulyny ulanyp çözeliň. Onuň üçin ilki bilen $f = 4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2$ funksiýanyň minimum bahasyny $x_1+x_2=180$ şertiň ýerine ýetýän halatynda otrisatel dällik şertini hasaba almazdan tapalyň. Onuň üçin Lagranžyň funksiýasyny guralyň:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2) \qquad (20)$$

we bu funksiýanyň x_1, x_2, λ ululyklar boýunça hususy önümlerini tapyp, nola deňläliň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Birinji we ikinji deňlemelerde λ-ny deňlikleriň sag tarapyna geçirip, (ýagny ony tapyp) alnan aňlatmalary deňläp alarys:

$$4+2x_1=8+2x_2 \text{ ýa-da } x_1-x_2=2.$$

Soňky alnan deňlemäni deňlemeler ulgamynyň üçünji $x_1+x_2=180$ deňlemesi bilen çözüp, $x_1^*=91$ we $x_2^*=89$ bahalary alarys. Bu nokat maksat funksiýasynyň minimumy kabul etjek nokadydyr. Onuň dogrudan hem minimum nokadydygyna göz ýetirmek üçin $L(x_1, x_2, \lambda)$ funksiýanyň bu nokatdaky ikinji hususy önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2. \tag{22}$$

Alnan bahalary Lagranžyň funksiýasynyň ikinji tertipli differensialynyň (d^2L) aňlatmasynda goýup alarys:

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2 = 2dx_1^2 + 2dx_2^2 > 0. \tag{23}$$

Diýmek, tapylan nokat (çözüw) şertli minimumyň nokadydyr. Bu bolsa, eger kärhana I tehnologiki usul boýunça 91 önüm, II tehnologiki usul boýunça bolsa 89 önüm öndürse önümçilikdäki umumy çykdajy iň az bolar we ol

$f_{\min}=4\cdot91+91^2+8\cdot89+89^2=17278$ manada deň bolar.

Ýokarda seredilen meseläni grafiki usulda hem çözüp bolýandygyny belläliň. Şeýle hem, bu meseläni funksiýanyň şertsiz ekstremumy barada meselä getirmek bilen hem çözüp bolar. Onuň üçin $x_1+x_2=180$ deňlemeden x_2-ni tapyp ($x_2=180-x_1$), alnan aňlatmany f funksiýada x_2-niň ornunda goýup, x_1-e görä (bir argumentli) funksiýa alarys:

$$f(x_1)=4x_1+x_1^2+8(180-x_1)+(180-x_1)^2.$$

$f(x_1)$ funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapalyň:

$$\frac{df}{dx_1}=4+2x_1-8-2(180-x_1)=0, \text{ ýa-da } 4x_1-364=0.$$

Bu ýerden, $x_1^*=91$. Bu nokadyň $f(x_1)$ funksiýanyň minimum nokadydygyny $\frac{d^2 f}{dx_2^1}=4>0$ bolýandygyndan alarys. Diýmek, $f_{\min}=17278$ manat, şeýle hem, $x_1^*=91$ bolanda $x_2^*=180-91=89$. Şol sebäpli (91;89) meseläniň optimal çözüwidir.

4.12-4.18-nji mysallarda funksiýanyň şertli ekstremumlaryny tapmaly.

4.12-nji mysal. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$ funksiýanyň şertli ekstremumlaryny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

4.13-nji mysal. $f = x_1\, x_2\, x_3$ funksiýanyň şertli ekstremumlaryny

$$\begin{cases} 2x_1x_2 + x_2x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

şertlerde tapmaly.

4.14-nji mysal. $f = x_1x_2 + x_2x_3$ funksiýanyň şertli ekstremumlaryny:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

şertlerde tapmaly.

Jogaby: $f_{max} = 8$; $x^* = (2,2,2)$.

4.15-nji mysal. $f = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2x_3$ funksiýanyň şertli ekstremumlaryny

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19, \\ x_1 + 2x_2x_3 = 11 \end{cases}$$

şertlerde tapmaly.

4.16-njy mysal. $f = x_1x_2x_3$ funksiýanyň şertli ekstremumlaryny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8 \end{cases}$$

şertlerde tapmaly.

4.17-nji mesele. Pudagyň iki kärhanasynda käbir önümiň 200 sanysyny taýýarlamak göz öňünde tutulýar. I kärhanada önümiň x_1 sanysy taýýarlanylanda çykarylýan çykdajy $4x_1^2$ manada, II kärhanada önümiň x_2 sanysy taýýarlanylanda çykarylýan çykdajy $20x_2 + 6x_2^2$ manada barabar. Önümçilikdäki umumy çykdajy iň az bolar ýaly her kärhanada näçe önüm öndürmelidigini kesgitlemeli.

4.18-nji mesele. Käbir önümi öndürmegi iki dürli tehnologiýa boýunça ýerine ýetirip bolýar. I tehnologiki usul boýunça x_1 sany önümi taýýarlanylanda çykdajy $a_0 + a_1\, x_1 + a_2 x_1^2$ manada, II tehnologiki usul boýunça x_2 sany önümi taýýarlanylanda çykdajy $b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$

(bu ýerde a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 käbir položitel sanlar) manada deň. d sany önüm öndürilende umumy çykdajy iň az bolar ýaly her tehnologiki usul boýunça näçe önüm öndürmelidigini kesgitlemeli.

§ 4.2. Güberçek programmalaşdyrmanyň meseleleri

Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesine seredeliň:

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n)\to\max, \tag{24}$$

$$g_i(x_1, x_2,\dots,x_n)\le b_i,\ (i=1, 2,\dots,m), \tag{25}$$

$$x_j\ge 0\ (j=1, 2,\dots,n), \tag{26}$$

bu ýerde f we g_i – üýtgeýän x_1, $x_2,\dots,x_n$ ululyklara görä n argumentli funksiýalar.

Şeýle meseläni çözmegiň umumy usuly ýokdur. Ýöne f we g_i funksiýalara görä käbir goşmaça talaplar girizilip, alynýan meseleleri çözmegiň netijeli usullary döredilendir. Hususan hem, $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ funksiýa güberçeklik (ýa-da oýuklyk) şertini ýerine ýetirse we meseläniň (25)–(26) çäklendirmeler bilen kesgitlenilýän ýolbererli çözüwleriniň köplügi güberçek köplük bolanda (24)–(26) meseläni çözmegiň netijeli usullary bardyr.

4.1-nji kesgitleme. Eger käbir X güberçek köplügiň islendik X_1, $X_2\in X$ iki nokady we $0\le\lambda\le 1$ ululyk üçin

$$f[(1-\lambda)X_1+\lambda X_2]\le(1-\lambda)f(X_1)+\lambda f(X_2) \tag{27}$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x_1, x_2,\dots,x_n)=f(X)$ funksiýa **güberçek** (**güberçekligi ýokary**) **funksiýa** diýilýär.

4.2-nji kesgitleme. Eger käbir X güberçek köplügiň islendik X_1, $X_2\in X$ iki nokady we $0\le\lambda\le 1$ ululyk üçin

$$f[(1-\lambda)X_1+\lambda X_2]\ge(1-\lambda)f(X_1)+\lambda f(X_2) \tag{28}$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $f(x_1, x_2,\dots,x_n)=f(X)$ funksiýa **oýuk** (**güberçekligi aşak**) **funksiýa** diýilýär.

4.3-nji kesgitleme. Eger (24)–(26) meseläniň ýolbererli çözüwleriniň köplügine degişli iň bolmanda bir X_i nokatda $g_i(X_i)<b_i$ ($i=1$, $2,\dots,m$) şertler ýerine ýetýän bolsa, onda **meseläniň ýolbererli çözüwleriniň köplügi adatylyk şertini ýerine ýetirýär** diýilýär.

4.4-nji kesgitleme. Eger $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ funksiýa güberçeklik (ýa-da oýuklyk) şertini kanagatlandyrsa we $g_i(X)(i=1, 2,\dots,m)$ funksiýalar güberçek funksiýalar bolsalar, onda (24)–(26) meselä **güberçek programmalaşdyrmanyň meselesi** diýilýär.

4.1-nji teorema. Güberçek programmalaşdyrmanyň meselesiniň islendik lokal maksimumy (minimumy) global maksimumdyr (minimumdyr).

Teoremany subutsyz kabul edeliň.

4.5-nji kesgitleme.

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) =$$

$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right] \qquad (29)$$

(bu ýerde $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – Lagranžyň köpeldijileri) funksiýa (24)–(26) güberçek **programmalaşdyrmanyň meselesiniň Lagranž funksiýasy** diýilýär.

4.6-njy kesgitleme. Eger islendik $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) we $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) ululyklar üçin:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0) \leq L(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0) \leq ,$$

$$\leq L(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

şert ýerine ýetýän bolsa, onda $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0)$ nokada **Lagranž funksiýasynyň eýer nokady** diýilýär.

4.2-nji teorema. (Kunuň-Takkeriň teoremasy). Ýolbererli çözüwleriniň köplügi adatylyk şertini ýerine ýetirýän güberçek programmalaşdyrmanyň (24)-(26) meselesi üçin $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ çözüw, diňe şeýle bir $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0)$ wektor bar bolup, (X_0, Y_0) nokat Lagranž funksiýasynyň eýer nokady bolanda, optimal çözüw bolup biler.

Teoremany subutsyz kabul edeliň.

Eger f we g_i funksiýalar üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda Kunuň-Takkeriň teoremasyndaky (X_0, Y_0) nokadyň Lagranž funksiýasynyň eýer nokady bolmagy baradaky zerur we ýeterlik şertini (X_0-yň meseläniň çözüwi bolmagynyň şertini) kesgitleýän analitiki aňlatmalar bilen dolduryp bolar. Bu aňlatmalar aşakdaky görnüşe eýedirler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0, & (j = 1, 2, \cdots, n); \qquad (30) \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, & (j = 1, 2, \cdots, n); \qquad (31) \\ x_j^0 \ge 0, & (j = 1, 2, \cdots, n); \qquad (32) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \ge 0, & (i = 1, 2, \cdots, m); \qquad (33) \\ y_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0, & (i = 1, 2, \cdots, m); \qquad (34) \\ y_i^0 \ge 0, & (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (35) \end{cases}$$

Bu ýerde $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ we $\dfrac{\partial L_0}{\partial y_j}$ – Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokadynda hasaplanan degişli bölek önümleridir. Kwadrat programmalaşdyrmanyň aşakda teswirlenip getiriljek meselesi üçin (X_0, Y_0) nokadyň Lagranž funksiýasynyň eýer nokady bolmagy baradaky zerur we ýeterlik şertiniň (30)-(35) görnüşde ýazylanlaryny kanagatlandyrýandygyny göreris. Onuň üçin aşakdaky kesgitlemäni bereliň.

4.7-nji kesgitleme. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ üýtgeýän ululyklara görä:

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{1n}x_1x_n + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 +$$
$$+ c_{23}x_2x_3 + \cdots + c_{2n}x_2x_n + \cdots + c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + c_{n3}x_nx_3 + \cdots + c_{nn}x_nx_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j$$

görnüşdäki aňlatma bilen kesgitlenýän san funksiýasyna bu ululyklara görä **kwadratik forma** diýilýär.

4.8-nji kesgitleme. Eger $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ üýtgeýän ululygyň islendik bahasy üçin F-iň bahasy noldan uly (kiçi) bolsa, ýagny X: $F(X)>0$ (X: $F(X)<0$) bolsa, onda ***F*** **kwadratik forma položitel (otrisatel) kesgitlenen** diýilýär.

4.9-njy kesgitleme. Eger $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ üýtgeýän ululygyň islendik bahasy üçin F-iň bahasy noldan uly ýa-da deň (kiçi ýa-da deň) bolsa, ýagny $-X$: $F(X) \ge 0$ ($-X$: $F(X) \le 0$) bolsa we $F(X')=0$ bolar ýaly $X' = (x_1', x_2', \cdots, x_n') \ne 0$ ululyk bar bolsa, onda ***F*** **kwadratik forma položitel (otrisatel) ýarym kesgitlenen** diýilýär. Aşakdaky teoremany subutsyz kabul edeliň.

4.3-nji teorema. Eger kwadratik forma položitel (otrisatel) ýarym kesgitlenen bolsa, onda ol güberçek (oýuk) funksiýadyr.

4.10-njy kesgitleme. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_kx_j$ položitel (otrisatel) ýarym kesgitlenen kwadratik formanyň üsti bilen düzülen:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}d_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_kx_j \tag{36}$$

funksiýanyň:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i \;\; (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{37}$$

$$x_j \ge 0 \; (j=1, 2,\ldots,n) \tag{38}$$

şertleri kanagatlandyrýan halatynda maksimumyny (minimumyny) kesgitlemekden ybarat meselä **kwadratik programmalaşdyrmanyň meselesi** diýilýär.

Ýokarda beýan edilen kwadratik programmalaşdyrmanyň meselesi üçin Lagranžyň funksiýasy aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$L = \sum_{j=1}^{n}d_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_kx_j + y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j).$$

Eger L funksiýa $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_m^0)$ eýer nokadyna eýe bolsa, onda bu nokatda (30)–(35) şertler ýerine ýeter. (30) we (33) deňsizlikleri deňlige öwürýän v_j (j=1, 2,…,n) we w_i (i=1, 2,…,m) goşmaça üýtgeýän ululyklary girizip, kwadratik programmalaşdyrmanyň meselesi üçin ýazylan (30)-(35) aňlatmalary aşakdaky görnüşe getirilýär:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n); & (39) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} - w_i = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, m); & (40) \\ x_j^0 v_j = 0, \qquad (j = 1, 2, \cdots, n); & (41) \\ y_i^0 w_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) & (42) \end{cases}$$

$$x_j^0 \ge 0, v_j \ge 0 \, (j = 1, 2, \cdots, n), \, y_i^0 \ge 0, w_i \ge 0 \, (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{43}$$

Şeýlelik bilen, (36)–(38) kwadratik programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini tapmak üçin (39)–(40) meseläniň (41) we (42) şertleri kanagatlandyrýan otrisatel däl çözüwini kesgitlemeli. Beýle çözüwi (39)-(40) we (43) şertler ýerine ýetende (41) we (42) şertleri kanagatlandyrýan $F = -\sum_{i=1}^{m}My_i$ funksiýanyň maksimumyny tapmak-da peýdalanylýan emeli bazis usulynyň kömegi bilen tapyp bolar. Bu ýerde y_i (39)-(40) deňlemelerde girizilen emeli üýtgeýän ululyklardyr.

Emeli bazis usulyny ulanyp we goşmaça (41) we (42) şertleri göz öňünde tutup, tükenikli ädimden soň ýa-ha berlen meseläniň optimal çözüwini taparys, ýa-da onuň çözüwiniň ýokdugyny anyklarys.

Şeýlelik bilen, (36)–(38) kwadratik programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwini tapmak aşakdaky tapgyrlary öz içine alýar:

– Lagranžyň funksiýasy düzülýär;

– Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokadynyň barlygynyň zerur we ýeterlik şertlerini (39)–(43) görnüşde ýazýarys;

– emeli bazis usulyny ulanyp ýa-ha Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokadyny taparys, ýa-da onuň ýokdugyny anyklarys.

Berlen meseläniň optimal çözüwini ýazýarys we maksat funksiýasynyň bahasyny tapýarys.

4.19-njy mesele.

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \tag{44}$$

funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{45}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{46}$$

şertleriň ýerine ýetýän halatynda tapmaly.

