**Ö. Hudaýberenow**

# ÝOKARY MATEMATIKA

*Ikinji neşir*

Tehniki ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi*
*tarapyndan hödürlenildi*

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2018

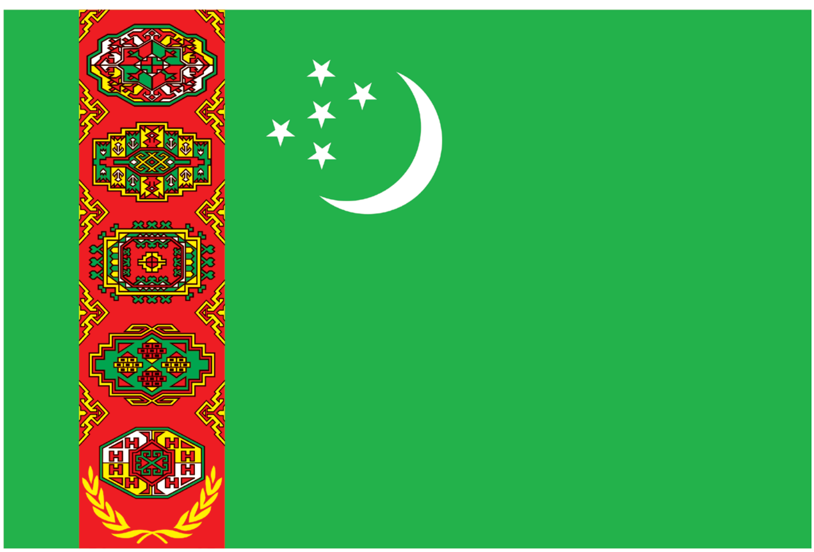
UOK 378 + 51
H 73

**Hudaýberenow Ö.**
H 73 **Ýokary matematika.** Tehniki ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2018.

TDKP № 48, 2018 KBK 22.11 ýa 73

**TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW**

**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY**



**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY**

# TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

*Gaýtalama:*

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

*Gaýtalama:*

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

## SÖZBAŞY

Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Türkmenistanda bilim ulgamyny kämilleşdirmek baradaky görkezmelerine esaslanyp, okuw mekdepleri öz işlerini täzeden guraýarlar. Watanymyzyň geljegini öz eline alyp biljek bilimli, ylymly, akylly, paýhasly, sagdyn we edenli hünärmenleri taýýarlamaga girişýärler.

Bu wajyp meselede tehniki ýokary okuw mekdepleriniň işgärleriniň borçlary örän uludyr. Sebäbi olar ýurdumyzyň ykdysadyýetini, önümçiligini, hojalygyny, gurluşygyny dünýä derejelerine galdyryp biljek we dünýädäki täze-täze tehnologiýalary özleşdirip biljek hünärmenleri taýýarlamalydyrlar. Bu beýik, hormatly we jogapkärli işdir. Şol sebäpli her bir tehniki ýokary okuw mekdebi, her bir mugallym öz işine örän ykjam, örän yhlasly we jogapkärli ýapyşmalydyr. Bu ähmiýetli işde tehniki ylymlaryň okadylyşy, olaryň beýleki ylymlar bilen baglanyşygy, olaryň esasy we daýanjy bolup durýan matematika, fizika, mehanika, inžener grafikasy ýaly ylymlaryň berlişi ýokary okuw mekdepleriniň üns merkezinde bolmalydyr. Matematika özüniň gelip çykyşy, beýleki ylymlar bilen özboluşly aragatnaşygy we dürli ugurlara degişli meseleleri çözmäge bolan üýtgeşik ukyby bilen beýleki ylymlardan tapawutlanýandyr.

Matematika adamzat durmuşynda birinji dölän ylymdyr diýsek, ýalňyşmarys. Onuň iňňän irki döwürlerde döräp, köp çarkandaklary geçip, häzirki wagtda örän ýokary derejelere ýetendigine taryh şaýatdyr.

Bu ösüşi gazanmak üçin köp-köp şahslaryň eden işleri ölçärden uludyr. Grek alymlary Arhimed, Pifagor, Ýewklid, biziň ýurtdaşlarymyz Al-Horezmi, Ulugbeg, Omar Haýýam, Ibn Sina, Biruny, ýewropa alymlary Dekart, Galileý, Nýuton, Leýbnis muňa mysal bolup bilerler. Häzirki zaman alymlarynyň hem bu ösüşe goşandy diýseň köpdür.

Matematikanyň köp şahalara bölünmegi we esasan hem, häzirki wagtda täze-täze amaly meseleleri çözmekde ähmiýeti uly bolan ugurlaryň döremegi aýdylan sözlere delil bolup biler. Bu ugurlara matematiki fizikany, informatikany, optimal dolandyryş nazaryýetini, ykdysadyýetiň matematiki modellerini, matematiki statistikany we ş.m. mysal edip getirmek bolar. Ol ugurlar matematikanyň özüni timarlamagy üçin döredilen bolman, eýsem, olaryň atlaryndan görnüşi ýaly, fizikada, ykdysadyýetde, informasiýany ulanmakda, optimal dolandyryşda ýüze çykýan meseleleri matematiki usullary ulanyp çözmek bilen baglanyşyklydyr. Adamzat durmuşynda ýüze çykýan meseleleriň köpüsi bilen örän ysnyşykly gatnaşykda bolmaklygy matematikanyň beýleki ylymlardan tapawutlylykda özboluşly iňňän möhüm aýratynlygydyr. Onuň esasy sebäpleriniň biri-de adamzat durmuşynda ýüze çykýan meseleleri çözmekde ulanylýan usullaryň içinde matematiki usullaryň iň arzan bolmagydyr.

Size hödürlenýän kitapda matematikanyň inžener amalyýetinde ulanylýan bölümleriniň esaslary bolýan düşünjeler beýan edilendir.

# GIRIŞ

Okuw kitaby tehniki ýokary okuw mekdepleri üçin ýokary matematika dersi boýunça okuw maksatnamasy esasynda taýýarlanyldy.

Kitap, esasan, iki bölekden ybarat. Olaryň birinjisi çyzykly algebra we geometriýa degişli bolsa, ikinjisi matematikanyň «Matematiki seljerme» diýilýän şahasyna degişlidir. Bulardan başga-da ýokary okuw mekdepleriniň matematika dersiniň düzümine girýän «Ähtimallyk nazaryýeti we matematiki statistika», «Differensial deňlemeler», «Matematiki modeller, olaryň ulanylyşy we çözülişi» ýaly bölümler hem girizilendir.

Biziň pikirimizçe, iň soňky ady tutulan bölüm şu döwrüň inženeri üçin iň möhüm bölümdir. Kitapda getirilen beýleki bölümleriň hemmesine oňa kömekçi hökmünde garalmalydyr. Matematiki modelirleme meselesi soňky döwürde matematikanyň giňden ulanylýan bölümidir. Onuň ulanylýan ýerleri adyny tutardan örän köp. Medisina, önümçilik, ykdysadyýet, dolandyryş meseleleri, geofizika, nebit geologiýasy, fizika, mehanika, himiýa we ş.m. ugurlar şolara mysal bolup bilerler.

Bölümleriň ählisi mümkin boldugyça sada dilde beýan edildi. Her bir täze düşünje, teoremanyň netijeleri mysallaryň üsti bilen düşündirildi, çyzgylaryň üsti bilen aýdyňlaşdyryldy. Bu bölümlere aýratyn üns berilmeginiň esasy sebäbi hem fiziki, mehaniki, himiki prosesler, gurluşyk meseleleri, ykdysady meseleler matematikanyň üsti bilen öwrenilende olaryň esasy daýanç bolýandyklaryndadyr. Kitabyň okyjysy matematikanyň ýönekeýje düşünjeleri bilen, ýagny san, bitin sanlar, rasional sanlar, olaryň üstünde geçirilýän amallar, sanlar oky, koordinatalar oky, koordinatalar ulgamy, nokadyň koordinatasy, koordinatalary belli nokatlaryň arasyndaky uzaklyk, sanyň moduly we başgalar bilen tanyş hasap edilýär. Şol sebapli kitabyň ikinji bölümi gös-göni funksiýanyň kesgitlemesinden başlanýandyr.

Matematika kursy diňe durmuş meselelerini çözmeklige ugrukdyrylan diýsek, ýalňyşmagymyz mümkin. Matematika dersiniň terbiýeleýjilik ähmiýeti hem diýseň uludyr. Matematikanyň teklipleriniň düzülişi, olaryň birbelgili kesgitlenilişi, subut edilişi, onuň netijelerinde ikuçlulygyň ýoklugy okyjynyň aňyny tertipleşdirýär, şeýle hem ulgamly pikir etmegi we arassalygy öwredýär.

Umuman, kitap döwrebap hünärmenleri taýýarlamakda öz goşandyny goşar diýip umyt edýäris.

# I. KESGITLEÝJILER WE ÇYZYKLY DEŇLEMELER ULGAMY

## §1. Kesgitleýjiler barada düşünje

Biz çyzykly deňlemeler ulgamyna seredip, kesgitleýjiler barada ilkinji düşünjäni alýarys. Goý, bize aşakdaky çyzykly deňlemeler ulgamy berlen bolsun:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

$x_1$-i tapmak üçin (1) ulgamyň birinji deňlemesini $a_{22}$-ä, ikinji deňlemesini bolsa $a_{12}$-ä köpeldeliň we biri-birinden aýralyň:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

bu ýerden

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

$x_2$-ni tapmak üçin (1) ulgamyň birinji deňlemesini $a_{21}$-e, ikinji deňlemesini $a_{11}$-e köpeldeliň we biri-birinden aýralyň:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

bu ýerden

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

$x_1$ we $x_2$ üçin tapylan aňlatmalaryň ikisiniň hem maýdalawjysynyň berlen deňlemeleriň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen aňlatmalardygyny, sanawjylarynyň bolsa maýdalawjydan $x_1$-iň we $x_2$-niň koeffisiýentlerini degişlilikde $b_1$ we $b_2$ azat agzalar bilen çalşyrylyp alnandygyny görýäris.

(1) ulgamyň koeffisiýentleriniň ýerleşiş tertibini üýtgetmezden tablisa düzeliň:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Kwadrat görnüşde ýerleşdirilen dört sandan ybarat bolan tablisa degişli $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ tapawuda ikinji tertipli kesgitleýji diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Görşümiz ýaly, bu kesgitleýji iki setirden we iki sütünden ybarat. $a_{ik}$ $(i,\ k = 1,\ 2)$ sanlara *kesgitleýjiniň elementleri* diýilýär. $a_{ik}$ element $i$-nji setiriň we $k$-njy sütüniň kesişýän ýerinde ýerleşýär.

(2) kesgitleýjidäki $a_{11}$, $a_{22}$ elementleriň emele getirýän diagonalyna *esasy diagonal*, $a_{21}$, $a_{12}$ elementleriň emele getirýän diagonalyna bolsa *kömekçi diagonal* diýilýär. Ikinji tertipli kesgitleýji, onuň esasy diagonalyndaky elementleriň köpeltmek hasylyndan kömekçi diagonalyndaky elementleriň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir.

**1-nji mysal.** Aşakdaky kesgitleýjileri hasaplamaly:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$; ç) $\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & \cos\alpha \\ 6\cos\beta & -3\sin\beta \end{vmatrix}$

**Çözülişi.**

a) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot 7 = 31;$

b) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-7) - 1 \cdot (-2) = -61;$

ç) $\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & \cos\alpha \\ 6\cos\beta & -3\sin\beta \end{vmatrix} = 2\sin\alpha(-3\sin\beta) - 6\cos\beta\cos\alpha =$
$= -6(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = -6\cos(\alpha - \beta).$

Dokuz elementden kwadrat tablisa düzeliň:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Kwadrat görnüşinde ýerleşdirilen dokuz elementden ybarat bolan tablisa degişli

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} \qquad (3)$$

sana üçünji tertipli kesgitleýji diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$a_{ik}$ ($i$, $k$ = 1, 2, 3) sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. Bu ýerde hem $i$, $k$ indeksler degişlilikde $a_{ik}$ elementiň haýsy setirde we haýsy sütünde ýerleşýändigini görkezýär. Üçünji tertipli kesgitleýjiniň üç setiri we üç sütüni bolýar. Kesgitleýjileri hasaplamagyň usullaryndan iki sanysyny görkezeliň.

**1-nji usul.** (3) kesgitleýjiniň birinji we ikinji sütünini sag tarapdan täzeden ýazmak bilen aşakdaky tablisany düzýäris:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

Üstünden tutuş çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny öz alamatlary bilen, punktir çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny bolsa garşylykly alamatlary bilen almak arkaly üçünji tertipli kesgitleýjini tapýarys.

**2-nji usul.** Üçünji tertipli kesgitleýji aşakdaky shema boýunça hasaplanýar:

a) goşmak alamatly agzalar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

b) aýyrmak alamatly agzalar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Kesgitleýjiniň (3) bahasynyň her bir goşulyjysynda kesgitleýjidäki islendik setirden we islendik sütünden bir elementiň bardygyny görýäris.

**2-nji mysal.** Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

**Çözülişi.**

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 7 \cdot 1 \cdot 6 -$$

$$- 4 \cdot 1 \cdot 5 = 60 + 84 + 3 - 18 - 42 - 20 = 147 - 80 = 67.$$

Görşümiz ýaly, 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjiler degişlilikde, $2^2$ we $3^2$ elementlerden düzülýärler.

4, 5, … tertipli kesgitleýjiler hem degişlilikde, $4^2$, $5^2$, ... elementlerden düzülen san bolup, ýokardaka meňzeş belgilenýär. Meselem,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{81} & a_{82} & \cdots & a_{88} \end{vmatrix} \quad \text{we} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

degişlilikde, 8-nji we $n$-nji tertipli kesgitleýjiler bolarlar. Üçden ýokary tertipli kesgitleýjileriň hasaplanylyşyna 3-nji paragrafda serederis.

## §2. Kesgitleýjileriň esasy häsiýetleri

Kesgitleýjileriň birnäçe täsin häsiýetleri bolup, olary ýerlikli ulanmaklyk kesgitleýjileri hasaplamagy ýeňilleşdirýär. Biz şol häsiýetleriň esasylaryny 3-nji tertipli kesgitleýjilerde düşündirmek bilen çäkleneris. Kesgitleýjileriň esasy häsiýetlerine geçmezden ozal, gerek boljak bir kesgitlemäni girizeliň.

**Kesgitleme.** Berlen kesgitleýjini esasy diagonalyň töwereginde 180° öwrüp täze kesgitleýji, ýagny berlen kesgitleýjiniň 1-nji, 2-nji, …, $n$-nji setirleri degişlilikde, 1-nji, 2-nji, …, $n$-nji sütünleri bolan kesgitleýji alynsa, onda ol kesgitleýjä *transponirlenen kesgitleýji* diýilýär.

Berlen kesgitleýjiden transponirlenen kesgitleýjini almak amalyna transponirlemek diýilýär.

Kesgitleýjileriň esasy häsiýetleri:

**1.** Kesgitleýjini transponirlemek kesgitleýjiniň ululygyny üýtgetmeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**2.** Eger kesgitleýjiniň iki setiriniň ýa-da sütüniniň ýerini çalşyrsak, onda onuň ululygynyň diňe alamaty üýtgeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

**3.** Özara deň iki setiri ýa-da sütüni bolan kesgitleýji nola deň. Meselem, $a_{i1} = a_{i2} = b_i$ ($i = 1; 2; 3$) bolsa, onda ol nola deň, ýagny

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & a_{13} \\ b_2 & b_2 & a_{23} \\ b_3 & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

**4.** Kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da bir sütüniniň ähli elementleriniň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda ony kesgitleýji alamatynyň daşyna çykarmak bolar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**5.** Tutuş bir setiri ýa-da bir sütüni noldan ybarat bolan kesgitleýji nola deňdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**6.** Iki setiriniň ýa-da iki sütüniniň elementleri proporsional bolan kesgitleýji nola deňdir. Meselem, $a_{i1} = b_i$; $a_{i2} = kb_i$, $i = 1, 2, 3$ bolsa, onda ol nola deňdir, ýagny

$$\begin{vmatrix} b_1 & kb_1 & a_{13} \\ b_2 & kb_2 & a_{23} \\ b_3 & kb_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

**7.** Kesgitleýjiniň $m$-nji setiriniň ýa-da sütüniniň her bir elementi iki goşulyjynyň jeminden ybarat bolsa, onda ol şol tertipdäki iki kesgitleýjiniň jemine deňdir: olaryň birinjisiniň $m$-nji setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri şol goşulyjylaryň birinjisinden ybarat, ikinjisiniň $m$-nji setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri şol goşulyjylaryň ikinjisinden ybaratdyr, galan setirleriň elementleri üç kesgitleýjide hem birmeňzeşdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**8.** Kesgitleýjiniň setiriniň ýa-da sütüniniň her bir elementiniň üstüne beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementlerini käbir $k$ sana köpeldip goşsak, onda kesgitleýjiniň ululygy üýtgemez:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu häsiýetleriň dogrulygyna göz ýetirmek üçin kesgitleýjileri hasaplap görmek ýeterlikdir.

## §3. Kesgitleýjini setiriň we sütüniň elementleri boýunça dargatmak

Bu temany düşündirmek hem-de netijeleri gysgaça beýan etmek üçin algebraik doldurgyç diýen düşünjäni girizeliň. Belli bolşy ýaly,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{23}a_{12}a_{31} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Bu deňligiň sag böleginde $a_{13}$ elementi saklaýan goşulyjylardan $a_{13}$ elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$ tapawudy alarys, $a_{12}$ elementi saklaýan goşulyjylardan $a_{12}$ elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ tapawudy alarys. Ýokardaky formulanyň sag böleginden islendik elementi ony saklaýan goşulyjylardan ýaýyň daşyna çykarsak, ýaýyň içinde iki agza galýar. Ýaýyň içinde galýan bu tapawuda (kesgitleýjä) ýaýyň daşyna çykarylan elementiň *algebraik doldurgyjy* diýilýär. Meselem, $a_{12}$ elementiň algebraik doldurgyjy $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ bolýar, $a_{13}$ elementiň algebraik doldurgyjy $a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$ bolýar we ş. m.

$a_{ik}$ elementiň algebraik doldurgyjyny $A_{ik}$ bilen belgiläliň, onda $a_{13}$ elementiň algebraik doldurgyjy $A_{13}$, $a_{22}$ elementiň algebraik doldurgyjy $A_{22}$ bolýar. Ýokarky formulada haýsy-da bolsa bir setiriň elementlerini, meselem, ikinji setiriň elementlerini ýaýyň daşyna çykaryp alarys:

$$\Delta = a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11}).$$

Indi bu deňligi algebraik doldurgyçlar arkaly ýazalyň:

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Umuman, islendik setiriň elementleri üçin aşakdaky formulany ýazyp bileris:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}.$$

Islendik sütüniň elementleri üçin bolsa aşakdaky formulany ýazyp bileris:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k}.$$

$n$-nji tertipli kesgitleýji üçin hem aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \tag{4}$$

ýa-da

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}. \tag{5}$$

**Netije.** Kesgitleýjiniň ululygy onuň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini olaryň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

(4) we (5) formulalara setiriň we sütüniň elementleri boýunça kesgitleýjiniň dargadylmasy diýilýär.

Indi islendik tertipli kesgitleýjiniň elementi üçin algebraik doldurgyjyň tapylyşyny görkezeliň.

Haýsy-da bolsa bir $a_{ik}$ elementi alyp, onuň ýerleşen setiriniň we sütüniniň üstüni çyzalyň. Galan elementleriň emele getirýän kesgitleýjisine şol $a_{ik}$ **elementiň minory** diýilýär. Minoryň tertibi berlen kesgitleýjiniň tertibinden bir san kiçidir. $a_{ik}$ elementiň minory $M_{ik}$ bilen belgilenýär. $(-1)^{i+k}M_{ik}$ sana bolsa $a_{ik}$ elementiň algebraik doldurgyjy diýilýär we $A_{ik}$ bilen belgilenýär. Diýmek,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \tag{6}$$

Meselem, ýokarda alnan $a_{32}$ elementiň $A_{32}$ algebraik doldurgyjy aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}.$$

Kesgitleýjiniň elementiniň minory arkaly tapylan doldurgyjyň ýokarda kesgitlenen doldurgyç bilen gabat gelýändigini belläp geçeliň.

(4), (5) we (6) formulalar berlen kesgitleýjini tertibi şol kesgitleýjiniňkiden bir san kem bolan kesgitleýjiler bilen çalşyp hasaplamaga mümkinçilik berýär. Bu ýagdaý kesgitleýjileriň tertibi üçden uly bolanda giňden ulanylýar.

**Mysallara seredeliň.**

**1-nji mysal.** Aşakdaky kesgitleýjini ikinji tertipli kesgitleýjä getirip hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

**Çözülişi.** Berlen kesgitleýjini (4) formuladan peýdalanyp, birinji setiriň elementleri boýunça dargadyp ýazalyň:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 6 \cdot A_{13}.$$

Soňra (6) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 1 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + 6 \cdot (-1)^{1+3} M_{13}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix};$$

şeýlelikde,

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3(4 - 12) - 10 + 21 +$$

$$+6(20 - 14) = 23.$$

**2-nji mysal.** Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Çözülişi.** Berlen kesgitleýjini ikinji sütüniň elementleri boýunça dargadyp ýazalyň we hasaplalyň:

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 + 21 - 14 - 2 + 2 \cdot (6 + 8 - 20 - 9) = - 20.$$

Kesgitleýjileriň çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmekde we derňemekde peýdalanylýan ýene-de bir häsiýetine üçünji tertipli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjide seredeliň. Kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da sütünininiň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň nämä deňdigini tapalyň. Mysal üçin, ýokardaky kesgitleýjiniň ikinji setiriniň elementleriniň üçünji setiriň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemini tapalyň.

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

deňlikleri göz öňünde tutup alarys:

$$a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33} =$$

$$= a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

(kesgitleýjileriň üçünji häsiýetine görä nola deň bolýar).

Şuňa meňzeşlikde, islendik setir üçin

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0\ (i \neq j),$$

islendik sütün üçin

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0\ (i \neq j)$$

boljakdygyna göz ýetirmegiň kynçylygy ýokdur. Islendik $n$-nji tertipli kesgitleýjiler üçin aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0\ (i \neq j), \tag{7}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0\ (i \neq j). \tag{8}$$

Diýmek, kesgitleýjiniň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi nola deňdir.

## §4. Çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmek we derňemek

Goý, bize $n$ näbellisi bolan $n$ çyzykly deňlemeler ulgamy berilsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{9}$$

(9) ulgamyň koeffisiýentlerinden kesgitleýji düzeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

(10) kesgitleýjä (9) ulgamyň kesgitleýjisi diýilýär. (9) ulgamyň deňlemelerini (10) kesgitleýjiniň birinji sütüniniň algebraik doldurgyçlaryna degişlilikde köpeldip, olary goşalyň:

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + \\
&+(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 + \ldots + \\
&+(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Bu ýerde $x_1$-iň koeffisiýenti (5) formula laýyklykda (10) kesgitleýjini berýär, $x_2, x_3, \ldots, x_n$-iň koeffisiýentleri bolsa (8) formula laýyklykda nola deň. (11) deňligiň sag bölegi bolsa (10) kesgitleýjiniň birinji sütüniniň elementlerini degişli azat agzalar bilen çalşyrmak arkaly alnandyr. Ony $\Delta_1$ bilen belgiläp, (11) deňligi

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$$

görnüşde ýazyp bileris. $\Delta \neq 0$ bolanda alarys:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Şuňa meňzeşlikde, (9) ulgamyň deňlemelerini (10) kesgitleýjiniň $i$-nji sütüniniň algebraik doldurgyçlaryna köpeldip, soňra goşsak, onda $\Delta \cdot x_i = \Delta_i$ ýa-da $\Delta \neq 0$ bolanda,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1; 2; 3; \ldots; n) \tag{12}$$

alarys. Bu ýerde $\Delta_i$ kesgitleýji $\Delta$ kesgitleýjiniň $i$-nji sütüniniň elementlerini degişli azat agzalar bilen çalşyrmak arkaly alnandyr.

(12) formula bilen tapylan $x_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) bahalaryň (9) ulgamyň çözüwidigini görkezeliň. Munuň üçin (12) formula bilen tapylan $x_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) bahalaryny (9) ulgamyň islendik $k$-njy deňlemesiniň çep bölegine goýalyň we onuň sag bölegine deňdigini görkezeliň. Dogrudan hem,

$$
\begin{aligned}
&a_{k1}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{k2}\frac{\Delta_2}{\Delta} + a_{k3}\frac{\Delta_3}{\Delta} + \ldots + a_{kn}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{k1}\Delta_1 + a_{k2}\Delta_2 + \\
&+ a_{k3}\Delta_3 + \ldots + a_{kn}\Delta_n) = \frac{1}{\Delta}[a_{k1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) +
\end{aligned}
$$

$$+a_{k2}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})+\ldots+a_{kn}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+$$

$$+\ldots+b_nA_{nn})]=\frac{1}{\Delta}[b_1(a_{k1}A_{11}+a_{k2}A_{12}+\cdots+a_{kn}A_{1n})+$$

$$+b_2(a_{k1}A_{21}+b_{k2}A_{22}+\cdots+a_{kn}A_{2n})+\ldots+b_k(a_{k1}A_{k1}+$$

$$+a_{k2}A_{k2}+\ldots+a_{kn}A_{kn})+\ldots+b_n(a_{k1}A_{n1}+b_{k2}A_{n2}+\cdots+a_{kn}A_{nn})]=$$

$$=\frac{1}{\Delta}b_k\cdot\Delta=b_k.$$

$b_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ sanlaryň köpeldijileri $i\neq k$ bolanda (7) formula boýunça nola deň, $i=k$ bolanda onuň köpeldijisi (4) formula boýunça $\Delta$ kesgitleýjä deň. Şeýlelikde, (9) ulgamyň çözüwi (12) formula bilen berilýär.

Indi (9) ulgamy derňemeklige girişeliň.

1. $\Delta\neq 0$ bolsa, (9) ulgamyň (12) formula bilen aňladylýan ýeke-täk çözüwi bar.

2. $\Delta=0$ bolsa, emma $\Delta_i$ $(i=1; 2;\ldots; n)$ sanlaryň iň bolmanda birisi nola deň bolmasa, (9) ulgamyň çözüwi ýokdur. Hakykatdan hem, goý, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şol ulgamyň çözüwi bolsun. Onda ol çözüw üçin

$$\Delta\cdot x_i=\Delta_i\quad (i=1, 2,\ldots, n)$$

deňlikler ýerlikli bolýar. Bu deňlikleriň hemmesiniň çep bölegi nola deň, emma iň bolmanda biriniň sag bölegi noldan üýtgeşik. Alnan garşylyk çözüwiň ýokdugyny görkezýär.

3. $\Delta=0$; $\Delta_i=0$ $(i=1, 2,\ldots, n)$ bolsa, ýa (9) ulgamyň hiç bir çozüwi ýokdur ýa-da tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Bu teklibiň subudyny 5-nji paragrafyň ahyrynda getireris.

Biz çyzykly deňlemeler ulgamyny kesgitleýjiler arkaly çözdük we derňedik. Kesgitleýjiler nazaryýetiniň esasyny şweýsariýaly alym G. Kramer (1704–1752) tutdy. Şoňa görä-de çyzykly deňlemeler ulgamyny kesgitleýjiler arkaly çözmek usulyna Krameriň usuly diýilýär.

**Mysallara seredeliň.**

**1-nji mysal.** Aşakdaky ulgamy çözmeli:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$$

**Çözülişi.** Ulgamyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -64 \neq 0.$$

Berlen ulgamyň ýeke-täk çözüwi bar. $\Delta_i$ ($i = 1; 2; 3$) kesgitleýjileri hasaplalyň:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -15 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -64,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -15 & -3 \end{vmatrix} = -128,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -15 \end{vmatrix} = -192.$$

Indi (12) formula boýunça $x_i$-ni ($i = 1, 2, 3$) tapýarys:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-64}{-64} = 1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-128}{-64} = 2; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-192}{-64} = 3.$$

**2-nji mysal.** Aşakdaky ulgamy çözmeli:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 5x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 15, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

**Çözülişi.** Ulgamyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diýmek, ulgamyň ýa çozüwi ýok, ýa-da tükeniksiz köp çözuwi bolmaly. Muny anyklamak üçin $\Delta_1$-i hasaplalyň.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 15 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Delta_1 \neq 0$ bolany üçin $\Delta_2$-ni, $\Delta_3$-i hasaplamagyň geregi ýok. $\Delta = 0$, emma $\Delta_1 \neq 0$. Diýmek, ulgamyň çözüwi ýok.

## §5. Çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmekde Gaussyň usuly

Gaussyň (1777–1855, nemes alymy) usulynyň düýp manysyna düşünmek üçin dört näbellili dört çyzykly deňlemeler ulgamyna seretmek ýeterlik. Gaussyň usulyny beýan etmezden öňürti, üçburçly ulgam diýilýän aşakdaky

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \tag{13}$$

çyzykly deňlemeler ulgamynyň çözülişine seredeliň. Bu ulgamyň kesgitleýjisi noldan tapawutly bolanda ol şeýle çözülýär. Onuň dördünji deňlemesinden $x_4$-i tapyp, üçünji deňlemä goýmaly, ondan $x_3$-i tapyp, $x_4$-üň we $x_3$-üň bahalaryny ulgamyň ikinji deňlemesine goýmaly, ondan $x_2$-ni kesgitlemeli, soňra $x_4$-üň, $x_3$-üň we $x_2$-niň tapylan bahalaryny birinji deňlemä goýup, ondan $x_1$-i tapmaly.