Çözülişi. f funksiýa çyzykly $2x_1+4x_2$ oýuk funksiýanyň we otrisatel kesgitlenen $-x_1^2 - 2x_2^2$ kwadratik funksiýanyň (diýmek ol hem oýuk) jemleri hökmünde oýuk funksiýadyr. Çäklendirmeler ulgamy diňe çyzykly deňsizlikleri özünde saklaýar. Şol sebäpli berlen mesele üçin Kunuň-Takkeriň teoremasyny ulanyp bolar. Lagranžyň funksiýasyny guralyň:

$$L(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1(8 - x_1 - 2x_2) + y_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

we bu funksiýanyň eýer nokadynyň barlygynyň zerur we ýeterlik şertlerini (39)–(43) görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0, \\ y_1 \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ y_2 \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \tag{48}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \tag{49}$$

(47) deňsizlikler ulgamyny aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 \geq 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \tag{50}$$

(50) deňsizlikler ulgamyny deňlemeler ulgamyna öwürýän otrisatel däl v_1, v_2, w_1 we w_2 goşmaça üýtgeýän ululyklary girizip, alarys:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \tag{51}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \geq 0. \tag{52}$$

(51) deňlemeler ulgamyndan alarys:

$$v_1 x_1 = 0,\ v_2 x_2 = 0,\ w_1\, y_1 = 0,\ w_2 y_2 = 0. \tag{53}$$

Eger indi (53) deňlikleri göz öňünde tutup, (51) deňlemeler ulgamynyň bazis çözüwini tapsak, onda Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokadyny, ýagny berlen meseläniň optimal çözüwini taparys.

(51) deňlemeler ulgamynyň bazis çözüwini tapmak üçin emeli bazis usulyny ulanalyň: (51) deňlemeler ulgamynyň birinji we ikinji deňlemelerine degişlilikde otrisatel däl z_1 we z_2 ululyklary goşup, çyzykly programmalaşdyrmanyň

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \tag{54}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0 \tag{55}$$

şertler ýerine ýetende

$$F = -Mz_1 - Mz_2 \qquad (56)$$

funksiýanyň maksimal bahasyny tapmak baradaky meselesine seredeliň.

(54)-(56) meseläni çözmek bilen ((53) şert göz öňünde tutulýar) (55) deňlemeler ulgamynyň ýolbererli bazis çözüwini taparys (*4.1-nji tablisa*).

4.1-nji tablisa.

i	Bazis	C_b	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				P_{x_1}	P_{x_2}	P_{λ_1}	$P_{\lambda 2}$	P_{v_1}	P_{v_1}	P_{w_1}	P_{w2}	P_{y_1}	P_{y2}
	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
	P_{y_2}	$-M$	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
	P_{w_1}		8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
	P_{w_2}		12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0
	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
	P_{x_2}		1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	0	0	1/4
	P_{w_1}		6	1	0	-1	1/2	0	1/2	1	0	0	-1/2
	P_{w_2}		13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1	0	1/4
			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1
	P_{x_1}		1	1	0	1/2	1	-1/2	0	0	0	1/2	0
	P_{x_2}		1	0	1					0	0		
	P_{w_1}		5	0	0					1	0		
	P_{w_2}		11	0	0					0	1		
	P_{j_j}		0		0					0	0		

$$x_1^0 = 1;\, x_2^0 = 1;\, w_1 = 5;\, w_2 = 11;\, y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

(91;89) meseläniň optimal çözüwidir.

$x_1^0 v_1 = 0;\ x_2^0 v_2 = 0;\ y_1^0 w_1 = 0;\ y_2^0 w_2 = 0$ bolýandygy üçin (X_0, Y_0)=(1; 1; 0; 0) nokat berlen mesele üçin Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokady bolar. Diýmek, X^*= (1;1) berlen meseläniň optimal çözüwi we f_{max}= 3 bolar.

Güberçek programmalaşdyrmanyň meselelerini çözmeli.

4.20-nji mysal. $f = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$ funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

4.21-nji mysal. $f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ \quad x_2 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

4.22-nji mysal. $f = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2$ funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \geq -8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

4.23-nji mysal. $f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3$ funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_3 \leq 14, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

Jogaby: f_{max}=17/8; X^*= (0;1;3/4).

§ 4.3. Gradiýent usullary

Goý, käbir oblastda üznüksiz differensirlenýän $f(\bar{x})$ funksiýa berlen bolsun. **Funksiýanyň gradiýenti** diýip i-nji düzüjisi bu funksiýanyň degişli argumenti boýunça hususy önümine deň bolan wektor funksiýa aýdylýar we aşakdaky ýaly belgilenilýär:

$$\text{grad} f = \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Belli bolşy ýaly, funksiýanyň islendik nokatdaky gradiýenti onuň bu nokatda iň çalt lokal artýan ugruny görkezýär. Gradiýent usullary köpargumentli funksiýalaryň optimal bahalaryny onuň bahalarynyň iň çalt artýan ugruny görkezýän gradiýentini ulanmaklyga esaslanandyrlar.

Gradiýent usullarynyň kömegi bilen çyzykly däl programmalaşdyrmanyň islendik meselesiniň çözüwini tapyp bolar. Onuň üçin çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesiniň düzümine girýän çäklendirmelere degişli funksiýalaryň we maksat funksiýasynyň käbir oblastda differensirlenýän bolmagy zerurdyr. Umumy ýagdaýda gradiýent usullarynyň kömegi bilen lokal ekstremumlary tapmak mümkindir. Şol sebäpli bu usullary, esasan hem, islendik lokal ekstremumyň şolbir wagtyň özünde global ekstremum bolup bilýän güberçek programmalaşdyrmanyň meselelerini çözmekde ulanmak netijelidir. Gradiýent usullarynyň kömegi bilen mesele çözülende ilki käbir usul boýunça saýlanylyp alnan $X^{(k)}$ çözüwden yzygiderlilikde beýleki çözüwlere maksat funksiýasynyň iň çalt artýan (kemelýän) ugry boýunça geçilýär. Bu proses berlen meselede beýan edilen maksada ýetilýänçä, maksat funksiýasynyň optimal bahasy tapylýança dowam etdirilýär. Gradiýent usullar iki topara bölünýär.

Birinji topara degişli gradiýent usullar ulanylanda barlanylýan nokatlar seredilýän ýolbererli çözüwler köplüginden çykmaýarlar. Bu topara degişli has köp ulanylýan usul Frankyň-Wulfuň usulydyr.

Ikinji topara degişli gradiýent usullary ulanylanda barlanylýan nokatlar seredilýän ýolbererli çözüwler köplügine degişli hem, degişli däl hem bolup bilerler. Ýöne tapgyrlaýyn işiň netijesinde ýolbererli çözüwler köplügine degişli nokatlar tapylýar. Gradiýent usullarynyň bu toparyna degişlileriniň köp ulanylýany jerime funksiýalary usullary ýa-da Errounyň-Gurwisiň usulydyr.

Meseleleriň çözüwleri gradiýent usullarynyň kömegi bilen tapylanda tapgyrlaýyn iş $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiýanyň gragiýenti nobatdaky $X^{(k+1)}$ nokatda nola deň bolýança ýa-da $|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})|<\varepsilon$ (ε – alnan çözüwiň takyklygyny görkezýän ýeterlik kiçi položitel san) deňsizlik ýerine ýetýänçä dowam etdirilýär.

4.3.1.Frankyň-Wulfuň usuly

Goý,

$$f(x_1, x_2,\ldots,x_n) \tag{57}$$

güberçek funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,(i = 1,2,\cdots,m), \tag{58}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1, 2,\ldots,n) \tag{59}$$

şertlerde tapmak talap edilýän bolsun.

Bu meseläniň häsiýetlendiriji aýratynlygy, onuň çäklendirmeler ulgamynyň diňe çyzykly deňsizliklerden ybaratlygyndadyr. Bu aýratynlyk barlanylýan nokadyň golaý töwereginde çyzykly däl maksat funksiýasyny çyzykly funksiýa bilen çalyşmaga esas bolup hyzmat edýär. Şeýlelikde, berlen mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň meseleleriniň yzygiderli çözülişine getirilýär.

Ilki bilen nobatdaky barlanylýan $X^{(k)}$ nokat seredilýän meseläniň ýolbererli çözüwler köplügine degişli halatyndaky ýagdaýa seredeliň. $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ funksiýanyň bu nokatdaky gradiýenti aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}\right)$$

we aşakdaky çyzykly funksiýa gurulýar:

$$F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n}x_n. \tag{60}$$

Soňra bu funksiýanyň (58)–(59) şertlerde maksimal bahasy tapylýar. Goý, bu çözüw $Z^{(k)}$ nokat bilen gabat gelsin. Onda berlen meseläniň täze ýolbererli çözüwi:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k(Z^{(k)} - X^{(k)}), \tag{61}$$

bolar, bu ýerde $0 \le \lambda_k \le 1$ hasaplamanyň ädimi diýilýän käbir san. Bu sany erkin saýlap ýa-da oňa bagly bolan $g(\lambda_k) = f(X^{(k+1)})$ funksiýa maksimal baha eýe bolar ýaly edip hem saýlap bolar. Onuň üçin $\dfrac{dg(\lambda_k)}{d\lambda_k} = 0$ deňlemäniň iň kiçi köküni tapmak zerur. Eger onuň bahasy birden uly bolsa, onda λ_k=1 diýip alynýar. λ_k-nyň bahasy kesgitlenenden soň $X^{(k+1)}$ nokadyň koordinatalary tapylýar. Bu nokatda maksat funksiýasynyň bahasy hasaplanylýar we täze $X^{(k+2)}$ nokada geçmegiň zerurlygy anyklanylýar. Eger şeýle zerurlyk bar bolsa, onda $X^{(k+1)}$ nokatda maksat funksiýasynyň gradiýentiniň bahasy hasaplanylýar, degişli çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesine geçilýär we onuň çözüwi tapylýar. $X^{(k+2)}$ nokadyň koordinatalary tapylýar we indiki barlaglary geçirmegiň zerurlygy anyklanylýar. Käbir tükenikli sanly ädimden soň berlen meseläniň zerur takyklykdaky çözüwi tapylýar.

Şeýlelikde, (57)–(59) meseläniň çözüwiniň Frankyň-Wulfuň usuly boýunça tapylyş prosesi aşakdaky tapgyrlary özünde saklaýar:

1. Berlen meseläniň başky ýolbererli çözüwi tapylýar.
2. (57) funksiýanyň bu nokatdaky gradiýenti hasaplanylýar.
3. (60) görnüşli funksiýa gurulýar we onuň (58)-(59) şertlerdäki maksimal bahasy tapylýar.
4. Hasaplamanyň ädimi kesgitlenilýär.
5. (61) formulalar boýunça täze ýolbererli çözüwiň düzüjileri tapylýar.
6. Indiki ýolbererli çözüwe geçmegiň zerurlygy barlanylýar. Zerur halatynda 2-nji tapgyra geçilýär, beýleki ýagdaýda berlen meseläniň zerur takyklykdaky çözüwi tapyldy diýip hasap edilýär.

4.24-nji mysal. Frankyň-Wulfuň usuly bilen

$$f = 2x_1+4x_2- x_1^2 - 2x_2^2 \tag{62}$$

funksiýanyň maksimum bahasyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{63}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{64}$$

şertleriň ýerine ýetýän halatynda tapmaly (*3.22-nji mysal*).

Çözülişi. f funksiýanyň gradiýentini tapalyň:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2 - 2x_1; 4 - 4x_2)$$

we ilkinji ýolbererli çözüw hökmünde $X^{(0)}=(0;0)$ hem-de alynýan çözüwiň hilini bahalandyrmagyň kriterisi hökmünde $|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})|<\varepsilon$ deňsizlik (ε=0, 01 – alnan çözüwiň takyklygyny görkezýän ýeterlik kiçi položitel san) alynýar.

I tapgyr (iterasiýa). $X^{(0)}$ nokatda f funksiýanyň gradiýenti $f(X^{(0)})=(2;4)$ bolar.

$$F_1=2x_1+4x_2 \tag{65}$$

funksiýanyň maksimumyny (63) we (64) şertlerde, ýagny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases} \tag{66}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{67}$$

şertlerde tapalyň. Bu meseläniň optimal çözüwi $Z^{(0)}=(0;4)$.

Berlen mesläniň täze ýolbererli çözüwini (61) formula boýunça tapalyň:

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\lambda_1\ (Z^{(0)}-X^{(0)}),\text{ bu ýerde } 0\leq\lambda_1\leq 1. \tag{68}$$

$X^{(0)}$ we $Z^{(0)}$ derek olaryň bahalaryny goýsak, alarys:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 + \lambda_1 0, \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1 4. \end{cases} \tag{69}$$

λ_1 ululygy kesgitlemek üçin (62) deňlikde x_1 we x_2-ä derek (69) deňlikdäki bahalaryny goýup alarys:

$$f(\lambda_1)=16\lambda_1-32\lambda_1^2.$$

Bu funksiýanyň λ_1-e görä önümini tapyp nola deňläliň:

$$f'(\lambda_1)=16\text{-}64\lambda_1=0.$$

Bu ýerden $\lambda_1=1/4$. Bu tapylan sanyň 0 bilen 1-iň arasyna degişli bolandygy sebäpli ony ädimiň ululygy hökmünde kabul edýäris. Şeýlelik bilen $X^{(1)}=(0;1)$, $f(X^{(1)})=2$, $f(X^{(1)})\text{-}f(X^{(0)})=2>\varepsilon=0,01$.

II tapgyr. Berlen meseläniň maksat funksiýasynyň ($X^{(1)}$) nokatdaky gradiýenti $\nabla f(X^{(1)})=(2;0)$. $F_1=2x_1$ funksiýanyň maksimumyny (63) we (64) şertlerde tapýarys. $Z^{(1)}=(6,4;0,8)$ degişli çözüw bolar.

$X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_2\ (Z^{(1)})\text{-}X^{(1)})$-i kesgitläliň. Soňky deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 6,4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} = 1 - 0,2\lambda_2. \end{cases} \tag{70}$$

(62) funksiýada x_1 we x_2-ä derek olaryň (70)-däki bahalaryny goýup, alarys:

$$f(\lambda_2)=2+12,\ \ 8\lambda_2-41,\ \ 76\lambda_2^2.$$

Bu ýerden $f(\lambda_2)$=12,8-83,52λ_2. $f(\lambda_2)$-i nola deňläp, alnan deňlemäni çözüp, $\lambda_2 \approx 0{,}15$ alarys. Şeýlelik bilen:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,96, \\ x_2^{(2)} = 0,97. \end{cases}$$

Ýagny $X^{(2)}=(0{,}96;0{,}97)$, $f(X^{(2)})=2{,}9966$, $f(X^{(2)})-f(X^{(1)})=2{,}9966-2=$ $=0{,}9966>\varepsilon=0{,}01$.

III tapgyr. Berlen meseläniň maksat funksiýasynyň $X^{(2)}$ nokatdaky gradiýenti $f(X^{(2)})=(0{,}08;\ 0{,}12)$. $F_3=0,\ 08\ x_1+0{,}12x_2$ funksiýanyň maksimumyny (63) we (64) şertlerde tapýarys. $Z^{(2)}=(6;0)$ degişli bolar.

$X^{(3)}=X^{(2)}+\lambda_3\ (Z^{(2)}-X^{(2)})$-i kesgitläliň. Alarys:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,96 + \lambda_3(6-0,96) = 0,96 + 5,04\lambda_3, \\ x_2^{(2)} = 0,97 + \lambda_3(0-0,97) = 0,97 - 0,97\lambda_3; \end{cases}$$

$$f(\lambda_3) = 2,9384 + 0,4032\lambda_3 - 27,3416\lambda_3^2,$$

$$f'(\lambda_3) = 0,4032 - 54,6832\lambda_3.$$

$f'(\lambda_3)=0$ deňlemäni çözüp, $\lambda_3 \approx 0{,}007$ alarys. Şeýlelik bilen, $X^{(3)}=(0,\ 99528;0{,}96321)$, $f(X^{(3)})=2{,}99957$, $f(X^{(3)})-f(X^{(2)})=2{,}99957-$ $-2{,}9966=0{,}00297<\varepsilon=0{,}01$.

Şeýlelik bilen, $(X^{(3)})=(0{,}99528;0{,}96321)$ berlen meseläniň gözlenýän çözüwidir. $(X^{(3)})$ nokat maksat funksiýasynyň öňdeň belli bolan (*3.22-nji mysala ser.*) maksimal bahasynyň nokady bolan $X^*=(1;1)$ nokada ýeterlik ýakyn ýerleşendir. ε-a has kiçi baha berip, goşmaça ýakynlaşma hasaplamalary geçirip, maksat funksiýasynyň maksimal bahasynyň nokadyna has ýakyn golaýlaşmak bolardy.

4.3.2. Jerime funksiýalar usuly

Bu usul umumy ýagdaýda öň beýan edilipdi. Berlen $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ oýuk funksiýanyň

$$g_i\ (x_1, x_2,\ldots,x_n)\le b_i\ (i=1, 2,\ldots,m),\ x_j\ge 0\ (j=1, 2,\ldots,n)$$

(bu ýerde $g(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ güberçek funksiýalar) şertleriň ýerine ýetýän halatynda maksimal bahasyny tapmak meselesine seredeliň.

Bu meseläni göni çözmäge girişmezden $F(x_1, x_2,\ldots,x_n)=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)+H(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ funksiýanyň, ýagny berlen maksat funksiýasynyň we käbir **jerime funksiýasy** diýlip at berilýän $H(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ funksiýanyň jeminiň maksimal bahasy gözlenilýär. Jerime funksiýasyny dürli usul bilen gurup bolar, ýöne köp ýagdaýlarda ol

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

görnüşde gurulýar. Bu ýerde:

$$\alpha_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}0, \text{ eger } -b_i-g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0 \text{ bolsa,}\\ \alpha_i, \text{ eger } -b_i-g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0 \text{ bolsa,}\end{cases} \tag{71}$$

$\alpha_i>0 g_i(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ goşantlaryny görkeziji käbir hemişelik sanlar.

Jerime funksiýasynyň kömegi bilen kabul ederlik çözüw alynýança bir nokatdan beýleki nokada yzygiderli geçilýär. Islendik soňky nokat özünden öň gelýän nokada görä aşakdaky ýaly tapylýar:

$$x_j^{(k+1)}=\max\left\{0;\, x_j^{(k)}+\left[\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right]\right\}. \tag{72}$$

Soňky deňlikden, eger öňki nokat ýolbererli çözüwleriň köplügine degişli bolsa, onda kwadrat ýaýyň içindäki ikinji aňlatmanyň nola deň boljakdygy we soňky nokada geçişiň diňe maksat funksiýasynyň gradiýentiniň üsti bilen kesgitlenjekdigi görünýär. Eger bu nokat ýolbererli çözüwleriň köplügine degişli däl bolsa, onda şol goşulyjynyň kömegi bilen soňky tapgyrlarda (iterasiýalarda) bu köplüge gelmek üpjün edilýär. Şeýlelikde, α_i näçe kiçi bolsa, kabul ederlik çözüw şonça-da çalt tapylýar, ýöne onuň kesgitlenilişiniň takyklygy peselýär. Şol sebäpli, adatça tapgyrlaýyn iş α_i-leriň has kiçi bahalaryndan başlanylyp, işiň dowamynda olaryň bahalary yzygider ýokarlandyrylýar.

Şeýlelik bilen, güberçek programmalaşdyrmanyň meselesiniň jerime funksiýalar usuly boýunça çözülişi aşakda sanalýan döwürleri öz içine alýar:

– ilkinji ýolbererli çözüw kesgitlenilýär;

– hasaplamanyň ädimi saýlanylýar;

– maksat funksiýasynyň we ýolbererli çözüwler köplügini kesgitleýän funksiýalaryň ähli üýtgeýän ululyklar boýunça hususy önümleri tapylýar.

– (72) formula boýunça täze çözüw bolup hyzmat etjek nokadyň koordinatalary tapylýar;

– tapylan nokadyň kordinatalarynyň meseläniň çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrýandygy barlanylýar. Eger ol çäklendirmeler ulgamyny kanagatlandyrmasa, onda indiki tapgyra geçilýär. Eger tapylan nokadyň kordinatalary meseläniň ýolbererli çözüwini berýän bolsa, onda täze ýolbererli çözüwe geçmegiň zerurlygy kesgitlenilýär. Şeýle zerurlyk bar bolsa II tapgyra geçilýär, beýleki ýagdaý kabul ederlik çözüwiň tapylandygyny aňladýar;

– agram koeffisiýentleriniň bahalary kesgitlenilip, IV tapgyra geçilýär.

4.25-nji mesele.

$$f=-x_1^2-x_2^2 \tag{73}$$

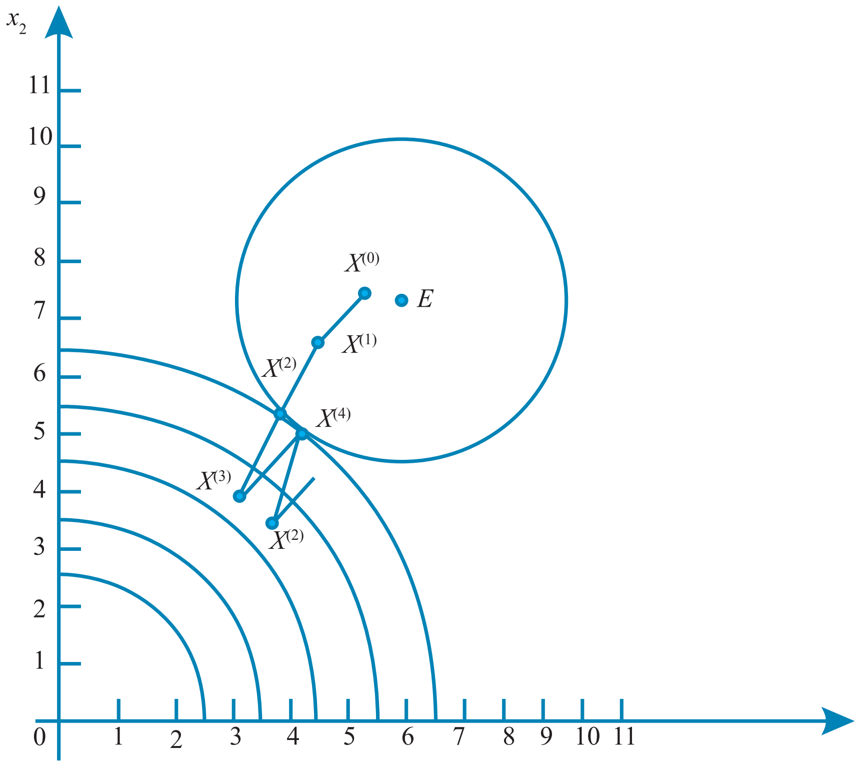
funksiýanyň:

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2\leq 18, \tag{74}$$

$$x_1;\, x_2\geq 0 \tag{75}$$

şertleriň ýerine ýetýän halatynda maksimal bahasyny tapmaly.

Çözülişi. Berlen meseläniň maksat funksiýasy otrisatel kesgitlenen kwadratik formadyr we şol sebäpli oýukdyr (oýuklygy aşakdyr). Şolbir wagtda (74)–(75) çäklendirmeleri kanagatlandyrýan ýolbererli çözüwleriň köplügi güberçek oblastdyr. Şol sebäpli (73)–(75) mesele güberçek programmalaşdyrmanyň meselesidir. Onuň çözüwini jerimeler funksiýasy usulynyň kömegi bilen tapalyň. Onuň üçin ilki bilen ýolbererli çözüwleriň köplügini we (73) maksat funksiýasynyň derejeler çyzyklaryny guralyň (*3.6-njy surat*). Bu çyzyklar merkezi (0; 0) nokatda ýerleşen töwereklerdir. Bu töwerekleriň biriniň ýolbererli çözüwler köplüginiň çägi bilen galtaşma nokady berlen meseläniň maksat funksiýasynyň maksimal baha eýe bolýan nokadydyr.



4.4-nji surat

Goý, $X^{(0)}=(6,\ 7)$ bolsun. $\lambda=0{,}1$ bahalary alyp, $g(x_1,\ x_2)=18-$ $-(x_1-7)^2-(x_2-7)^2$ belgileme girizeliň we $f(x_1, x_2)$ we $g(x_1, x_2)$ funksiýalaryň x_1, x_2 ululyklar boýunça hususy önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-\ 2x_1;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=-\ 2x_1+14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-\ 2x_1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-\ 2x_1+14.$$

Indi (72) formulany ulanyp, iň bolmanda birini çözüw hökmünde kabul eder ýaly nokatlaryň köplügini guralyň.

I tapgyr. $X^{(0)}=(6, 7)$ nokadyň ýolbererli çözüwler köplügine degişlidigi sebäpli (72) aňlatmadaky kwadrat ýaýyň ikinji goşulyjysy nola deňdir. Şol sebäpli indiki $X^{(1)}$ nokadyň koordinatalary aşakdaky ýaly hasaplanar:

$$x_1^{(1)} = \max\left\{0; x_1^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1}\right\} = \max\{0; 0,1(-2)6\} = 4,8;$$

$$x_2^{(1)} = \max\left\{0; x_2^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2}\right\} = \max\{0; 0,1(-2)7\} = 5,6.$$

Alnan nokadyň ýolbererli çözüwler köplügine degişlidigini barlalyň. Onuň üçin $g(X^{(1)})$-i hasaplalyň. $g(X^{(1)}) = 18-4,84-1,96 = 11,2>0$. Diýmek, $X^{(1)}$ ýolbererli çözüwler köplügine degişlidir. Bu nokatda $f(X^{(1)})=-54,4$.

II tapgyr. Indiki $X^{(1)}$ nokadyň $x_1^{(2)}$ we $x_2^{(2)}$ koordinatalaryny tapalyň:

$x_1^{(2)} = \max\{0; 0,48+0,1\cdot(-2)\cdot 4,8\} = 3,84;$

$x_2^{(2)} = \max\{0; 0,56+0,1\cdot(-2)\cdot 5,6\} = 4,48;$

$g(X^{(2)})$-i hasaplalyň. $gX^{(2)}=18-9,9856-6,3504=1,664>0$. Diýmek, $X^{(2)}$ hem ýolbererli çözüwler köplügine degişlidir. Bu nokatda $f(X^{(2)})=-34,816$.

III tapgyr. Indiki $X^{(2)}$ nokadyň $x_1^{(3)}$ we $x_2^{(3)}$ koordinatalaryny tapalyň:

$x_1^{(3)} = \max\{0; 0, 384+0,1\cdot(-2)\cdot 3,84\} = 3, 072;$

$x_2^{(3)} = \max\{0; 0, 448+0,1\cdot(-2)\cdot 4,48\} = 3, 584;$

$g(X^{(3)}) = 18-15,429184-1,669056\approx-9,0981<0$. Diýmek, $X^{(3)}$ nokat ýolbererli çözüwler köplügine degişli däl.

IV tapgyr. $X^{(3)}$ nokadyň ýolbererli çözüwler köplügine degişli däldigi sebäpli $X^{(4)}$-iň koordinatalary tapylýar:

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0; x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial g_i(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0; 3,072 + 0,1(-2)3,072 + \alpha[(-2)3,072 + 14]\} =$$

$$= \max\{0; 2,476 + \alpha 0,7856\};$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0;\, x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial g_i(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$
$$= \max\{0; 3,584 + \alpha[(-2)3,584 + 14]\} =$$
$$= \max\{0; 2,8672 + \alpha 0,6832\}.$$

Bu ýerde α-ny saýlamanyň meselesi ýüze çykýar. Ony saýlamagyň iň maksadalaýyk usuly $X^{(4)}$ nokat ýolbererli çözüwler köplüginiň çäginden daşa düşmez ýaly edip saýlamakdyr. Bu talaby, hususan-da, α=1, 9 baha kanagatlandyrýandyr. Bu bahada alarys:

$x_1^{(4)} = \max\{0;\ 2,476+1,9\cdot 0,7856\} \approx 3,95;$

$x_1^{(4)} = \max\{0;\ 2,8672+1,9\cdot 0,6832\} \approx 4,165;$

$g(X^{(4)}) = 18-9,3025-8,037225 \approx 0,66;\ f(X^{(4)}) \approx -32,95.$

V tapgyr. Bu tapgyrda:

$x_1^{(5)} = \max\{0;\ 3,95+0,1\cdot(-2)\cdot 3,95\} = 3,16;$

$x_1^{(5)} = \max\{0;\ 4,165+0,1\cdot(-2)\cdot 4,165\} = 3,332;$

$g(X^{(5)}) = 18-14,7456-13,454224 \approx -10,2.$

VI tapgyr. Bu tapgyrda:

$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3,16+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,16+1,9\cdot((-2)\cdot 3,16+14)]\} \approx 3,987;$

$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3,332+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,332+1,9\cdot((-2)\cdot 3,332+14)]\} \approx$
$\approx 4,059;$

$g(X^{(6)}) = 18-9,078169-8,649481 \approx 0,272;\ f(X^{(6)}) \approx -32,372.$

VII tapgyr. Bu tapgyrda taparys:

$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 3,987+0,1\cdot(-2)\cdot 3,987\} \approx 3,189;$

$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 4,059+0,1\cdot(-2)\cdot 4,059\} \approx 3,247;$

$g(X^{(7)}) = 18-10,169721-10,543009 \approx -2,713.$

VIII tapgyr. Bu tapgyrda:

$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3,189+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,189+1,9\cdot((-2)\cdot 3,189+14)]\} \approx$
$\approx 3,999;$

$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3,247+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,247+1,9\cdot((-2)\cdot 3,247+14)]\} \approx$
$\approx 4,027;$

$g(X^{(8)}) = 18\text{-}9,006001-8,856576 \approx 0,137;\ f(X^{(8)}) \approx -32,185.$

IX tapgyr. Bu tapgyrda taparys:

$x_1^{(9)} = \max\{0; 3,999+0,1\cdot(-2)\cdot 3,999\} \approx 3,199;$

$x_1^{(9)} = \max\{0;4, 027+0,1\cdot(-2)\cdot4, 027\}\approx3,219;$

$g(X^{(9)})=18-14,447601-14,295961\approx-10,744.$

X tapgyr. Bu tapgyrda alarys:

$x_1^{(10)} =\max\{0;\ 3,199+0,\ 1\cdot[(-2)\cdot3,199+1,\ 9\cdot((-2)\cdot3,199+14)]\}\approx$
$\approx 4,004;$

$x_1^{(10)} =\ \max\{0;3,\ 219+0,1\cdot[(-2)\cdot3,219+1,\ 9\cdot((-2)\cdot3,219+14)]\}\approx$
$\approx 4,012;$

$g(X^{(10)})=18-8,976016-8,928144\approx0, 096; f(X^{(10)})\approx-32,128.$

XI tapgyr. Bu tapgyrda taparys:

$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4,004+0,1\cdot(-)\cdot4,004\}\approx3,203;$