Indi üçburçly bolmadyk ulgamy alalyň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{14}$$

Bu ulgamy çözmekde Gaussyň usulynyň manysy ony üçburçly ulgama getirip çözmekden ybaratdyr. (14) ulgam aşakdaky usul bilen üçburçly ulgama getirilip ýazylýar. Goý, $a_{11} \neq 0$ bolsun. (14) ulgamyň birinji deňlemesiniň hemme agzalaryny $a_{11}$-e – eýerdiji elemente bölüp alýarys:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \tag{15}$$

bu ýerde $b_{1i} = \dfrac{a_{1i}}{a_{11}}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

(15) deňlemäni $a_{21}$-e köpeldip (14) ulgamyň ikinji deňlemesinden, $a_{31}$-e köpeldip üçünji deňlemesinden, $a_{41}$-e köpeldip dördünji deňlemesinden aýyrsak, näbellileriň sany bir san kemelen aşakdaky ulgamy alýarys:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}. \end{cases} \tag{14$'$}$$

Bu ýerde $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$ $(i,j \geq 2)$.

(14′) ulgamyň birinji deňlemesiniň hemme agzalaryny $a_{22}^{(1)}$ eýerdiji elemente bölüp alarys ($a_{22}^{(1)} \neq 0$ güman edilýär):

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \tag{16}$$

bu ýerde

$$b_{2i}^{(1)} = \frac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (i > 2).$$

(16) deňlemäni ilki $a_{32}^{(1)}$-ä, soňra $a_{42}^{(1)}$-ä köpeldip, degişlilikde ulgamyň ikinji we üçünji deňlemesinden aýryp, alarys:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{cases} \tag{14$''$}$$

bu ýerde

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)}.$$

(14″) ulgamyň birinji deňlemesiniň hemme agzalaryny $a_{33}^{(2)}$ eýerdiji elemente bölüp, alarys ($a_{33}^{(2)} \neq 0$ güman edilýär):

$$x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}, \tag{17}$$

bu ýerde

$$b_{3i}^{(2)} = \frac{a_{3i}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \qquad (i > 3).$$

(17) deňlemäni $a_{43}^{(1)}$-e köpeldip we (14″) ulgamyň ikinji deňlemesinden aýryp alarys:

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)},$$

bu ýerde

$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_{34}^{(2)}.$$

Ahyrky deňlemeden alarys:

$$x_4 = b_{45}^{(3)}. \tag{18}$$

(15)-(18) deňlemeleri ulgam görnüşinde ýazsak, berlen ulgam bilen deňgüýçli bolan üçburçly ulgam alarys:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \\ \qquad\quad x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4 = b_{45}^{(3)}. \end{cases}$$

Bu ulgamyň çözülişi (13) ulgamyň çözülişi ýalydyr.

Çyzykly deňlemeler ulgamyny Gaussyň usuly bilen çözmek üçin zerur we ýeterlik şert «eýerdiji elementleriň» noldan tapawutly san bolmagydyr. Eger haýsy-da bolsa bir basgançakda ýokarda görkezilen eýerdiji element nola deň bolsa, onda deňlemeleriň ýa-da näbellileriň ornuny çalşyrmak bilen «eýerdiji elementleriň» noldan tapawutly san bolmagyny gazanmaga çalyşmaly. Eger haýsy-da bolsa bir basgançakda deňlemeleriň ýa-da näbellileriň ornuny çalşyranymyzda hem noldan tapawutly eýerdiji element bolmasa, onda iki ýagdaýyň bolmagy mümkin: şol basgançakdaky seredilýän deňlemeler ulgamynyň hemme koeffisiýentleri we azat agzalary nola deň. Bu ýagdaýda ulgamyň tükeniksiz köp çözüwiniň boljagy aýdyňdyr. Şol basgançakdaky deňlemeler ulgamynyň hemme koeffisiýentleri nola deň bolup, azat agzalarynyň haýsy-da bolsa biri ýa-da birnäçesi noldan tapawutly bolsa, onda $0 = b_{ij} \neq 0$ netije emele gelýär. Ol bolsa çözülýän ulgamyň çözüwiniň ýokdugyny görkezýär.

**1-nji mysal.** Ulgamy Gaussyň usuly boýunça çözmeli:

$$\begin{cases} 7,9x_1 + 5,6x_2 + 5,7x_3 - 7,2x_4 = 6,68, \\ 8,5x_1 - 4,8x_2 + 0,8x_3 + 3,5x_4 = 9,95, \\ 4,3x_1 + 4,2x_2 - 3,2x_3 + 9,3x_4 = 8,6, \\ 3,2x_1 - 1,4x_2 - 8,9x_3 + 3,3x_4 = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Birinji deňlemäniň hemme agzalaryny 7,9-a böleliň.

$$x_1 + 0,70886x_2 + 0,72152\, x_3 - 0,91139x_4 = 0,84557. \tag{I}$$

(I) deňligiň agzalaryny 8,5-e, 4,3-e we 3,2-ä köpeldip, degişlilikde (19) ulgamyň ikinji, üçünji we dördünji deňlemesinden aýryp, aşakdaky üç näbellili üç deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} -10,82531x_2 - 5,33292x_3 + 11,24682x_4 = 2,76266, \\ 1,15190x_2 - 6,30254x_3 + 13,21898x_4 = 4,96405, \\ -3,66835x_2 - 11,20886x_3 + 6,21645x_4 = -1,70582. \end{cases} \tag{20}$$

Bu ulgamyň birinji deňlemesini – 10,82531-e bölüp alarys:

$$x_2 + 0,49263x_3 - 1,03894x_4 = -0,25520. \tag{II}$$

(II) deňlemäniň agzalaryny ilki 1,15190-a, soňra – 3,66835-e köpeldip, degişlilikde (20) ulgamyň ikinji we üçünji deňlemesinden aýyrsak, iki näbellili iki deňlemeler ulgamy emele geler:

$$\begin{cases} -6,8700x_3 + 14,41573x_4 = 5,25801, \\ -9,40172x_3 + 2,40525x_4 = -2,64198. \end{cases} \tag{21}$$

Bu ulgamyň birinji deňlemesini – 6,8700-e bölüp, alarys:

$$x_3 - 2{,}09836x_4 = -0{,}76536. \qquad \text{(III)}$$

(III) deňlemäniň hemme agzalaryny – 9,40172-ä köpeldip, (21) ulgamyň ikinji deňlemesinden aýryp, alarys:

$$-17{,}32294x_4 = -9{,}83768,$$

bu ýerden

$$x_4 = 0{,}56790. \qquad \text{(IV)}$$

(I)-(IV) deňlemelerden üçburçly ulgamy düzýäris:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}70886x_2 + 0{,}72152x_3 - 0{,}91139x_4 = 0{,}84557, \\ \qquad x_2 + 0{,}49263x_3 - 1{,}03894x_4 = -0{,}25520, \\ \qquad\qquad x_3 - 2{,}09836x_4 = -0{,}76536, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 0{,}56790. \end{cases}$$

Bu ulgamdan tapýarys: $x_4 = 0{,}56790$, $x_3 = 0{,}42630$, $x_2 = 0{,}12480$, $x_1 = 0{,}96710$. Biz hasaplamalary geçirenimizde oturdan soňky 5 belgili, ýagny 0,00001 takyklyk bilen hasaplamalary ýerine ýetirdik. Bu hili hasaplamalar bilen tapylan çözüwiň takyk bolman, ýakynlaşan boljakdygy anykdyr.

Gaussyň usuly köp näbellili deňlemeler ulgamynyň ýakynlaşan çözüwini tapmakda giňden ulanylýar. Elektron hasaplaýjy maşynlarda çyzykly deňlemeler ulgamyny Gaussyň usuly bilen çözmeklik Krameriň usuly bilen çözmekden amatlydyr.

Adatça, çyzykly deňlemeler ulgamyny Gaussyň usuly bilen çözmek üçin tablisa düzülýär *(1-nji tablisa)*. 1-nji tablisanyň 1-nji bölüminiň ilkinji dört setiri berlen ulgamyň koeffisiýentlerinden we azat agzalaryndan ybarat. Iň soňky setir birinji setiri 7,9-a bölüp alynýar. Tablisadaky Σ belgili sütün setiriň sanlarynyň jemidir. Ol sütün hasaplama barlag etmäge ýardam edýär. Meselem, birinji bölümiň bäşinji setirindäki bäş sanyň jemi birinji setiriň altynjy sanynyň 7,9-a bölüňmeginden alnan sana deň bolsa, onda birinji setiri 7,9-a bölenimizde ýalňyşlyk goýbermedik bolmagymyz gaty ähtimaldyr.

*1-nji tablisa*

| **Näbellileriň koeffisiýentleri** | | | | **Azat agzalar** | Σ | **Bölümler** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
| 7,9 | 5,6 | 5,7 | –7,2 | 6,68 | 18,68 | I |
| 8,5 | – 4,8 | 0,8 | 3,5 | 9,95 | 17,95 | |
| 4,3 | 4,2 | – 3,2 | 9,3 | 8,6 | 23,2 | |
| 3,2 | – 1,4 | – 8,9 | 3,3 | 1 | –2,8 | |
| 1 | 0,70886 | 0,72152 | – 0,91139 | 0,84557 | 2,36456 | |
| | –10,82531 | – 5,33292 | 11,24682 | 2,76266 | –2,14876 | II |
| | 1,1519 | – 6,30254 | 13,21898 | 4,96405 | 13,03239 | |
| | – 3,66835 | –11,20886 | 6,21645 | –1,70582 | –10,3666 | |
| | 1 | 0,49263 | –1,03894 | – 0,2552 | 0,19849 | |
| | | –6,87 | 14,41573 | 5,25801 | 12,80374 | III |
| | | –9,40172 | 2,40525 | –2,64198 | –9,63845 | |
| | | 1 | –2,09836 | –0,76536 | –1,86372 | |
| | | | –17,32294 | –9,83768 | –27,1606 | IV |
| | | | 1 | 0,5679 | 1,5679 | |

Tablisanyň ikinji bölümindäki ilkinji üç setiriň sanlary birinji bölüminiň bäşinji setirini 8,5; 4,3; 3,2 sanlara köpeldip, degişlilikde ikinji, üçünji we dördünji setirlerden aýryp alynýar. Iň soňky setiri bolsa, birinji setirde emele gelen sanlary şol setiriň birinji sanyna, ýagny – 10,82531-e bölüp alynýar. Üçünji bölümdäki sanlar ikinji bölümden, dördünji bölümdäki sanlar üçünji bölümden, hut ikinji bölümdäki sanlaryň birinji bölümden alnyşy ýaly alynýar.

# II. WEKTOR ALGEBRASY

## §1. Skalýar we wektor ululyklar. Kollinear we komplanar wektorlar. Wektorlaryň deňligi

Skalýar we wektor ululyklar baradaky düşünje bize orta mekdebiň fizika we matematika derslerinden tanyş. Şeýle-de bolsa olaryň häsiýetlerini ýatlap geçeliň.

**Kesgitleme.** Eger ululyk özüniň san bahasy bilen häsiýetlendirilýän bolsa, oňa skalýar ululyk diýilýär.

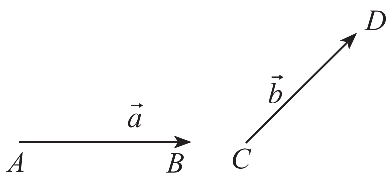
Meselem, massa, göwrüm, uzynlyk, temperatura skalýar ululyklardyr.

**Kesgitleme.** Eger ululyk özüniň san bahasy hem-de ugry bilen häsiýetlendirilýän bolsa, oňa wektor ululyk diýilýär.

Meselem, tizlik, tizlenme, güýç we şuňa meňzeş ululyklar wektorlardyr. Wektora ugrukdyrylan kesim hökmünde seretsek, kesimi çäklendirýän iki nokadyň haýsysynyň başlangyç we haýsysynyň ahyrky nokatdygyny anyklamaly bolarys.

Suratda wektorlaryň ahyrynda görkeziji goýulýar *(1-nji surat)*.

Ýazuwda wektor kesimi çäklendirýän iki baş harp bilen ýa-da ýekeje kiçi harp bilen belgilenip, onuň üstünde ýiti ujy sag tarapa ugrukdyrylan görkeziji goýulýar.

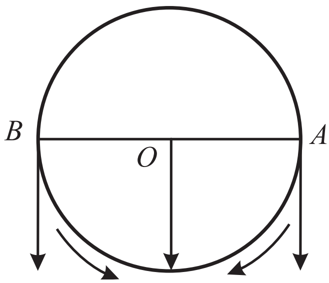


*1-nji surat*

Meselem, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$. Wektor iki baş harp bilen belgilenende wektoryň başlangyjy birinji orunda, ahyry bolsa ikinji orunda ýazylýar.

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň uzynlygy $|\overrightarrow{AB}|$ bilen belgilenýär. Oňa *wektoryň moduly* diýilýär. Uzynlygy nola deň bolan wektora hem seredilýär. Oňa *nol wektor* diýilýär. Ol $\vec{0}$ bilen belgilenýär. Nol wektoryň bellibir ugrukdyrylan tarapy ýokdur. Nol wektoryň başlangyç nokady we ahyrky nokady bir-biriniň üstüne düşýär.

Uzynlygy bire deň bolan wektorlara birlik wektorlar diýilýär. Ugry $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektorlaryň ugry bilen gabat gelýän *birlik wektorlar* $\overrightarrow{AB^0}$, $\overrightarrow{CD^0}$, $\overrightarrow{a^0}$, $\overrightarrow{b^0}$ bilen belgilenýärler.



*2-nji surat*

Matematikada diňe ugry we ululygy bilen häsiýetlendirilýän wektorlar öwrenilýär. Olara *erkin wektorlar* diýilýär. Fizikada erkin wektorlardan başga *baglanyşykly wektorlar* diýilýän wektorlara hem seredilýär. Mysal üçin, gozganmaýan oka birikdirilen diske haýsy-da bolsa bir güýç täsir edýär diýeliň. Eger güýç *A* nokada goýlan bolsa, onda disk sagat diliniň ugry boýunça, *B* nokada goýlan bolsa sagat diliniň garşylykly ugry boýunça aýlanyp başlar. Eger güýç *O* nokada goýlan bolsa, onda disk dynçlyk ýagdaýyny saklar *(2-nji surat)*. Bu ýerde şol bir ugra ugrukdyrylan güýjüň haýsy nokada goýlandygy ähmiýete eýedir. Erkin wektorlaryň bolsa haýsy nokada goýlandygy ähmiýete eýe bolman, diňe olaryň ululyklary we ugurlary ähmiýete eýedir.

Aşakda diňe erkin wektorlara seredilýär. Parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatýan wektorlara kollinear wektorlar diýilýär. Bir wektoryň beýleki wektora kollinearlygy parallellik alamaty bilen belgilenilýär. Meselem, $\overrightarrow{AB}$ wektor $\overrightarrow{CD}$ wektora kollinear bolsa, onda $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ görnüşde ýazylýar. Parallel tekizliklerde ýatýan wektorlara komplanar wektorlar diýilýär. Nol wektora islendik wektora kollinear we komplanar wektor hökmünde seretmek bolar. Eger iki wektor kollinear bolup, bir tarapa ugrukdyrylan we olaryň uzynlyklary hem deň bolsa, onda şol iki wektora özara deň wektorlar diýilýär. Uzynlyklary deň bolan, emma garşylykly ugra ugrukdyrylan wektorlara *garşylykly wektorlar* diýilýär.

## §2. Wektory sana köpeltmek

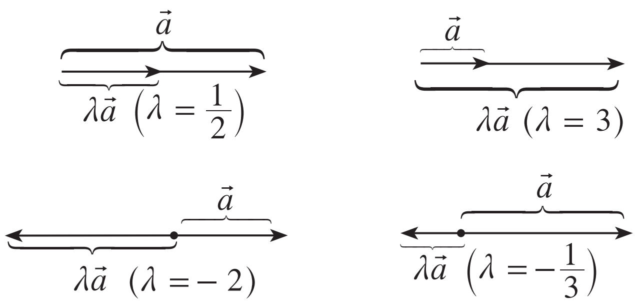
$\vec{a}$ wektoryň $\lambda$ hakyky sana köpeltmek hasyly, birinjiden, $\vec{a}$ wektor bilen kollinear bolan, ikinjiden, uzynlygy $|\vec{\lambda}|\cdot|\vec{a}|$ deň bolan, üçünjiden, $\lambda > 0$ bolanda $\vec{a}$ wektor bilen bir ugra ugrukdyrylan, $\lambda < 0$ bolanda $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugra ugrukdyrylan wektora deňdir *(3-nji surat)*. $\vec{a}$ wektoryň $\lambda$ hakyky sana köpeltmek hasyly $\lambda\vec{a}$ bilen belgilenilýär. Wektory hakyky sana köpeltmegiň häsiýetlerine seredeliň.

1. Islendik $\vec{a}$ wektor hem-de $\alpha$ we $\beta$ sanlar üçin

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

deňlik dogrudyr.

Hakykatdan-da, eger $\alpha$ we $\beta$ sanlaryň alamatlary birmeňzeş bolsa, onda deňligiň çep we sag bölegindäki wektorlar $\vec{a}$ wektor bilen bir ugra




*3-nji surat*

ugrukdyrylan bolýarlar, eger-de alamatlary dürli bolsa, onda olaryň ikisi-de $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugra ugrukdyrylan bolýarlar. Şoňa görä-de $\alpha(\beta\vec{a})$ we $(\alpha\beta)\vec{a}$ wektorlar kollinear we bir ugra ugrukdyrylan wektorlardyr. Ondan basga-da ol wektorlaryň her biriniň uzynlygy $|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ deňdir. Diýmek, $\alpha(\beta\vec{a})$ we $(\alpha\beta)\vec{a}$ wektorlar deňdirler. (Eger $\alpha$, $\beta$ sanlaryň biri ýa-da $\vec{a}$ wektor nola deň bolsa, onda deňligiň iki bölegi hem nol wektora deň bolar).

2. Nol wektora deň bolmadyk islendik $\vec{a}$ wektora kollinear bolan $\vec{b}$ wektor üçin

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}$$

deňligi kanagatlandyrýan $\lambda$ san bardyr we ol san ýeke-täk sandyr.

Hakykatdan-da, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kollinear bolany üçin, $\vec{a}$ wektoryň uzynlygyny $\lambda$ gezek uzaldyp ýa-da gysgaldyp, uzynlygy $\vec{b}$ wektoryň uzynlygyna deň bolan $\lambda\vec{a}$ wektory alarys ($\lambda > 0$ diýip hasap edýäris). Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar bir ugra ugrukdyrylan bolsalar, onda $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, eger dürli ugra ugrukdyrylan bolsalar, onda $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$ bolar. Indi bize $\lambda$ sanyň ýeke-täkligini subut etmek gerek. Goý, $\lambda$ sandan başga-da $\lambda_1$ san bar hem-de $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ we $b = \lambda_1\vec{a}$ diýeliň. Deňliklerdäki $\lambda$ we $\lambda_1$ sanlaryň alamatlarynyň birmeňzeşdigi öz-özünden düşnükli. $\lambda > 0$ we $\lambda_1 > 0$ diýsek, onda

$$|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|,$$

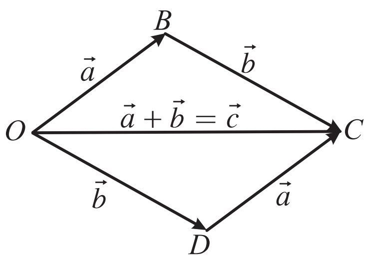
$$|\vec{b}| = |\lambda_1\vec{a}| = |\lambda_1|\cdot|\vec{a}| = \lambda_1|\vec{a}|.$$

Bu ýerden $\lambda = \lambda_1$ gelip çykýar.

$\vec{a}$ wektory $\lambda$ hakyky sana bölmeklik $\vec{a}$ wektory $\frac{1}{\lambda}$ sana köpeltmek bilen çalşyrylýar.

## §3. Wektorlary goşmak we aýyrmak

**Kesgitleme.** Umumy başlangyjy $O$ bolan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektoryň jemi diýip şol wektorlaryň başlangyjyndan çykýan hem-de $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň üstünde gurlan parallelogramyň diagonaly bolup hyzmat edýän üçünji wektora aýdylýar we ol $\vec{a} + \vec{b}$ bilen belgilenilýär.



*4-nji surat*

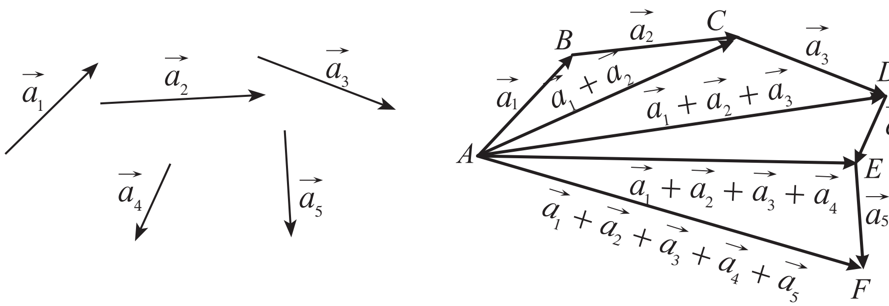
4-nji surata görä $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ýa-da $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$ görnüşde ýazyp bileris. (Umumy başlangyjy bolmadyk $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary, olary üýtgetmezden öz-özüne parallel edip süýşürmek arkaly umumy başlangyja getirip bolýandygyny belläliň). 4-nji suratdan $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$ we $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$ boljakdygy görünýär. Onda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň jemine beren kesgitlemämizi aşakdaky ýaly edip aýdyp bileris.

*$\vec{a}$ wektoryň ahyry $\vec{b}$ wektoryň başlangyjy bolan iki wektoryň jemi diýip başlangyjy $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy bilen, ahyry $\vec{b}$ wektoryň ahyry bilen gabat gelýän üçünji $\vec{c}$ wektora aýdylýar (4-nji surata seret).*

Iki wektoryň jemine deň bolan üçünji wektory gurmagyň birinji usulyna parallelogram usuly, ikinji usulyna bolsa üçburçluk usuly diýilýär.

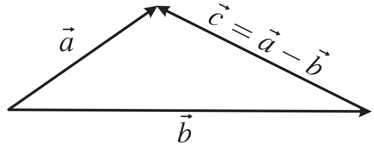
Birnäçe wektoryň jemini tapmak üçin, köplenç, üçburçluk usulyndan peýdalanylýar. Meselem, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ we $\vec{a}_5$ wektorlaryň jemini gurjak bolsak, onda $\vec{a}_2$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_1$ wektoryň ahyrynda, $\vec{a}_3$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_2$ wektoryň ahyrynda, $\vec{a}_4$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_3$ wektoyryň ahyrynda, $\vec{a}_5$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_4$ wektoryň ahyrynda ýerleşdirýäris. Başlangyjy birinji $\vec{a}_1$ wektoryň başlangyjy, ahyry iň soňky $\vec{a}_5$ wektoryň ahyry bilen gabat gelýän wektor berlen bäş wektoryň jemi bolar *(5-nji surat)*. Ýokarda görkezilişi ýaly edip, berlen wektorlaryň jemini gurmak usulyna wektorlaryň jemini tapmak diýilýär. Indi iki wektoryň tapawudy diýlip nämä aýdylýandygyna we onuň nähili tapylýandygyna seredeliň.

*$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň tapawudy diýlip kemeldiji $\vec{b}$ wektor bilen goşulanda kemeliji $\vec{a}$ wektory berýän üçünji $\vec{c}$ wektora aýdylýar we ol $\vec{a}-\vec{b}$ $(\vec{c}=\vec{a}-\vec{b})$ bilen belgilenilýär.*



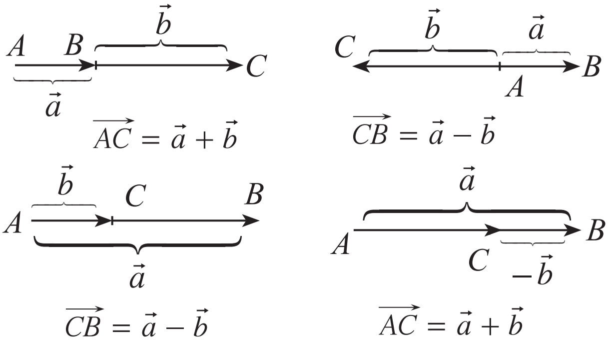

*5-nji surat*

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ wektory gurmaklyga $\vec{a}-\vec{b}$ tapawudy tapmak diýilýär. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ wektory gurmak üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary umumy $O$ başlangyja getirýärler we kemeldiji $\vec{b}$ wektoryň




*6-njy surat*

ahyryndan kemeliji $\vec{a}$ wektoryň ahyryna wektor geçirýärler *(6-njy surat).* 7-nji suratda kollinear wektorlaryň jeminiň we tapawudynyň tapylyşy görkezilendir.



*7-nji surat*

Wektorlaryň jeminiň häsiýetlerine seredeliň.

1. Islendik $\lambda$ san üçin

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Hakykatdan hem, düşnükli bolar ýaly, $\lambda > 0$ diýeliň. $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ wektory we $\vec{a} + \vec{b}$ jem bolan $\overrightarrow{AB}$ wektory $\lambda$ sana köpeldeliň *(8-nji surat).* Şonda biz $\lambda\vec{a}$ deň bolan $\overrightarrow{AC_1}$ wektory we $\lambda(\vec{a}+\vec{b})$ wektora deň bolan $\overrightarrow{AB_1}$ wektory alarys. $\Delta ABC$ we $\Delta AB_1C_1$-e seredeliň.

Bu üçburçluklaryň $A$ burçy umumy we bu burça sepleşýän iki tarapy proporsional, ýagny

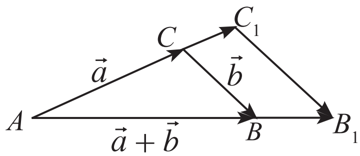
$$\frac{|\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{|\lambda\vec{a}|}{|\lambda(\vec{a}+\vec{b})|} = \frac{|\lambda|\cdot|\vec{a}|}{|\lambda|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}.$$

Diýmek, $\Delta ABC \backsim \Delta AB_1C_1$. Şoňa görä-de

$$\frac{|\overrightarrow{C_1B_1}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\lambda\vec{a}|}{|\vec{a}|}, \text{ bu ýerden } |\overrightarrow{C_1B_1}| = \lambda|\vec{b}| \quad (\lambda > 0;\ |\lambda| = \lambda).$$

Surata görä $\overrightarrow{C_1B_1} \parallel \vec{b}$. Diýmek, $\overrightarrow{C_1B_1} = \lambda\vec{b}$. 8-nji suratdan alarys: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$ ýa-da $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$. Şuny hem subut etmek gerekdi.

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.



*8-nji surat*

*Goşulyjylaryň ornuny çalşyrmaklyk olaryň jemine täsir etmeýär,* ýagny wektorlaryň jemi kommutatiw kanuna boýundyr. Bu kanunyň dogrulygy wektorlaryň jeminiň kesgitlemesinden gelip çykýar.

3. $a+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

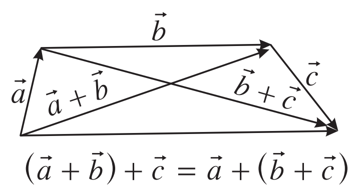
*Islendik üç wektoryň jemi assosiatiw kanuna boýundyr,* ýagny goşulyjylary islendik görnüşde toparlamak bolýar. Bu kanunyň dogrulygy 9-njy suratdan görünýär.

4. Islendik $\alpha$ we $\beta$ hakyky san hem-de $\vec{a}$ wektor üçin

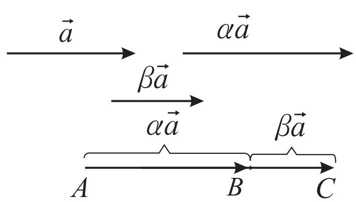
$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$

deňlik dogrudyr.

Hakykatdan-da, deňligiň çep we sag böleginde ýazylan wektorlaryň kollineardygyna şübhe ýok. Eger $\alpha$ we $\beta$ sanlaryň alamatlary birmeňzeş bolsa, onda deňligiň iki bölegindäki wektorlar bir ugra ugrukdyrylandyrlar.



*9-njy surat*



*10-njy surat*

($\alpha > 0$ we $\beta > 0$ bolanda wektorlar $\vec{a}$ wektor bilen ugurdaşdyrlar, $\alpha < 0$ we $\beta < 0$ bolanda $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugrukdyrylandyrlar). Kesgitlilik üçin $\alpha > 0$; $\beta > 0$ hasap edip, ol wektorlaryň uzynlyklarynyň deňdigini, ýagny $|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}|$ bolýandygyny görkezeliň.

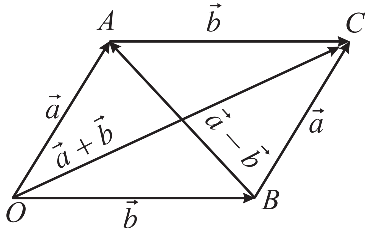
10-njy suratdan $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ýa-da $|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{a}|$ alarys. $|\alpha\vec{a}| + |\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| + |\beta| \cdot |\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}|$; $\alpha$ we $\beta$ sanlaryň alamatlary birmeňzeş bolany üçin $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$. Bu ýerden:

$$|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\alpha + \beta| \cdot |\vec{a}| = |(\alpha + \beta)\vec{a}|.$$

Biz deňligiň sag bölegindäki wektoryň uzynlygynyň çep bölegindäki wektoryň uzynlygyna deňdigini görýäris. Diýmek, olar deňdirler. $\alpha$ we $\beta$ sanlaryň alamatlary dürli bolan ýagdaý hem ýokardaka meňzeş subut edilýär. Indi käbir meselelere seredeliň.