$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4,012+0,1\cdot(-2)\cdot4, 012\}\approx3,210;$

$g(X^{(11)})=18v14,417209-14,3641\approx-10,781.$

XII tapgyr. Bu tapgyrda alarys:

$x_1^{(12)} =\max\{0;\quad 3,203+0,1\cdot[(-2)\cdot3,203+1,9\cdot((-2)\cdot3,203+14)]\}\approx$
$\approx 4,005;$

$x_1^{(12)} =\ \max\{0;\ 3,210+0,1\cdot[(-2)\cdot3,210+1,\ 9\cdot((-2)\cdot3,210+14)]\}\approx$
$\approx4,008;\ g(X^{(12)})\approx-0,078; f(X^{(12)}) \approx-32,104.$

Maksat funksiýasynyň X we XII tapgyrlarda tapylan nokatlardaky bahalaryny deňeşdirip, olaryň 10^{-1} takyklyk bilen gabat gelýändigini görýäris. Bu soňky tapgyrlarda tapylan nokatlaryň maksat funksiýasynyň maksimal nokadyna ýakyndygyny aňladýar. Şeýle tassyklamalary $f(X)$ we $g(X)$ funksiýalaryň $(X^{(12)})$ nokatdaky gradiýentleri hakda hem aýdyp bolar, hakykatdan-da:

$$\nabla f(X^{(12)})=(-8,01;\ -9,016),\ \nabla g(X^{(12)})=(5, 99;\ 5,984).$$

Bu wektorlaryň degişli koordinatalarynyň gatnaşyklaryny hasaplalyň:

$$-\frac{8,01}{5,99}\approx-1,337;\ -\frac{9,016}{5,984}\approx-1,339.$$

Olaryň biri-birlerine takmynan deňligi degişli wektorlary $\nabla f(X^{(12)})$ we $\nabla g(X^{(12)})$ kollinear diýip hasap edip boljakdygyny aňladýar. Bu aýdylanlardan başga-da, $X^{(12)}$ nokadyň ýolbererli çözüwler köplüginiň çäginiň ýakynynda ýerleşmegi $g(X^{(12)})\approx0,078$ bolýandygy sebäpli x_1^*=4,005 we x_2^*=4,008 çözüwleri optimal çözüwiň deregine kabul etmäge esas döredýär. Zerur halatynda tapgyrlaýyn işi maksat we çäklendirmäniň funksiýalarynyň gradiýentleri doly kollinear bolýança dowam etdirip, bu çözüwi has hem takygyrak çözüw bilen çalyşyp bolar.

4.3.3. Errounyň-Gurwisiň usuly

Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleri jerime funksiýalary usuly bilen çözülende α_i-leriň erkin saýlanylmagy netijesinde kesgitlenýän nokatlaryň ýolbererli çözüwler köplüginden daşlaşma yrgyldysynyň uly bolmagyna getirýärdi. Bu kemçilik Errounyň-Gurwisiň usulynda nobatdaky ädimde $\alpha_i^{(k)}$-leriň aşakdaky görnüşde saýlanylyp alynmagy bilen ýeňilip geçilýär:

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0;\ \alpha_i^{(k-1)} - \lambda g_i\,(X^{(k)})\}\ \ (i=1, 2, \ldots, m). \tag{76}$$

Başlangyç $\alpha_i^{(0)}$ baha hökmünde islendik otrisatel däl san alnyp bilner.

4.26-njy mesele. Errounyň-Gurwisiň usulyny peýdalanyp, 3.28-nji meseläniň çözüwini tapmaly, ýagny

$$f = -x_1^2 - x_2^2 \tag{77}$$

funksiýanyň

$$18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, \tag{78}$$

$$x_1;\ x_2 \geq 0 \tag{79}$$

şertleriň ýerine ýetýän halatynda maksimal bahasyny tapmaly.

Çözülişi. 4.25-nji meseläniň çözülişinden görnüşi ýaly, Errounyň-Gurwisiň usulyny peýdalanyp çözüw tapylanda $\lambda = 0{,}1$ baha üçin ilkinji üç tapgyryň netijeleri iki usulda hem gabat gelýär. Bu her bir yzygider tapylýan nokatlaryň ýolbererik çözüwler köplügine degişlidigi sebäpli, haýsy formula bilen tapylýandygyna ((71) ýa-da (76)) garamazdan nola deň ($k = 1, 2, 3$) bolýandygy bilen düşündirilýär.

IV tapgyr (iterasiýa). $g\,(X^{(3)}) < 0$ bolýandygy üçin indiki ($X^{(4)}$) nokadyň koordinatalary (72) formula bilen tapylar:

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0; x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha^{(4)}\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$
$$= \max\{0; 3,072 + 0,1[(-2)3,072 + \alpha^{(4)}((-2)3,072 + 14)]\}$$
$$x_2^{(4)} = \max\left\{0; x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha^{(4)}\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$
$$= \max\{0; 3,584 + 0,1[(-2)3,584 + \alpha^{(4)}((-2)3,584 + 14)]\}$$

$\alpha^{(4)}$ sany (76) formula bilen taparys:

$\alpha^{(4)}= \max\{0; \alpha^{(3)}-0{,}1g(X^{(3)})\}=\max\{0; 0\text{-}0, 1(-9{,}0981)\} \approx -0{,}91.$

Şeýlelik bilen, ≈3, 172; $x_2^{(4)}$≈3, 489; $g(X^{(4)})\approx-8{,}981$.

V tapgyr. Tapylan ($X^{(4)}$)=(3,172; 3,489) nokat ýolbererli çözüwler köplügine degişli däldir. Şol sebäpli indiki nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin hem (72) formuladan peýdalanýarys. Ýöne ilki bilen (76) formulanyň kömegi arkaly α^5-i tapalyň:

$\alpha^{(5)}= \max\{0; \alpha^{(4)}-0{,}1g(X^{(4)})\}=\max\{0; 0{,}9-0{,}1(-8{,}981)\}\approx 1{,}81.$

Diýmek,

$x_1^{(5)}=\max\{0;\ 3{,}172+0,\ 1\cdot[(-2)\cdot 3,\ 172+1,\ 81\cdot((-2)\cdot 3{,}172+14)]\}\approx$
$\approx 3{,}923;$

$x_2^{(5)}=\max\{0;\ 3{,}489+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}489+1,\ 81\cdot((-2)\cdot 3{,}489+14)]\}\approx$
$\approx 4{,}062$; $g(X^{(5)}) \approx -0{,}1$.

VI tapgyr. Bu tapgyrda alarys:

$\alpha^{(6)}= \max\{0;1,\ 81\text{-}0{,}1(-0{,}1)\} \approx 1{,}82.$

$x_1^{(6)}=\max\{0;3,\quad 923+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}923+1{,}82\cdot((-2)\cdot 3{,}923+14)]\}\approx$
$\approx 4{,}258;$

$x_2^{(6)}=\max\{0;4,\ 062+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 4,\ 062+1{,}82\cdot((-2)\cdot 4{,}062+14)]\}\approx$
$\approx 4{,}319$; $g(X^{(6)})\approx 1{,}294$; $f(X^{(6)})\approx -36{,}784$.

VII tapgyr. Alarys:

$x_1^{(7)}=\max\{0; 4{,}258+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 4{,}258]\}\approx 3{,}406;$

$x_2^{(7)}=\max\{0; 4,\ 319+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 4,\ 319]\}\approx 3{,}455$; $g(X^{(7)}))\approx -7{,}84$.

VIII tapgyr. Bu tapgyrda alarys:

$\alpha^{(8)}= \max\{0; 1{,}82\text{-}0{,}1(-7{,}484)\} \approx 2,\ 57.$

$x_1^{(8)}=\max\{0;\quad 3{,}406+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}406+2{,}57\cdot((-2)\cdot 3{,}406+14)]\}\approx$
$\approx 4{,}572;$

$x_2^{(8)}=\max\{0;\quad 3{,}455+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}455+2{,}57\cdot((-2)\cdot 3{,}455+14)]\}\approx$
$\approx 4{,}586$; $g(X^{(8)})\approx 6,\ 278$; $f(X^{(8)})\approx -41{,}935$.

IX tapgyr. Taparys:

$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 4,\ 572+0,\ 1\cdot[(-2)\cdot 4,\ 572]\} \approx 3,\ 658;$

$x_2^{(9)} = \max\{0;\ 4,\ 586+0,\ 1\cdot[(-2)\cdot 4,\ 586]\} \approx 3,\ 669;\ g(X^{(9)}) \approx -4,265.$

X tapgyr. Alarys:

$\alpha^{(10)} = \max\{0;\ 2,\ 57-0,\ 1(-4,\ 265)\} \approx 3,\ 0.$

$x_1^{(10)} = \max\{0;\ 3,658+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,658+3,0\cdot((-2)\cdot 3,658+14)]\} \approx 4,931;$

$x_2^{(10)} = \max\{0;3,669+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,669+3,0\cdot((-2)\cdot 3,669+14)]\} \approx$
$\approx 4,934;\ g(X^{(10)}) \approx 9,451.$

XI tapgyr. Taparys:

$x_1^{(11)} = \max\{0;4,\ 931+0,1\cdot[(-2)\cdot 4,931]\} \approx 3,945;$

$x_2^{(11)} = \max\{0;4,934+0,1\cdot[(-2)\cdot 4,934]\} \approx 3,947;$

$g(X^{(11)}) \approx -0,654.$

XII tapgyr. Alarys:

$\alpha^{(12)} = \max\{0;3,0-0,1(-0,654)\} \approx 3,06.$

$x_1^{(12)} = \max\{0;3,945+0,1\cdot[(-2)\cdot 33,945+3,06\cdot((-2)\cdot 3,945+14)]\} \approx$
$\approx 5,026;$

$x_2^{(12)} = \max\{0;3,947+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,947+3,06\cdot((-2)\cdot 3,947+14)]\} \approx$
$\approx 5,26;\ gX^{(12)}) \approx 10,207;\ fX^{(12)}) \approx -50,521.$

XIII tapgyr. Taparys:

$x_1^{(13)} = \max\{0;5,026+0,1\cdot[(-2)\cdot 5,026]\} \approx 4,021;$

$x_2^{(13)} = \max\{0;5,026+0,1\cdot[(-2)\cdot 5,026]\} \approx 4,021;$

$gX^{(13)}) \approx 0,251;\ fX^{(13)}) \approx -32,337.$

Soňky tapgyrda alnan $x_1^* = 4,021$ we $x_2^* = 4,021$ çözüwi kabul ederlik diýip hasap edip bolar. Zerur halatynda tapgyrlaýyn işi dowam etdirip, täze talap edilýän takyklygy alyp bolar.

Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň gradiýent usul boýunça beýan edilen tapgyrlaýyn işi kompýuteriň kömegi bilen alyp barmak has amatly bolar.

Frankyň-Wulfuň usuly bilen aşakdaky meseleleri çözüň.

4.27-nji mesele.

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

funksiýanyň maksimumyny:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertlerde tapmaly. Başlangyç nokat hökmünde ($X^{(0)}$)=(2;2) nokady almaly.

4.28-nji mesele.

$$f=6x_2+6x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_3 \leq 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

şertlerde tapmaly. Başlangyç nokat hökmünde $X^{(0)}=(0;0;0)$ nokady, tapgyrlaýyn işi tamamlamagyň şerti hökmünde $f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})<\varepsilon=0{,}01$ şerti almaly.

Jerime funksiýalar usulyny we Errounyň-Gurwisiň usulyny ulanyp aşakdaky meseleleri çözmeli.

4.29-njy mesele.

$$f=-x_1^2-x_2^2$$

funksiýanyň maksimumyny

$$(x_1-5)^2+(x_2-5)^2 \leq 8, \qquad x_1; x_2 \geq 0$$

şertlerde tapmaly.

4.30-njy mesele.

$$f=4x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2$$

funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertlerde tapmaly.

4.31-nji mesele.

$$f=-x_1^2-x_2^2$$

funksiýanyň maksimumyny

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 \geq 1, \\ x_1 + 0,5x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \end{cases}$$
$$x, x_2 \geq 0$$

şertlerde tapmaly.

§ 4.4. Seperabel funksiýaly çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwiniň tapylyşy

Maksat funksiýasy we çäklendirmeler ulgamyndaky funksiýalar seperabel bolan çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesine seredeliň.

4.11-nji kesgitleme. Eger $F(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ köpargumentli funksiýa her biri bir argumentiň funksiýasy bolan funksiýalaryň jemi, ýagny

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

görnüşde ýazylyp bilinýän bolsa, onda oňa **seperabel funksiýa** diýilýär.

Eger maksat funksiýasy we çäklendirmeler ulgamyndaky funksiýalar seperabel bolsalar, onda şeýle meseläniň ýakynlaşan çözüwini bölek çyzykly approksimasiýanyň usulyny ulanyp tapyp bolar. Ýöne bu usulyň umumy ýagdaýda ulanylmagy ýakynlaşan lokal ekstremumy tapmaga mümkinçilik berýär. Şol sebäpli, bölek çyzykly approksimasiýanyň usulyny güberçek programmalaşdyrmanyň meselesini çözmekde ulanarys.

4.4.1. Bölek çyzykly approksimasiýanyň usuly

Goý,

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{80}$$

görnüşli oýuk funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \leq b_i (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{81}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2,\ldots,n) \tag{82}$$

şertlerde maksimal bahasyny tapmaly bolsun.

Bu meseläniň çözüwini tapmak üçin $f_j(x_j)$ we $g_{ij}(x_j)$ funksiýalary $f_j(x_j)$ we $g_{ij}(x_j)$ görnüşli bölek çyzykly funksiýalar bilen çalşalyň we (80)–(82) meseleden aşakdaky meselä, ýagny

$$F = \sum_{j=1}^{n} \widehat{f}_j(x_j) \tag{83}$$

görnüşli funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{g}_{ij}(x_j) \le b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{84}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

şertlerde maksimal bahasyny tapmak meselesine geçeliň.

Häzirlikçe (83)–(85) meselede funksiýalaryň görnüşleri kesgitlenmedikdir. Onuň üçin x_j üýtgeýän ululyk $[0, \alpha_j]$ (bu ýerde α_j–x_j üýtgeýän ululygyň maksimal bahasy) kesime degişli bahalary alyp bilýär diýip hasap edeliň. $[0, \alpha_j]$ kesimi r_j–1 sany (x_j=0, $x_{rj}=\alpha_j$) nokatlaryň kömegi bilen r_j bölege böleliň. Bu ýagdaýda $\widehat{f}_j(x_j)$ we $(\widehat{g}_{ij})(x_j)$ funksiýalar

$$\widehat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}; \quad \widehat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}, \tag{86}$$

bu ýerde

$$f_{kj} = f_j(x_k); \ g_{kij} = g_{ij}(x_k) \ (i = 1, 2, \ldots, m); \tag{87}$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}.$$

Ähli k we j üçin $\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \ \lambda_{kj} \ge 0$. Berlen x_j üçin ikiden köp bolmadyk λ_{kj} sanlar položitel we goňşy bolup bilerler.

(86) formuladaky $(f_j)(x_j)$ we $(g_{ij})(x_j)$ üçin aňlatmalary (83) we (84) deňliklerde ornunda goýup, şeýle meselä geleris:

$$\hat{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj} \tag{88}$$

görnüşli funksiýanyň:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij} \le b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{89}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \tag{90}$$

$$\text{ähli } k \text{ we } j \text{ üçin } \lambda_{kj} \geq 0 \tag{91}$$

şertlerde maksimal bahasyny tapmaly.