**1-nji mesele.** 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$,

3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$ bolmagy üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özara nähili ýerleşmeli?




*11-nji surat*

**Çözülişi.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektory umumy $O$ başlangyja getireliň. Şonda $\vec{a} + \vec{b}$ we $\vec{a} - \vec{b}$ wektorlar taraplary $\vec{a}$ we $\vec{b}$ bolan parallelogramyň diagonallary bolarlar *(11-nji surat)*.

$\Delta OAB$ we $\Delta OBC$ garalyň. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BC}|$; $\overrightarrow{OB}$ umumy. Şoňa görä-de

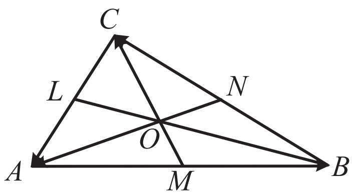
1) eger $\angle AOB = \angle OBC$ bolsa, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ bolýar. $\angle AOB + \angle OBC = \pi$ bolany üçin, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özara perpendikulýar bolmaly.

2) $\angle AOB < \angle OBC$ bolsa, $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ bolýar; $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar ýiti burç emele getirmeli.

3) $\angle AOB > \angle OBC$ bolsa, $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$ bolýar; $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kütek burç emele getirmeli.

**2-nji mesele.** Eger $O$ nokat $ABC$ üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokady bolsa, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ bolýandygyny subut etmeli.

**Çözülişi.** $\Delta ABC$-niň taraplaryna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ wektorlar hökmünde garasak, onda




*12-nji surat*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$$

12-nji suratdan alarys:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right),$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right),$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).$$

Bu üç deňlikden

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}.$$

## §4. Wektoryň oka bolan proýeksiýasy we onuň häsiýetleri

**Kesgitleme.** $\overrightarrow{AB}$ wektoryň başlangyç $A$ nokadyndan we ahyrky $B$ nokadyndan $\ell$ oka geçirilen perpendikulýarlaryň esaslarynyň arasyndaky ugrukdyrylan $A_1B_1$ kesime $\overrightarrow{AB}$ wektoryň $\ell$ oka bolan ortogonal proýeksiýasy diýilýär.

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň $\ell$ oka bolan proýeksiýasy aşakdaky ýaly belgilenilýär:

$$pr_{\ell}\overrightarrow{AB} = A_1B_1.$$

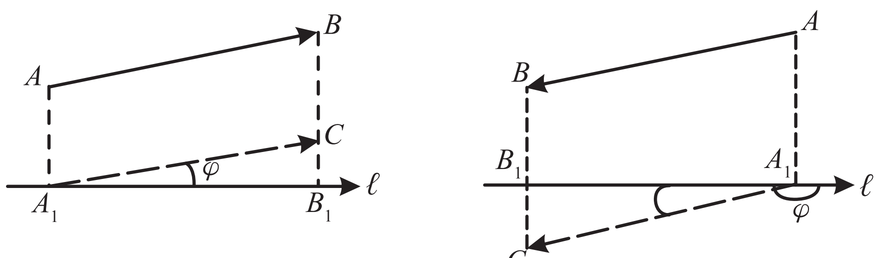
Wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň häsiýetlerine garamazdan ozal, wektor bilen okuň emele getirýän burçy diýip nämä düşünýändigimizi aýdyňlaşdyralyň.

**Kesgitleme.** $\ell$ okuň položitel ugry bilen $\overrightarrow{AB}$ wektoryň ugrunyň arasyndaky burçlaryň kiçisine $\overrightarrow{AB}$ wektoryň $\ell$ ok bilen emele getirýän burçy diýilýär.

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň $\ell$ ok bilen emele getirýän burçy 13-nji suratda $\varphi$ bilen görkezilendir. $\vec{a}$ wektoryň $\ell$ oka bolan $A_1B_1$ proýeksiýasy $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ bolanda položitel san bolýar, $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$ bolanda otrisatel san bolýar. Wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň esasy häsiýetleri aşakdakylardan ybarat:

1. $\vec{a}$ wektoryň $\ell$ oka bolan $A_1B_1$ proýeksiýasy $\vec{a}$ wektoryň uzynlygynyň $\vec{a}$ wektoryň $\ell$ ok bilen emele getirýän burçunyň kosinusyna köpeldilmegine deňdir, ýagny

$$pr_\ell\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \qquad (1)$$




*a*) $\varphi < \frac{\pi}{2}$ *b*) $\frac{\pi}{2} < \varphi$

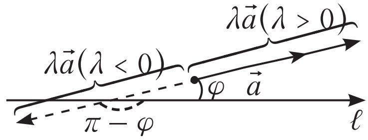
*13-nji surat*

Bu häsiýet 13-nji surat arkaly aňsat subut edilýär.

2. Islendik $\lambda$ san üçin $\lambda\vec{a}$ wektoryň $\ell$ oka bolan proýeksiýasy $\vec{a}$ wektoryň proýeksiýasynyň $\lambda$ sana köpeldilmegine deňdir, ýagny

$$pr_\ell \lambda\vec{a} = \lambda pr_\ell \vec{a}.$$

**Subudy.** Eger $\lambda > 0$ bolsa, $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar ugurdaşdyrlar. Şoňa görä-de olaryň ikisiniňem $\ell$ ok bilen emele getirýän burçlary şol bir burçdur. $\lambda < 0$ bolsa, $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar garşylykly ugrukdyrylandyr. Bu ýagdaýda $\vec{a}$ wektor $\ell$ ok bilen $\varphi$ burçy emele getirse, $\lambda\vec{a}$ wektor $\ell$ ok bilen $\pi - \varphi$ burçy emele getirer *(14-nji surat).*



*14-nji surat*

Subut eden häsiýetimize görä, $\lambda > 0$ bolanda

$$pr_\ell \lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos\varphi = |\lambda|\,|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda pr_\ell \vec{a},$$

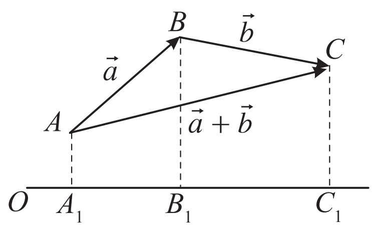
$\lambda < 0$ bolanda $(|\lambda| = -\lambda)$

$$pr_\ell \lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos(\pi - \varphi) = -|\lambda|\,|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda pr_\ell \vec{a}.$$

Diýmek, islendik $\lambda$ üçin alarys:

$$pr_\ell \lambda\vec{a} = \lambda pr_\ell \vec{a}.$$

3. Birnäçe wektoryň jeminiň $\ell$ oka bolan proýeksiýasy şol wektorlaryň $\ell$ oka bolan proýeksiýalarynyň jemine deňdir. Aňsatlyk üçin bu häsiýeti $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektor üçin subut edeliň. $\vec{b}$ wektoryň $\vec{a}$ wektora görä nähili ýerleşendigine garamazdan, ony ugruny üýtgetmezden öz-özüne parallel edip süýşürip, $\vec{a}$ wektoryň ahyry $\vec{b}$ wektoryň başlangyjy bolar ýaly edip bileris. 15-nji suratdan görnüşi ýaly,



*15-nji surat*

$$pr_\ell(\vec{a} + \vec{b}) = A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Emma $pr_\ell \vec{a} = A_1B_1$; $pr_\ell \vec{b} = B_1C_1$. Bu deňliklerden alarys:

$$pr_\ell(\vec{a} + \vec{b}) = pr_\ell \vec{a} + pr_\ell \vec{b}.$$

Bu häsiýet islendik sandaky wektorlar üçin hem edil şeýle subut edilýär. Subut edilen üç häsiýetden aşakdaky netijeleri alýarys.

1. *Eger* $\vec{a} = \vec{b}$ *bolsa, onda olaryň şol bir oka bolan proýeksiýalary hem deňdir.* Bu netije birinji häsiýetden gelip çykýar.

2. *Islendik* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sanlar we* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ *wektorlar üçin*

$$pr_\ell(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n) = c_1 pr_\ell\vec{a}_1 + c_2 pr_\ell\vec{a}_2 + \ldots + c_n pr_\ell\vec{a}_n.$$

Bu netije 2-nji we 3-nji häsiýetden gelip çykýar.

3. *Eger* $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ *wektorlar kollinear bolsalar, onda olaryň oklara bolan proýeksiýalary proporsionaldyr.*

Hakykatdan-da, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bolsa $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ bolar. Ikinji häsiýete görä, islendik $l_1$, $l_2$ oklar üçin

$$pr_{l_1}\vec{a} = pr_{l_1}\lambda\vec{b} = \lambda pr_{l_1}\vec{b},$$
$$pr_{l_2}\vec{a} = pr_{l_2}\lambda\vec{b} = \lambda pr_{l_2}\vec{b}.$$

Bu ýerden

$$\frac{pr_{l_1}\vec{a}}{pr_{l_1}\vec{b}} = \frac{pr_{l_2}\vec{a}}{pr_{l_2}\vec{b}} = \lambda$$

gelip çykýar. Tersine, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň dürli oklara bolan proýeksiýalary proporsional bolsalar, olar kollineardyrlar diýen netijäni subut etmek örän aňsatdyr. Şonuň üçin hem iki wektoryň dürli oklara bolan proýeksiýalarynyň proporsionallygyna iki wektoryň kollinearlyk şerti diýilýär.

**Bellik.** 1) Umumy başlangyja getirilen $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç diýlip şol wektorlaryň emele getirýän 180°-dan kiçi bolan burçuna aýdylýar we $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ bilen belgilenilýär. 2) $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasy diýip $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora kollinear we $\vec{b}$ bilen ugurdaş $l$ oka bolan proýeksiýasyna aýdylýar. Ol $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ bilen belgilenilýär. Açyk görnüşi ýaly, $pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

**1-nji mesele.** Uzynlygy 5-e deň bolan $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ wektor bilen 60° burç emele getirýär. $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

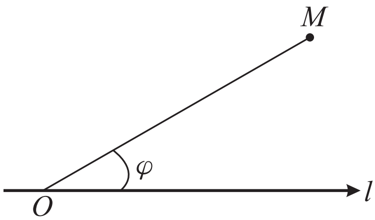
**Çözülişi.**

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right) = 5 \cdot \cos 60^\circ = 2,5.$$

## Dürli koordinatalar ulgamlary barada düşünje

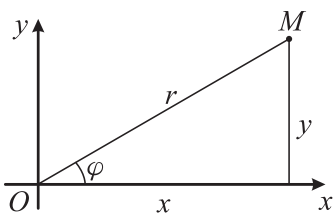
Biz dekart koordinatalar ulgamy okyja mekdepden belli diýip hasaplajakdyrys. Şu kitapda gabat gelýän koordinatalar ulgamlary barada gysgaça söhbet açalyň.

1. Polýar koordinatalar ulgamy. Ol hem edil dekart koordinatalar ulgamy ýaly, tekizlikde nokadyň ornuny sanlar üsti bilen kesgitlemegiň ýene-de bir usulydyr. Tekizlikde $l$ ok we onuň üstünde $O$ nokat berilsin *(15.1-nji surata seret).*



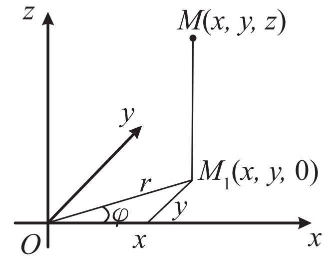

*15.1-nji surat*

Goý, $M$ tekizligiň $O$ nokat bilen gabat gelmeýän islendik nokady bolsun. Goý, $\varphi$ burç $OM$ wektoryň we $l$ okuň arasyndaky, $l$ okdan başlap, sagat diliniň hereketiniň tersine tarap ölçelýän burç bolsun; $r = OM$ bolsun. $\varphi$ – polýar burç, $r$ – polýar radius, $l$ – polýar ok we $O$ nokat polýus diýlip atlandyrylýar. Tertipleşdirilen $r, \varphi$ sanlara $M$ nokadyň polýar koordinatalary diýilýär we $M(r, \varphi)$ görnüşde belgilenilýär. Eger tekizlikde $xOy$ dekart koordinatalar ulgamy berlen bolsa we $x$ oky polýar ok hökmünde, $O$ nokat polýus hökmünde alynsa, onda islendik ($M \neq O$) nokadyň $x, y$ dekart koordinatalarynyň we $r, \varphi$ polýar koordinatalarynyň arasynda aşakdaky baglanyşyklar bardyr *(15.2-nji surata seret)*:




*15.2-nji surat*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



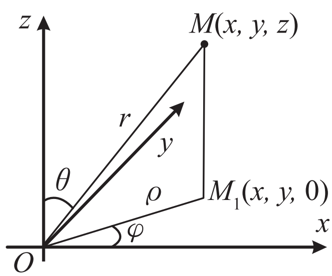

*15.3-nji surat*

2. Silindrik koordinatalar ulgamy giňişlikde nokadyň ornuny sanlar üsti bilen kesgitlemek üçin ulanylýar. Goý, giňişlikde $Oxyz$ dekart koordinatalar ulgamy berlen bolsun. $xOy$ tekizlikde polýar oky $x$ oky bilen, polýusy bolsa $O$ nokat bilen gabat gelýän polýar koordinatalar ulgamy alynýar. Giňişlikde islendik $M(x,y,z)$ nokady alalyň *(15.3-nji surata seret).*

$r$, $\varphi$ $M_1$ nokadyň $xOy$ tekizlikdäki polýar koordinatalary bolsun. Onda tertipleşdirilen $r$, $\varphi$, $z$ üç sana $M(x, y, z)$ nokadyň silindrik koordinatalary diýilýär we $M(r, \varphi, z)$ görnüşde ýazylýar. $M$ nokadyň silindrik we dekart koordinatalarynyň arasynda

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

görnüşdäki baglanyşyklar bardyr.




*15.4-nji surat*

3. Sferiki koordinatalar ulgamy hem ýokarda getirilen ulgamlaryň wezipesini ýerine ýetirýär. Edil ýokardaky ýaly edip, dekart koordinatalar ulgamyny we polýar koordinatalar ulgamyny alalyň. $M(x, y, z)$ giňişlikdäki islendik nokat bolsun *(15.4-nji surata seret).* $\rho$, $\varphi$ sanlar $M_1$ nokadyň polýar koordinatalary, $\theta - z$ oky bilen $\overrightarrow{OM}$ wektoryň arasyndaky burç. $\rho$, $\varphi$, $\theta$ tertipleşdirilen üç sana $M(x, y, z)$ nokadyň sferiki koordinatalary diýilýär we $M(\rho, \varphi, \theta)$ görnüşde ýazylýar. $M$ nokadyň dekart we sferiki koordinatalarynyň arasynda aşakdaky baglanyşyklar bardyr:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

## §5. Wektoryň koordinatalary. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň üstünde amallar

Giňişlikde $Oxyz$ gönüburçly koordinatalar ulgamy we $\vec{a}$ wektor berlen. $\vec{a}$ wektoryň $Ox$, $Oy$, $Oz$ oklaryna bolan proýeksiýalaryny degişlilikde, $a_x$, $a_y$, $a_z$ bilen belgiläliň.

**Kesgitleme.** Tertipleşdirilen $a_x$, $a_y$, $a_z$ sanlara $\vec{a}$ wektoryň koordinatalary diýilýär we

$$\vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$$

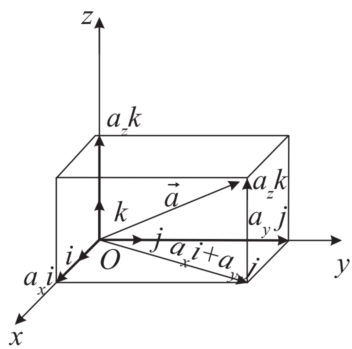
görnüşde ýazylýar.

Mysal üçin, $\vec{a} = \{1, -2,\ 3\}$ ýazgy $\vec{a}$ wektoryň $Ox$ okuna bolan proýeksiýasy ýa-da birinji koordinatasy 1-e deň, $Oy$ okuna bolan proýeksiýasy ýa-da ikinji koordinatasy – 2-ä deň, $Oz$ okuna bolan proýeksiýasy ýa-da üçünji koordinatasy 3-e deň bolýandygyny aňladýar.

$Ox$ okuna parallel birlik wektory $i$ bilen, $Oy$ okuna parallel birlik wektory $j$ bilen, $Oz$ okuna parallel birlik wektory $k$ bilen belgileýärler we olara ortlar diýip at berýärler. 16-njy suratdan görnüşi ýaly, $\vec{a}$ wektoryň koordinatalary $a_x$, $a_y$, $a_z$ bolsalar, onda ol $a_x \cdot i$, $a_y \cdot j$, $a_z \cdot k$ üç wektoryň jemine deňdir, ýagny

$$\vec{a} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k$$

deňlik dogrudyr. Bu deňlige wektoryň ortlar boýunça dargadylyşy diýilýär.




*16-njy surat*

Şol suratdan $\vec{a}$ wektoryň $|\vec{a}|$ uzynlygynyň

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

formula arkaly tapyljagyny hem çykarsa bolar. Mysal üçin, $\vec{a} = \{1, -2,\ 3\}$ bolsa, onda $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$ bolar. Indi koordinatalary bilen berlen wektorlaryň jeminiň, tapawudynyň we sana köpeltmek hasylynyň koordinatalarynyň tapylyşyny görkezeliň.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalary bilen berilsin. Onda, ýokarda görşümiz ýaly,

$$\vec{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k,$$

$$\vec{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$$

deňlikler ýerlikli bolarlar. Bu deňlikleri ulanyp, alarys:

1) $\vec{a} + \vec{b} = x_1 i + y_1 j + z_1 k + x_2 i + y_2 j + z_2 k =$
$= i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2)$

ýa-da

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2, \quad z_1 + z_2\}.$$

Diýmek, jemiň koordinatalary goşulyjylaryň degişli koordinatalaryny goşmak bilen tapylýar. Mysal üçin, $\vec{a} = \{-1, 2, 5\}$, $\vec{b} = \{2, 3, -2\}$ bolsa, onda $\vec{a} + \vec{b} = \{1, 5, 3\}$ bolar.

2) $\vec{a} - \vec{b} = x_1 i + y_1 j + z_1 k - x_2 i - y_2 j - z_2 k =$
$= (x_1 - x_2)i + (y_1 - y_2)j + (z_1 - z_2)k$

ýa-da

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2\}.$$

Diýmek, $\vec{a} - \vec{b}$ tapawudyň koordinatalary kemelijiniň koordinatalaryndan kemeldijiniň degişli koordinatalaryny aýyrmak bilen tapylýar. Mysal üçin, $\vec{a} = \{5, 0, -2\}$, $\vec{b} = \{6, 2, -4\}$ bolsa, onda $\vec{a} - \vec{b} = \{-1, -2, 2\}$ bolar.

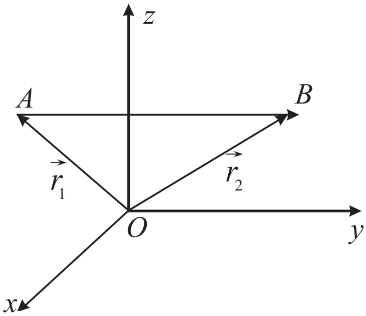
3) $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1 i + y_1 j + z_1 k) = \lambda x_1 i + \lambda y_1 j + \lambda z_1 k$

ýa-da

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \quad \lambda y_1, \quad \lambda z_1\}.$$

Diýmek, $\lambda\vec{a}$ wektoryň koordinatalary $\vec{a}$ wektoryň koordinatalaryny λ sana köpeltmek bilen tapylýar. Mysal üçin, $\vec{a} = \{2, 3, 4\}$, $\lambda = 3$ bolsa, onda $3\vec{a} = \{6, 9, 12\}$ bolar.

4) Başlangyjy $A(x_1, y_1, z_1)$, ahyry $B(x_2, y_2, z_2)$ nokatda bolan $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalaryny tapalyň *(17-nji surat)*.



*17-nji surat*

$\vec{r}_1$ – $A$ nokadyň radius wektory, $\vec{r}_2$ – $B$ nokadyň radius wektory. $A$ nokadyň koordinatalarynyň $\vec{r}_1$ wektoryň koordinatalary boljakdygy, $B$ nokadyň koordinatalarynyň $\vec{r}_2$ wektoryň koordinatalary boljakdygy 17-nji suratdan düşnüklidir. Şol sebäpli,

$$\vec{r}_1 = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}, \quad \vec{r}_2 = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$$

ýa-da $\vec{r}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $\vec{r}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ýazyp bileris. Bu ýerden

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2 i + y_2 j + z_2 k - x_1 i - y_1 j - z_1 k =$$
$$= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

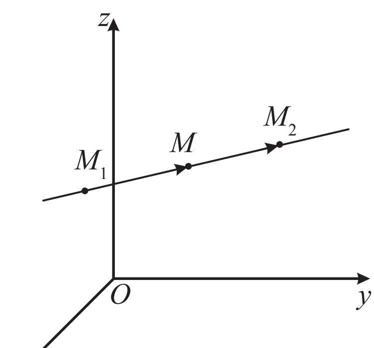
ýa-da

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

Diýmek, başlangyç we ahyrky nokatlarynyň koordinatalary berlen wektoryň koordinatalary ahyrky nokadyň koordinatalaryndan başlangyç nokadyň koordinatalaryny aýyrmak bilen tapylýar.

Mysal üçin, $A(2, 5, 1)$, $B(4, 1, 3)$ nokatlar berilse, onda $\overrightarrow{AB} = \{2, -4,\ 2\}$ bolar.

5) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlary birleşdirýän $M_1M_2$ kesimi $\lambda$ gatnaşykda bölýän, ýagny $M_1M = \lambda \cdot MM_2$ deňligi kanagatlandyrýan $M\ (x, y, z)$ nokady tapalyň.



*18-nji surat*

18-nji suratdan görnüşine görä,

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}.$$

Meseläniň şertine görä $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ bolmaly, ýagny $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$ bolmaly. Bu deňliklerden alarys:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Mesele çözüldi.

**Mysal.** Massasy $m_1$ bolan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, massasy $m_2$ bolan $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlardan durýan ulgamyň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkezini tapalyň. Belli bolşy ýaly, agyrlyk merkezi $M_1M_2$ kesimde ýatýar we ony $M_1C = \frac{m_2}{m_1}CM_2$ gatnaşykda bölýär. Diýmek, $C$ nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin ýokarky meselede $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ goýmak ýeterlikdir. Alarys:

$$x_c = \frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}, \quad y_c = \frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}, \quad z_c = \frac{z_1+\frac{m_2}{m_1}z_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}$$

ýa-da

$$x_c = \frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2}, \quad y_c = \frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}, \quad z_c = \frac{z_1m_1+z_2m_2}{m_1+m_2}.$$

**1-nji netije.** Ulgam $m_i$ $(i=\overline{1,n})$ massaly $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=\overline{1,n})$ nokatlardan durýan bolsa, onda onuň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkezi

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_im_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

formulalar arkaly tapylýar. Onuň subudy matematiki induksiýa usuly bilen geçirilýär.

**2-nji netije.** Jisim $n$ bölekden durýan bolsa, onuň bölekleriniň massalary $m_i(i=\overline{1,n})$ we olaryň agyrlyk merkezleri $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=\overline{1,n})$ bolsa, onda jisimiň agyrlyk merkezi ýokarky formulalar arkaly tapylar.

## §6. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly we onuň esasy häsiýetleri

**Kesgitleme.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly diýlip $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň uzynlyklarynyň şol wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeldilmegine deň bolan skalýar ululyga aýdylýar. Ol $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ýa-da $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bilen belgilenilýär.

Kesgitlemä görä,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right). \tag{2}$$

(2) deňligiň sag bölegini wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň 1-nji häsiýetinden peýdalanyp, aşakdaky ýaly ýazarys:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\left(|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})\right) = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b}$$

ýa-da

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) = |\vec{b}|\left(|\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)\right) = |\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Onda (2) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{3}$$

(3) deňlige laýyklykda iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyna aşakdaky ýaly kesgitleme hem berip bileris:

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly şol wektorlaryň biriniň uzynlygynyň beýleki wektoryň birinjä bolan proýeksiýasyna köpeldilmegine deňdir. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň skalýar ululykdygyny berk bellemek gerek. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň esasy häsiýetlerine seredeliň.

1. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly berlen wektorlaryň biri nola deň bolanda ýa-da berlen wektorlar özara perpendikulýar bolanda nola deňdir we diňe şol halda nola deňdir.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, ýagny wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly orun çalşyrma kanunyna boýundyr. 1-nji we 2-nji häsiýetiň dogrulygy örän aýdyň bolany üçin subudyny getirmeýäris.

3. Iki wektoryň jeminiň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyly şol wektorlaryň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Başga söz bilen aýdylanda, iki wektoryň jeminiň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyly köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyna boýundyr.

Hakykatdan-da, (3) formula görä

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$$

bolar. Wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň 3-nji häsiýetine görä,

$$pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=pr_{\vec{c}}\vec{a}+pr_{\vec{c}}\vec{b}.$$

Diýmek,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|(pr_{\vec{c}}\vec{a}+pr_{\vec{c}}\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

4. Islendik skalýar $\lambda$ köpeldiji üçin wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly köpeltmegiň utgaşdyrma kanunyna boýun egýär:

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).$$

Bu deňlik bilen aňladylýan skalýar köpeltmek hasyllarynyň üçüsiniň hem şol bir sana deňdigini görkezeliň.

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}).$$

Wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň 2-nji häsiýetine görä,

$$pr_{\vec{b}}\lambda\vec{a}=\lambda pr_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Diýmek,

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\lambda pr_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda|\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Edil şuňa meňzeşlikde alarys:

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right).$$

5. Wektoryň öz-özüne skalýar köpeltmek hasyly şol wektoryň uzynlygynyň kwadratyna deňdir:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Bu häsiýet iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden gelip çykýar.

## §7. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Goý, $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ we $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ belli bolsun. Bu iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyny tapalyň.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k).$$

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň 3-nji häsiýetine laýyklykda, biz bu iki ýaýy agzama-agza köpeldiliş usuly bilen köpeldip bileris.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2ii + y_1x_2ji + z_1x_2ki + x_1y_2ij + y_1y_2jj + z_1y_2kj+$$

$$+ x_1z_2ik + y_1z_2\,jk + z_1z_2kk.$$

Emma özara perpendikulýar wektorlar bolany üçin,

$$i\cdot j = j\cdot i = i\cdot k = k\cdot i = j\cdot k = k\cdot j = 0 \text{ we } i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1.$$

Şoňa görä-de

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 \qquad (4)$$

alarys. Diýmek, koordinatalary belli bolan iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly bir atly koordinatalarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

(4) deňlikden iki wektoryň perpendikulýarlyk şerti we wektoryň uzynlygyny tapmak formulasy gelip çykýar. Degişlilikde alarys:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Biz indi koordinatalary belli bolan islendik $\vec{a}$ wektoryň koordinata oklary bilen haýsy burçlary emele getirýändigini örän aňsatlyk bilen kesgitläp bileris. Goý, $\vec{a} = \{x, y, z\}$ bolsun we *Ox, Oy, Oz* oklar bilen degişlilikde, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ burçlary emele getirsin. Kesgitlemä görä $x = pr_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha$; $y = pr_{Oy}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta$; $z = pr_{Oz}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma$ ýazyp bileris. Bu ýerden

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Alnan deňlikleri ilki kwadrata göterip, soňra goşup alarys:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Käbir meselelere seredeliň.

**1-nji mesele.** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ we $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

**Çözülişi.** $M_1$ we $M_2$ nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektoryň uzynlygyna deňdir.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Şoňa görä-de

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**2-nji mesele.** $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ we $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ wektorlaryň arasyndaky burçy kesgitlemeli.

**Çözülişi.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny ýazalyň:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right),$$

bu ýerden

$$\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

ýa-da

$$\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

alarys.

**3-nji mesele.** $\vec{a} = \{5,\ 3,\ 2\}$, $\vec{b} = \{1, -2,\ 4\}$ bolsa, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proýeksiýasyny tapmaly.

**Çözülişi.** (3) formula görä,

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a}.$$

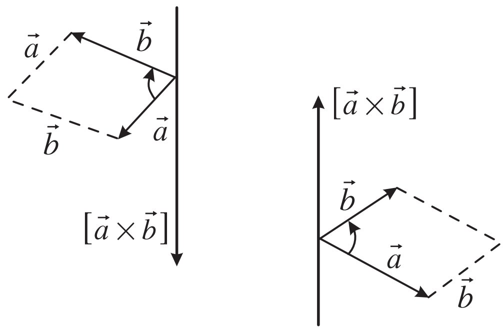
Bu ýerden:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2\cdot 4}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{7}{\sqrt{21}}.$$

## §8. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly we onuň esasy häsiýetleri

**Kesgitleme.** 1) Uzynlygy san taýdan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deň bolan, 2) $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň ikisine-de perpendikulýar bolan, 3) ahyryndan seredilende birinji wektoryň ikinji wektor bilen gabat gelmegi üçin, birinji wektory sagat diliniň hereketiniň tersine kiçi burça öwrülýän edip görkezýän üçünji $\vec{c}$ wektora $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly diýilýär.

Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly $[\vec{a}\times\vec{b}]$ ýa-da $\vec{a}\times\vec{b}$ ýaly belgilenilýär. $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $[\vec{a}\times\vec{b}] = \vec{c}$ üç wektor sag ulgamy emele getirýär.




*19-njy surat*

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanynyň $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$ bolany sebäpli, alarys:

$$|[\vec{a}\times\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right).$$

Wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň esasy häsiýetlerine seredeliň.

1. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly bu wektorlaryň biri nol wektor bolan halda ýa-da $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bolan halda we diňe şu iki halda nola deňdir. Bu häsiýet aýdyňdyr.

2. Wektor köpeltmek hasylynda wektorlaryň orny çalyşsa, onda onuň diňe alamaty üýtgär:

$$[\vec{a}\times\vec{b}] = -[\vec{b}\times\vec{a}].$$

Hakykatdan-da, kesgitlemäniň 1-nji bölümine görä $|[\vec{a}\times\vec{b}]| = |[\vec{b}\times\vec{a}]|$, ýagny $[\vec{a}\times\vec{b}]$ we $[\vec{b}\times\vec{a}]$ wektorlaryň uzynlyklary deň. Kesgitlemäniň 3-nji bölümine görä, $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ we $\vec{b}, \vec{a}, \left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$ üçlükler sag ulgamy emele getirmeli. Bu bolsa $[\vec{a}\times\vec{b}]$ we $[\vec{b}\times\vec{a}]$ wektorlaryň garşylykly ugrukdyrylandygyny görkezýär. Şoňa görä-de *(20-nji surat)*

$$[\vec{a}\times\vec{b}] = -[\vec{b}\times\vec{a}].$$

3. Skalýar köpeldiji üçin iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly köpeltmegiň utgaşdyrma kanunyna boýun egýär:

$$\lambda[\vec{a}\times\vec{b}] = [\lambda\vec{a}\times\vec{b}] = [\vec{a}\times\lambda\vec{b}]. \tag{5}$$

a) $\lambda = 0$ bolanda deňlik dogry;

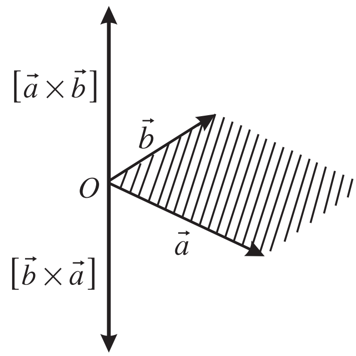
b) $\lambda \neq 0$ bolanda

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|; \quad |\lambda\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|;$$

$$\sin\left(\lambda\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right) = \sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right);$$

$$\sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\lambda\vec{b}\right) = \sin\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$$

bolýandygyny göz öňünde tutsak, seredýän wektorlarymyzyň üçüsiniň uzynlyklarynyň deňligi we ugurlarynyň birmeňzeşligi gelip çykýar. Diýmek, (5) deňlik $\lambda$ islendik hakyky san bolanda dogrudyr.




*20-nji surat*

4. $\vec{a}+\vec{b}$ wektoryň $\vec{c}$ wektora wektor köpeltmek hasyly köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyna boýundyr:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}.$$

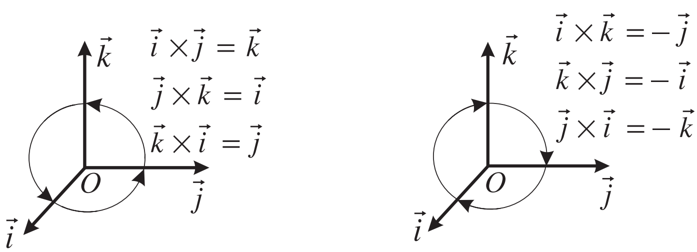
Subutsyz kabul edilýär.

## §9. Koordinatalary belli bolan iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly

Ilki dekart bazisiniň ortlarynyň, ýagny $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wektorlaryň jübüt-jübütden wektor köpeltmek hasylyny tapalyň. Kesgitlemä görä taparys *(21-nji surat)*:

$$i\times i = 0, \quad j\times j = 0, \quad k\times k = 0, \quad i\times j = k, \quad j\times k = i,$$

$$k\times i = j, \quad i\times k = -j, \quad k\times j = -i, \quad j\times i = -k.$$




*21-nji surat*

Indi koordinatalary belli bolan $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ we $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \times (x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

deňligiň sag bölegini wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň 3-nji we 4-nji häsiýetlerine laýyklykda köpagzalaryň köpeldilişine meňzeşlikde we *i, j, k* wektorlaryň geliş tertibiniň saklanmalydygyny göz öňünde tutup, dargadyp ýazalyň:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 i \times i + y_1 x_2 j \times i + z_1 x_2 k \times i + x_1 y_2 i \times j +$$
$$+ y_1 y_2 j \times j + z_1 y_2 k \times j + x_1 z_2 i \times k + y_1 z_2 j \times k + z_1 z_2 k \times k.$$

*i, j, k* wektorlaryň wektor köpeltmek hasyllary barada ýokarda aýdylanlary göz öňünde tutup alarys:

$$\vec{a} \times \vec{b} = - y_1 x_2 k + z_1 x_2 j + x_1 y_2 k - z_1 y_2 i - x_1 z_2 j + y_1 z_2 i =$$
$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k.$$

Ýaýlaryň içindäki sanlaryň her biriniň ikinji tertipli kesgitleýji bolýandygyna görä, $\vec{a} \times \vec{b}$ wektory aşakdaky ýaly ýönekeý görnüşde hem ýazyp bileris:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

ýa-da

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}, \qquad (6)$$

ýa-da

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Käbir meselelere seredeliň.

**1-nji mesele.** Depeleri $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ we $C(x_3; y_3; z_3)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä, $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň uzynlygy $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir. Biziň üçburçlugymyzyň $S$ meýdany parallelogramyň meýdanynyň ýarysyna deň, ýagny $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ bolar. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapýarys:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}.$$

(6) formula laýyklykda alarys:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}. \qquad (7)$$

Eger $ABC$ üçburçlugyň depeleri $xOy$ tekizlikde ýatýan bolsa, ýagny $z_3 = z_2 = z_1 = 0$ bolsa, onda aşakdaky formulany alarys:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

**2-nji mesele.** $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$ şert boýunça $\vec{a} = [\vec{b} \times \vec{x}]$ bolar ýaly edip $\vec{x}$ wektory tapmak hemişe mümkinmi?

**Çözülişi.** $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly bolmagy üçin, kesgitlemä görä, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektorlara perpendikulýar bolmagy zerur. $\vec{b}$ wektoryň üsti bilen $\vec{a}$ wektora perpendikulýar tekizlik geçireliň we şol tekizligiň üstünde islendik bir $\vec{c}$ wektor alalyň. $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{d}$ görnüşde belgiläliň. Onda $\vec{a} \parallel \vec{d}$ bolar we şoňa görä-de, $\vec{a} = \lambda\vec{d}$, şeýle hem

$$\lambda\vec{d} = \lambda[\vec{b} \times \vec{c}] = [\vec{b} \times \lambda\vec{c}].$$

Diýmek, $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ wektora perpendikulýar halynda meseläniň $\lambda\vec{c} = \vec{x}$ çözüwi bolar.

**3-nji mesele.** Eger $\vec{x}$ wektoryň $\vec{a} = \{5, 3, 2\}$ we $\vec{b} = \{1, -2, 4\}$ wektorlara perpendikulýarlygy belli hem-de $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}) = 85$ bolsa, $\vec{x}$ wektory tapmaly.

**Çözülişi.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektora perpendikulýar bolan islendik wektor olaryň wektor köpeltmek hasylyna, ýagny $[\vec{a} \times \vec{b}]$ wektora kollinear bolmaly. Diýmek,

$$\vec{x} = \lambda[\vec{a} \times \vec{b}] = \lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \lambda(16i - 18j - 13k).$$

$\vec{x}$ -iň bahasyny meseläniň ikinji şertindäki deňlige goýup alarys:

$$\lambda(16i - 18j - 13k)(i + 2j + 5k) = 85$$

ýa-da

$$-85\lambda = 85.$$

Bu ýerden $\lambda = -1$.
Diýmek,

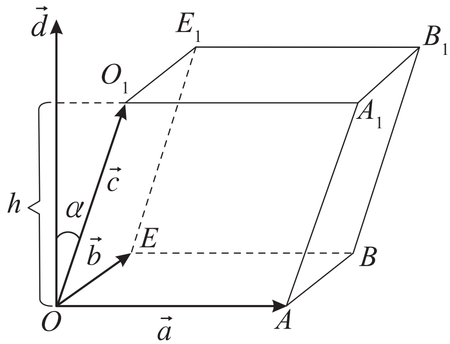
$$\vec{x} = -16\vec{i} + 18\vec{j} + 13\vec{k}.$$

## §10. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

**Kesgitleme.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň $\vec{c}$ wektora skalýar köpeldilmegine $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenilýär:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} \text{ ýa-da } \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň skalýar ululykdygy aýdyňdyr. $\vec{a}, \vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylynyň geometrik manysyna düşünmek üçin şol wektorlary umumy $O$ başlangyja getireliň we gapyrgalary degişlilikde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektor bilen gabat gelýän parallelepiped guralyň *(22-nji surat)*. $[\vec{a}\times\vec{b}]=\vec{d}$ diýip belgilesek, onda $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\cdot|\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{d},\vec{c}})$ alarys. Belli bolşy ýaly, $|\vec{d}|$ san $OABE$ parallelogramyň meýdanyna deň, $|\vec{c}|\cos(\widehat{\vec{d},\vec{c}})$ bolsa parallelepipediň $h$ beýikligine deňdir. Parallelepipediň esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeltmek hasylynyň onuň göwrümine deňdigine görä alarys:



*22-nji surat*

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\pm V.$$

Bu ýerde $V$ – parallelepipediň göwrümi. Diýmek, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň geometrik manysy hökmünde şol wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň göwrümini alyp bileris. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň käbir häsiýetine seredeliň.

Eger $\vec{a},\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar komplanar bolsalar, onda 22-nji suratdaky parallelepipediň beýikligi $h=0$ bolup, onuň göwrümi nola deň bolardy. Diýmek, üç wektor komplanar bolsa, onda olaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deň bolar:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=0.$$

Bu deňlik üç wektoryň komplanar bolmagy üçin ýeterlik şert bolup hyzmat edýär.

## §11. Koordinatalary belli bolan üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

Goý, $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ we $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ berlen bolsun. Bu üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylyny olaryň proýeksiýalary arkaly aňladalyň.

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})$$

ýa-da ((4) formula görä)

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$$

ýa-da

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Şeýlelikde, üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly olaryň koordinatalaryndan düzülen kesgitleýjä deňdir. Şoňa görä, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň komplanar bolmagy üçin

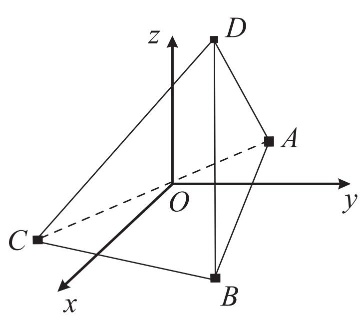
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

bolmagy ýeterlikdir.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň göwrümini

$$V=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

formula arkaly tapsak bolar. Indi käbir meselä seredeliň.




*23-nji surat*

**1-nji mesele.** Depeleri $A(1, 2, 3)$, $B(4, 1, 2)$, $C(3, 2, 1)$ we $D(1, 2, 6)$ nokatlarda bolan piramidanyň göwrümini tapmaly.

**Çözülişi.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny alalyň. Ol şol wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň $V_{\text{par}}$ göwrümine deňdir. 23-nji suratdan görnüşi ýaly, $BACD$ piramidanyň $V_{\text{pir}}$ göwrümi $\frac{1}{6}V_{\text{par}}$ deňdir, ýagny

$$V_{\text{pir}} = \pm\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AD}. \tag{9}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{3, -1, -1\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{2, 0, -2\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{0, 0, 3\}$$

bolany üçin, (9) formula laýyklykda

$$V_{\text{pir}} = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = 1.$$

# III. ANALITIKI GEOMETRIÝA

## §1. Tekizlikde göni çyzygyň deňlemeleri

### 1. Göni çyzygyň umumy deňlemesi

Tekizlikde haýsy-da bolsa bir göni çyzyk we $xOy$ dekart koordinatalar ulgamy berilsin. Bu göni çyzygyň deňlemesini tapalyň. Başgaça, bu göni çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalaryny kanagatlandyrýan, emma bu göni çyzyga degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalaryny kanagatlandyrmaýan algebraik baglanyşygy tapalyň.

Göni çyzygyň üstünde $M_0(x_0, y_0)$ nokat alalyň we şol nokatda gönä $\vec{n} = \{A, B\}$ perpendikulýar wektor geçireliň *(24-nji surat)*. Goý, $M(x, y)$ göni çyzygyň islendik nokady bolsun. $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ boljagy düşnüklidir.

Bu deňligi koordinatalar görnüşde ýazyp alarys:

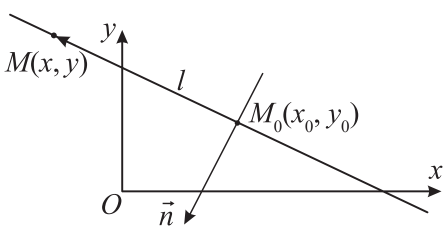
$$(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$$

ýa-da

$$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0.$$

$Ax_0 + By_0 = - C$ bilen belgiläliň, onda alarys:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$




*24-nji surat*

Bu deňlemä *göni çyzygyň umumy deňlemesi* diýilýär. $\vec{n} = \{A, B\}$ wektora *göni çyzygyň normal wektory* diýilýär. Indi göni çyzygyň umumy deňlemesiniň derňewine geçeliň.

a) $C = 0$ bolanda $Ax + By = 0$. Bu deňligi $O(0, 0)$ nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Diýmek, bu halatda göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýär.

b) $A = 0$ bolanda $By + C = 0$.

$A$ san $\vec{n}$ wektoryň abssissa okuna bolan proýeksiýasy bolany üçin, bu halatda $\vec{n}$ wektor $Ox$ oka perpendikulýar bolýar. Diýmek, $l$ göni çyzyk $Ox$ okuna paralleldir.

ç) $B = 0$ bolanda $Ax + C = 0$. Bu halatda $l$ göni çyzyk $Oy$ oka paralleldir.

d) $A = C = 0$ bolanda $By = 0$ ýa-da $y = 0$ $Ox$ okuň deňlemesi bolýar.

e) $B = 0$, $C = 0$ bolanda $Ax = 0$ ýa-da $x = 0$ $Oy$ okuň deňlemesi bolýar.

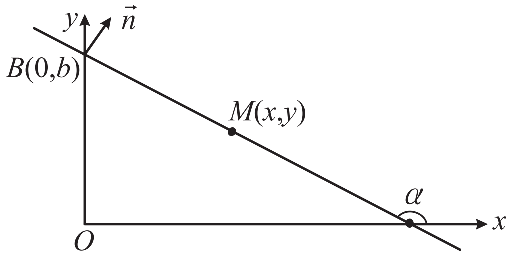
(1) deňleme bilen berilýän göni çyzygy gurmak üçin ilki $x = 0$ berip, $y = -\frac{C}{B}$, ýagny $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ nokady alýarys. Bu nokat göni çyzygyň $Oy$ ok bilen kesişme nokady bolýar. Soňra $y = 0$ berip, $x = -\frac{C}{A}$, ýagny $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ nokady alýarys. Bu nokat göni çyzygyň $Ox$ ok bilen kesişme nokady bolýar. Bu iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzyk gözlenilýän göni çyzyk bolýar.

Eger-de $A$ we $B$ koeffisiýentleriň biri nola deň we $C \neq 0$ bolsa, onda şol nokatlaryň birini tapmak bolar. Eger $A = 0$, $B \neq 0$ bolsa $Oy$ oka, $B = 0$, $A \neq 0$ bolsa $Ox$ oka şol nokatdan perpendikulýar göni çyzyk geçer. $C = 0$ bolan ýagdaýda göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçer. Şony gurmak üçin, göni çyzygyň üstünde ýatýan ýene-de bir nokady tapmak ýeterlikdir.

## 2. Göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi

Goý, göni çyzyk $Oy$ oky $B(0; b)$ nokatda kessin we $Ox$ ok bilen $\alpha$ burçy emele getirsin. $B$ nokatda gönä $\vec{n}$ normal wektor geçireliň. $\vec{n} = \{\sin\alpha, -\cos\alpha\}$ boljagy düşnüklidir *(25-nji surat)*.

Gönüniň üstünde $M(x,y)$ nokat alalyň. Gurluşa görä, $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$ ýa-da




*25-nji surat*

$$x\sin\alpha - (y - b)\cos\alpha = 0.$$

$tg\alpha = k$ bilen belgiläp, deňlemäni aşakdaky ýaly ýazyp bolar:

$$y = kx + b, \tag{2}$$

bu ýerde $k$ san göni çyzygyň burç koeffisiýentidir. Bu deňlemä göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi diýilýär. Göni çyzygyň umumy deňlemesini burç koeffisiýentli görnüşe getirmek üçin ol deňlemeden $y$ näbellini $x$-iň üsti bilen aňlatmak ýeterlikdir, ýagny

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

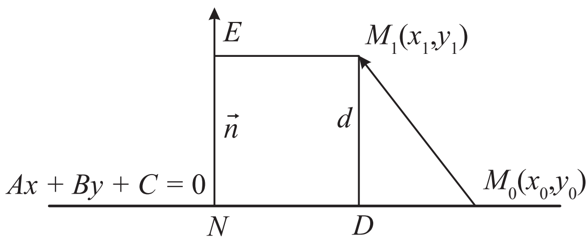
Bu deňlemäni (2) deňleme bilen deňeşdirip alarys:

$$-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b.$$

## 3. Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk

**Kesgitleme.** Nokatdan göni çyzyga geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk diýilýär.

$M_1(x_1; y_1)$ nokadyň $Ax + By + C = 0$ göni çyzykdan $d$ uzaklygyny analitiki kesgitlemäge synanyşalyň. $Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň üstünde islendik bir $M_0(x_0; y_0)$ nokat alalyň.




*26-njy surat*

$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0;\; y_1 - y_0\}$ wektoryň $Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň normal $\vec{n} = \{A, B\}$ wektoryna bolan proýeksiýasynyň uzynlygynyň $M_1(x_1; y_1)$ nokadyň $Ax + By + C = 0$ göni çyzykdan uzaklygy, ýagny $|\,pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\,| = d$ boljakdygy 26-njy suratdan görünýär. Biz

$$pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1} = |\overrightarrow{M_0M_1}|\cos\left(\vec{n}\,\hat{,}\,\overrightarrow{M_0M_1}\right)$$

we

$$\cos\left(\vec{n}\,\hat{,}\,\overrightarrow{M_0M_1}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{M_0M_1}|}$$

bolýandygyny bilýäris. Soňky iki deňlikden alýarys:

$$d = |\,pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\,| = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{n}|}$$

ýa-da

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$M_0\,(x_0; y_0)$ nokat $Ax + By + C = 0$ göni çyzyga degişli bolany üçin, $-(Ax_0 + By_0) = C$. Bu bahany ýokarky deňlige goýup, uzaklyk üçin aşakdaky formulany alarys:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3}$$

**Netije.** Nokadyň göni çyzykdan uzaklygyny tapmak üçin göni çyzygyň deňlemesiniň çep bölegindäki $x$-i we $y$-i berlen nokadyň koordinatalary bilen çalşyp, alnan netijäni göni çyzygyň normal wektorynyň uzynlygyna bölmeli we emele gelen sany absolýut ululygy boýunça almaly.

**1-nji mesele.** $A(-2;\ 1)$ nokadyň $3x - 2y + 1 = 0$ göni çyzykdan uzaklygyny tapmaly.

**Çözülişi.** (1) formulany ulanyp tapýarys:

$$d = \frac{|3(-2) - 2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

**2-nji mesele.** $3x - y - 4 = 0$ we $2x + 6y + 3 = 0$ göni çyzyklaryň kesişmeginden emele gelýän burçlaryň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** Berlen göni çyzyklaryň kesişmesinden emele gelýän burçlaryň bissektrisalarynyň islendik nokadynyň şol göni çyzyklardan deň uzaklykda ýatýandygyny nazara alsak, onda ol burçlaryň bissektrisalarynyň islendik $M(x;\ y)$ nokady üçin

$$\frac{|3x - y - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|2x + 6y + 3|}{\sqrt{4 + 36}}$$

ýazyp bileris.

Ýokarky deňlik aşakdaky iki deňlige deňgüýçlüdir:

$$\frac{3x - y - 4}{\sqrt{10}} = \frac{2x + 6y + 3}{2\sqrt{10}} \quad \text{we} \quad \frac{3x - y - 4}{\sqrt{10}} = -\frac{2x + 6y + 3}{2\sqrt{10}}.$$

Bu ýerden burçuň bissektrisalarynyň deňlemelerini alýarys:

$$4x - 8y - 11 = 0 \quad \text{we} \quad 8x + 4y - 5 = 0.$$

## 4. Göni çyzygyň iki dürli deňlemesiniň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti

Eger $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ we $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ deňlemeler şol bir göni çyzyga degişli bolsalar, onda olaryň normal wektorlary

$$\vec{n_1} = \{A_1, B_1\} \text{ we } \vec{n_2} = \{A_2, B_2\}$$

kollinear wektorlar bolarlar, şoňa görä-de

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda.$$

Göni çyzygyň deňlemeleriniň ikinjisini λ köpeldip, birinjisinden aýryp alarys: $C_1 - \lambda C_2 = 0$ ýa-da

$$\frac{C_1}{C_2} = \lambda.$$

**Netije.** Göni çyzygyň iki dürli deňlemesiniň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti olaryň koeffisiýentleriniň proporsional bolmagydyr:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

## 5. Berlen bir, iki we üç nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi

Berlen $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini almak üçin, göni çyzygyň umumy deňlemesini ýazalyň:

$$Ax + By + C = 0.$$

Göni çyzyk $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň üstünden geçýän bolsa, onda $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň koordinatalary göni çyzygyň deňlemesini kanagatlandyrmaly bolarlar. Şoňa görä-de aşakdaky ýaly ýazyp bileris:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

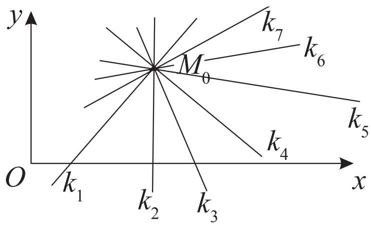
Ýokarky iki deňligi biri-birinden agzaba-agza aýryp alarys:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4}$$

(4) deňleme $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesidir. (4) deňlemeden alarys:

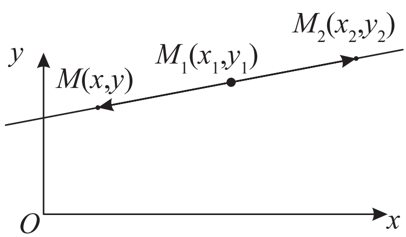
$$y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0).$$

$-\frac{A}{B} = k$ bilen belgiläp, $y - y_0 = k(x - x_0)$ alýarys. $k$-nyň dürli bahalarynda $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünden geçýän dürli göni çyzyklary alarys. $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzyklaryň toplumyna göni çyzyklaryň çogdumy diýilýär *(27-nji surat)*.



*27-nji surat*

Berlen $M_1(x_1;\ y_1)$ we $M_2\ (x_2;\ y_2)$ nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini almak üçin şol nokatlaryň üstünden göni çyzyk geçireliň we bu göni çyzygyň üstünde erkin $M(x;\ y)$ nokat alalyň *(28-nji surat)*.



*28-nji surat*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$$

wektorlar kollineardyrlar. Wektorlaryň kollinearlyk şertinden alarys:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{5}$$

(5) proporsiýa berlen iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi diýilýär.

(5) proporsiýany ikinji tertipli kesgitleýji görnüşinde

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da üçünji tertipli kesgitleýji görnüşinde

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5^1)$$

ýazyp bileris.

Kesgitleýjilerdäki *x, y* üýtgeýänleri $x_3$, $y_3$ sanlar bilen çalşyrsak, berlen $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ nokatlaryň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti gelip çykýar:

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

ýa-da

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Üç nokadyň bir göni çyzyga degişlilik şertini depeleri $M_1$, $M_2$, $M_3$ nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyna garamak bilen hem almak bolar. $M_1$, $M_2$, $M_3$ nokatlar bir göni çyzyga degişli bolsalar, onda ol üçburçlugyň meýdany nola deň bolar. Bu bolsa (6) we (7) deňlemeleri berýär.

**1-nji mesele.** Depeleri $A(1; 2)$, $B(2; 1)$ we $C(-2; 4)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň taraplarynyň deňlemelerini ýazmaly.

**Çözülişi.** ($5^1$) formuladan peýdalanyp, üçburçlugyň taraplarynyň deňlemelerini ýazýarys.

*AB* tarapyň deňlemesi:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad x + y - 3 = 0.$$

$AC$ tarapyň deňlemesi:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad 2x + 3y - 8 = 0.$$

$BC$ tarapyň deňlemesi:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad 3x + 4y - 10 = 0.$$

## 6. Iki göni çyzygyň arasyndaky burçuň ululygyny kesgitlemek. Iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şerti

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ we $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ iki göni çyzygyň kesişmeginden emele gelen wertikal burçlaryň biriniň ululygy bu çyzyklara perpendikulýar bolan

$$\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\} \text{ we } \vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$$

wektorlaryň arasyndaky burça deňdir. Şoňa görä-de berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burçuň deregine $\vec{n}_1$ we $\vec{n}_2$ wektorlaryň arasyndaky burçy kesgitläp bileris. Ol bolsa

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{8}$$

formula bilen berilýär.

Indi berlen iki göni çyzygyň özara perpendikulýarlyk we parallellik şertine seredeliň. Eger berlen göni çyzyklar özara perpendikulýar bolsalar, onda $\cos\varphi = 0$ bolar. Diýmek, (8) deňligiň sag bölegindäki drobuň sanawjysy nola deň bolar. Şeýlelikde, iki göni çyzygyň özara perpendikulýarlyk şertini alarys:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{9}$$

Eger berlen göni çyzyklar özara parallel bolsalar, onda $\vec{n}_1$ wektor $\vec{n}_2$ wektora parallel bolar. Diýmek, iki göni çyzygyň parallellik şerti aşakdaky görnüşde bolar:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{10}$$

Eger göni çyzyklar

$$y = k_1 x + b_1,$$

$$y = k_2 x + b_2$$

deňlemeler bilen berlen bolsalar, onda (8), (9) we (10) formulalar degişlilikde aşakdaky görnüşleri alarlar:

$$\cos\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \cdot \sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$k_1 k_2 = -1,$$

$$k_1 = k_2.$$

**1-nji mesele.** $3x - y + 1 = 0$ we $4x + 3y + 5 = 0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň ululygyny tapmaly.

**Çözülişi.** (8) formuladan peýdalanyp kesgitleýäris:

$$\cos\varphi = \frac{12 - 3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{25}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} \approx 0,5692,$$

$$\varphi \approx \arccos 0,5692 \approx 55^0 18'.$$

**2-nji mesele.** $A(3; 4)$ nokadyň üstünden geçýän we $3x - 2y - 3 = 0$ göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** Goý, gözlenýän göni çyzygymyz $Ax + By + C = 0$ bolsun. Meseläniň şertine görä gözleýän göni çyzygymyz berlen göni çyzyga perpendikulýar bolmaly. (9) formula boýunça $3A - 2B = 0$ ýazýarys. Bu ýerden

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \lambda \quad \text{ýa-da} \quad A = 2\lambda,\ B = 3\lambda.$$

$A$-nyň we $B$-niň tapylan bahalaryny gözleýän göni çyzygymyzyň deňlemesinde goýup alarys:

$$2\lambda x + 3\lambda y + C = 0.$$

Bu göni çyzygyň $A$ (3; 4) nokadyň üstünden geçmelidigini nazara alsak, onda

$$6\lambda + 12\lambda + C = 0 \quad \text{ýa-da} \quad C = -18\lambda.$$

$A$-nyň, $B$-niň we $C$-niň $\lambda$ görä tapylan bahalaryny gözleýän göni çyzygymyzyň deňlemesine goýsak we alnan deňlemäni $\lambda$ gysgaltsak, gözlenilýän göni çyzygyň $2x + 3y - 18 = 0$ deňlemesini alarys.

**3-nji mesele.** $A(5; 3)$ nokadyň üstünden geçýän we $2x - 3y + 1 = 0$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** Goý, gözlenilýän göni çyzygyň deňlemesi $Ax + By + C = 0$ bolsun. Meseläniň şertine görä gözlenilýän göni çyzyk berlen göni çyzyga parallel bolmaly. (10) formula boýunça

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \lambda \quad \text{ýa-da} \quad A = 2\lambda,\ B = -3\lambda.$$

$A$-nyň we $B$-niň bahalaryny gözlenilýän deňlemede ornuna goýup, alarys:

$$2\lambda x - 3\lambda y + C = 0.$$

2-nji meseledäkä meňzeş usul bilen $C = -\lambda$ hem-de gözlenilýän göni çyzygyň $2x - 3y - 1 = 0$ deňlemesini tapýarys.