Alnan mesele çyzykly programmalaşdyrmanyň adaty meselesinden islendik j üçin ikiden köp bolmadyk λ_{kj} sanlaryň položitel we goňşy bolup biljekdigi hakdaky şert bilen tapawutlanýar. Bu şertleriň ýerine ýetmegini (88)–(91) meseläni simpleks usulyň kömegi bilen çözülende berlen meseläniň daýanç we optimal çözüwini kesgitleýän bazis saýlananda gazanyp bolar. Şeýlelikde, umumy ýagdaýda alnan çözüwiň takyklygy $[0, \alpha_j]$ kesimi bölýän ädime bagly bolar. Ädim näçe kiçi boldugyça alnan çözüwiň takyklygy şonça-da uly bolar.

Şeýlelik bilen çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesini bölek çyzykly approksimasiýa usuly bilen çözülişi aşakdaky tapgyrlary öz içine alýar:

1. Her bir seperabel funksiýa bölek çyzykly funksiýa bilen çalyşylýar.

2. (88)–(91) görnüşde çyzykly programmalaşdyrmanyň meselesi gurulýar.

3. Simpleks usulyň kömegi bilen (88)–(91) görnüşli meseläniň çözüwi tapylýar.

4. (80)–(82) görnüşli berlen meseläniň optimal çözüwi tapylýar we maksat funksiýasynyň bu çözüwe degişli bahasy hasaplanylýar.

4.32-nji mesele. Bölek çyzykly approksimasiýa usulyny peýdalanyp, $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9$ funksiýanyň maksimum bahasyny:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 24, \\ x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

şertler ýerine ýetende tapmaly.

Çözülişi. Berlen ýagdaýda maksat funksiýasyny her biri bir argumentli funksiýa bolan iki sany $f_1(X_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$ we $f_2(x_2) = x_2$ funksiýalaryň jemi görnüşinde ýazyp bolar. Şol sebäpli, berlen F funksiýa seperabel funksiýadyr. Ondan başga-da, bu funksiýa iki sany oýuk funksiýanyň jemi hökmünde oýuk funksiýadyr we ýolbererli çözüwler köplügi güberçek köplükdir. Diýmek, bölek çyzykly approksimasiýa usulyny peýdalanyp, maksat funksiýasynyň global maksimumynyň ýakynlaşan bahasyny tapmak bolar.

Berlen meselede diňe maksat funksiýasynyň birinji bölegi, ýagny $f_1(x_1)$ çyzykly däldir. Diýmek, bölek çyzykly funksiýa bilen diňe ony çalşyp, approksimirlemek gerekdir.

Meseläniň ýolbererli çözüwler köplügi gurlan 3.1-nji suratdan görnüşi ýaly, x_1 üýtgeýän ululyk diňe [0; 8] kesime degişli bahalary alyp biler. Bu kesimi $x_{01}=0$, $x_{11}=1$, $x_{21}=2$, $x_{31}=3$, $x_{41}=4$, $x_{51}=5$, $x_{61}=6$, $x_{71}=7$, $x_{81}=8$ nokatlaryň kömegi bilen sekiz sany böleklere böleliň we bu nokatlardaky $f_1(x_1)$ funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň (*3.2-nji tablisa*).

3.2-nji tablisa

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16	−25

(86) we (87) formulalary peýdalanyp, taparys:

$$\hat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81},$$

$$x_1 = 0\lambda_{01} + 1\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81}.$$

$f_1(x_1)$ we x_1 tapylan bahalaryny berlen meseläniň şertlerinde goýup, alarys:

$$\hat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max,$$

$$2\lambda_{11}+4\lambda_{21}+6\lambda_{31}+8\lambda_{41}+10\lambda_{51}+12\lambda_{61}+14\lambda_{71}+16\lambda_{81}+3x_2+x_3=24,$$

$$\lambda_{11}+2\lambda\,\lambda_{21}+3\lambda_{31}+4\lambda_{41}+5\lambda_{51}+6\lambda_{61}+7\lambda_{71}+8\lambda_{81}+2x_2+x_4=15,$$

$$3\lambda_{11}+6\lambda_{21}+9\lambda_{31}+12\lambda_{41}+1\lambda_{51}+18\lambda_{61}+21\lambda_{71}+24\lambda_{81}+2x_2+x_5=24,$$

$$x_2+x_6=4,\ \lambda_{01}+\lambda_{11}+\lambda_{21}+\lambda_{31}+\lambda_{41}+\lambda_{51}+\lambda_{61}+\lambda_{71}+\lambda_{81}=1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.\ \lambda_k \geq 0\ (k=1, 2, \ldots, 8).$$

Alnan mesele üçin P_{01}, P_3, P_4, P_5 we P_6 wektorlar birlik wektorlardyr. Şol sebäpli, meseläniň çözüwi simpleks usulda tapylyp bilner. Ony aşakdaky 4.3-nji tablisada taparys:

i	Ba-zis	C_b	P_0	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	1	0	0	0	0
				P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	P_{61}	P_{71}	P_{81}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	24	0	2	4	6	8	10	12	14	16	3	1	0	0	0
2	P_4	0	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	2	0	1	0	0
3	P_5	0	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{01}	-9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			-9	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	-1	0	0	0	0
1	P_3	0	18	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	3	-1	0	0	0
2	P_4	0	12	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	2	0	1	0	0
3	P_5	0	15	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			0	9	4	1	0	1	4	9	2	25	-1	0	0	0	0
1	P_3	0	6	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	0	1	0	0	-3
2	P_4	0	4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	0	0	1	0	-2
3	P_5	0	7	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	0	0	0	1	-2
4	P_6	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			4	9	4	1	0	1	4	9	2	25	0	0	0	0	1

4.3-nji tablisadan λ_{k1}-leriň tapylan bahalary boýunça $x_1^* = 3$ we $x_2^* = 4$ taparys, diýmek, $X^* = (3;4)$ tötänlikden takyk çözüw bilen gabat gelen ýakynlaşan optimal çözüwdir. Bu çözüwde $F_{max} = 4$ bolar.

V bölüm

DINAMIKI PROGRAMMALAŞDYRMANYŇ MESELELERI

§ 5.1. Dinamiki programmalaşdyrmanyň meseleleriniň umumy häsiýetnamasy hem-de olaryň geometriki we ykdysady manysy

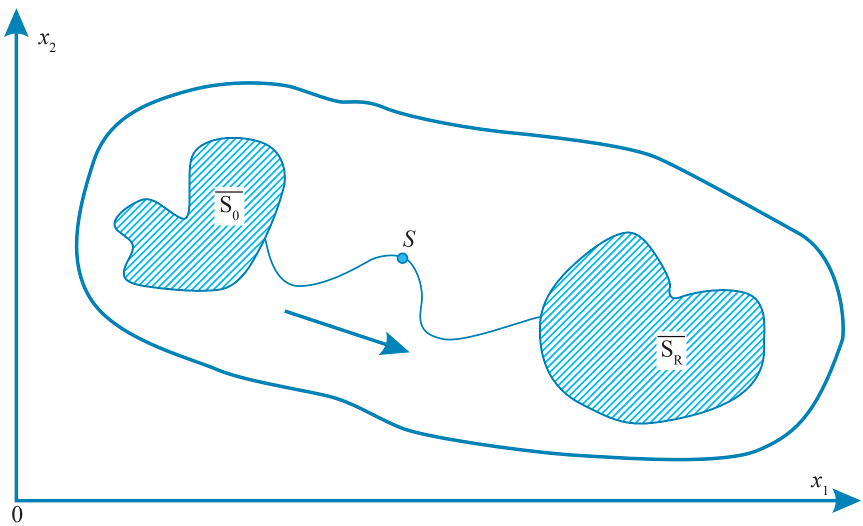
Ýokarda seredilip geçilen çyzykly we çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselelerinde, biz olaryň çözüwini bir tapgyrda ýa-da bir ädimde diýen ýaly tapypdyk. Şeýle meseleler **birtapgyrlaýyn** ýa-da **birädimleýin meseleler** diýen ady aldylar.

Şol meselelerden tapawutlylykda, dinamiki programmalaşdyrmanyň meseleleri köptapgyrlydyrlar ýa-da köpädimlidirler. Başgaça aýdylanda, dinamiki programmalaşdyrmanyň usullary bilen takyk meseleleriň çözüwini tapmaklyk birnäçe tapgyrlary ýa-da ädimleri öz içine alýar we olaryň her birinde ondan öňden gelýän ädimdäki mesele bilen şertlenen bellibir aýratyn meseläniň çözüwi kesgitlenilýär. Şol sebäpli, «dinamiki programmalaşdyrma» adalgasy meseleleriň aýratyn görnüşlerini kesgitlemek bilen çäklenmän, çyzykly we çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselelerine degişli bolup biljek matematiki programmalaşdyrmanyň meseleleriniň aýry-aýry toparlarynyň çözüwini tapmagyň usullaryny häsiýetlendirýär. Muňa garamazdan dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesiniň umumy goýluşyny beýan etmek we onuň çözülişine bir bitewi çemeleşme kesgitlemek maksada laýykdyr.

Mysal üçin, berlen S fiziki ulgam bellibir $S_0 \in \overline{S}_0$ başlangyç ýagdaýda dur we dolandyrylýan bolsun. Şeýlelik bilen bellibir U dolandyryşyň amala aşyrylmagy netijesinde görkezilen ulgam S_0 başlangyç ýagdaýyndan $\overline{S}_R$ ahyrky ýagdaýa geçýär. Şonda her bir amala aşyrylýan U dolandyrmanyň hili $W(U)$ funksiýanyň degişli derejesi bilen häsiýetlendiriler. Bu ýerde wezipe köpsanly mümkin bolan

U dolandyrmalardan $W(U)$ funksiýanyň ekstremal (iň uly ýa-da iň kiçi) $W(U^*)$ bahasyny kesgitleýän U^* dolandyrmany tapmakdan ybaratdyr. Teswirlenen mesele dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesi bolar.

Bu meseläniň geometrik manysyny açyp görkezeliň. Goý, ulgamyň ýagdaýy x_1Ox_2 tekizlikde (*5.1-nji surat*) belli bir S nokat bilen häsiýetlendirilýär we şol nokat, onuň hereketini dolandyrmagyň netijesinde 5.1-nji suratda şekillendirilen çyzygyň ugry bilen mümkin bolan $\overline{S}_0$ başlangyç ýagdaýlaryň oblastyndan ýol berilýän $\overline{S}_R$ ahyrky ýagdaýlaryň oblastyna hereket edýär diýeliň.



5.1-nji surat

Her bir U dolandyryşa nokadyň hereketi ýagny nokadyň hereketiniň her bir traýektoriýasy bilen, degişlilikde belli-bir $W(U)$ funksiýanyň bahasyny degişli edip goýalyň (mysal üçin, şol dolandyryşyň täsiri bilen nokadyň geçen ýolunyň uzynlygyny). Şonda meseläniň maksady, S nokadyň ähli ýolbererlik hereketleriniň traýektoriýalaryndan $W(U)$ funksiýanyň $W(U^*)$ ekstremal bahasyny üpjün edýän U^* dolandyryşyň netijesinde alynýan hereket traýektoriýasyny tapmakdan ybaratdyr. S ulgamyň ýolbererli ýagdaýlary n ölçeg giňişliginiň nokatlary bilen kesgitlenen ýagdaýlarynda dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesi şeýle «traýektoriýanyň» kesgitlenilmegine getirilýär.

Dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesiniň ykdysady manysyna aşakdaky takyk mysallarda seredip geçeliň.

5.1-nji mesele. Tabynlygynda R kärhana işleýän ministrligiň ygtyýarlygyna m ýylyň dowamynda kärhanalary ösdürmekde ulanmak üçin K müň manat möçberinde pul serişdesi goýberildi. Şol serişdeler her bir hojalyk ýylynyň başynda (ýagny t_1, t_2,…,t_m wagt pursatlarynda) kärhanalaryň arasynda paýlanylýar. Şonuň bilen birlikde kärhanalaryň geçen ýyl alan girdejileri hem olaryň arasynda paýlanylýar. Şol sebäpli, garalýan tapgyryň her bir i-nji ýylnyň başynda j-nji kärhana öz ygtyýarlygyna $x_i^{(j)}$ müň manat alýar. Şeýlelik bilen mesele m ýylyň dowamynda kärhanalara bölünip berlen serişdeleriň we olaryň alan girdejileriniň kärhanalar tarapyndan iň köp girdeji almagy üpjün edýän $x_i^{(j)}$ bahalary kesgitlemekden ybaratdyr.

Bu meseläni dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesiniň adalgalarynda teswirlemeli.

Çözülişi. j-nji kärhana i-nji ýylda $x_i^{(j)}$ müň manat bölünip berilýär diýip hasap edip, serişdeleriň şol paýlanylmagyna bellibir u_i dolandyrmanyň amala aşyrylmagy hökmünde garalyň. Şeýlelik bilen, u_i dolandyryş, i-nji ädimde birinji kärhana $x_i^{(1)}$ müň manadyň, ikinji kärhana $x_i^{(2)}$ müň manadyň we ş.m. bölünip berilýändigini aňladar. $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$,…,$x_i^{(k)}$ sanlaryň toplumy serişdeleri paýlamagyň m ädimlerinde u_1, u_2,…,u_m dolandyrmalaryň ähli toplumyny k ölçegli giňişlikde m sany nokatlar ýaly kesgitlär.

Saýlanyp alnan serişdeleri paýlamagyň, ýagny ýerine ýetirilýän dolandyrmalaryň hiline baha bermegiň kriterisi hökmünde m ýyllaryň dowmynda dolandyrmalaryň ähli toplumyna bagly bolan $W=W(u_1,$ $u_2,\ldots,u_m)$ jemi girdejisi alyndy.

Diýmek, mesele W funksiýanyň iň uly bahasyny üpjün edýän u_i^* dolandyrmalary, ýagny serişdeleriň paýlanylmagyny saýlap almakdan ybaratdyr.

Görnüşi ýaly, kesgitlenen mesele köptapgyrlydyr. Bu köptapgyrlylyk meseläniň garalýan wagt tapgyrynyň her ýylynyň başynda kesgitli çözüwleri kabul etmeklik şerti boýunça kesgitlenilýär. Şonuň bilen birlikde, dinamiki programmalaşdyrmanyň birgiden beýleki meselelerinde şeýle köptapgyrlylyk gönüden-göni olaryň şertlerinden gelip çykmaýar. Ýöne çözüwini tapmak maksady bilen şeýle meselelere köptapgyrly meseleler hökmünde garamaklyk maksadalaýykdyr. Şeýle meseläni mysal getirip, ony dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesiniň adalgalarynda teswirläliň.

5.2-nji mesele. Kärhanalaryň ýokary derejede isleg bildirilýän önümlerini öndürmegiň mukdaryny ýokarlandyrmak maksady bilen 5 müň manat möçberinde maýa goýumlary bölünip berildi. i-nji kärhananyň görkezilen serişdelerden x_i müň manat ulanmagy, önüm çykarmagyň artyş mukdary çyzykly däl $f_i\,(x_i)$ funksiýanyň bahasy bilen kesgitlenilýän ululyga ýokarlanmagyny üpjün edýär.

Kärhanalaryň arasynda maýa goýumlaryň paýlanyşygynyň önüm çykarmagy iň uly baha ýokarlandyrmagy üpjün edýänini tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň matematiki goýluşy

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (1)$$

funksiýanyň iň uly bahasyny

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0,\ (i = 1,\ 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

şertler ýerine ýetende tapmaga getirilýär.