**4-nji mesele.** $3x + 4y + 6 = 0$ göni çyzyga görä $A(2; 3)$ nokada simmetrik nokat tapmaly.

**Çözülişi.** Ilki bilen $A(2; 3)$ nokadyň göni çyzyga bolan $A_1(x_1; y_1)$ proýeksiýasyny tapalyň. Onuň üçin $A(2; 3)$ nokadyň üstünden geçýän we berlen göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň. $4x - 3y + 1 = 0$ *(2-nji meselä seret).* $A_1(x_1, y_1)$ nokadyň berlen we oňa perpendikulýar bolan göni çyzyga degişli bolany üçin, onuň koordinatalary

$$\begin{cases} 3x_1 + 4y_1 = -6 \\ 4x_1 - 3y_1 = -1 \end{cases}$$

ulgamy kanagatlandyrarlar. Ulgamy çözüp, $x_1 = -0{,}88$; $y_1 = -0{,}84$ tapýarys.

Goý, $A_2(x_2; y_2)$ nokat berlen göni çyzyga görä $A(2; 3)$ nokada simmetrik nokat bolsun. Onda $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ boljagy şübhesizdir.

$$\overrightarrow{AA_1} = \{-0,88 - 2; -0,84 - 3\},$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 + 0,88;\ y_2 + 0,84\}.$$

$\overrightarrow{AA_1}$ we $\overrightarrow{A_1A_2}$ wektorlaryň deňlik şertinden

$$x_2 + 0{,}88 = -0{,}88 - 2; \qquad y_2 + 0{,}84 = -0{,}84 - 3$$

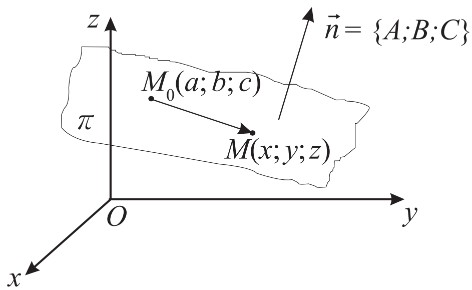
ýa-da $x_2 = -3{,}76$; $y_2 = -4{,}68$ alýarys. $A_2(-3{,}76; -4{,}68)$ nokat gözlenilýän nokatdyr.

## §2. Tekizligiň deňlemeleri

### 1. Tekizligiň umumy deňlemesi

Goý, bize $\pi$ tekizlik we $Oxyz$ koordinata ulgamy berlen diýeliň. Bu tekizligiň deňlemesini, ýagny bu tekizlige degişli bolan nokatlaryň koordinatalary kanagatlandyrýan, emma bu tekizlige degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalary kanagatlandyrmaýan algebraik baglanyşygy çykaralyň.

Eger tekizligiň haýsy bolsa-da bir nokady we tekizlige perpendikulýar wektor berilse, tekizligiň giňişlikdäki orny doly kesgitli bolar. Goý, $M_0(a; b; c)$ we tekizlige perpendikulýar $\vec{n} = \{A; B; C\}$ wektor berlen bolsun. $\pi$ tekizlikde $M_0$ nokatdan başga islendik bir $M(x; y; z)$ nokat alalyň *(29-njy surat)*.




*29-njy surat*

$\overrightarrow{M_0M} = \{x - a;\ y - b;\ z - c\}$ wektor $\vec{n}$ wektora perpendikulýar bolany üçin

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

ýazyp bileris. Bu deňleme $\pi$ tekizligiň wektor görnüşindäki deňlemesidir. Hakykatdan-da, deňlemäni $\pi$ tekizligiň islendik nokady kanagatlandyrýar, emma $\pi$ tekizlige degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalary kanagatlandyrmaýar. Tekizligiň wektor görnüşindäki deňlemesinden koordinat görnüşindäki deňlemä geçeliň.

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

ýa-da $D = -(Aa + Bb + Cc)$ belgiläp alarys:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bu deňleme tekizligiň umumy deňlemesidir.

Islendik $Ax + By + Cz + D = 0$ deňlemäniň haýsy-da bolsa bir tekizligiň deňlemesi bolýandygyny we $\vec{n} = \{A;B;C\}$ wektoryň hem şol tekizlige perpendikulýar (normal) wektor bolýandygyny subut etmek bolar.

Indi tekizligiň deňlemesiniň derňewine geçeliň.

1) $D = 0$, emma $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ bolsa, onda tekizligiň deňlemesi $Ax + By + Cz = 0$ görnüşi alar we ony $O(0; 0; 0)$ nokadyň koordinatalary kanagatlandyrar. Diýmek, bu halda tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçer.

2) $A = 0$, emma $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda tekizligiň $\vec{n} = \{0;B;C\}$ normal wektory $Ox$ oka perpendikulýar bolar, şoňa görä-de $By + Cz + D = 0$ tekizlik $Ox$ oka parallel bolar.

3) $B = 0$, emma $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $Oy$ oka parallel bolar.

4) $C = 0$, emma $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $Oz$ oka parallel bolar.

5) $A = D = 0$, emma $B \neq 0$, $C \neq 0$ bolsa, onda $By + Cz = 0$ alarys. $D = 0$ bolanda tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýär, $A = 0$ bolanda bolsa $Ox$ oka parallel bolýar. Diýmek, tekizlik $Ox$ okuň üstünden geçer.

6) $B = D = 0$, emma $A \neq 0$, $C \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $Oy$ okuň üstünden geçer.

7) $C = D = 0$, emma $A \neq 0$, $B \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $Oz$ okuň üstünden geçer.

8) $A = B = 0$, emma $C \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda $Cz + D = 0$ alarys.

Bu tekizligiň $\vec{n} = \{0; 0; C\}$ normal wektory $Ox$ we $Oy$ oklara perpendikulýar, tekizlik bolsa $xOy$ tekizlige parallel bolar.

9) $A = C = 0$, emma $B \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $xOz$ tekizlige parallel bolar.

10) $B = C = 0$, emma $A \neq 0$, $D \neq 0$ bolsa, onda tekizlik $yOz$ tekizlige parallel bolar.

11) $A = B = D = 0$, emma $C \neq 0$ bolsun, $D = 0$ bolanda tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýär, $A = B = 0$ bolanda bolsa, tekizlik $xOy$ tekizlige parallel bolýar.

Diýmek, $Cz = 0$ ýa-da $z = 0$ deňleme $xOy$ tekizligiň deňlemesidir.

12) $A = C = D = 0$, emma $B \neq 0$ bolsa, $y = 0$ bolar. Bu deňleme $xOz$ tekizligiň deňlemesidir.

13) $B = C = D = 0$, emma $A \neq 0$ bolsa, $x = 0$ bolar. Bu deňleme $yOz$ tekizligiň deňlemesidir.

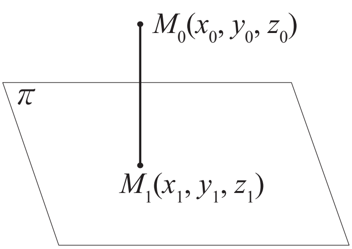
Indi deňlemesi berlen tekizligi nähili gurmalydygyna seredeliň. Tekizligi gurmak üçin tekizligiň bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan üç nokadyny tapmaly. Tekizligiň bir nokadyny tapmak üçin $x$ we $y$ näbellilere $x_0$ we $y_0$ san bahalary bersek, tekizligiň deňlemesinden $z_0$ bahany taparys, ýagny $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokady alarys. Edil şu usul bilen tekizligiň ýene-de iki nokadyny taparys. Tapylan üç nokadyň üsti bilen tekizlik geçirmeli. Adatça, şol üç nokat hökmünde tekizligiň koordinata oklary bilen kesişme nokatlary alynýar. Tekizligiň koordinata oklarynyň birine ýa-da ikisine parallel bolan hususy ýagdaýynda ony gurmak üçin degişlilikde bir ýa-da iki nokadyny tapyp, tekizligiň koordinata oklaryna parallellik şertini peýdalanyp gurmaly.

## 2. Nokadyň tekizlikden uzaklygy

**Kesgitleme.** Nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna nokadyň tekizlikden uzaklygy diýilýär.

Goý, bize $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokat we $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizlik berilsin. $M_0$ nokatdan $\pi$ tekizlige çenli bolan uzaklygy $d$ bilen we şol nokatdan geçirilen perpendikulýaryň esasyny $M_1(x_1; y_1; z_1)$ bilen belgiläp (*30-njy surat*), alarys:

$$d^2 = |\overrightarrow{M_0M_1}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2.$$




*30-njy surat*

Gurluşa görä, $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$. Bu ýerde $\vec{n} = \{A; B; C\}$ tekizligiň normal wektory. $\overrightarrow{M_0M_1}$ we $\vec{n}$ wektorlaryň parallellik şertinden peýdalanyp alarys:

$$\frac{x_1 - x_0}{A} = \frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{z_1 - z_0}{C} = \lambda$$

ýa-da

$$x_1 - x_0 = \lambda A, \quad y_1 - y_0 = \lambda B, \quad z_1 - z_0 = \lambda C. \qquad (11)$$

Bu bahalary $d$ uzaklyk üçin bolan aňlatmada ornuna goýup alarys:

$$d = \sqrt{\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2} = |\lambda| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

$\lambda$ sany kesgitlemek üçin (11) deňliklerden $x_1$, $y_1$, $z_1$ bahalary tapyp, tekizligiň deňlemesine goýalyň:

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0$$

ýa-da

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

$\lambda$ sanyň tapylan bahasyny $d$ üçin bolan aňlatmada goýup alarys:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12}$$

**Netije.** Nokadyň tekizlikden uzaklygyny tapmak üçin tekizligiň deňlemesindäki *x, y, z* üýtgeýänleriň ornuna berlen nokadyň koordinatalaryny goýup, ony tekizligiň normal wektorynyň uzynlygyna bölmeli we emele gelen sanyň absolýut ululygyny almaly.

**1-nji mesele.** $M\,(2;\,5;\,7)$ nokadyň $3x - 2y + z - 4 = 0$ tekizlikden uzaklygyny tapmaly.

**Çözülişi.** (12) formulany ulanyp tapýarys:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7 - 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

## 3. Berlen bir nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

$M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmak gerek diýeliň. Goý,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

şol tekizligiň deňlemesi bolsun. Onda $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ nokadyň koordinatalary bu tekizligiň deňlemesini kanagatlandyrarlar:

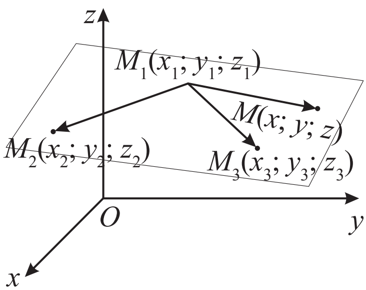
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Ýokarky iki deňlemeden alarys:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Bu deňleme $A$, $B$, $C$ koeffisiýentleriň üçüsiniň bir wagtda nola deň bolmadyk hallarynyň hemmesinde berlen $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ nokadyň üstünden geçýän tekizlikleriň deňlemesidir. $A$, $B$, $C$ koeffisiýentleriň dürli bahalarynda $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ nokadyň üstünden geçýän dürli tekizlikleri alarys. Bir nokadyň üstünden geçýän tekizliklere ilteşikli tekizlikler diýilýär. Ilteşikli tekizlikleriň hemmesiniň geçýän nokadyna ilteşikli tekizlikleriň merkezi diýilýär.

## 4. Berlen üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi




*31-nji surat*

Goý, bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$ üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmak talap edilsin. $M_1$, $M_2$ we $M_3$ nokatlaryň üstünden $\pi$ tekizlik geçýär diýeliň. $\pi$ tekizligiň üstünde erkin $M(x;\ y;\ z)$ nokat alalyň. $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ wektorlar $\pi$ tekizlikde ýatýarlar, şoňa görä-de komplanar wektorlardyr *(31-nji surat).*

Wektorlaryň komplanarlyk şertine laýyklykda alarys:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Bu $M_1$, $M_2$, $M_3$ nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesidir.

**1-nji mesele.** $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(5;\ –3;\ 4)$ we $C(–\ 3;\ 4;\ –\ 2)$ nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** (13) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 0 \\ 5 - 2 & -3 - 1 & 4 - 0 \\ -3 - 2 & 4 - 1 & -2 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$4x + 14y + 11z - 22 = 0.$$

## 5. Berlen iki nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

Berlen $M_1(x_1; y_1; z_1)$ we $M_2(x_2; y_2; z_2)$ iki nokadyň üstünden geçýän tekizlikleriň deňlemesini ýazalyň. Onuň üçin islendik bir $M_3\ (x_3; y_3; z_3)$ nokat alalyň we $M_1$, $M_2$, $M_3$ nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$M_3$ nokat erkin bolany üçin, $x_3 - x_1 = \lambda_1$, $y_3 - y_1 = \lambda_2$, $z_3 - z_1 = \lambda_3$ erkin sanlar bolýar. Diýmek, islendik $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ erkin sanlar üçin

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Alnan deňleme $M_1$, $M_2$ nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesidir. Bu deňlemedäki $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sanlara dürli bahalary berip, berlen $M_1$ we $M_2$ nokadyň üstünden geçýän dürli tekizlikleri alarys.

## 6. Iki tekizligiň arasyndaky burç. Iki tekizligiň parallellik we perpendikulýarlyk şerti

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{we} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

iki tekizligiň kesişmeginden emele gelýän ikigranly burçlaryň biri $(\varphi)$ bu tekizliklere perpendikulýar bolan

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \text{ we } \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

wektorlaryň arasyndaky burça deň bolar. Şoňa görä-de,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Eger tekizlikler parallel bolsalar, onda olara perpendikulýar bolan $\vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ we $\vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ wektorlar hem parallel bolarlar. Diýmek, wektorlaryň parallellik şertine görä

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{14}$$

Eger tekizlikler perpendikulýar bolsalar, onda olara perpendikulýar bolan $\vec{n_1}$ we $\vec{n_2}$ wektorlar hem özara perpendikulýar bolarlar. Wektorlaryň perpendikulýarlyk şertine görä

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{15}$$

(14), (15) deňlikler degişlilikde tekizlikleriň parallellik we perpendikulýarlyk şerti bolar.

**1-nji mesele.** $l$-iň we $m$-iň haýsy bahalarynda $lx + 5y – 3z + 2 = 0$ tekizlik $2x – my + 9z + 3 = 0$ tekizlige: a) parallel, b) perpendikulýar bolar?

**Çözülişi.** a) Berlen tekizlikleriň parallellik şertine görä

$$\frac{l}{2} = \frac{5}{-m} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

bolýar. Bu ýerden: $l = -\frac{2}{3}$; $m = 15$.

b) Tekizlikleriň perpendikulýarlyk şertine görä $2l – 5m – 3 \cdot 9 = 0$ bolýar. Bu ýerden:

$$l = \frac{27 + 5m}{2}.$$

**2-nji mesele.** $M_1(5; 3; 2)$ we $M_2(1; –3; 4)$ nokatlaryň üstünden geçýän hem-de $\vec{a} = \{2; 1; 7\}$ wektora parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** Goý, $\pi$ gözlenilýän tekizlik bolsun. $\pi$ tekizlikde erkin $M(x; y; z)$ nokady alalyň. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}$ wektorlar komplanar bolarlar. Şoňa görä-de

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-2 \\ -4 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da $11x - 8y - 2z - 27 = 0$ gözlenilýän tekizligiň deňlemesi bolar.

## §3. Giňişlikde göni çyzygyň deňlemesi

### 1. Giňişlikde göni çyzygyň umumy deňlemesi

Giňişlikde islendik göni çyzyga onuň üstünden geçýän iki tekizligiň kesişme çyzygy hökmünde garap bolar. Diýmek, göni çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary tekizlikleriň ikisiniň-de deňlemelerini kanagatlandyrar. Ýagny $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ birinji tekizligiň deňlemesi, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ikinji tekizligiň deňlemesi bolsa, onda

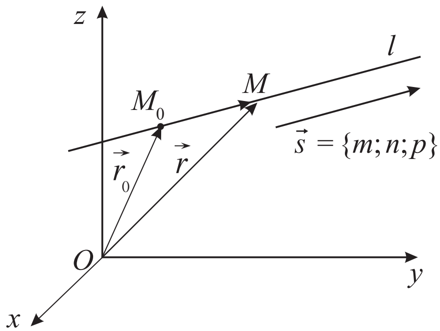
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ulgam göni çyzygyň deňlemesi bolar. Bu ulgama göni çyzygyň umumy deňlemesi diýilýär.

### 2. Göni çyzygyň parametrik we kanonik deňlemesi

$l$ göni çyzygyň parametrik deňlemesi diýilýän we amalyýetde giňden ulanylýan deňlemäni çykaralyň. Göni çyzygyň $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokady we oňa parallel bolan $\vec{s} = \{m; n; p\}$ wektor berilse, onda giňişlikde $l$ göni çyzygyň ýagdaýy gutarnykly kesgitli bolar *(32-nji surat).*

Göni çyzyga parallel bolan $\vec{s} = \{m; n; p\}$ wektora ugrukdyryjy wektor diýilýär. Eger $M(x; y; z)$ göni çyzygyň üstündäki erkin nokat bolsa, onda $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ we $\vec{s}$ wektorlar kolleneardyr. Diýmek, käbir $t$ san üçin alarys:




*32-nji surat*

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$$

Bu deňleme göni çyzygyň wektor görnüşindäki deňlemesidir. Hakykatdan-da, $M(x;\ y;\ z)$ nokat $l$ göni çyzygyň üstünde bolsa, onda $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ bolar we tersine, islendik $t$ san üçin $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ bolsa, onda $M$ nokat berlen $l$ göni çyzygyň üstünde ýatar. $M(x;\ y;\ z)$ nokat $l$ göni çyzygyň üstünde ýatmasa, $\overrightarrow{M_0M}$ wektor $\vec{s}$ wektora parallel bolmaz. Diýmek, $\overrightarrow{M_0M}$ wektor $t$-niň hiç bir bahasynda $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$ deňligi kanagatlandyrmaz.

Göni çyzygyň wektor görnüşindäki deňlemesinden koordinata görnüşindäki deňlemesine geçeliň.

$$\begin{cases} x - x_0 = mt, \\ y - y_0 = nt, \\ z - z_0 = pt \end{cases}$$

ulgama göni çyzygyň parametrik deňlemesi diýilýär. Ulgamdan alarys:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{16}$$

Alnan deňlemä göni çyzygyň kanonik deňlemesi diýilýär. (16) deňlikleri aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{$a$}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (b)$$

$$\frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (ç)$$

Bu deňlemelere degişlilikde *Oz*, *Oy* we *Ox* oklara parallel tekizlikleriň deňlemesi hökmünde garamak bolar. Şoňa görä-de, (*a*), (*b*), (*ç*) deňlikler bilen berlen tekizliklere *l göni çyzygy proýektirleýji tekizlikler* diýilýär.

## 3. Berlen iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ we $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nokatlar berlip, bu nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini tapmaklyk talap edilsin. Ugrukdyryjy $\vec{s}$ wektor hökmünde $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\}$ wektory alsak, onda (16) formula görä

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (17)$$

ýazyp bileris. (17) gözlenilýän deňlemedir.

**1-nji mesele.** $A(3;\ 5;\ 0)$ we $B(2;\ 1;\ 8)$ nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** (17) deňlemedäki $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ sanlary *A* nokadyň koordinatalary bilen, $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ sanlary *B* nokadyň koordinatalary bilen çalşyryp alarys:

$$\frac{x - 3}{-1} = \frac{y - 5}{-4} = \frac{z}{8}.$$

## 4. Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek

Göni çyzygyň umumy deňlemesini ýazalyň:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek üçin ulgamdaky üýtgeýän ululyklaryň birini, meselem, $z$-i $t$ bilen belgiläp, galan $x$ we $y$ üýtgeýän ululyklary şol iki deňlemeden $t$-niň üsti bilen aňladýarlar. Netijede, aşakdaky ulgam alynýar:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = t. \end{cases}$$

Bu bolsa *göni çyzygyň parametrik deňlemesidir*. Bu ulgamdan $t$-ni ýok edip, gözlenilýän kanonik deňlemäni alarys:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z}{1}.$$

**1-nji mesele.**

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

göni çyzygyň kanonik deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** $z = t$ goýup, alarys:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 2t + 1, \\ 2x - y = -3t - 2. \end{cases}$$

Ulgamy $x$-e we $y$-e görä çözüp, alarys:

$$x = -\frac{5}{9} - \frac{7}{9}t, \quad y = \frac{8}{9} + \frac{13}{9}t.$$

Diýmek, göni çyzygyň parametrik deňlemesi

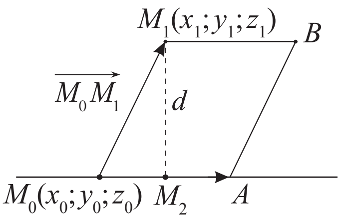
$$x = -\frac{5}{9} - \frac{7}{9}t, \quad y = \frac{8}{9} + \frac{13}{9}t, \quad z = t$$

bolýar. Göni çyzygyň kanonik deňlemesini almak üçin, şol üç deňlemäniň her birinden $t$-ni tapyp, olary özara deňeşdirip alarys:

$$\frac{x + \frac{5}{9}}{-\frac{7}{9}} = \frac{y - \frac{8}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{z}{1}.$$

## 5. Giňişlikde nokadyň göni çyzykdan uzaklygy

Kanonik deňlemesi bilen berlen $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, ugrukdyryjy wektory $\vec{s} = \{m; n; p\}$ bolan göni çyzykdan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nokadyň uzaklygyny $d$ bilen belgiläliň *(33-nji surat)*. Gözleýän $d$ uzaklygymyz esasy $|\vec{s}|$ bolan $M_0ABM_1$ parallelogramyň beýikligi bolar. Parallelogramyň meýdanyny $d \cdot |\vec{s}|$ ýa-da $|[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}]|$ bilen aňlatmak bolar. Diýmek,



*33-nji surat*

$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}]|}{|\vec{s}|}. \tag{18}$$

**1-nji mesele.** $M_1(3; 4; 2)$ nokadyň $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-4}$ göni çyzykdan uzaklygyny tapmaly.

**Çözülişi.** (18) formulany peýdalanalyň.

$$M_0(1; -3; 2), \quad \overrightarrow{M_0M_1} = \{2; 7; 0\}, \quad s = \{2; 3; -4\},$$

$$[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -28\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$|[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}]| = \sqrt{28^2 + 8^2 + 8^2} = 4\sqrt{57},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29},\ d = \frac{4\sqrt{57}}{\sqrt{29}}.$$

## 6. Iki göni çyzygyň arasyndaky burç. Iki göni çyzygyň parallellik we perpendikulýarlyk şerti

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_2}{p_1} \quad \text{we} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

göni çyzyklaryň arasyndaky burç bu göni çyzyklaryň ugrukdyryjy $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ we $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ wektorlarynyň arasyndaky burça deňdir. Berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burçy $\varphi$ bilen belgiläp alarys:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Eger göni çyzyklar parallel bolsa, onda olaryň ugrukdyryjy wektorlary hem paralleldir. Diýmek, iki göni çyzygyň parallellik şerti –

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Eger iki göni çyzyk perpendikulýar bolsa, onda olaryň ugrukdyryjy wektorlary hem perpendikulýardyr. Diýmek, iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şerti –

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

**1-nji mesele.**

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad \text{we} \quad \frac{x + 2}{1} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 5}{\sqrt{2}}$$

göni çyzyklaryň arasyndaky ýiti burçy tapmaly.

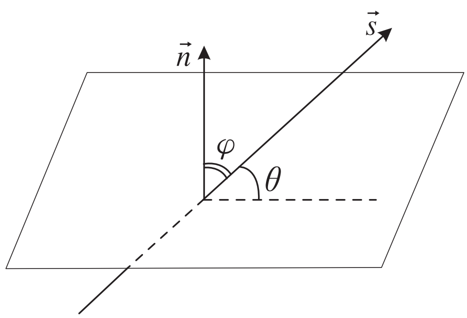
**Çözülişi.**

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{1-1+2}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}.$$

Bu ýerden: $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = 60°$

## 7. Göni çyzygyň we tekizligiň arasyndaky burç. Göni çyzygyň tekizlige parallellik we perpendikulýarlyk şerti

**Kesgitleme.** Göni çyzygyň we onuň tekizlige bolan proýeksiýasynyň arasyndaky $\frac{\pi}{2}$-den kiçi bolan $\theta$ burça göni çyzygyň tekizlik bilen emele getirýän burçy diýilýär *(34-nji surat)*.




*34-nji surat*

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

göni çyzyk bilen $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizligiň arasyndaky burçy $\theta$, göni çyzyk bilen tekizligiň $\vec{n} = \{A;B;C\}$ normal wektorynyň arasyndaky burçy $\varphi$ bilen belgiläp alarys: $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$\varphi$ burçy kesgitlemegi bilýäris:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}.$$

Emma $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$. Diýmek,

$$\sin\theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{s}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna perpendikulýar bolar. Şoňa görä-de göni çyzygyň tekizlige parallellik şerti aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{19}$$

Eger göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolsa, onda göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{s}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna parallel bolar. Şoňa görä-de göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şerti şeýle bolýar:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{20}$$

**1-nji mesele.** $M(1; –2; 3)$ nokatdan geçýän we $3x + 2y – z + 5 = 0$ tekizlige: a) parallel, b) perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** Goý, $\vec{s} = \{m; n; p\}$ wektor göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory bolsun.

a) Göni çyzygyň tekizlige parallellik şertini (19) formula boýunça alarys:

$$3m + 2n – p = 0.$$

$n = 2$, $p = 1$ erkin bahalary berip, $m = –1$-i tapýarys. $3x + 2y – z + 5 = 0$ tekizlige parallel bolan we $M(1; –2; 3)$ nokadyň üstünden geçýän tükeniksiz köp göni çyzyklaryň biriniň deňlemesi şeýle bolýar:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

b) Göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şertini (20) formula boýunça tapýarys:

$$\frac{m}{3}=\frac{n}{2}=\frac{p}{-1}.$$

Diýmek, göni çyzygyň deňlemesi

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

## 8. Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokady

Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmak üçin göni çyzygyň parametrik deňlemesini we tekizligiň deňlemesini bilelikde çözmek gerek, ýagny aşakdaky ulgamy çözmeli:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Bu ulgamyň 2-nji, 3-nji we 4-nji deňlemelerinden $x$-iň, $y$-iň we $z$-iň bahalaryny 1-nji deňlemede ýerine goýup, alarys:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Bu deňlikden $Am+Bn+Cp \neq 0$ bolanda $t$-niň ýeke-täk kesgitli bahasyny tapýarys. Ony göni çyzygyň parametrik deňlemesine goýup, göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny taparys. Eger deňlikde $Am+Bn+Cp=0$ bolsa, onda $t$-niň bahasy kesgitsiz bolar. $Am+Bn+Cp=0$ göni çyzygyň we tekizligiň parallellik şertidir *((19) formula seret).*

**1-nji mesele.**

$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{5}$ göni çyzygyň $5x+3y-2z+2=0$ tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaly.

**Çözülişi.** Göni çyzygyň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyp, tekizligiň deňlemesi bilen bilelikde çözeliň:

$$\begin{cases} 5x+3y-2z+2=0, \\ x=3+2t, \\ y=-1-t, \\ z=3+5t. \end{cases}$$

Bu ýerden: $t=-\frac{5\cdot 3-3\cdot 1-2\cdot 3+2}{5\cdot 2-3\cdot 1-2\cdot 5}=2\frac{2}{3}$.

$t$-niň bahasyny göni çyzygyň parametrik deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$x=\frac{25}{3};\quad y=-\frac{11}{3};\quad z=\frac{49}{3}.$$

Indi ähli temalara degişli bolan birnäçe meselä seredeliň.

**2-nji mesele.** $A(2;\ 3;\ 5)$ nokadyň $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$ göni çyzyga bolan proýeksiýasyny tapmaly.

**Çözülişi.** $A(2;\ 3;\ 5)$ nokatdan $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$ göni çyzyga geçirilen perpendikulýar bu göni çyzygy $A_1\ (x_1;y_1;z_1)$ nokatda kesýär diýeliň. $A$ we $A_1$ nokatdan geçýän çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{x-2}{x_1-2}=\frac{y-3}{y_1-3}=\frac{z-5}{z_1-5}.$$

Bu göni çyzyklaryň perpendikulýarlygyndan alarys:

$$2(x_1-2)+3(y_1-3)+1(z_1-5)=0. \qquad (\alpha)$$

$A_1$ $(x_1; y_1; z_1)$ nokat berlen göni çyzyga degişli bolany üçin

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{y_1 + 1}{3} = \frac{z_1 + 2}{1} = t.$$

Bu ýerden $x_1 = 2t + 1$; $y_1 = 3t - 1$; $z_1 = t - 2$ bolar. $x_1$-iň, $y_1$-iň, $z_1$-iň tapylan bahalaryny ($\alpha$) deňlige goýup, ondan $t$-ni tapýarys ($t = 1{,}5$).

$t$-niň tapylan bahasyny ornuna goýup alarys:

$x_1 = 4$, $y_1 = 3{,}5$, $z_1 = -0{,}5$; $A_1(4; 3{,}5; -0{,}5)$.

**3-nji mesele.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{2}$ göni çyzyga görä $A(1; 2; -1)$ nokada simmetrik nokat tapmaly.