Kesgitlenen mesele çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meselesidir. $f_i\,(x_i)$ güberçek (ýa-da oýuk) funksiýa bolan ýagdaýynda, onuň çözüwini, mysal üçin, Lagranžyň köpeldijileri usuly bilen tapmak bolar. Eger $f_i\,(x_i)$ funksiýalar bu şertleri kanagatlandyrmasalar, onda çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleriniň çözüwini tapmagyň belli usullary (1) funksiýanyň iň uly bahasyny kesgitlemäge mümkinçilik bermeýärler. Şonda (1) – (3) meseläniň çözüwini dinamiki programmalaşdyrmanyň usullarynyň kömegi bilen tapmak bolar. Şol maksat bilen başlangyç meselä köptapgyrly ýa-da köpädimli diýip garamak gerek. Ýöne n sany kärhanalaryň arasynda maýa goýumlary paýlamagyň ýolbererli görnüşlerine garamagyň we olaryň netijeliligine baha bermegiň deregine, bir kärhana, iki kärhana we ş.m., ahyrynda n kärhanalara serişdeleri bermegiň netijeliligini derňäris. Şeýlelik bilen, n tapgyrlary alarys. Olaryň her birinde ulgamyň (kärhanalar şol ulgam hökmünde çykyş edýärler) ýagdaýy k sany kärhanalar tarapyndan özleşdirmäge degişli bolan serişdeleriň mukdary bilen beýan edilýär (k=1, 2,…,n). k-njy kärhana bölünip berilýän maýa goýumlaryň mukdary hakyndaky kararlar (k=1, 2,…,n), dolandyrmalar bolup durýarlar. Meseläniň maksady (1) funksiýanyň iň uly bahasyny üpjün edýän dolandyrmalary saýlap almakdan ybaratdyr.

5.3.–5.8-nji meseleleri dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesiniň adalgalarynda teswirläň.

5.3-nji mesele. Önümçilik birleşiginiň düzümine özara baglanyşykly iki sany kärhana girýär. Şol kärhanalary ösdürmek maksady bilen goşmaça serişdeleri girizip, umumylykda önümçilik birleşiginiň işiniň tehniki-ykdysady görkezijilerini gowulandyryp, şeýlelik bilen goşmaça girdeji almagy üpjün edip bolar. Şol girdejiniň ululygy her bir kärhana näçe serişde bölünip berilýändigine we şol serişdeleriň nähili ulanylýandygyna baglydyr.

i sany kärhanany ösdürmek üçin k ýylyň başynda $\alpha_i^{(k)}$ müň manat bölünýär diýip, N ýylyň dowamynda kärhanalaryň arasynda serişdeleri paýlamagyň şol döwürde iň uly girdejini almagy üpjün edýän görnüşini tapmaly.

5.4-nji mesele. Önümçilik birleşiginde her ýylyň başynda onuň düzümine girýän m kärhanalaryň arasynda birleşikde döredilen önümçiligi ösdürmegiň merkezleşdirilen gaznasy doly derejede paýlanýar. Şonda i sany kärhana şol gaznadan x_i müň manadyň bölünip berilmegi netijesinde $f_i\,(x_i)$ müň manada deň bolan goşmaça girdejiniň alynmagy üpjün edilýär. N ýyldan ybarat bolan meýilnama tapgyrynyň başyna önümçiligi ösdürmegiň merkezleşdirilen gaznasyna A müň manat bölünip berildi. Her bir soňraky ýylda şol gaznanyň üsti alnan girdejilerden amala aşyrylýan geçirmeleriň hasabyna doldurylýar. Şol geçirmeler i kärhana üçin $\varphi_i\,(x_i)$ müň manatdan ybaratdyr.

Birleşigiň kärhanalarynyň arasynda önümçiligi ösdürmegiň merkezleşdirilen gaznasyny paýlamagyň N ýylyň dowamynda alnan umumy girdejiniň iň ýokary bahasyny üpjün edip biljek görnüşini tapmaly.

5.5-nji mesele. Önümçilik birleşigi we kärhanalar netijeli işlerini amala aşyrmak üçin ulanýan enjamlaryny wagtal-wagtal çalşyp durmaly. Enjamlar çalşylanda ulanylýan enjamlaryň iş öndürijiligi (ýagny wagt birliginiň dowamynda olarda çykarylýan önümiň mukdary), enjamlary saklamak we abatlamak bilen baglanyşykly harajatlar, alynýan we çalşylýan enjamlaryň bahasy hasaba alynýar. Meýilnamalaşdyrylýan tapgyryň başyna kärhanada t ýylda $R(t)$ manat möçberinde taýýar önüm çykarmaga mümkinçilik berýän täze enjamlar gurnaldy diýeliň. Enjamlary saklamak we abatlamak bilen baglanyşykly her ýyllyk harajatlar $Z(t)$ manada deň. t ýylda enjamlar $S(t)$ manada satylyp bilner, täzeleri bolsa $P(t)$ manada satyn alnyp bilner. Şu şertleriň ählisini hasaba alyp, enjamlary çalyşmagyň optimal meýilnamasyny, ýagny N ýylyň dowamynda enjamlary çalyşmakdan iň uly girdejini üpjün edýän meýilnamany gurmaly.

5.6-njy mesele. n görnüşli bölekler iki stanokda işlenilip bilner. i bölegiň (i=1, 2,…,n) birinji stanokda işlenilýän wagty a_i minuta, şol bölegi ikinji stanokda işlemegiň wagty b_i minuta deň. Bölekleri işlemegiň nobatlylygy birmeňzeşdir: ilki bölekler birinji stanokda, soň bolsa ikinji stanokda işlenýärler. Ähli bölekleri işlemegiň iň az wagtyny üpjün edýän bölekleri işlemegiň nobatlylygyny saýlap almaklyk talap edilýär.

5.7-nji mesele. Wm^3 sygymly ammara n dürli görnüşdäki enjamlary ýerleşdirmek talap edilýär. Enjamyň i görnüşiniň (i=1, 2,…,n) bir birliginiň göwrümi $W_i m^3$-e deň, enjamyň şol görnüşiniň birliginiň bahasy C_i manada deň. Ammarda ýerleşdirilen enjamlaryň umumy bahasynyň iň uly möçberde bolmagy üçin her görnüşiň näçe enjamyny ammara ýerleşdirmelidigini kesgitlemeli.

5.8-nji mesele. Ilatyň sarp edýän harytlaryny öndürýän önümçilik birleşikleri (kärhanalar) harytlary aýry-aýry toplumlar bilen öndürýärler. Şol toplumlaryň möçberi näçe köp bolsa, ol önümçilik birleşikleri üçin has peýdalydyr. Şol sebäpli, her bir birleşik aýry-aýry aýlarda islegleri kanagatlandyrmak üçin zerur bolan möçberden köp önüm çykarmaga höweslidir. Artykmaç önümler bolsa soňraky aýlarda ýerlemek üçin ammarda saklanylýar. Ýöne önümleri ammarda saklamaklyk degişli harajatlar bilen baglanyşykly.

Kärhana N aýyň dowamynda önüm öndürmegiň amatly meýilnamasyny tapmaga ymtylýar diýeliň. Şol aýlaryň her birinde önümiň a_i birligini (i=1, 2,…,N) öndürmek zerur. Meýilnamalaşdyrylýan tapgyryň başynda gorlar b önüme deň, her bir meýilnamalaşdyrylýan aýda bolsa kärhana d_i-den köp bolmadyk önüm birligini öndürip bilýär. Şol bir wagtyň özünde ammarda A önümden köp bolmadyk möçber saklanyp bilinýär. a_j (j=1, 2,…,k) önümi öndürmek bilen baglanyşykly harajatlar c_i manatdan ybarat, bir önümi bir aýyň dowamynda saklamak bilen şertlenen harajatlar β deň. Önümi öndürmek we saklamak boýunça harajatlaryň umumy pul möçberiniň iň az bahada boljak, zerur önümlere bildirilýän islegi bolsa, öz wagtynda we doly kanagatlandyrjak önümleri çykarmagyň meýilnamasyny kesgitlemeli.

§ 5.2. Dinamiki programmalaşdyrmanyň usuly bilen meseleleri çözmek

Öňki paragrafda dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesiniň goýluşy görkezildi we onuň geometriki we ykdysady manysy berildi. Indi umumy görnüşde bu meseläniň çözülişine garalyň. Onuň üçin käbir belgilemeleri we indiki beýanlar üçin zerur bolan düzgünleri hem-de tassyklamalary girizeliň.

Garalýan S ulgamyň ýagdaýy k ädimde (k=1, 2,…,n) S ulgamyň $X^{(k-1)}$ ýagdaýdan $X^{(k)}$ ýagdaýa geçmegini üpjün edýän u_k dolandyryşy amala aşyrmagyň netijesinde alnan $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ sanlaryň toplumy bilen kesgitlenilýär diýip hasap edeliň. Şonda S ulgamyň geçen $X^{(k)}$ ýagdaýy $X^{(k-1)}$ degişli ýagdaýa hem-de saýlanyp alnan u_k dolandyryşa bagly we S ulgamyň $X^{(k-1)}$ ýagdaýa nähili tertipde gelendigine bagly däl diýip çaklalyň.

Soňra, k ädimi amala aşyrmagyň netijesinde şonuň ýaly $X^{(k-1)}$ ulgamyň başlangyç ýagdaýyna hem-de saýlanyp alnan u_k dolandyryşa bagly we W_k ($X^{(k-1)}$, u_k) deň bolan bellibir girdeji ýa-da utuş üpjün edildi diýip hasap edeliň. Şonda n ädimde umumy girdeji ýa-da utuş aşakdaka deňdir:

$$F = \sum_{k=1}^{n} W_k\left(X^{(k-1)}, u_k\right). \tag{4}$$

Şeýlelik bilen, dinamiki programmalaşdyrmanyň garalýan meselesini kanagatlandyrýan iki şerti kesgitledik. Birinji şert, adatça **netije bolmazlyk şerti** diýlip, ikinji şert meseläniň maksat funksiýasynyň **additiwlik şerti** diýlip atlandyrylýar.

5.2.1. Bellmanyň optimallyk prinsipi

Dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesi üçin birinji şertiň ýerine ýetirilmegi, onuň üçin **Bellmanyň optimallyk prinsipini** kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Ondan öňürti dolandyryşyň optimal strategiýasyna kesgitleme bereliň. **Dolandyryşyň optimal strategiýasy** diýip amala aşyrylmagynyň netijesinde S ulgam n ädimde $X^{(0)}$ başlangyç ýagdaýdan $X^{(k)}$ ahyrky ýagdaýa geçende (4) funksiýa iň uly baha berýän dolandyryşlaryň $U^{*}=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$ toplumyna aýdylýar.

Optimallyk prinsipi. Nobatdaky ädimiň öňünde ulgamyň ýagdaýy nähili bolsa-da, şol ädimde dolandyryşy, şol ädimdäki utuşyň we soňraky ädimleriň ählisin**däki optimal utuşyň jemi iň ýokary baha eýe bolar ýaly edip saýlap almaly.**

Diýmek, ilki n-nji ädimde dolandyryşyň optimal strategiýasyny tapmaly, soňra soňky iki ädimde, ondan soňra soňky üç ädimde we ş.m., tä birinji ädime çenli saýlap alyp bolar. Şeýlelik bilen, dinamiki programmalaşdyrmanyň garalýan meselesiniň çözüwine soňraky n-nji ädimdäki optimal çözüwi kesgitlemekden başlamak maksadalaýykdyr. Şol çözüwi tapmak üçin, iň yzky ädimiň öňündäki ädimiň nähili tamamlanyp biljekdigi hakynda dürli çaklamalary etmegiň zerurdygy görünýär. Şony hasaba alyp hem, $W_k(X^{(k-1)}, u_k)$ funksiýanyň iň uly bahasyny üpjün edýän u_n^0 dolandyryşy saýlap almalydyr. Öňki ädimiň nähili tamamlanandygy hakyndaky kesgitli çaklamalarda saýlanyp alnan u_n^0 dolandyryşa **şertli optimal dolandyryş** diýilýär. Diýmek, optimallyk prinsipi öňdäki ädimiň islendik mümkin bolan netijesi üçin, her bir ädimde şertli optimal dolandyryşy tapmagy talap edýär.

Ony tejribede amala aşyrmak üçin, optimallyk prinsipine matematiki kesgitleme bermek zerurdyr. Onuň üçin käbir goşmaça belgilemeleri girizeliň. $U=(u_1, u_2,\ldots,u_n)$ dolandyryşyň optimal strategiýasynyň amala aşyrylmagynda S ulgamyň $X^{(0)}$ başlangyç ýagdaýdan $X^{(n)}$ ahyrky ýagdaýa geçende n ädimde alynýan iň uly girdejini $F_n(X^{(0)})$ arkaly belgiläliň. Galan n-k ädimlerde dolandyryşyň optimal strategiýasynda $X^{(k)}$ islendik ýagdaýdan $X^{(n)}$ ahyrky ýagdaýa geçilende alynýan iň uly girdejini $F_{(n-k)}(X^{(k)})$ arkaly belgiläp alýarys:

$$F_n(X^{(0)}) = \max_{u_{n+1}}[W_k(X^{(0)}, u_1) + \cdots + W_k(X^{(n-1)}, u_n)]; \qquad (5)$$

$$F_{n-k}(X^{(k)}) = \max_{u_{n+1}}[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1}) + \cdots + F_{n-k-1}(X^{(k+1)})].$$

$$(k=0,1\ldots, n\text{-}1). \qquad (6)$$

Soňky aňlatma optimallyk prinsipiniň matematiki ýazgysyny görkezýär we **Bellmanyň esasy funksional deňlemesi** ýa-da rekurrent gatnaşygy diýlip at berilýär. Şu deňlemäni ulanyp, dinamiki programmalaşdyrmanyň seredilýän meselesiniň çözüwini tapýarys. Bu ýagdaý barada has jikme-jik durup geçeliň.

(6) rekurrent gatnaşykda $k = n - 1$ diýip hasap edip, aşaky funksional deňlemäni alýarys:

$$F_1(X^{(n-1)}) = \max_{u_n}[W_n(X^{(n-1)}, u_n) + F_0(X^{(n)})]. \tag{7}$$

Bu deňlemede F_0 $(X^{(n)})$ belli diýip hasap edilýär. Indi (7) deňlemäni ulanyp we S ulgamyň $(n-1)$-nji ädimde boljak ähli mümkin bolan ýolbererli $X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)}, \ldots, X_m^{(n-1)}$ ýagdaýlaryna degişli,

$$u_n^0(x_1^{(n-1)}),\ u_n^0(x_2^{(n-1)}), \cdots, u_n^0(x_m^{(n-1)}),$$

şertli optimal çözüwleri we (7) funksiýanyň degişli bahalaryny tapýarys:

$$F_1^0(X_1^{(n-1)}), F_1^0(X_2^{(n-1)}), \cdots, F_1^0(X_m^{(n-1)}), \cdots.$$

Şeýlelik bilen, S ulgamyň $(n-1)$-nji ädimden soňky islendik ýolbererli ýagdaýynda n-nji ädimdäki şertli optimal dolandyryşy tapýarys. Başgaça aýdylanda, $(n-1)$-nji ädimden soň ulgam nähili ýagdaýda bolanda hem, n-nji ädimde nähili çözüwiň kabul etmelidigi bize eýýäm mälimdir. (7) funksiýanyň degişli bahasy hem mälimdir.

Indi $k = n-2$ bolan ýagdaýdaky funksional deňlemä seredeliň:

$$F_2(X^{(n-1)}) = \max_{u_{n-1}}[W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1}) + F_1(X^{(n-1)})]. \tag{8}$$

$X^{(n-1)}$-iň ähli ýolbererli bahalary üçin F_2-niň bahasyny tapmak üçin, $W_{(n-1)}$ $(X^{(n-2)})$, $u_{(n-1)}$ we F_1 $(X^{(n-1)})$ bilmegiň zerurdygy düşnüklidir. F_1 $(X^{(n-1)})$-iň bahalary hakda aýdanymyzda bolsa, olar eýýäm kesgitlenildi. Şol sebäpli $(X^{(n-2)})$ ýolbererli bahalaryň bellibir toplumynda we degişli $u_{(n-1)}$ dolandyryşlarynda $W_{(n-1)}$ $(X^{(n-2)})$, $u_{(n-1)}$ üçin hasaplamalary ýerine ýetirmeli. Şol hasaplamalar her bir $(X^{(n-2)})$ üçin u_{n-1}^0 şertli optimal dolandyryşy kesgitlemäge mümkinçilik berer. Şeýle dolandyryşlaryň her biri, indiki ädimde eýýäm saýlanyp alnan dolandyryş bilen bilelikde soňraky iki ädimde girdejiniň iň uly bahasyny üpjün edýär.

Ýokarda beýan edilen tapgyrlaýyn ýagdaýy yzygiderli amala aşyryp, ahyrynda birinji ädime ýeteris. Bu ädimde ulgamyň nähili ýagdaýda bolup biljekdigi bize mälimdir. Şol sebäpli, ulgamyň ýolbererli ýagdaýlary hakynda çaklamalary berjaý etmeklik talap edilmeýär we diňe her bir soňraky ädimlerde eýýäm kabul edilen şertli optimal dolandyryşlary hasaba alyp, iň gowy dolandyryşy saýlap almaklyk galýar.

Şeýlelik bilen ahyrkysyndan başkysyna çenli ählisini tapgyrlaryň yzygiderli geçmegiň netijesinde n ädimlerde utuşyň iň uly bahasyny kesgitleýäris we olaryň her biri üçin şertli optimal dolandyryşy tapýarys.

Dolandyryşyň optimal strategiýasyny tapmak, ýagny meseläniň gözlenilýän çözüwini kesgitlemek üçin, indi ädimleriň ähli yzygiderliligini başdan ahyryna çenli geçmeli. Hususan-da, birinji ädimde u_1^* amatly dolandyryş hökmünde tapylan u_1^0 şertli optimal dolandyryşy alalyň. Ikinji ädimde X_1^* ýagdaýy taparys, ulgamy bu ýagdaýa u_1^* dolandyryş geçirýär. Bu ýagdaý tapylan u_2^0 şertli optimal dolandyryşy kesgitleýär, ony indi amatly diýip hasap ederis. u_2^0 dolandyryş belli bolsa onuň kömegi bilen X_2^* ýagdaýy tapýarys, diýmek, u_3^*-i kesgitleýäris we ş.m. Şunuň netijesinde meseläniň çözüwini, ýagny mümkin bolan iň uly girdejini we aýry-aýry ädimlerde amatly dolandyryşlary öz içine alýan $U^*=(u_1^*, u_2^*,\ldots,u_n^*)$ dolandyryşyň optimal strategiýasyny tapýarys.

Şeýlelik bilen, umumy görnüşde dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesiniň çözüwiniň tapylyşyna garadyk. Beýan edilenlerden görnüşi ýaly, bu çözüw ýeterlik derejede çylşyrymly. Şol sebäpli aşakda dinamiki programmalaşdyrmanyň umumy meselesini adalgalarda goýmaga ýol berýän iň bir ýönekeý meseleleriň çözüwini tapmaklyga garaldy. Kompýuteri ulanmaklyk ýokarda beýan edilen çemeleşmegiň esasynda has çylşyrymly amaly ähmiýetli meseleleriň çözüwini tapmaga mümkinçilik berýär.

Dinamiki programmalaşdyrmanyň usullaryny ulanyp, hususy ýagdaý üçin enjamlardan peýdalanmak hakynda 5.5-nji meseläniň we gorlary paýlamak hakynda 5.2-nji meseläniň çözüwlerini tapalyň.

5.9-njy mesele. Amala aşyrylýan hasabat döwrüniň (meselem, bäş ýyllygyň) başynda kärhanada täze enjamlar gurnaldy. Şol enjamlaryň öndürijiliginiň kärhana tarapyndan ony ulanmagyň wagtyna baglylygy, şeýle hem enjamlary ulanmagyň dürli wagtlarynda olary saklamak we abatlamak boýunça harajatlaryň baglylygy 5.1-nji tablisada berilýär.

5.1-nji tablisa

	Enjamlaryň ulanylýan döwrüniň τ wagty (ýyl)					
	0	1	2	3	4	5
Bahasy boýunça (müň manat) önümiň ýyllyk çykarylyşy $R(\tau)$	80	75	65	60	60	55
Enjamlary saklamak we abatlamak bilen baglanyşykly her ýylky çykdajylar $Z(\tau)$ (müň manat)	20	25	30	35	45	55

Öň gurnalan enjamlara meňzeş täze enjamlary satyn almak we gurnamak bilen baglanyşykly harajatlaryň 40 müň manada deňdigini, çalşyrylýan enjamlaryň bolsa hasapdan çykarylýandygyny bilip, umumy girdejiniň iň uly möçberini üpjün etjek hasabat döwrüniň dowamynda enjamlary çalşyrmagyň meýilnamasyny düzmeli.

Çözülişi. Bu meselä dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesi hökmünde garamak bolar. Onda *S* ulgam hökmünde enjamlar çykyş edýär. Bu ulgamyň ýagdaýlary enjamlary ulanmagyň (ulanylýan döwür) hakykat ýüzündäki τ wagty bilen kesgitlenilýär, ýagny ýeke-täk τ ölçeg bilen beýan edilýär.

Enjamlary çalşyrmak we galdyrmak hakynda her ýylyň başynda kabul edilýän kararlar dolandyryş hökmünde çykyş edýärler. u_1 arkaly enjamlary galdyrmak hakyndaky we u_2 arkaly enjamlary çalşyrmak hakyndaky karary belgiläliň. Şonda mesele her ýylyň başynda kabul edilýän kararlar bilen kesgitlenilýän, hasabat döwrüniň dowamynda kärhananyň umumy girdejisiniň iň uly möçberini üpjün edýän dolandyryşyň strategiýasyny tapmakdan ybaratdyr.

Şeýlelik bilen, biz başdaky meseläni dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesiniň adalgalarynda kesgitledik. Bu mesele additiwlik we soňraky şertiň ýoklugy häsiýetlerine eýedir. Diýmek onuň çözüwini iki tapgyrda berjaý edilýän dinamiki programmalaşdyrmanyň meselesini çözmegiň ýokarda beýan edilen algoritminiň kömegi bilen tapyp bolar. Birinji tapgyrda hasabat döwrüniň 5-nji ýylynyň başyndan 1-nji ýylynyň başyna tarap hereketde enjamlaryň her bir ýolbererli ýagdaýy üçin şertli optimal dolandyryşy (çözüwi) taparys. Ikinji tapgyrda hasabat döwrüniň 1-nji ýylynyň başyndan 5-nji ýylynyň başyna tarap hereketde şertli optimal çözüwlerden her ýyl üçin hasabat döwründe enjamlary çalşyrmagyň optimal meýilnamasyny düzeliň.

Şertli optimal çözüwleri kegitlemek üçin ilkibada Bellmanyň funksional deňlemesini düzmeklik zerur.

k-njy ýylyň başyna ($k=1, 2, 3, 4, 5$) iki karardan diňe biriniň, ýagny enjamlary çalşyrmalymy ýa-da çalşyrmaly däldigi hakyndaky kararyň kabul edilip bilinjekdigini göz öňünde tutsak, onda k-njy ýylda kärhananyň girdejisi aşakdakydan ybarat bolar:

$$F_k(\tau^{(k)}, u_k)_k = \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}), u_1 - \text{kararda} \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n, u_2 - \text{kararda}, \end{cases}$$

bu ýerde $\tau^{(k)}$ – k-njy ýylyň başyna (k=1, 2, 3, 4, 5) enjamlaryň işlän möhleti; u_k– bu k-njy ýylyň başyna çenli amala aşyrylýan dolandyryş; C_n – täze enjamlaryň bahasy.

Şeýlelik bilen, bu ýagdaýda Bellmanyň dolandyryşy aşaky görnüşde bolar:

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{\tau}\begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n + F_{k+1}(\tau^{(k)} = 1). \end{cases} \tag{9}$$

Indi (9) dolandyryşy ulanyp, başlangyç meseläniň çözüwini tapmaga girişýäris. Bu çözüwi hasabat döwrüniň soňky (5-nji) ýyly üçin şertli optimal dolandyryşy (çözüwi) kesgitlemekden başlaýarys. Onuň üçin hasabat döwrüniň şol ýylynyň başyna enjamlaryň köpsanly ýolbererli ýagdaýlaryny tapýarys. Hasabat döwrüniň başynda ($\tau^{(1)}$=0) täze enjamlaryň barlygy sebäpli, enjamlaryň işlän döwri 5-nji ýylyň başyna 1, 2, 3 we 4 ýyl bolup biler. Diýmek ulgamyň wagtyň şol tapgyrlarynda ýolbererli ýagdaýlary aşakdakylardan ybarat: $\tau_1^{(5)}=1$; $\tau_2^{(5)}=2$; $\tau_3^{(5)}=3$; $\tau_4^{(5)}=4$. Bu ýagdaýlaryň her biri üçin şertli optimal çözüwi we $F_5(\tau^{(5)})$ funksiýanyň degişli bahasyny taparys. (9) dolandyryşy we $F_6(\tau^{(k+1)})=0$ bolýandygyny (sebäbi hasabat döwrüniň soňky ýylyna garalýar) ulanyp, alýarys:

$$F_5(\tau^{(5)}) = \max\begin{cases} R(\tau^{(5)}) - Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n. \end{cases} \tag{10}$$

Indi (10) deňlikde ($\tau^{(5)}$) ýerine onuň 1-e deň bolan bahasyny goýup we 5.1-nji tablisanyň maglumatlaryny hasaba alyp, tapýarys:

$$F_5(\tau_1^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(5)} = 1) - Z(\tau^{(5)} = 1), \\ R(\tau^{(5)} = 0) - Z(\tau^{(5)} = 0) - C_n \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75-25, \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 50, u^0 = u_1.$$

Diýmek, bu ýagdaýda şertli optimal çözüw u_1 bolýar.

Hasabat döwrüniň bäşinji ýylynyň başyna enjamlaryň beýleki ýolbererli ýagdaýlary üçin meňzeş hasaplamalary geçireliň:

$$F_5(\tau_2^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30, \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 35, u^0 = u_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60-35, \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 25, u^0 = u_1;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+20 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 70, u^0 = u_2.$$

Hasaplamalardan alnan netijeler – 5.2-nji tablisada berlendir.

5.2-nji tablisa

$\tau^{(5)}$ – enjamlaryň işlän möhleti (ýyl)	$F_5(\tau^{(5)})$ – funksiýanyň bahasy (müň manat)	u^0 – şertli optimal çözüw
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Indi hasabat döwrüniň 4-nji ýylynyň başyna enjamlaryň mümkin bolan ýagdaýlaryna garalyň. Ýolbererli ýagdaýlar aşakdakylardan ybaratdyr: $\tau_1^{(4)} = 1; \tau_2^{(4)} = 2; \tau_3^{(4)} = 3$. Olaryň her biri üçin şertli optimal çözüwi we $F_4(\tau^{(4)})$ funksiýanyň degişli bahasyny kesgitleýäris. Bu maksat bilen (9) deňlemäni hem-de 5.1 we 5.2-nji tablisalaryň maglumatlaryny ulanýarys. Hususan-da, $\tau_1^{(4)}=1$ üçin alýarys:

$$F_4(\tau_1^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(4)}=1) - Z(\tau^{(4)}=1) + F_5(\tau^{(5)}=2) \\ R(\tau^{(4)}=0) - Z(\tau^{(4)}=0) - C_n + F_5(\tau^{(5)}=1) \end{Bmatrix}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 85, u^0 = u_1.$$

Şonuň ýaly-da tapýarys:

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+25 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 75, u^0 = u_2.$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+20 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 70, u^0 = u_2.$$

Hasaplamalardan alnan netijeler 5.3-nji tablisada berlendir.

5.3-nji tablisa

$\tau^{(4)}$ – enjamlaryň işlän möhleti (ýyl)	$F_4(\tau^{(4)})$ – funksiýanyň bahasy (müň manat)	u^0– şertli optimal çözüw
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Indi hasabat döwrüniň 3-nji ýylynyň başyna enjamlaryň her bir ýolbererli ýagdaýy üçin şertli optimal çözüwi kesgitläliň. Şeýle ýagdaýlar aşakdakylardan ybaratdyr: $\tau_1^{(3)} = 1, \tau_2^{(3)} = 2$. Şeýlelik bilen (9) deňlemä laýyklykda alýarys:

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 2) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix};$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 3) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix}.$$

5.1 we 5.3-nji tablisalaryň maglumatlaryny ulanyp, alýarys:

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 120, u^0 = u_1.$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 105, u^0 = u_2.$$

Soňky aňlatmadan görnüşi ýaly, eger hasabat döwrüniň 3-nji ýylynyň başyna enjamlaryň işlän möhleti iki ýyldan ybarat bolsa, onda u_1 ýa-da u_2 çözüwiň haýsysynyň kabul ediljegine garamazdan, girdejiniň ululygy şolbir baha eýe bolar. Diýmek, şertli optimal çözüw hökmünde islendigini, mysal üçin, u_2-ni alyp bolar. $F_3(\tau^{(3)})$ üçin alnan bahalar we degişli şertli optimal çözüwleri 5.4-nji tablisada berlendir.

5.4-nji tablisa

$\tau^{(3)}$ – enjamlaryň işlän möhleti (ýyl)	$F_4(\tau^{(3)})$ – funksiýanyň bahasy (müň manat)	u_0 – şertli optimal çözüw
1	120	u_1
2	105	u_2

Indi hasabat döwrüniň 2-nji ýylynyň başyna enjamlaryň ýolbererli ýagdaýlaryna garalyň. Wagtyň şol pursatyna enjamlaryň işlän möhletiniň diňe bir ýyla deň bolup biljekdigi aýandyr. Şol sebäpli «enjamlary galdyrmak» ýa-da «olary çalşyrmak» diýen diňe iki mümkin bolan çözgütleri deňeşdirmek galýar. Şeýle deňeşdirmäniň derňewi 5.5-nji tablisanyň maglumatlary bilen häsiýetlendirilýär.