**Çözülişi.** Ilki $A$ nokadyň berlen göni çyzyga bolan $A_1$ proýeksiýasyny tapalyň (öňki meseledäkä meňzeş tapýarys).

$$x_1 = \frac{8}{7}, \quad y_1 = \frac{17}{7}, \quad z_1 = -\frac{12}{7}, \quad A_1\left(\frac{8}{7}; \frac{17}{7}; -\frac{12}{7}\right).$$

Goý, $A_2$ $(x_2; y_2; z_2)$ nokat berlen göni çyzyga görä $A$ nokada simmetrik nokat bolsun. $A_2$ nokat $AA_1$ göni çyzygyň dowamynyň üstünde ýatar we $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ bolar.

$$\overrightarrow{AA_1} = \left\{\frac{8}{7} - 1;\ \frac{17}{7} - 2;\ -\frac{12}{7} + 1\right\},$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left\{x_2 - \frac{8}{7};\ y_2 - \frac{17}{7};\ z_2 + \frac{12}{7}\right\}.$$

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ deňlikden alarys:

$$x_2 - \frac{8}{7} = \frac{8}{7} - 1; \quad y_2 - \frac{17}{7} = \frac{17}{7} - 2; \quad z_2 + \frac{12}{7} = -\frac{12}{7} + 1$$

ýa-da

$$x_2 = \frac{9}{7}; \quad y_2 = \frac{20}{7}; \quad z_2 = -\frac{17}{7}. \text{ Onda } A_2\left(\frac{9}{7}; \frac{20}{7}; -\frac{17}{7}\right).$$

**4-nji mesele.**

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{-1}\ (l_1)\ \text{we}\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{4}\ \ (l_2)$$

göni çyzyklaryň arasyndaky iň gysga uzaklygy tapmaly.

**Çözülişi.** Göni çyzyklar parallel bolan ýagdaýda ol uzaklyk bir göni çyzygyň islendik nokadyndan beýleki göni çyzyga çenli bolan uzaklyga deňdir. Biz bu meselä öň seredipdik.

Normal $\vec{n}$ wektory şol bir wagtda $\vec{s_1}=\{2;3;-1\}$ we $\vec{s_2}=\{-1;5;4\}$ ugrukdyryjy wektorlara perpendikulýar bolan tekizlik $l_1$, $l_2$ göni çyzyklara paralleldir. Şoňa görä $\vec{n}$ wektory $\vec{s_1}$ we $\vec{s_2}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyna deň diýip alyp bileris:

$$\vec{n}=[\vec{s_1}\times\vec{s_2}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=17i-7j+13k.$$

Diýmek, $17x-7y+13z+D=0$ tekizlik $l_1$ we $l_2$ göni çyzyklara parallel bolar. Bu tekizlik $l_1$ göni çyzygyň üstünden geçer ýaly edip, $D$ sany kesgitläliň. Eger tekizlik $l_1$ göni çyzygyň üstünden geçýän bolsa, onda onuň deňlemesini (3; –5; 1) nokadyň koordinatalary kanagatlandyrar, ýagny

$$17\cdot 3+7\cdot 5+13\cdot 1+D=0 \text{ ýa-da } D=-99.$$

Diýmek, $17x-7y+13z-99=0$ tekizlik $l_1$ göni çyzygyň üstünden geçýän we $l_2$ göni çyzyga parallel tekizlikdir. Bu tekizligi $Q$ tekizlik diýip atlandyralyň. $l_1$we $l_2$ göni çyzyklaryň arasyndaky iň gysga aralygyň $l_2$ göni çyzygyň islendik nokadyndan $Q$ tekizlige çenli bolan uzaklyga deňdigi aýdyňdyr. $l_2$ göni çyzygyň üstünde ýatýan $M(-2;1;-2)$ nokatdan $17x-7y+13z-99=0$ tekizlige çenli uzaklygy hasaplalyň:

$$d=\frac{|17(-2)-7\cdot 1+13(-2)-99|}{\sqrt{17^2+7^2+13^2}}.$$

Bu ýerden gözlenilýän iň gysga aralyk $d=\dfrac{166}{\sqrt{507}}$.

# IV. MATRISALAR

## §1. Esasy kesgitlemeler

**1-nji kesgitleme.** $m$ setirli, $n$ sütünli $m \times n$ sandan ybarat bolan gönüburçly tablisa matrisa diýilýär we aşakdaky ýaly

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ýa-da gysgaça $\{a_{ij}\}_m^n$ görnüşde belgilenilýär.

Berlen matrisany düzýän $a_{ij}$ ($i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$) sanlara matrisanyň elementleri diýilýär. $a_{ij}$ elementiň birinji indeksi $i$ onuň setir belgisini, ikinji indeksi $j$ onuň sütün belgisini görkezýär. Adatça, matrisa baş harplar bilen belgilenilýär. Meselem:

$$A = \{a_{ij}\}_m^n; \quad B = \{b_{ij}\}_p^q; \quad C = \{c_{ij}\}_r^s; \quad D = \{d_{ij}\}_k^l.$$

Eger iki matrisanyň sütünleriniň we setirleriniň sany degişlilikde deň bolsa, onda şeýle matrisalara *deň tertipli matrisalar* diýilýär. Matrisa diňe bir setirden ýa-da bir sütünden ybarat bolup biler. Bular ýaly matrisa degişlilikde *setir matrisa* we *sütün matrisa* diýilýär. Meselem, (5 7 9) – setir matrisa,

$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ – sütün matrisa.

**2-nji kesgitleme.** Hemme elementleri nola deň bolan matrisa nol matrisa diýilýär. Ol $O$ bilen belgilenýär.

Matrisanyň setiriniň we sütüniniň sany deň ($m = n$) bolsa, onda oňa *kwadrat matrisa* diýilýär. Meselem,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kwadrat matrisadyr, oňa *n tertipli matrisa* diýilýär.

**3-nji kesgitleme.** Kwadrat matrisanyň elementleriniň tertibi üýtgedilmezden düzülen kesgitleýjä matrisanyň kesgitleýjisi diýilýär we ol, köplenç, $\Delta(A)$ bilen belgilenýär:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitlemeden diňe kwadrat matrisanyň kesgitleýjisiniň bolup biljekdigi gelip çykýar.

**4-nji kesgitleme.** Esasy diagonalyndaky elementlerden başga elementleriniň hemmesi nol bolan kwadrat matrisa diagonal matrisa diýilýär.

Meselem,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{11}\ a_{22}\ a_{33}).$$

Diagonal matrisanyň diagonaldaky elementleri bire deň bolsalar, onda oňa birlik matrisa diýilýär we ol $E$ bilen belgilenýär.

Meselem,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5-nji kesgitleme.** $A = \{a_{ij}\}_m^n$ we $B = \{b_{ij}\}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}}$ matrisalaryň setirleriniň we sütünleriniň sany deň hem-de $a_{ij} = b_{ij}$ bolsa, onda bu matrisalara özara deň matrisalar diýilýär.

## §2. Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallar

### 1. Matrisalary goşmak we aýyrmak

Setirleriniň we sütünleriniň sany degişlilikde deň bolan iki

$$A = \{a_{ij}\}_m^n \text{ we } B = \{b_{ij}\}_m^n$$

matrisanyň jemi diýlip $\{a_{ij} + b_{ij}\}_m^n$ matrisa, tapawudy diýlip $\{a_{ij} - b_{ij}\}_m^n$ matrisa aýdylýar we degişlilikde jem $A + B$, tapawut $A - B$ görnüşde belgilenýär.

Ýaýraň görnüşde jem şeýle ýazylýar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tapawut hem edil şuňa meňzeş ýazylýar. Şu kesgitlemeden matrisalaryň jemine degişli aşakdaky häsiýetler gelip çykýar:

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$,

b) $A + B = B + A$,

ç) $A + O = A$.

## 2. Matrisany sana köpeltmek

$A = \{a_{ij}\}_m^n$ matrisanyň hemme elementlerini $\lambda$ sana köpeltmek bilen alynýan $A = \{\lambda a_{ij}\}_m^n$ matrisa $A$ matrisanyň $\lambda$ sana köpeltmek hasyly diýilýär we ol $\lambda A$ bilen belgilenýär. Meselem,

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}.$$

Matrisany sana köpeltmek we matrisalary goşmak amallary aşakdaky häsiýetlere eýedirler:

1) $1 \cdot A = A$,

2) $0 \cdot A = O$,

3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$,

bu ýerde $A$ we $B$ deň tertipli matrisalardyr, $\alpha$ we $\beta$ hakyky sanlardyr. Matrisany haýsy-da bolsa λ sana bölmeklik matrisany $\lambda$ sana ters bolan $\frac{1}{\lambda}$ sana köpeltmek bilen ýerine ýetirilýär.

## 3. Matrisany matrisa köpeltmek

Goý, $\{a_{ij}\}_m^n$ we $\{b_{ij}\}_p^q$ iki matrisa berlen bolsun. Eger $\{a_{ij}\}_m^n$ matrisanyň sütünleriniň sany $\{b_{ij}\}_p^q$ matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolsa, ýagny $n = p$ bolsa, onda her bir elementi

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

(bu ýerde $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, q$) formula bilen kesgitlenýän üçünji $\{c_{ij}\}_m^q$ matrisa bu iki matrisanyň köpeltmek hasyly diýilýär hem-de ol aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$\{c_{ij}\}_m^q = \{a_{ij}\}_m^n \cdot \{b_{ij}\}_p^q.$$

Diýmek, $A$ matrisany $B$ matrisa köpeltmek üçin, $A$ matrisanyň tertibi $m \times n$ bolsa, $B$ matrisanyň tertibi $n \times q$ bolmaly ($m$ we $q$ islendik natural san). Şu ýagdaýda $A \cdot B = C$ matrisanyň tertibi $m \times q$ bolýar.

$A$ we $B$ matrisalaryň köpeltmek hasylynyň islendik elementiniň nähili alynýandygyny düşündireliň. $C = A \cdot B$ matrisanyň $i$-nji setiri bilen $j$-nji sütüniniň kesişmesindäki $c_{ij}$ elementi almak üçin $A$ matrisanyň $i$-nji setirindäki elementleriň $B$ matrisanyň $j$-nji sütünindäki degişli elementlere köpeltmek hasyllarynyň jemini almak gerek; başga sözler bilen aýdanyňda, $A$ matrisanyň $i$-nji setirine we $B$ matrisanyň $j$-nji sütünine wektor hökmünde garap, şol wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmak gerek. Aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin mysallara ýüzleneliň.

**Mesele.** Aşakda berlen $A$ we $B$ matrisalar üçin $A \cdot B$ we $B \cdot A$ matrisalary tapmaly:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Çözülişi.**

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \\ 7 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 7 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 35 \\ 29 & 27 \end{pmatrix}.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 22 \\ 45 & 32 \end{pmatrix}.$$

2) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ manysy ýok, çünki $A$ matrisanyň üç sütüni bar, $B$ matrisanyň bolsa iki setiri bar.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + (-4) \cdot 3 & 2 \cdot (-7) + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -19 & 19 \\ -2 & -22 & 8 \end{pmatrix}.$$

3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ manysy ýok (näme üçin?),

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ manysy ýok (näme üçin?).

Seredilen mysallardan görnüşi ýaly, $A$ matrisany $B$ matrisa köpeldip bolýan ýagdaýda, tersine, $B$ matrisany $A$ matrisa köpeldip bolmazlygy hem mümkin, köpeldip bolaýanda hem $AB \neq BA$ bolmagy mümkin ((1) mysala serediň). Diýmek, umumy ýagdaýda $A$ we $B$ matrisalaryň köpeltmek hasyly orun çalşyrma kanunyna boýun egmeýär. Şoňa görä-de matrisalar köpeldilende, olaryň orunlaryna pugta üns bermek gerek. $A \cdot B = B \cdot A$ bolsa, onda $A$ we $B$ matrisalara *orun çalşyrymly matrisalar* diýilýär. Birlik $E$ matrisa şol tertipdäki islendik kwadrat $A$ matrisa bilen orun çalşyrymlydyr, ýagny $AE = EA$. Matrisalaryň köpeltmek hasyllary aşakdaky kanunlara boýundyr, ýagny aşakdaky deňlikleriň iki bölegindäki amallary ýerine ýetirmek mümkin bolan ýagdaýda, islendik $A$, $B$, $C$ üç matrisa we $\alpha$ san üçin:

1) $A(BC) = (AB)C$,

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

3) $(A + B)C = AC + BC$,

4) $C(A + B) = CA + CB$.

Bu häsiýetleriň dogrudygyna şol deňlikleriň iki bölegindäki amallary ýerine ýetirmek bilen göz ýetirmek bolar. Geljekde gerek boljak bir teoremany subut edeliň.

**Teorema.** Eger $A$ we $B$ matrisalar şol bir tertipdäki kwadrat matrisalar bolsalar, onda

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

**Subudy.** Bu teoremanyň subudyny ikinji tertipli matrisalar üçin geçireliň. Goý,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

berlen matrisalar bolsun. Bu ýerden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Delta(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

tapýarys. Kesgitleýjileriň häsiýetlerini ulanyp, $\Delta(AB)$ kesgitleýjini dört kesgitleýjiniň jemi görnüşinde ýazyp bileris, ýagny

$$\Delta(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Soňra ol kesgitleýjileriň sütünlerindäki umumy köpeldijileri kesgitleýjiniň belgisiniň daşyna çykaryp alarys:

$$\Delta(AB) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Birinji we dördünji kesgitleýjiler birmeňzeş sütünleriniň bolany üçin, nola deň bolarlar. Üçünji kesgitleýjiniň sütünleriniň ornuny çalşyryp we alamatyny üýtgedip, $\Delta(AB)$ üçin gerek bolan deňligi alarys:

$$\Delta(AB) = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta(B) \cdot \Delta(A) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Şuňa meňzeş edip, islendik deň tertipdäki kwadrat iki matrisa üçin hem teoremany subut etmek bolar *(subudyny özbaşdak geçiriň).*

## §3. Transponirlenen matrisa

$A = \{a_{ij}\}$ berlip, $B = \{b_{ij}\}$ matrisanyň islendik $b_{ij}$ elementi $b_{ij} = a_{ji}$ formula arkaly kesgitlense, onda $B$ matrisa $A$ matrisa görä transponirlenen matrisa diýilýär we $B = A^*$ bilen belgilenýär. Başga sözler bilen aýdanyňda, $A$ matrisanyň $i = 1, 2, \dots, n$ setirlerini degişlilikde $j = 1, 2, \dots, n$ sütün edip täze matrisa alsak, oňa $A$ matrisa görä transponirlenen matrisa diýilýär. Meselem,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisa görä transponirlenen $A^*$ matrisa aşakdaky ýaly bolar:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Setir matrisany transponirlesek, sütün matrisa, sütün matrisany transponirlesek, setir matrisa emele geler. Meselem:

$A = (a_1\, a_2 \dots a_n)$ setir matrisa bolsa, onda

$$A^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$ – sütün matrisa bolar.

Matrisalary transponirlemek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. Iki gezek transponirlenen matrisa berlen matrisa deňdir, ýagny

$$A^{**} = (A^*)^* = A.$$

2. Transponirlenen iki matrisanyň jemi bu matrisalaryň jeminiň transponirlenmegine deňdir, ýagny

$$A^* + B^* = (A + B)^*.$$

3. Iki matrisanyň köpeltmek hasylynyň transponirlenenleri, ol matrisalaryň transponirlenenleriniň ters tertipde köpeldilmegine deňdir:

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*.$$

4. Eger $A$ matrisa kwadrat matrisa bolsa, onda

$$\Delta(A) = \Delta(A^*).$$

1 - 4 häsiýetiň dogrudygyna gös-göni barlamak bilen göz ýetirmek bolar.

Eger $A$ matrisa özüniň transponirlenen $A^*$ matrisasy bilen gabat gelse, ýagny $A = A^*$ bolsa, onda oňa simmetrik matrisa diýilýär.

Bu kesgitlemeden simmetrik matrisanyň kwadrat matrisadygy we onuň esasy diagonala görä simmetrik elementleriniň özara deňdigi gelip çykýar.

5. $A$ matrisanyň transponirlenen $A^*$ matrisa köpeltmek hasyly simmetrik matrisadyr. Hakykatdan-da, $C = AA^*$ matrisany transponirläp alarys:

$$C^* = (AA^*)^* = A^{**} \cdot A^* = A \cdot A^* = C.$$

## §4. Ters matrisa

Ters matrisa düşünjesi kwadrat matrisalar köplügi üçin kesgitlenýär.

Berlen $A$ matrisa ters matrisa diýip $BA = AB = E$ ($E$ – birlik matrisa) deňligi kanagatlandyrýan islendik $B$ matrisa aýdylýar. $A$ matrisanyň ýeke-täk ters matrisasy bardyr. Dogrudan hem, goý, $B_1$ matrisa hem

$AB_1 = B_1A = E$ deňligi kanagatlandyrýar diýeliň. $B_1A = E$ deňligi sagdan $B$ matrisa köpeldip, $B_1AB = EB = B$ alarys (çünki $EB = B$). Ikinji tarapdan $B_1AB = B_1(AB) = B_1E = B_1$ (çünki $AB = E$ we $B_1E = B_1$). Diýmek, $B_1 = B$ bolar. Bu ýeke-täk ters matrisa $A^{-1}$ bilen belgilenýär. Diýmek, $A^{-1}$ matrisa $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ deňligi kanagatlandyrýar. Islendik kwadrat matrisanyň ters matrisasy barmy? Bu soraga jogap bermek üçin, berlen $A$ matrisanyň we oňa ters bolan $A^{-1}$ matrisanyň kesgitleýjileriniň köpeltmek hasylyna seredeliň:

$$\Delta(A).\ \Delta(A^{-1}) = \Delta(AA^{-1}) = \Delta(E) = 1$$

bolýar. Bu ýerden alarys:

$$\Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta(A)}.$$

Diýmek, $A$ matrisa ters $A^{-1}$ matrisanyň bolmagy üçin hökmany $\Delta(A) \neq 0$ bolmaly (bu şert ýokarky deňlikden gelip çykýar).

Kesgitleýjisi nola deň bolmadyk kwadrat matrisa aýratyn däl matrisa diýilýär. Goý, bize aýratyn däl matrisa berilsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\Delta(A)$ kesgitleýjiniň $a_{ij}$ elementiniň algebraik doldurgyjyny $A_{ij}$ bilen belgiläp, täze

$$B = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisany alalyň we $B$ matrisanyň $A^{-1}$ matrisa bolýandygyny subut edeliň.

Kesgitlemä görä, $B$ matrisa $A$ matrisanyň ters matrisasy bolmagy üçin $BA = AB = E$ deňligi kanagatlandyrmaly. $AB$ we $BA$ matrisalary aýratynlykda tapalyň. Alarys:

$$BA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} C.$$

Bu ýerde $c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$. Kesgitleýjiniň islendik setiriniň (ýa-da sütüniniň ) elementleriniň degişlilikde beýleki islendik setiriň (ýa-da sütüniň) elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň $i \neq j$ bolanda nola deňdigine görä, $c_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Kesgitleýjiniň islendik setiriniň (ýa-da sütüniniň ) elementleriniň özleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň berlen kesgitleýjä deňdigine görä ($i = j$ bolanda) $c_{ii} = \Delta(A)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) alarys. Aýdylanlaryň esasynda aşakdakyny ýazyp bileris:

$$AB = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} \Delta(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Edil şunuň ýaly edilip $BA = E$ boljakdygy subut edilýär. Diýmek, $B$ matrisa $A$ matrisanyň tersidir we biz $A^{-1} = B$ ýa-da ýaýbaň görnüşde

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ýazyp bileris. Biz, şeýlelikde, islendik aýratyn däl matrisanyň ters matrisasynyň barlygyny subut etdik we ony tapmagyň usulyny görkezdik. Indi ters matrisanyň häsiýetlerine seredeliň.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bu deňlik kesgitlemeden gelip çykýar.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Hakykatdan-da,

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A) \cdot B = B^{-1}E \cdot B = B^{-1}B = E$$

we

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Diýmek, $B^{-1}A^{-1}$ matrisa $AB$ matrisanyň ters matrisasy eken.

3. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Hakykatdan-da, kesgitlemä görä, $A^*(A^*)^{-1} = (A^*)^{-1}A^* = E$.

$AA^{-1} = E$ matrisany transponirläliň:

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = E^* = E.$$

Diýmek,

$$(A^*)^{-1}A^* = (A^{-1})^*A^*$$

bolýar. Bu deňligiň iki bölegini hem sagdan $(A^*)^{-1}$ köpeldip alarys:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Indi ters matrisany tapmaga degişli bir mysala seredeliň.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ matrisanyň ters matrisasyny tapmaly.

$\Delta(A) = -64$ bolany üçin, $A$ aýratyn däl matrisadyr. $A^{-1}$ matrisanyň elementlerini tapalyň.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -43; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 25; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 63;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -53;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -19; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Diýmek,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} -43 & 63 & -19 \\ 1 & 3 & -7 \\ 25 & -53 & 17 \end{pmatrix}.$$

Tapan matrisamyzyň $A$ matrisa ters matrisadygyny barlap görüň.

## §5. Matrisanyň minory we rangy

**Kesgitleme.** Matrisanyň birnäçe setiriniň we sütüniniň üstüni çyzyp, galan elementleriniň ornuny üýtgetmezden alnan kesgitleýjä $A$ matrisanyň minory diýilýär.

Kesgitleýjiniň kwadrat görnüşlidigine görä, $A$ matrisanyň minorlaryny almak üçin onuň setirleriniň we sütünleriniň birnäçesiniň üsti çyzylandan soň galan setirleriniň we sütünleriniň sany deň bolmalydyr. Aýdylanlara oňat düşünmek üçin mysala ýüzleneliň.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

*A* matrisanyň her gezek bir sütüniniň üstüni çyzsak, onda *A* matrisanyň 4 sany 3-nji tertipli minoryny alarys, bir setiriniň we iki sütüniniň üstüni çyzsak, onda *A* matrisanyň 18 sany ikinji tertipli minoryny alarys, iki setiriniň we üç sütüniniň üstüni çyzsak, onda *A* matrisanyň 12 sany birinji tertipli minoryny alarys. Bu mysaldan görnüşi ýaly, *A* matrisanyň dürli tertipli ençeme minory bolýar.

Eger *A* matrisanyň ölçegi $m \times n$ bolsa, onda bu matrisanyň 1-den tä *m* we *n* sanlaryň kiçisine çenli tertipdäki minorlary bolup biler. *A* matrisanyň käbir tertipdäki minorlarynyň hemmesi nola deň, emma beýleki tertipdäki minorlarynyň iň bolmanda biri noldan tapawutly san bolmagy mümkin. Haýsy tertipdäki minoryň noldan tapawutlanýandygy uly ähmiýete eýedir. Şoňa görä-de matrisanyň rangy diýlen düşünje girizilýär.

**Kesgitleme.** Matrisanyň noldan tapawutly minorlarynyň tertipleriniň ulusyna *A* matrisanyň rangy diýilýär.

Meselem,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

matrisanyň üçünji tertipli minorlarynyň hemmesi nola deň, emma ikinji tertipli minorlarynyň içinde noldan tapawutlanýany bar, meselem, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Diýmek, *A* matrisanyň rangy 2-ä deňdir. Biz *A* matrisanyň rangyny $r(A)$ bilen belgileýäris. Biziň sereden mysalymyzda $r(A) = 2$ bolar. Matrisanyň rangyny gözlemegiň usulyny salgy berýän teoremany subut edeliň.

**Teorema.** $m \times n$ ölçegli matrisanyň *k* tertipli minorlarynyň hemmesi nola deň bolsa, onda $k + 1$ tertipli minorlarynyň hem hemmesi nola deňdir.

**Subudy.** Matrisanyň islendik $k + 1$ tertipli minoryny alalyň we ony $\Delta_{k+1}$ bilen belgiläliň. $\Delta_{k+1}$ kesgitleýjini islendik setiriň elementlerine görä dargadyp ýazalyň:

$$\Delta_{k+1} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{i(k+1)}A_{i(k+1)}.$$

Islendik $A_{ij}$ san goşmak ýa-da aýyrmak alamaty bilen berlen matrisanyň $k$ tertipli minoryna deň. Diýmek, hemme $A_{ij} = 0$, onda $\Delta_{k+1} = 0$ bolar.

Matrisanyň rangyny tapmak üçin bu teoremadan ugur alyp, aşakdaky kadany gollanmak bolar.

1. Kiçi tertipdäki minordan uly tertipdäki minora geçmeli.

2. Eger matrisanyň $k$ tertipli minorynyň biri noldan tapawutly bolsa, onda şol minoryň daşyna agyl bolýan setirleri we sütünleri çyzmak arkaly düzülýän $k$ + 1 tertipli minorlara garamaly. Eger şonda $k$ + 1 tertipli minorlaryň hemmesi nola deň bolsa, onda matrisanyň rangy $r = k$ bolar. Eger $k$ + 1 tertipli minorlaryň biri noldan tapawutly bolsa, onda ýokardaky usuly şol noldan tapawutly $k$ + 1 tertipli minora ulanyp, $k$ + 2 tertipli minorlaryň nola deňdigine ýa-da deň däldigine garamaly we ş. m. Biziň ýaňyja rangyny tapan matrisamyzda bu aýdylanlary düşündireliň.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ minoryň daşyna agyl bolýan setirleri we sütünleri çyzmak arkaly düzülen üçünji tertipli minorlary hasaplalyň:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Diýmek, matrisanyň rangy $r = 2$.

Matrisanyň bir setiri ýa-da sütüni beýleki setirlerinden ýa-da sütünlerinden çyzykly kombinasiýa arkaly alnan bolsa, onda ol setire ýa-da sütüne beýleki setirler bilen çyzykly baglanyşykly setir ýa-da sütün diýilýär. Matrisanyň rangy onuň näçe setiriniň ýa-da sütüniniň çyzykly baglanyşyksyzdygyny görkezýär. Şoňa görä-de matrisanyň nola deň bolmadyk *iň uly tertipli minoryna matrisanyň bazis minory* diýilýär.

Matrisanyň bazis minoryna girmeýän islendik sütüniň (setiriň) bazis minorynyň sütünleri (setirleri) bilen çyzykly baglanyşyklydygyny hem belläp geçeliň. Ýokarda aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin aşakdaky matrisalara seredeliň.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$A$ matrisanyň rangy $r(A)=3$, ýagny $A$ matrisanyň setirleri (sütünleri) çyzykly baglanyşyksyz, $B$ we $C$ matrisalaryň ranglary $r(B)=2$; $r(C)=2$, olaryň iki setiri (ýa-da sütüni) çyzykly baglanyşyksyz, bir setiri (ýa-da sütüni) beýleki setirlerine (ýa-da sütünlerine) çyzykly baglanyşykda. $B$ matrisanyň üçünji setiri birinji we ikinji setiriň jeminden ybarat. $C$ matrisanyň üçünji sütüni birinji we ikinji sütüniň tapawudyndan ybarat.

Matrisalaryň kömegi bilen, şol bir ölçegli giňişlikde berlen wektorlaryň çyzykly baglanyşygynyň bardygyny ýa-da ýokdugyny kesgitlemek aňsat bolýar. Meselem, goý, bize dört ölçegli giňişlikde

$$\vec{x}_1 = \{3, 2, 0, 1\}; \quad \vec{x}_2 = \{1, 0, 0, 2\};$$

$$\vec{x}_3 = \{2, -1, 0, 0\}; \quad \vec{x}_4 = \{1, 0, 3, 2\}$$

wektorlar berlen bolsun. Bu wektorlaryň çyzykly baglanyşygy barmy? Başga sözler bilen aýdanyňda, berlen wektorlar bazis wektorlar bolup bilermi? Berlen wektorlaryň koordinatalaryny matrisalaryň sütünleri (ýa-da setirleri) edip alalyň:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0.$$

Bu ýerden $A$ matrisanyň sütünleriniň çyzykly baglanyşyksyzdygy gelip çykýar. Diýmek, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$ wektorlar çyzykly baglanyşyksyz wektorlar, ýagny olar bazis bolup bilerler.

## §6. Çyzykly deňlemeler ulgamynyň matrisa usuly bilen çözülişi

Goý, bize aşakdaky ulgam berlen bolsun:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) ulgamyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden, näbellileriniň özlerinden hem-de azat agzalaryndan matrisalar düzeliň.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

$A$ matrisany sagdan $X$ matrisa köpeltsek, (1) ulgamyň çep bölegini berer. Şoňa görä-de ulgamy matrisa görnüşde ýazyp bileris:

$$AX = F. \tag{2}$$

Eger $\Delta(A) \neq 0$ bolsa, onda $A$ matrisa ters $A^{-1}$ matrisanyň bardygyny bilýäris. (2) deňligi çepden $A^{-1}$ matrisa köpeldeliň:

$$A^{-1}AX = A^{-1}F \quad \text{ýa-da} \quad EX = A^{-1}F.$$

$E \cdot X = X$ bolýandygyny nazara alsak, onda alarys:

$$X = A^{-1}F. \tag{3}$$

(3) deňlik (1) ulgamyň çözüwidir.

**1-nji mesele.** Aşakdaky çyzykly deňlemeler ulgamyny matrisa usuly bilen çözmeli.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

**Çözülişi.**

*A; X; F* matrisalary düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berlen ulgamy matrisa görnüşinde ýazalyň:

$$AX = F.$$

$A$ matrisanyň kesgitleýjisini tapalyň:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

$A^{-1}$ ters matrisany tapalyň:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ýokarda getirilen (3) formula boýunça

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6+9-10 \\ -18+3+5 \\ 6-6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Iki matrisanyň deňlik şertinden alarys: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$.

Çyzykly deňlemeler ulgamynyň matrisa usuly arkaly alnan çözüwiniň II bapdaky Krameriň usuly arkaly alnan çözüwi bilen birmeňzeşdigini görkezmek aňsatdyr. Indi berlen deňlemeler ulgamy haýsy halda kökdeş bolýarlar we haýsy halda kökdeş bolmaýarlar diýen soraga seredeliň. Goý, çyzykly deňlemeler ulgamynyň $n$ näbellisi we $m$ deňlemesi bolsun.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = f_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = f_m. \end{cases} \tag{4}$$

(4) ulgamyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa ulgamyň matrisasy, (4) ulgamyň koeffisiýentlerinden we azat agzalaryndan düzülen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix}$$

matrisa ulgamyň ýaýraňlandyrylan matrisasy diýilýär. Ýokarda goýlan soraga Kroneker-Kapelliniň teoremasy jogap berýär.

**Teorema.** (4) ulgamyň kökdeş bolmagy üçin onuň matrisasynyň rangynyň ýaýraňlandyrylan matrisasynyň rangyna deň bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.

Diýmek, ulgamyň matrisasynyň rangy ýaýraňlandyrylan matrisanyň rangyndan kiçi bolsa, ýagny $r(A) < r(B)$ bolsa, onda ulgamyň çözüwi ýokdur ($r(A)$ we $r(B)$ degişlilikde $A$ we $B$ matrisanyň ranglary). Eger $r(A) = r(B) = r$ we $r < n$ bolsa, onda (4) ulgamyň çözüwi tükeniksiz köpdür. Eger $r = n$ bolsa, onda ulgamyň ýeke-täk çözüwi bardyr. Aýdylan tassyklamalaryň düşnükli bolmagy üçin käbir mysallara seredeliň.

**2-nji mesele.** Aşakdaky ulgamlaryň kökdeşdiklerini ýa-da kökdeş däldiklerini derňemeli.

$$1)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

**Çözülişi.** Ulgamlaryň matrisalarynyň we ýaýraňlandyrylan matrisalarynyň ranglaryny hasaplalyň:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 5 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Diýmek, $r(A) = 3$ we $r(B) = 3$. Ulgam kökdeş we onuň ýeke-täk çözüwi bar.

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

ýagny $r(A) = 2$. $B$ matrisanyň aşakdaky minory

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ýagny $r(B) = 3$. Onda $r(A) < r(B)$ – ulgam kökdeş däl.

# V. DERŇEWE GIRIŞ

## §1. Hakyky sanlar köplügi

Rasional sanlar köplügi bize mekdepden bellidir. Eýýäm Pifagoryň döwründe ol sanlaryň köp meseläni çözmekde ýeterlik bolmaýandygy belli bolupdyr. Mysal üçin, Pifagoryň teoremasyna görä, katetleri 1-e deň bolan gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasynyň uzynlygy $\sqrt{2}$ deň bolýar. Bu sanyň rasional san bolmaýandygy bellidir. Ine, şu kemçiligi aradan aýyrmak maksady bilen rasional sanlar köplügi giňeldilip, hakyky sanlar köplügi girizilýär. Bu sanlaryň dürli kesgitlemeleri bar. Olaryň içinde iň ýönekeýi hakyky sanlary onluk droblaryň üsti bilen kesgitlemekdir. Islendik rasional sany tükenikli ýa-da tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar we tersine – islendik tükenikli ýa-da tükeniksiz periodik onluk drob rasional sandyr. Tükeniksiz periodik däl onluk droba irrasional san diýilýär. Rasional we irrasional sanlaryň toplumyna hakyky sanlar köplügi diýilýär. Hakyky sanlar köplügi tertipleşdirilen köplükdir, ýagny islendik iki $\alpha$ we $\beta$ san üçin $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ gatnaşyklaryň biri we diňe biri dogrudyr. Hakyky sanlar köplüginde arifmetiki amallary, kök almak, derejä götermek amallaryny geçirip bolýar we netijede ýene-de hakyky san emele gelýär. Şeýlelikde, hakyky sanlar köplügi agzalan amallara görä ýapyk köplükdir. Hakyky sanlar köplüginiň hem öz gezeginde ýetmezçilikleri bar. Otrisatel sanlardan jübüt derejeli kök alyp bolmaýar, başgarak aýdanymyzda, hiç bir hakyky sanyň jübüt derejesi otrisatel hakyky san bolup bilmeýär. Ine, şu kemçiligi aýyrmak maksady bilen otrisatel hakyky sanlardan hem islendik derejeli kök alyp bolar ýaly edip hakyky sanlar köplügini giňeltse bolar. Şeýle giňeldiş kompleks sanlar köplügine getirýär.

Şu kitapda, biz esasan, hakyky sanlar köplügi bilen iş salşarys.

Belli bolşy ýaly, üstünde bellibir položitel ugur saýlanyp alnan göni çyzyga ok diýilýär. Eger onuň üstünde $O$ nokat alsak we masştab birligini girizsek, onda oňa koordinata oky diýilýär.


*35-nji a surat*

Eger $M$ nokat $O$ nokatdan (suratdaky ýaly) sagda ýerleşse, onda $OM$ kesimiň uzynlygyny $x$ bilen belgileýärler we oňa $M$ nokadyň koordinatasy diýýärler. Bu ýagdaý $M(x)$ görnüşde belgilenýär. Eger $M$ nokat $O$ nokatdan çepde ýatsa, onda minus (–) alamaty bilen alnan $OM$ kesimiň uzynlygyny $x$ bilen belgiläp, oňa $M$ nokadyň koordinatasy diýýärler we ýene-de $M(x)$ bilen belgileýärler. Şeýlelikde, koordinata okunyň islendik nokadyna bir san degişli bolýar. Tersine, $x$ islendik hakyky san bolsa, onda koordinata okunda koordinatasy $x$-e deň bolan ýeke-täk nokady tapyp boljakdygy düşnüklidir. Şol sebäpli koordinata okuna san oky hem diýýärler. Adatça, koordinatasy $x$-e deň bolan $M$ nokat alalyň diýmegiň ýerine san okunda $x$ nokat alalyň diýmegi kabul edýärler. Mysal üçin, san okunda $x = 3$ nokady guruň diýmek $M(3)$ nokady guruň diýmekdir.

Hakyky sanlar köplügini $R$ bilen belgileýärler. Goý, $K$ hakyky sanlaryň islendik köplügi, $a$ san bolsun. $a \in K$ aňlatma $a$ san $K$ köplüge degişli diýmekligi, $a \notin K$ aňlatma $a$ san $K$ köplüge degişli däl diýmekligi aňladýar. Eger $\forall x \in K$ üçin $x \leq a$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $K$ köplük ýokarsyndan çäkli diýýärler we $a$ sana onuň ýokarky çägi diýýärler. Eger $b$ san tapylyp, $\forall x \in K$ üçin $b \leq x$ deňsizlik dogry bolsa, onda $K$ köplük aşagyndan çäkli diýýärler we $b$ sana $K$ köplügiň aşaky çägi diýýärler. Eger $a$ san $K$ köplügiň ýokarky çägi bolsa, onda $a$-dan uly islendik sanyň hem $K$ köplügiň ýokarky çägi boljagy düşnüklidir.

$K$ köplügiň ýokarky çäkleriniň kiçisine $K$ köplügiň takyk ýokarky çägi diýýärler. Islendik ýokarsyndan çäkli köplügiň takyk ýokarky çägi bardyr.

Eger $b$ san $K$ köplügiň aşaky çägi bolsa, onda $b$-den kiçi islendik san hem $K$ köplügiň aşaky çägi bolar. $K$ köplügiň aşaky çäkleriniň ulusyna $K$ köplügiň takyk aşaky çägi diýýärler. Subut edilişine görä, islendik aşagyndan çäkli köplügiň takyk aşaky çägi bardyr.

Indi koordinata okunda ýerleşýän ýönekeýje köplükleri kesgitläliň. Goý, $a$ we $b$ koordinata okunyň nokatlary bolsunlar. $a$ we $b$ nokatlaryň arasynda ýerleşýän nokatlaryň köplügine aralyk ýa-da interwal diýýärler we ony $(a;b)$ bilen belgileýärler. $(a;b)$ interwala $a$ nokady goşulany $[a;b)$ bilen, $b$ nokat goşulany $(a;b]$ bilen belgilenýär we olara ýarym interwal diýilýär. $(a;b)$ interwala $a$ we $b$ nokatlaryň ikisi hem goşulany $[a;b]$ bilen belgilenýär we oňa kesim diýilýär. Koordinata okunda $x_0$ nokady öz içinde saklaýan islendik interwala $x_0$ nokadyň etraby diýýärler we ony $S_{x_0}$ bilen belgileýärler. Merkezi $x_0$ nokatda, uzynlygy $2\varepsilon$ bolan interwala $x_0$ nokadyň $\varepsilon$ etraby diýilýär we ol $S_{x_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär. $S_{x_0}^{\varepsilon}$ etrabyň nokatlaryndan $x_0$ nokady aýyrsak, galan köplüge ýörite $\varepsilon$ etrap diýýärler we ony $\Pi_{x_0}^{\varepsilon}$ bilen belgileýärler.

## §2. Funksiýa

Funksiýa düşünjesi matematiki derňewiň esasy düşünjesidir. Ol üýtgeýän ululyklar düşünjesi bilen diýseň golaý gatnaşykdadyr. Islendik tejribe bilen dürli-dürli ululyklar baglydyrlar. Mysal üçin, uçup barýan uçaryň içindäki adamlaryň sany, onuň tizligi, ýerden beýikligi, onuň ýangyç gaplaryndaky ýangyjyň möçberi, uçaryň gonjak şäherine çenli uzaklyk uçuş bilen baglanyşykly ululyklara mysal bolup bilerler. Ýa-da gyzdyrylýan suwuklygyň temperaturasy, onuň göwrümi, molekulalarynyň sany, dykyzlygy, islendik nokadyndaky basyşy gyzdyrma bilen baglanyşykly ululyklara mysal bolup bilerler.

Bu ululyklaryň käbirleri bütin prosesde öz hemişelik bahalaryny saklasalar (uçardaky adamlaryň sany, uçaryň ganatynyň uzynlygy, suwuklygyň molekulalarynyň sany), beýlekileri prosesiň dowamynda dürli-dürli bahalara eýe bolýarlar (uçaryň tizligi, barjak şäherine çenli uzaklyk, ýangyjyň mukdary, suwuklygyň temperaturasy, göwrümi, dykyzlygy). Birinji görnüşdäkilere hemişelik ululyklar, ikinji görnüşdäkilere bolsa üýtgeýän ululyklar diýilýär. Adatça, tejribede ýüze çykýan üýtgeýän ululyklar özara baglanyşykly bolýarlar. Uçaryň hereketlendirijilerinde ýanýan ýangyjyň mukdary onuň tizligi bilen, suwuklygyň temperaturasy onuň molekulalarynyň orta tizligi bilen baglanyşyklydyr. Matematiki derňewiň esasy gyzyklanýan meselesi dürli-dürli prosesler bilen baglanyşykly dürli-dürli ululyklaryň hemmesine mahsus bolan umumy üýtgeýiş kanunlary we olaryň özara baglanyşyklarynyň görnüşleridir. Onuň özi bolsa hut şu meseläni öwrenmekden başlaýar diýse bolar.

Iki ululygyň, olaryň haýsy prosesden gelip çykanlaryna garamazdan, arasyndaky baglanyşygy (funksional baglanyşygy) matematikanyň düşünjelerinde kesgitläliň.

**Kesgitleme.** Eger bahalary $[a;b]$ kesimi doldurýan $x$ ululygyň $[a;b]$ kesimdäki her bir bahasyna $y$ ululygyň bellibir bahasy degişli edilýän bolsa, onda $y$ we $x$ ululyklaryň arasynda funksional baglanyşyk bar diýilýär we ol baglanyşyk $y = f(x)$ görnüşde ýazylýar. $x$ ululyga *baglanyşyksyz üýtgeýän* ýa-da *argument*, $y$ ululyga *baglanyşykly üýtgeýän* ýa-da *funksiýa* diýilýär, $[a;b]$ kesime funksiýanyň *kesgitleniş ýaýlasy* diýilýär.

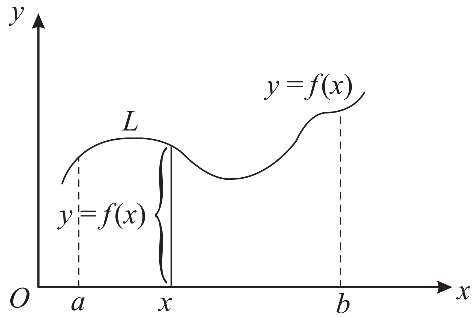
$y = f(x)$ ýazgydaky $f$ harpyň ýerine islendik harp goýlup bilner. Ýagny funksional baglanyşygy $y = y(x)$, $y = a(x)$, $y = z(x)$ we ş.m. görnüşlerde ýazsa bolar. Öňden belli bolşy ýaly, $x$ üýtgeýän ululygyň her bir bahasyna koordinatalar okunda ($x$-ler okunda) bellibir nokat degişli bolýar. Şonuň üçin, köp ýagdaýlarda, gysgalyk üçin «$x$ argumentiň $[a;b]$ kesimdäki bahasyna degişli funksiýanyň bahasy» diýen uzyn sözlemiň ýerine «funksiýanyň $x$ nokatdaky bahasy» düşünjäni ulanarys. $y = f(x)$ funksiýanyň anyk kesgitlenmegi üçin $x$-iň her bir bahasyna degişli edilýän $y$-iň bahasyny tapmak kanuny berilmelidir. Şol kanun bar ýagdaýynda funksiýa doly berildi hasap edilýär. Kanunlaryň berlişiniň, başgaça aýdanyňda, funksiýanyň berlişiniň üç görnüşiniň üstünde durup geçeliň.

**Funksiýanyň formula arkaly berlişi.** Eger $y$ we $x$ ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk, mysal üçin, $y = 2x^2$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{x^2} + x^3$ görnüşlerde berlen bolsa, onda funksiýa formula arkaly berlen ýa-da analitik kesgitlenen diýilýär.

**Funksiýanyň tablisa arkaly kesgitlenişi.** Eger $y$ we $x$ ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk $x$-iň kesgitleniş ýaýla degişli hemme bahalary üçin däl-de, onuň saýlanyp alnan bahalary üçin aşakdaky tablisa görnüşinde berilse, onda funksiýa tablisa arkaly kesgitlenen diýilýär.

Tablisanyň ýokarky setirinde $x$-iň saýlanyp alnan bahalary, ikinji setirinde ýokarky setirdäki $x$-iň bahalaryna degişli bolan $y$-iň bahalary ýerleşdirilen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_n$ |




*35-nji surat*

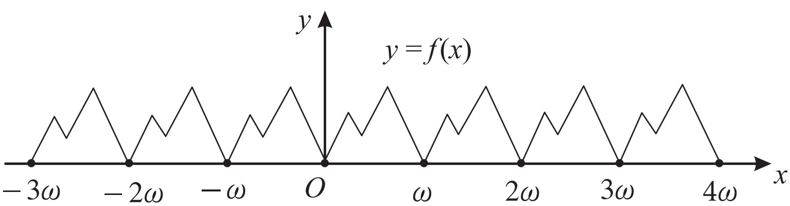
**Funksiýanyň grafik arkaly kesgitlenişi** *(35-nji surat).*
$L$ egri tekizlikde ýatyr. $[a;b]$ kesimiň islendik nokadyndan geçýän we $y$-ler okuna parallel göni ony diňe bir nokatda kesýär. Eger $[a;b]$ kesimde ýatýan her bir $x$ nokada şol nokatdan geçýän we $y$-ler okuna parallel göniniň $x$ oky bilen $L$ egriniň arasyndaky böleginiň uzynlygyny degişli etsek, onda $[a;b]$ kesimde $y = f(x)$ funksiýa kesgitlener. Bu berlişleriň üçüsi-de ulanyşda gabat gelýär. $f(x)$ funksiýa $[a;b]$ kesimde kesgitlenen bolsun. Onda $(x, f(x))$ nokat, $x$ argument $[a;b]$ kesimiň nokatlaryny yzarlap çykanda, tekizlikde bir $L$ egrini yzarlap çykar. $L$ egrä $y = f(x)$ funksiýanyň $[a;b]$ kesimdäki grafigi diýilýär. Grafik arkaly kesgitlenen funksiýa üçin ony kesgitleýän $L$ egriniň onuň grafigi boljagy düşnüklidir. Funksiýa formula arkaly berlende onuň grafigini takyk çykarmak, köplenç, başartmaýar. Onuň üçin grafigi takmyn gurýarlar. Goý, $y = f(x)$ $[a;b]$ kesimde kesgitlenen bolsun. $[a;b]$ kesimde $x_1, x_2, ...., x_n$ nokatlary alalyň we funksiýanyň şol nokatlardaky $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, ..., $f(x_n) = y_n$ bahalaryny tapalyň. Tekizlikde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ nokatlary guralyň we olary endigan

$L$ egri bilen birleşdireliň. $L$ egri funksiýanyň $[a;b]$ kesimdäki takmyn grafigi bolar. Elbetde, $x_i$, $i = \overline{1,n}$ nokatlar $[a;b]$ kesimde näçe gür ýerleşseler, şonça-da grafik takyk bolar.

Funksiýalar kesgitleniş ýaýlasynda özlerini alyp baryşlaryna görä birnäçe görnüşlere bölünýärler. Olaryň käbirlerine seredip geçeliň. $f(x)$ funksiýa bütin $x$-ler okunda – $(-\infty, \infty)$ aralykda kesgitlenen bolsun.

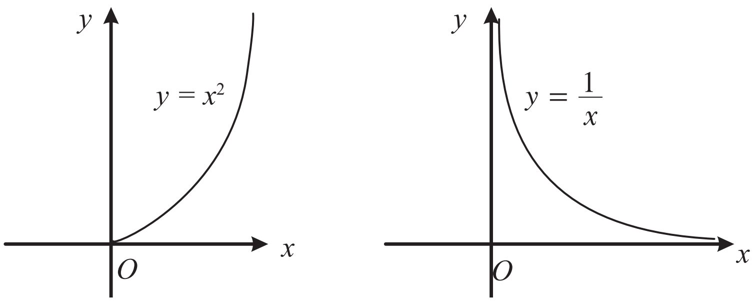
Eger islendik $x$ üçin $f(x) = f(-x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ jübüt funksiýa diýilýär. $y = x^2$, $y = x^4$ jübüt funksiýalardyr. Jübüt funksiýanyň grafigi $y$-ler okuna görä simmetrikdir. Eger islendik $x$ üçin $f(x) = -f(-x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ täk funksiýa diýilýär. $y = x$, $y = x^3$ funksiýalar täk funksiýalardyr. Täk funksiýalaryň grafikleri koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik bolýarlar.

Eger islendik $x$ üçin we käbir $\omega$ san üçin $f(x + \omega) = f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ periodiki funksiýa, $\omega$ sana bolsa period diýilýär. $\omega$ san bilen bilelikde islendik bitin $k$ san üçin $k\omega$ sanyň hem period boljagy düşnüklidir. $x$-ler okuny uzynlygy $\omega$ bolan kesimlere bölsek, onda $f(x)$ funksiýanyň grafigini ol kesimleriň birinde gurmak ýeterlikdir. Galan kesimlerde ol grafik gaýtalanar *(36-njy surat).*



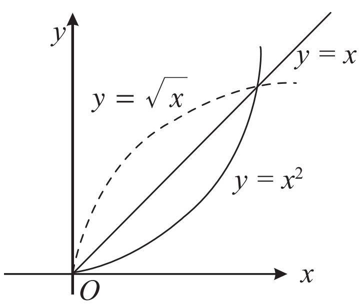

*36-njy surat*

$(a, b)$ aralykda kesgitlenen $f(x)$ funksiýa seredeliň. Argumentiň $(a, b)$ aralyga degişli $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik bahalary üçin $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ $(a; b)$ aralykda monoton artýan funksiýa diýilýär. Şol şertlerde $f(x_1) > f(x_2)$ deňsizlik ýerlikli bolsa, onda $f(x)$ $(a; b)$ aralykda monoton kemelýän funksiýa diýilýär. Mysal üçin, $y = x^2$ $(0; \infty)$ aralykda monoton artýan funksiýadyr; $y = \dfrac{1}{x}$ $(0; \infty)$ aralykda monoton kemelýän funksiýadyr. Olaryň grafikleri 37-nji suratda getirilendir.




*37-nji surat*

Ters funksiýa düşünjesini girizeliň. $f(x)$ funksiýa $[a;b]$ kesimde kesgitlenen monoton funksiýa bolsun. Onda $y = f(x)$ deňligi $x$-e görä çözmek mümkindir. Çözüwi $x = \varphi(y)$ görnüşde ýazýarlar we oňa $y = f(x)$ funksiýanyň ters funksiýasy diýilýär. Mysal üçin, $y = x^2$ $(0, \infty)$ aralykda monoton funksiýadyr. Bu deňligi $x$-e görä çözüp, $x = \sqrt{y}$ ters funksiýany alarys. Kesgitlemä görä, $x = \varphi(y)$ ters funksiýanyň grafigi berlen $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat gelýär. Adatça, $x = \varphi(y)$ funksiýada $y$ bilen $x$-iň ýerini çalşyryp, ony $y = \varphi(x)$ görnüşde ýazýarlar we $y = \varphi(x)$ funksiýa ters funksiýa diýýärler. $y = \varphi(x)$ ters funksiýanyň grafigini tapmak üçin $y = f(x)$ funksiýasynyň grafigini $y = x$ bissektrisa görä simmetrik öwürmek ýeterlikdir *(38-nji surat)*.




*38-nji surat*

## §3. Ýönekeý funksiýalar

Funksiýalary öwrenmekde esas bolup durýan we dykgat bilen öwrenilen bir kiçijik funksiýalar toplumyna ýönekeý funksiýalar diýilýär. Olaryň häsiýetleri, özlerini alyp baryşlary, grafikleri uly takyklyk bilen öwrenilendir, olaryň bahalarynyň örän takyk tablisalary düzülendir. Ine, şu sebäbe görä, islendik derňew işinde gabat gelen funksiýany ýa takmyn, ýa-da takyk görnüşde ýönekeý funksiýalaryň üsti bilen aňlatmaga çalyşýarlar. Soňky döwürde klassyky ýönekeý funksiýalaryň hataryna ulanyşda ähmiýeti uly bolan, dykgat bilen öwrenilen funksiýalaryň täze bir topary goşuldy. Mysal üçin, Besseliň funksiýalary, Ležandryň funksiýalary, ähtimallyklar integraly we başgalar. Şeýle-de bolsa klassyky ýönekeý funksiýalar köp meseleleri çözmekde esasy daýanç bolýan funksiýalardyr. Biz olary gysgaça ýatlap geçeris.

**Çyzykly funksiýa.** Ol

$$y = ax + b$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $a, b$ – hemişelik sanlar. Onuň grafigi göni çyzykdyr, kesgitleniş ýaýlasy bütin $x$-ler okudyr.

**Kwadratik funksiýa.** Ol

$$y = ax^2 + bx + c$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $a, b, c$ hemişelik sanlar ($a \neq 0$). Onuň grafigi paraboladyr, kesgitleniş ýaýlasy bütin $x$-ler okudyr.

**Köpagza.** Ol

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $a_0, a_1, ..., a_m$ koeffisiýentler diýlip atlandyrylýan hemişelik sanlar ($a_0 \neq 0$). Onuň kesgitleniş ýaýlasy bütin $x$-ler okudyr. $m$ sana köpagzanyň derejesi diýilýär. $f(x)$ funksiýanyň bahasynyň nola öwrülýän nokadyna onuň noly diýilýär. $x_0$ $f(x)$ funksiýanyň noly bolsa, onda ol $f(x) = 0$ deňligi kanagatlandyrmalydyr ($f(x_0) = 0$). Köpagzanyň nollarynyň sany $m$-den köp bolup bilmez. Onuň hakyky nollarynyň sanynyň göni $m$ sany bolmagy mümkin, $m$-den az bolmagy mümkin, olaryň bolmazlyklary hem mümkin. Mysal üçin,

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

üçünji derejeli köpagzanyň göni üç hakyky nollary bardyr. Olar $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

$$y = x^4 + 2x^2 + 1$$

köpagzanyň hiç bir hakyky noly ýokdur.

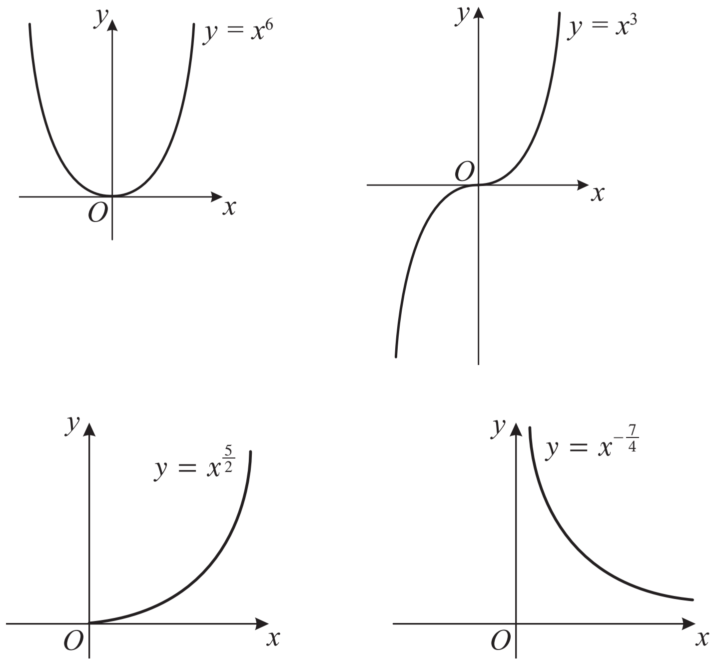
$$y = x^4 - 1$$

köpagzanyň iki hakyky noly bardyr. Olar $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Köpagzanyň nollaryna onuň kökleri hem diýilýär.

**Derejeli funksiýa.** Ol

$$y = ax^{\alpha}$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $a$, $\alpha$ islendik hemişelik sanlar. $\alpha$ sana baglylykda derejeli funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy dürli-dürli bolýar. Mysal üçin, $y = x^{10}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy bütin $x$-ler okudyr; $y = x^{-5}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ bolar, ýagny $x$-ler okunyň $x \neq 0$ nokatlaryndan durýandyr; $y = x^{\frac{5}{2}}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $[0, \infty)$ bolar. $y = ax^{\alpha}$ islendik $\alpha$ üçin ýa bütin $x$-ler okunda monoton funksiýadyr, ýa-da $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ aralyklarda aýratynlykda monoton funksiýadyr *(39-njy surat)*.




*39-njy surat*

**Görkezijili funksiýa.** Ol

$$y = a^{x}$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde $a$ – položitel san. Kesgitleniş ýaýlasy bütin $x$-ler okudyr, monoton funksiýadyr.

**Logarifmik funksiýa.** Ol

$$y = \log_a x$$

görnüşde berilýär. Kesgitleniş ýaýlasy $x > 0$ nokatlardan durýar we monoton funksiýadyr. Ol $y = a^x$ funksiýanyň ters funksiýasydyr.

**Trigonometrik funksiýalar.** Olar

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,\ y = \mathrm{ctg} x$$

görnüşde berilýär. Birinji iki funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $x$-ler oky bilen gabat gelýär, tg$x$ funksiýa $x$-ler okunyň $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ nokatlardan başga hemme nokatlarynda, ctg$x$ funksiýa $x = k\pi$ nokatlardan başga hemme nokatlarynda kesgitlenendir. Bu ýerde $k$ – islendik bitin san. sin$x$, cos$x$ periody $2\pi$ bolan funksiýalardyr, tg$x$, ctg$x$ periody $\pi$ funksiýalardyr.

**Ters trigonometrik funksiýalar.** Olar

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \mathrm{arctg} x,\ y = \mathrm{arcctg} x$$

görnüşde berilýärler. Olaryň birinji ikisi [– 1, 1] kesimde, ikinji ikisi (– ∞, ∞) aralykda kesgitlenen. Olar monoton funksiýalar.

$y = \arcsin x$ funksiýa $y = \sin x$ funksiýanyň $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesimdäki ters funksiýasydyr, $y = \arccos x$ $y = \cos x$ funksiýanyň $[0, \pi]$ kesimdäki ters funksiýasydyr, $y = \mathrm{arctg} x$ $y = \mathrm{tg} x$ funksiýanyň $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykdaky ters funksiýasydyr, $y = \mathrm{arcctg} x$ $y = \mathrm{ctg} x$ funksiýanyň $(0, \pi)$ aralykdaky ters funksiýasydyr.

Bu ýerde ýönekeý funksiýalaryň grafikleri getirilmedi. Sebäbi olar mekdepde örän uly dykgat bilen öwrenilýärler. Ol grafikleri iňňän oňat bilmekligiň inženerçilik tejribesindäki köp meseleleri çözmekde möhüm kömek edýändigini belläp geçeliň.

Ahyrda, beýan edilişde ulanyljak käbir matematiki kesgitlemeleri we bellikleri sanap geçeliň.

*Kesim* $a \le x \le b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlardan durýar, $[a,b]$ bilen belgilenýär.

*Aralyk* $a < x < b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlardan durýar, $(a, b)$ bilen belgilenýär.