5.5-nji tablisa

$\tau^{(2)}$ **enjamlaryň işlän möhleti (ýyl)**	$F_2(\tau^{(2)})$ **funksiýanyň bahasy (müň manat)**	u^0 **şertli optimal çözüw**
1	155	u_1

Şerte laýyklykda hasabat döwrüniň başyna täze enjamlar gurnaldy ($\tau_1^{(1)}=0$). Şol sebäpli enjamlary saklamagyň we çalşyrmagyň arasynda saýlap almak meselesi ýok: enjamlary galdyrmaly. Diýmek, ýagny şertli optimal çözüw u_1, funksiýanyň bahasy bolsa aşakdakydan ybarat:

$$F_1(\tau_1^{(1)}) = R(\tau_2^{(1)} = 0) - Z(\tau_1^{(1)} = 0) + F_2(\tau^{(1)} = 1) =$$
$$= 80 - 20 + 155 = 215.$$

Şeýlelik bilen kärhananyň iň uly girdejisi 215 müň manada deň bolup biler. Ol 5.5, 5.4, 5.3 we 5.2-nji tablisalaryň esasynda, ýagny hasabat döwrüniň 1-nji ýylynyň başyndan 5-nji ýylynyň başyna çenli ähli garalan ädimleri geçmekden ybarat bolan hasaplaýyş işiniň ikinji tapgyrynyň amala aşyrylmagy netijesinde alynýan enjamlary çalşyrmagyň optimal meýilnamasyna gabat gelýär. Hasabat döwrüniň 1-nji ýyly üçin «enjamlary galdyrmaly» diýen ýeke-täk çözgüt bolup biler. Diýmek, hasabat döwrüniň 2-nji ýylynyň başyna enjamlaryň işlän möhleti bir ýyldan ybaratdyr. Şonda 4.5-nji tablisanyň maglumatlaryna laýyklykda hasabat döwrüniň 2-nji ýyly üçin amatly karar enjamlary galdyrmak hakyndaky karardyr. Şeýle karary berjaý etmeklik hasabat döwrüniň 3-nji ýylynyň başyna enjamlaryň işlän möhletiniň iki ýyla deň bolup durýandygyna getirýär. Enjamlaryň bu işlän möhletinde (*5.4-nji tablisa seret*) hasabat döwrüniň 3-nji ýylynda olary çalşyrmak gerek. Enjamlar çalşyrylanyndan soň, olaryň işlän möhleti hasabat döwrüniň 4-nji ýylynyň başyna bir ýyldan ybarat bolar. 4.3-nji tablisadan görnüşi ýaly, enjamlaryň bu işlän möhletinde olary çalşyrmagyň geregi ýok. Şol sebäpli hasabat döwrüniň 5-nji ýylynyň başyna enjamlaryň işlän möhleti iki ýyl bolup, enjamlary çalşyrmaklyk maksadalaýyk däl (*4.2-nji tablisa seret*) bolar.

Şeýlelik bilen, enjamlary çalşyrmagyň 5.6-njy tablisadaky optimal meýilnamasyny alýarys.

5.6-nji tablisa

	Hasabat döwrüniň ýyllary				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Amatly karar	Enjamlary galdyrmaly	Enjamlary galdyrmaly	Enjamlary çalşyrmaly	Enjamlary galdyrmaly	Enjamlary galdyrmaly

5.10-njy mesele. S=700 müň manat, n=3 bolanda we X_i, $f_i(X_i)$ bahalary bolsa 5.7-nji tablisadaky ýaly bolsa, 5.2-nji meseläniň çözüwini tapmaly.

5.7-nji tablisa

X_i – maýa goýumlaryň möçberi (müň manat)	**Maýa goýumlaryň möçberine baglylykda $f_i(X_i)$ önümleri çykarmagyň ösüşi (müň manat)**		
	1-nji kärhana	**2-nji kärhana**	**3-nji kärhana**
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Çözülişi. Dinamiki programmalaşdyrmanyň bu meselesini çözmek üçin Bellmanyň rekurrent gatnaşygyny düzmeli. Garalýan ýagdaýda bu gatnaşyk aşakdaky funksional deňlemelere getirýär:

$$\varphi_1(X) = \max_{0 \le X_1 \le X}\{f_1(X_1)\};$$

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \le X_2 \le X}\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}; \qquad (11)$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$\varphi_{n-1}(X) = \max_{0\le X_{n-1}\le X}\{f_{n-1}(X_{n-1}) + \varphi_{n-2}(X - X_{n-1})\}.$$

Bu ýerde φ_i (X) $(i=1,\ \dots, n-1)$ funksiýalar kärhanalaryň arasynda maýa goýumlaryň X müň manadynyň degişli paýlanmagynda önümleri çykarmagyň iň uly ösüşini kesgitleýärler. Şonuň üçin, φ_n (X) funksiýanyň bahasy diňe bir $X=S$ baha üçin hasaplanylýar, sebäbi ähli n kärhanalar üçin bölünip berilýän maýa goýumlaryň möçberi S müň manada deň.

Indi (11) rekurrent gatnaşyklary we 5.7-nji tablisanyň başlangyç maglumatlaryny peýdalanyp, meseläniň çözüwini tapmaga, ýagny kärhanalaryň arasynda maýa goýumlaryň ilki şertli optimal, soňra bolsa amatly paýlanyşygyny kesgitlemäge girişýäris.

Birinji kärhananyň ösüşi üçin bölünip berilýän şertli optimal maýa goýumlaryny kesgitlemekden başlaýarys. Bu maksat bilen 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 we 700 bahalary kabul edýän her bir X üçin φ_1 (X)-iň bahalaryny tapýarys.

$X=0$ bolsa; $\varphi_1(0)=0$ bolar. Indi $X=100$ bahany alalyň. Şonda, 5.7-nji tablisany ulanyp, alýarys:

$$\varphi_1(100) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{30} \end{Bmatrix} = 30,\ X_1^0 = 100.$$

Bu ýerde birinji setir X_1 çözgüde, ikinji setir bolsa $X_1=100$ çözgüde laýyk gelýär. Birinji çözüwde önümi çykarmagyň ösüşiniň üpjün edilmeýändigi, ikinji çözüwde 30 müň manada deň bolýandygy sebäpli, $X_1^0=100$ şertli optimal çözüw bolup durýar.

Bu usul bilen X-iň beýleki bahalary üçin şertli optimal çözüwleri tapýarys:

$$\varphi_1(200) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ \boxed{50} \end{Bmatrix} = 50,\ \ X_1^0 = 200;$$

$$\varphi_1(300) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ \boxed{90} \end{Bmatrix} = 90,\ \ X_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ \boxed{110} \end{Bmatrix} = 110, \quad X_1^0 = 400;$$

$$\varphi_1(500) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ \boxed{170} \end{Bmatrix} = 170, \quad X_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ \boxed{180} \end{Bmatrix} = 180, \quad X_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210, \quad X_1^0 = 700.$$

Hasaplamalaryň netijeleri we alnan degişli şertli optimal çözüwler 5.8-nji tablisada berlendir.

5.8-nji tablisa

Birinji kärhana bölünip berilýän X maýa goýumlarynyň möçberi (müň manat)	**Önüm çykarmagyň $\varphi_i(X)$ iň uly ösüşi (müň manat)**	**Birinji kärhana bölünip berilýän X_1^0 maýa goýumlaryň şertli optimal möçberi (müň manat)**
1	**2**	**3**
0	0	0
100	30	100
200	50	200

1	2	3
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Indi 5.8 we 5.7-nji tablisalaryň maglumatlaryny ulanyp, ikinji kärhana bölünip berilýän maýa goýumlaryň şertli optimal möçberlerini kesgitleýäris:

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \le X2 \le X}\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}$$

funksiýanyň bahasyny X-iň 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 we 700-e deň bolan her bir ýolbererli bahalary üçin tapalyň:

$$\varphi_2(0) = 0,\ X_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ \boxed{50+0} \end{Bmatrix} = 50,\ X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ \boxed{50+30} \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80,\ X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ \boxed{80+30} \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110,\quad X_2^0 = 300;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ \boxed{150+0} \end{Bmatrix} = 150,\ X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ \boxed{190+0} \end{Bmatrix} = 190,\ X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max\left\{\begin{matrix} 0+180 \\ \boxed{50+170} \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{matrix}\right\} = 220,\ \ X_2^0 = 600;$$

$$\varphi_2(700) = \max\left\{\begin{matrix} 0+210 \\ 50+180 \\ \boxed{80+170} \\ 90+10 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{matrix}\right\} = 210,\ \ X_2^0 = 700.$$

Alnan netijeler we ikinji kärhana bölünip berilýän maýa goýumlaryň tapylan şertli optimal möçberleri 5.9-njy tablisada berlendir.

5.9-njy tablisa

Iki kärhana bölünip berilýän X maýa goýumlaryň möçberi (müň manat)	**Önüm çykarmagyň iň uly ösüşi $\varphi_2(X)$ (müň manat)**	**Ikinji kärhana bölünip berilýän X_2^0 maýa goýumlaryň şertli optimal möçberi (müň manat)**
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Indi 5.9 we 5.7-nji tablisalaryň degişli maglumatlaryny ulanyp:

$$\varphi_3(X) = \max_{(0 \le X3 \le X)} \{f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3)\}$$

funksiýanyň bahalaryny tapmaga girişýäris.

Bu ýagdaýda kärhanalaryň sanynyň 3-e deňdigi sebäpli, diňe bir X=700 baha üçin hasaplamalary ýerine ýetirýäris:

$$\varphi_3(700) = \max \begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ \boxed{220+50} \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270, \quad X_3^0 = 700.$$

Diýmek, önüm çykarmagyň iň uly ösüşi 270 müň manatdan ybaratdyr. Bu ýagdaý üçünji kärhana 600 müň manat, birinji we ikinji kärhanalaryň hersine 100 müň manat bölünip berlende ýerine ýetýär. Şonda, 5.9-njy tablisadan görnüşi ýaly, ikinji kärhana 100 müň manat bölünip berilmeli.

Şeýlelik bilen, kärhanalaryň arasynda maýa goýumlary paýlamagyň optimal meýilnamasyny aldyk, oňa laýyklykda önüm çykarmagyň iň uly ösüşi üpjün edilýär.

Dinamiki programmalaşdyrmanyň usullaryny ulanyp, 5.11-5.14-nji meseleleri çözüň.

5.11-nji mesele. Tablisada berlen enjamlaryň iş öndürijiligi hakyndaky başlangyç maglumatlarda we olary saklamak boýunça her ýylky harajatlarda 5.9-njy meseläniň şertlerinde enjamlary çalşyrmagyň optimal meýilnamasyny düzmeli. Garalýan tapgyryň başyna täze enjamlaryň gurnalandygy, ulanylan enjamlar hasapdan çykarylýandygy we täze enjamlaryň bahasy bolsa 10 müň manada deňdigi belli.

	Enjamlaryň ulanylan döwri (τ ýyl)									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
τ ýyl möhlet bilen işlän enjamlarda önümiň ýyllyk çykarylyşy, $R(\tau)$ (müň manat)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Enjamlary saklamak we abatlamak bilen baglanyşykly her ýylky harajatlar, $Z(\tau)$ (müň manat)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

5.12-nji mesele. Tablisada berlen X_i we $f_i\ (X_i)$ baradaky başlangyç maglumatlarda, şeýle hem S=100 müň manat bolýandygyny hasaba alyp, 5.2-nji meseläniň şertlerinde dört kärhananyň arasynda maýa goýumlary paýlamagyň optimal meýilnamasyny düzmeli.

Maýa goýumlaryň möçberi, X_i (müň manat)	**Maýa goýumlaryň möçberine baglylykda önümleri çykarmagyň $f_i\ (X_i)$ ösüşi (müň manat)**			
	1-nji kärhana	2-nji kärhana	3-nji kärhana	4-nji kärhana
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

5.13-nji mesele. W=90 m^3, V_1=24 m^3, V_2=19 m^3, V_3=16 m^3, C_1=960 manat, C_2=500 manat, C_3=250 manat bolanda 5.7-nji meseläniň şertlerinde ammary doldurmagyň optimal meýilnamasyny tapyň.

Jogaby: Ammarda I we II görnüşli enjamlaryň hersinden üçüsini ýerleşdirmeli.

5.14-nji mesele. Meýilnamalaşdyrylýan tapgyryň başynda gorlar 2000 önüme deň bolup, aýlaryň her birindäki zerurlyk, degişlilikde 2000, 3000, 3000 we 2000 önümden ybarat bolsa, 5.8-nji meseläniň şertlerinde dört aýyň dowamynda kärhananyň önüm öndürmeginiň optimal meýilnamasyny tapmaly. Kärhananyň aýlaryň her birinde 4000-den köp bolmadyk önümi çykaryp biljekdigini hasaba almalydyr. Şeýle hem, kärhana birbada 4000-den köp bolmadyk önümi saklap bilýär. 1000, 2000, 3000 we 4000 önümi öndürmek bilen baglanyşykly harajatlar, degişlilikde 13, 15, 17 we 19 manatdan, 1000 önümi saklamak boýunça harajatlar 1 manatdan ybaratdyr.

Jogaby: Kärhana her 2-nji we 3-nji aýda 4000 önüm öndürmeli.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I – XIII tomlar. A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008 – 2020.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I tom. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. II tom (Goşundylar). Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň ykdysady strategiýasy: Halka daýanyp, halkyň hatyrasyna. A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

5. Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň 2011 – 2030-njy ýyllar üçin milli Maksatnamasy. A.: 2010.

6. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – Beýik Ýüpek ýolunyň ýüregi. II kitap. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.

7. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan Durnukly ösüşiň maksatlaryna ýetmegiň ýolunda. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.

8. Öwezowa M.M., Täjiýew A.T., Mowlamow D.A., Durdyýew G. Ykdysadyýetde matematika. I we II kitap. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2001.

9. Gurbanmämmedow N., Aşyrow O., Aşyrow A., Geldiýew B. Ýokary matematika. 1-nji kitap. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

10. Esenamanow G.M. Matematiki modelirlemek. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

11. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах.Учебное пособие для студентов эконом. спец. Вузов. – М.: Из-тво «Высшая школа» 1986.

12. Баканов М.И. Теория экономического анализа. – М.: Финансы и статистика 1997.

13. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. – М.: Высшая школа 1997.

14. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации: Учеб. пособие для спец. 0646 - «Автоматизир. системы упр.»; 0647 – «Прикл. математика». – М.: Сов. радио, 1980.

15. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М., 1998.

16. Иозайтис В.С. ЭММ производственных систем. – М.: ВШ 1991.

17. Исследование операций в экономике. Уч.пос. 1997.

18. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Изд. «Дело» 2002.

19. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2001.

20. Лемешко Б.Ю. Методы оптимизации: Конспект лекций. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009.

21. Малыхин В.И. Математика в экономике. М. ИНФРА-М 2001.

22. Хайман Д.Н. Современная микроэкономика: анализ и применение. том 1, 2. – М., 1992.

23. Терехов Л.Л. ЭММ и модели в планировании и управлении. – Киев, 1984.

24. Шипачев В.С. Высшая математика. – М., 1990.

25. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М., 2000.

26. Эддоус М. Методы принятия решений. – М. 1997.

27. Экономико-математические методы и прикладные модели. /Под ред. В.В. Федосеева, – М.: ЮНИТИ 2002.

MAZMUNY

III bölüm. Çyzykly programmalaşdyrmanyň ýörite meseleleri

IV bölüm. Çyzykly däl programmalaşdyrmanyň meseleleri

V bölüm. Dinamiki programmalaşdyrmanyň meseleleri

Gurbanguly Şükürow, Toýly Kerimow,
Sapargül Çopanowa

OPTIMALLAŞDYRMA USULLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*N. Nurmuhammedowa*
Surat redaktory	*P. Pürmyradow*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Kompýuter bezegi	*D. Piriýewa,*
	B. Mämmetgurbanow
Neşir üçin jogapkär	*K. Durdyýew*

Çap etmäge rugsat edildi 31.12.2020. Ölçegi 60x90$^{1}/_{16}$.
Times New Roman garniturasy. Şertli çap listi 16,0.
Hasap-neşir listi 15,85. Şertli reňkli ottiski 40,25.
Çap listi 16,0. Sargyt № 2463. Sany 680.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat. Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat. 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.