*Ýarym aralyk* $a \leq x < b$ $(a < x \leq b)$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlardan durýar, $[a,b)$ $((a,b])$ bilen belgilenýär.

$x_0$ nokadyň etraby $x_0$ nokady öz içinde saklaýan islendik aralyk; $S_{x_0}$ bilen belgilenýär.

$x_0$ nokadyň $\varepsilon$ etraby $|x - x_0| < \varepsilon$ ýa-da deňgüýçli $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlardan durýar; $S_{x_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär.

$x_0$ nokadyň ýörite $\varepsilon$ etraby $|x - x_0| < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan $x \neq x_0$ nokatlardan durýar; $\Pi_{x_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär.

*Tükeniksizligiň etraby* islendik $R > 0$ san üçin $|x| > R$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlardan durýar; $S_{\infty}^{R}$ bilen belgilenýär.

$\in$ – *degişlilik belgisi.* $x \in [a,b] - x$ $[a,b]$ kesime degişli ýa-da $x$ $[a,b]$ kesimde ýatyr diýlip okalýar.

$\forall$ – *umumylyk belgisi.* $\forall x$ – islendik $x$ diýlip okalýar. Mysal üçin, $\forall x \in [a,b] - [a,b]$ kesime degişli islendik $x$ diýlip okalýar.

$\exists$ – *barlyk belgisi.* $\exists x$ – $x$ bardyr ýa-da $x$ tapylar diýlip okalýar. Mysal üçin, $\exists x \in [a,b] - [a,b]$ kesime degişli $x$ bardyr diýlip okalýar.

$D(f) - f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy.

$E(f) - f(x)$ funksiýanyň bahalarynyň ýaýlasy.

$|x|$ – $x$ sanyň moduly.

$[x]$ – $x$ sanyň bitin bölegi.

$x \to x_0$ – $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylýar diýlip okalýar. Az ulanylýan belgilemeleri beýan edilişiň gerek ýerinde bereris.

## §4. Tükeniksiz kiçi funksiýalar we olaryň häsiýetleri

Goý, $\alpha(x)$ funksiýa $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrapda kesgitlenen bolsun.

**Kesgitleme.** Eger-de $\forall \varepsilon > 0$ üçin başga bir kiçi $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň islendik nokady üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\alpha(x)$ funksiýa $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär. Bu ýagdaý gysgaça

$$a(x) \underset{x \to x_o}{\sim} t.k.f.$$

bilen belgilenýär. Mysal üçin, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ ýazgy $\sin x$ funksiýa $x$ nola ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýa bolýar diýlip okalýar. Tükeniksiz kiçi funksiýalaryň käbir wekillerine seredeliň.

**1-nji mysal.** $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$

**Subudy.** $\Pi_0^{\varepsilon/2}$ etraba seredeliň. Şol etrabyň $\forall x$ nokady üçin $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Mekdepden belli bolşy ýaly, $\forall x \neq 0$ üçin $|\sin x| < |x|$ deňsizlik ýerine ýetýär. Diýmek, islendik $x \in \Pi_0^{\varepsilon/2}$ üçin $|\sin x| < |x| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ deňsizlikler ýerlikli. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**2-nji mysal.** $\cos x \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\sim} t.k.f.$

**Subudy.** $\Pi_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon/2}$ etraba seredeliň. Şol etrabyň $\forall x$ nokady üçin $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Trigonometriýadan belli bolşy ýaly, $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, diýmek, $|\cos x| = \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right| < \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|$. Goý, $x \in \Pi_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon/2}$ bolsun. Onda $|\cos x| < |x - \pi/2| < \varepsilon/2 < \varepsilon$ deňsizlikler ýerlikli bolarlar. Şony hem subut etmek gerekdi. Dogrudan hem, $\varepsilon > 0$ san üçin $\Pi_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon/2}$ etrap tapyldy, şol etrabyň $\forall x$ nokady üçin $|\cos x| < \varepsilon$ deňsizlik dogry bolýar. Bu bolsa öz gezeginde $\cos x \underset{x\to \pi/2}{\sim} t.k.f.$ diýmekdir. Indi tükeniksiz kiçi funksiýalaryň häsiýetlerine seredeliň.

**Birinji häsiýet.** Eger $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$, $c \neq 0$ san bolsa, onda $c\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar.

**Ikinji häsiýet.** Eger $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$, $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha(x) + \beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar.

**Üçünji häsiýet.** Eger $a(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f,$ $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $a(x) \cdot \beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar.

**Dördünji häsiýet.** Eger $f(x)$ $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrapda çäkli, $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha(x)f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar (çäkli funksiýalaryň kesgitlemesini aşakda şu häsiýetleri subut edenimizde getireris).

Häsiýetleri subut etmäge girişeliň.

**Birinji häsiýetiň subudy.** Berlipdir: $c \neq 0$ san, $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ $\forall \varepsilon > 0$ sany we $\varepsilon_1 = \varepsilon/|c|$ sany alalyň. $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolany üçin, käbir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme nokatlary üçin

$$|c\alpha(x)| = |c||\alpha(x)| < |c| \cdot \varepsilon_1 = |c| \cdot \varepsilon/|c| = \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şony hem subut etmek gerekdi.

**Ikinji häsiýetiň subudy.** Berlipdir: $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$, $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ Islendik $\varepsilon > 0$ san alalyň. $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolany üçin, şeýle bir $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme nokatlary üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ deňsizlik ýerine ýeter. Şonuň ýaly-da $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolany üçin, $\Pi_{x_0}^{\delta_2}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme nokatlary üçin $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ deňsizlik ýerine ýeter. Goý, $\delta_1 < \delta_2$ bolsun we $x$ $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrabyň islendik nokady bolsun. Onda $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ deňsizlik we $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrabyň $\Pi_{x_0}^{\delta_2}$ etrabyň içinde ýatany sebäpli, $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ deňsizlik hem ýerine ýeter. Diýmek, $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ deňsizlik hem ýerine ýeter. Şony hem subut etmek gerekdi.

**Üçünji häsiýetiň subudy.** Berlipdir: $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$, $\beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ Islendik $0 < \varepsilon < 1$ san alalyň. Ikinji häsiýeti subut edenimizde tapylan $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etraba seredeliň. Şol etrabyň nokatlary üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$, $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ deňsizlikler we şolar bilen bilelikde $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon/2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon^2/4 < \varepsilon$ deňsizlik hem ýerine ýeter. Bu bolsa $a(x) \cdot \beta(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ diýmekdir.

**Dördünji häsiýetiň subudy.** Berlipdir: $f(x)$ $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrapda çäkli funksiýa. Şeýle diýmek käbir $M > 0$ san tapylyp, $\forall x \in \Pi_{x_0}^{\delta}$ üçin $|f(x)| < M$ deňsizlik ýerlikli diýmekdir. Subudyň galan ýeri birinji häsiýetiň subudyny gaýtalaýar.

**1-nji netije.** Ikinji häsiýet tükenikli sandaky tükeniksiz kiçi funksiýalaryň jemi üçin hem dogrudyr.

**2-nji netije.** Üçünji häsiýet tükenikli sandaky tükeniksiz kiçi funksiýalaryň köpeltmek hasyly üçin hem dogrudyr.

**3-nji netije.** Tükeniksiz kiçi funksiýalaryň islendik položitel derejesi hem tükeniksiz kiçi funksiýadyr.

**Bellik.** $\alpha(x)$ funksiýanyň $x$ tükeniksizlige ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýa bolýandygy $\alpha(x) \underset{x\to\infty}{\sim} t.k.f.$ görnüşde belgilenýär. Şu düşünjäni kesgitlemek üçin, başda $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ üçin berlen kesgitlemede $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrabyň ýerine $\Pi_{\infty}^{N}$ etraby almak ýeterlikdir. $\Pi_{\infty}^{N}$ etrabyň $|x| > N$ nokatlardan durýandygyny ýatlap geçeliň. Mysallara seredeliň.

**3-nji mysal.** $\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\sim} t.k.f.$

**Subudy.** $\forall\varepsilon > 0$ san üçin $\Pi_{\infty}^{1/\varepsilon}$ etraba seredeliň. Şol etrabyň islendik nokady üçin $|x| > 1/\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetmeli. Bu ýerden $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ alarys. Şony hem subut etmek gerekdi.

**4-nji mysal.** $\frac{1}{\ln|x|} \underset{x\to\infty}{\sim} t.k.f.$

**Subudy.** $\forall\varepsilon > 0$ san alalyň. $\Pi_{\infty}^{e^{1/\varepsilon}}$ etrabyň islendik $x$ nokady üçin $|x| > e^{1/\varepsilon}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şu deňsizligiň iki tarapyndan logarifm alsak, $\ln|x| > \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ýa-da $\left|\frac{1}{\ln|x|}\right| < \varepsilon$ alarys. Suny hem subut etmek gerekdi.

Seredilen meselelere başgaça garalyň. $\frac{1}{|x|} = y$ çalşyrma girizeliň. Onda $\frac{1}{\ln|x|} = \frac{1}{-\ln|y|}$ deňligi alarys. $|y| < \varepsilon$ deňsizligiň $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ ýa-da $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ deňsizlik bilen deňgüýçli bolýandygy sebäpli, $\left|\frac{1}{\ln|x|}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} t.k.f.$

aňlatmanyň $\left|\frac{1}{\ln|y|}\right| \underset{y\to 0}{\sim} t.k.f.$ aňlatma bilen deňgüýçlüligi gelip çykýar. Diýmek, $\left|\frac{1}{\ln|x|}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} t.k.f.$ teklibiň ýerine $\frac{-1}{\ln|y|} \underset{y\to 0}{\sim} t.k.f.$ bolýandygyny subut etmek ýeterlik bolýar. Şeýlelik bilen, tükeniksiz kiçileriň tükeniksizlik bilen baglanyşykly meselesini tükenikli nokatdaky meselesi bilen çalşyrmak bolýar.

## §5. Tükeniksiz uly funksiýalar

**Kesgitleme.** Eger $\frac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha$ ($x$) funksiýa $x \to x_0$ tükeniksiz uly funksiýa diýilýär. Ol şeýle belgilenýär: $\alpha(x) \underset{x\to x_o}{\sim} t.u.f.$ Mysal üçin, $\frac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} t.u.f.$, sebäbi $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$; $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} t.u.f.$, sebäbi $x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$; $\ln x \underset{x\to 0}{\sim} t.u.f.$, sebäbi $\frac{1}{\ln x} \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$

Tükeniksiz kiçi funksiýalaryň häsiýetlerini ulanyp, tükeniksiz uly funksiýalaryň aşakdaky häsiýetlerini subut edeliň.

**Birinji häsiýet.** $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$ we $c \neq 0$ san bolsa, onda $c\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$ bolar.

**Subudy.** Kesgitlemä görä, $\frac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolýar. Onda $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Diýmek, $\frac{1}{\frac{1}{c}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha(x)}} = c\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$ bolar.

**Ikinji häsiýet.** Eger $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$, $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$ bolsa, onda $\alpha(x)\cdot\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.u.f.$ bolar.

**Subudy.** Kesgitlemä görä, $\frac{1}{\alpha(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$, $\frac{1}{\beta(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Onda olaryň köpeltmek hasyly hem $\frac{1}{\alpha(x)} \cdot \frac{1}{\beta(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Diýmek,

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\beta(x)}\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}}=\alpha(x)\cdot\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.u.f.$$

bolar. Şony hem subut etmek gerekdi.

**1-nji netije.** Tükeniksiz uly funksiýalaryň islendik položitel derejesi hem tükeniksiz uly funksiýa bolýar.

## §6. Tükeniksiz kiçileri deňeşdirmek

Goý, $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$ bolsun. Eger $\beta(x)=\dfrac{\alpha(x)}{1+y(x)}$, $y(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha(x)$ we $\beta(x)$ funksiýalara $x\to x_0$ deňgüýçli tükeniksiz kiçi funksiýalar diýilýär we bu ýagdaý $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$ bilen belgilenýär.

Aşakda ulanyşda giňden peýdalanylýan deňgüýçli tükeniksiz kiçileriň tablisasy getirilýär:

1. $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$,
2. $\mathrm{tg}x\underset{x\to 0}{\sim}x$,
3. $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x$,
4. $a^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x\ln a$,
5. $\dfrac{1}{1-x}-1\underset{x\to 0}{\sim}x$,

1. $\sin\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)$,
2. $\mathrm{tg}\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)$,
3. $\ln(1+\alpha(x))\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)$,
4. $a^{\alpha(x)}-1\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)\ln a$,
5. $\dfrac{1}{1-\alpha(x)}-1\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha(x)$.

Soňky bäş formulada $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$ diýlip hasap edilýär. Goý, $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$ bolsun. Eger $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lambda(x)$, $\lambda(x)\underset{x\to x_0}{\sim}t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha(x)$ tükeniksiz kiçä $\beta(x)$ tükeniksiz kiçä görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi diýilýär we bu ýagdaý şeýle belgilenýär:

$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{=} 0(\beta(x)).$$

**Mysallar.** $x^3 \underset{x\to 0}{=} 0(x)$; $[\cos x]^3 \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} 0\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

## §7. Funksiýanyň predeli

**Kesgitleme.** Goý, $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokadyň käbir ýörite etrabynda kesgitlenen bolsun we käbir $a$ san üçin

$$f(x) = a + \alpha(x), \quad \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f. \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetsin. Onda $a$ sana $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylandaky predeli diýilýär we ol şeýle belgilenýär:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a. \tag{2}$$

Kesgitlemä görä, (1) we (2) deňlikler deňgüýçli deňlikler. Bu ýagdaýy biz geljekde giňden ulanjakdyrys. Indi käbir mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

**Subudy.** $\sin x = 0 + \sin x$ diýip ýazyp bolýar. Bu ýerde $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ Diýmek, (1) deňlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ deňlik hem ýerine ýetmeli.

**2-nji mysal.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

**Subudy.** $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$; $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$.

Emma $2\sin^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$, ýagny (1) deňlik ýerine ýetýär. Diýmek, (2) deňlik $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ hem dogry bolmaly.

**3-nji mysal.** Goý, $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsun. Onda alarys:

$$\alpha(x) = 0 + \alpha(x), \quad \alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$$

Diýmek, (1) deňlik ýerine ýetýär. Onda (2) deňlik $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ hem dogry bolmaly. Şeýlelikde, eger $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda onuň $x \to x_0$ predeli nola deň bolýar.

**4-nji mysal.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

**Subudy.** Geçen paragrafda getirilen tablisa görä, $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ bolýar, ýagny $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f.$ deňlik ýerine ýetýär. Onda predeliň kesgitlemesine görä ((1) deňlik ýerine ýetýär) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ bolmaly. Bu predel edebiýatda birinji ajaýyp predel ady bilen belli.

**5-nji mysal.** $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, $e \approx 2{,}7$ – natural logarifmiň esasy. Deňgüýçli tükeniksiz kiçileriň tablisasyna görä, $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ bolýar. Ýagny

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 + \alpha(x), \quad \alpha(x) \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f.$$

deňlik ýerlikli bolýar. Logarifmiň häsiýetini ulanyp, bu deňligi $\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \alpha(x)$ görnüşde ýa-da $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{1 + \alpha(x)}$ görnüşde ýazalyň. Deňgüýçli tükeniksiz kiçileriň tablisasyndaky 4-nji formula görä, $e^{\alpha(x)} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha(x)$ bolýar. Bu bolsa $\dfrac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1 + \beta(x)$, $\beta(x) \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f.$ diýmekdir. Bu ýerden $e^{\alpha(x)}$ tapyp, ony $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \cdot e^{\alpha(x)}$ deňlikde ýerine goýup alarys:

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e[1 + \alpha(x)(1 + \beta(x))] = e + e\alpha(x)(1 + \beta(x))$$

ýa-da

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e + \gamma(x), \quad \gamma(x) \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f. \quad (\gamma(x) = e\alpha(x)(1 + \beta(x))).$$

Bu bolsa $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ deňlige deňgüýçlüdir. Şuny hem subut etmek gerekdi.

Ýokarda alnan predele ikinji ajaýyp predel diýilýär. Ony

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

görnüşde hem ýazmak bolýar. Indi predeli bar funksiýalaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

## §8. Predeli bar funksiýalaryň häsiýetleri

$f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylanda predelleri bar diýeliň.

**Birinji häsiýet.** Islendik $C$ san üçin

$$\lim_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim_{x\to x_0}f(x)$$

deňlik dogrudyr, ýagny hemişelik sany predel alamatynyň daşyna çykaryp bolýar.

**Subudy.** Goý, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ bolsun. Onda kesgitlemä görä,

$$f(x)=a+\alpha(x),\quad \alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$$

bolar. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $C$ sana köpeldeliň:

$$Cf(x)=Ca+C\alpha(x).$$

Bu ýerden $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\backsim} t.k.f.$ bolany sebäpli (predeliň kesgitlemesindäki birinji deňlik ýerine ýetýär), $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=Ca$ alarys. Bu ýerde $a$-nyň ýerine $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ deňlikdäki bahasyny goýup,

$$\lim_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim_{x\to x_0}f(x)$$

deňligi ýazyp bileris. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**Ikinji häsiýet.**

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Bu häsiýet, gysgaça aýdanyňda, «jemiň predeli predelleriň jemine deň» diýlip okalýar.

**Subudy.** $f(x)$ funksiýanyň predeli bar. Diýmek,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad f(x) = a + \alpha(x), \quad \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f. \tag{1}$$

deňlikler ýerlikli. Şunuň ýaly-da $g(x)$ funksiýanyň predeli bolany üçin,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b, \quad g(x) = b + \beta(x), \quad \beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f. \tag{2}$$

deňlikler ýerlikli bolýar. Şu deňlikleri ulanyp alarys:

$$f(x)+g(x) = a+\alpha(x)+b+\beta(x) = a+b+[\alpha(x)+\beta(x)].$$

$\alpha(x)+\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolany sebäpli,

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = a+b$$

ýa-da

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

deňlik ýerlikli bolýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**Üçünji häsiýet.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$

Bu häsiýet, gysgaça, «köpeltmek hasylynyň predeli predelleriň köpeltmek hasylyna deň» diýlip okalýar.

**Subudy.** 2-nji häsiýetdäki (1) we (2) deňlikleri ulanyp alarys:

$$f(x)\cdot g(x) = [a+\alpha(x)]\cdot[b+\beta(x)] = a\cdot b + a\beta(x) + \\ + b\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

$a\beta(x)+b\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ jemiň $x\to x_0$ tükeniksiz kiçi funksiýa bolýandygy sebäpli, bu ýerden

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab \text{ ýa-da } \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

deňlik gelip çykýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**Dördünji häsiýet.**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Bu häsiýet, gysgaça, «iki funksiýanyň gatnaşygynyň predeli olaryň predelleriniň gatnaşygyna deň» diýlip okalýar.

**Subudy.** 2-nji häsiýetdäki (1) we (2) deňlikleri ulanyp alarys:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a + \alpha(x)}{b + \beta(x)};$$

bu ýerde, şerte görä, $b \neq 0$. Deňgüýçli tükeniksiz kiçileriň formulasyny ulanyp,

$$\frac{1}{b + \beta(x)} = \frac{\frac{1}{b}}{1 + \frac{\beta(x)}{b}} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{1}{b}\left(\frac{-\beta(x)}{b} + 1\right)$$

ýazyp bileris. Diýmek,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a + \alpha(x)}{b + \beta(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} (a + \alpha(x))\frac{1}{b}\left(-\frac{\beta(x)}{b} + 1\right) \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{a}{b} + \gamma(x),$$

$\gamma(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Şol sebäpli, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. Bu ýerden, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ bahalary ulanyp alarys:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Şuny hem subut etmek gerekdi.

Ýokarda subut edilen häsiýetleri, geljekde köp ulanylýanlygy sebäpli, tablisa görnüşde ýazalyň:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$

**Mysallara seredeliň.**

**1. Tapmaly:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \sin x + x^3}{3 - \cos x + x^4}.$

Bu ýerde $f(x) = 2 + \sin x + x^3$, $\quad g(x) = 3 - \cos x + x^4$.

Ilki bilen $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ tapalyň.

$$g(x) = 3 - \cos x + x^4 = 2 + (1 - \cos x) + x^4 = \left(2 + 2\sin^2 \frac{x}{2} + x^4\right);$$

bu ýerde $2\sin^2 \dfrac{x}{2} + x^4 \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f.$ bolany sebäpli, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$ bolýar. Diýmek, maýdalawjynyň $x \to 0$ predeli bar, özem nola deň däl. Bu ýagdaýda predelleriň dördünji häsiýetini ulanmaga haklydyrys:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 + \sin x + x^3}{3 - \cos x + x^4} = \frac{\lim\limits_{x \to 0}(2 + \sin x + x^3)}{\lim\limits_{x \to 0}(3 - \cos x + x^4)}.$$

Maýdalawjynyň predelini tapdyk, ol 2-ä deň. Indi sanawjynyň predelini tapalyň – $\lim\limits_{x \to 0}(2 + \sin x + x^3) = 2;$ sebäbi, bu ýerde $\sin x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} t.k.f.$ boljakdygy aýdyň. Şoňa görä-de

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 + \sin x + x^3}{3 - \cos x + x^4} = \frac{2}{2} = 1.$$

**2. Tapmaly:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3 - 4\cos)\sin x}{x}.$

Bu ýerde $f(x) = 3 - 4\cos x;$ $\; g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ belgileri girizip, tapmaly predeli $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot g(x)$ görnüşde ýazyp bolýar.

$$f(x) = 3 - 4\cos x = 3 - 4 + 4(1 - \cos x) = -1 + 8\sin^2\frac{x}{2};$$

$8\sin^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ bolany üçin, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ bolar. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$ $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (birinji ajaýyp predel). Diýmek, $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň predelleri bar bolandygy üçin, predelleriň üçünji häsiýetini ulanyp alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3 - 4\cos x)\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(3 - 4\cos x)\frac{\sin x}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}(3 - 4\cos x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -1\cdot 1 = -1.$$

**3. Tapmaly:** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(3 - 4\sin x + 5\cos x)$.

Predelleriň ikinji häsiýetine görä,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(3 - 4\sin x + 5\cos x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 3 + \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-4\sin x) + \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 5\cos x.$$

Indi birinji häsiýeti ulanyp, hemişelikleri predel alamatynyň daşyna çykaralyň:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(3 - 4\sin x + 5\cos x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 3 - 4\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x + 5\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x.$$

Predelleriň hersini aýratynlykda tapalyň:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 3 = 3;$$

$$\sin x = \sin x - \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2};$$

$\sin\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \underset{x\to\pi/4}{\sim} t.k.f.$, $\cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$ çäkli funksiýa. Bu funksiýalaryň köpeltmek hasyly $2\sin\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \underset{x\to\pi/4}{\sim} t.k.f.$ bolar. Şoňa görä-de $\lim\limits_{x\to\pi/4}\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ alarys.

$$\cos x = \cos x - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2},$$

$\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}$ çäkli funksiýa. Diýmek, $2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2} \underset{x\to\pi/4}{\sim} t.k.f.$ bolar. Şoňa görä-de, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ bolar. Tapylan predelleri ýerine goýup alarys:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(3 - 4\sin x + 5\cos x) = 3 - 4\cdot\sin\frac{\pi}{4} + 5\cos\frac{\pi}{4} =$$
$$= 3 - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## §9. Tükeniksiz kiçileri ulanyp, predeli tapmak düzgünleri

**1-nji düzgün.** Eger aňlatmanyň predeli tapylanda tükeniksiz kiçi köpeldiji hökmünde gelýän bolsa, onda ony oňa deňgüýçli tükeniksiz kiçi bilen çalşyrsak, predel üýtgemeýär.

**Mysallara seredeliň.**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ predeli tapmaly.

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ we ol köpeldiji hökmünde gelýär. Onda $\sin x$ funksiýany oňa deňgüýçli $x$ bilen çalşyryp taparys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0}1 = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x}$ predeli tapalyň.

$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ we ol köpeldiji hökmünde gelýär. Diýmek, $a^x - 1$ funksiýany oňa deňgüýçli $x\cdot\ln a$ bilen çalşyryp alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x} = \lim_{x\to 0}\ln a = \ln a.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}$ predeli tapalyň.

$e^{\operatorname{tg}x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ we ol köpeldiji hökmünde gelýär. Diýmek, $e^{\operatorname{tg}x}-1$ funksiýany oňa deňgüýçli $\operatorname{tg}x$ bilen çalşyryp alarys: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin x}$. Bu ýerde $\operatorname{tg}x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ we olar köpeldiji hökmünde gelýärler. Diýmek, olary özleri bilen deňgüýçli tükeniksiz kiçilere çalşyryp alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

**2-nji düzgün.** Eger aňlatmanyň predeli tapylanda iki tükeniksiz kiçiniň jemi köpeldiji hökmünde gelýän bolsa we olaryň biri beýlekä görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi bolsa, onda ýokary tertipli kiçi taşlananda predel üýtgemeýär.

**Mysala seredeliň.**

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1-\cos x}{2x+x^2+x^3}$; $3x$ we $1-\cos x$ tükeniksiz kiçileriň jemi köpeldiji hökmünde gelýär we $1-\cos x$ funksiýa $3x$-e görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi; $2x$ we $x^2+x^3$ funksiýalaryň jemi köpeldiji hökmünde gelýär we $x^2+x^3$ funksiýa $2x$-e görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi. Diýmek, predel tapylanda $1-\cos x$ tükeniksiz kiçini we $x^2+x^3$ jemi taşlap bileris. Alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+1-\cos x}{2x+x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

**3-nji düzgün.** Eger aňlatmanyň $x\to x_0$ predeli tapylanda $f(x)+\alpha(x)$ jem köpeldiji hökmünde gelýän bolsa we $f(x_0)\neq 0$, $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $\alpha(x)$ funksiýany taşlaňda predel üýtgemeýär.

**Mysallara seredeliň.**

1. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1+3\cos x)\cdot\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ predeli tapalyň. $1+3\cos x$ kö-

peldiji hökmünde gelýär we $3\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} t.k.f.$ Şoňa görä, $3\cos x$ funksiýany taşlasaň-da, predel üýtgemeýär:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+3\cos x)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+x^2}$ predeli tapalyň. $\sin x + \cos x$ jem köpeldiji hökmünde gelýär, $\cos 0 = 1 \neq 0, \sin x \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ Diýmek, predel tapylanda $\sin x$ funksiýany taşlap bolýar; $\cos x + x^2$ jem köpeldiji hökmünde gelýär, $\cos 0 \neq 0,\ x^2 \underset{x\to 0}{\sim} t.k.f.$ Diýmek, predel tapylanda $x^2$ funksiýany hem taşlap bilýäris. Alarys:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x}=1.$$

## §10. Predeli bar funksiýalar barada teoremalar

**1-nji teorema.** Eger $f(x)$ funksiýanyň $x\to x_0$ predeli bar bolsa we ol predel noldan uly bolsa, onda $x_0$ nokadyň käbir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrabynda $f(x) > 0$ bolar.

**Subudy.** Goý, $\lim\limits_{x-x_0} f(x) = a;\ a > 0$ bolsun. Predeliň kesgitlemesine görä $f(x) = a + \alpha(x),\ \ \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Tükeniksiz kiçiniň kesgitlemesine görä, $\varepsilon = \frac{a}{2}$ san üçin $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme nokatlary üçin $|\alpha(x)| < \frac{a}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter. Goý, $x\in\Pi_{x_0}^{\delta}$ bolsun. Alarys:

$$f(x)-a=\alpha(x)\Rightarrow|f(x)-a|\le\frac{a}{2}\Rightarrow f(x)-a\ge-\frac{a}{2}\Rightarrow f(x)\ge\frac{a}{2}>0.$$

Şuny hem subut etmek gerekdi.

**2-nji teorema.** Eger $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ a<0$ bolsa, onda $x_0$ nokadyň käbir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrabynyň islendik nokady üçin $f(x)<0$ bolar. Birinji teoremanyň subudyna meňzeş bolany üçin, bu teoremanyň subudy getirilmeýär.

**3-nji teorema.** Goý, käbir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrapda $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ deňsizlik ýerine ýetsin we $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=a$; $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=a$ bolsun. Onda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ bolar.

**Subudy.** Berlipdir:
$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=a$; $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=a$. Predeliň kesgitlemesine görä,

$$f_1(x)-a=\alpha_1(x),\ \alpha_1(x)\underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.,\quad f_2(x)-a=\alpha_2(x),\ \alpha_2(x)\underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$$

bolar. $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$ deňsizligiň üç böleginden hem $a$ sany aýryp, alarys:
$f_1(x)-a\le f(x)-a\le f_2(x)-a$ ýa-da $\alpha_1(x)\le f(x)-a\le \alpha_2(x)$.
Bu ýerden $f(x)-a=\beta(x)$, $\beta(x)\underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ gelip çykýar. Bu bolsa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ diýmekdir.

**Mysallara seredeliň.** 40-njy suratda $x^2+y^2=1$ töweregiň $DA$ dugasy berlen. Onda:

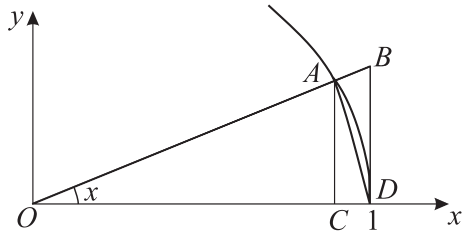
$$S_{\Delta OAD}<S_{\text{sektor}OAD}<S_{\Delta OBD};$$

$$\frac{1}{2}OD\cdot AC<\frac{1}{2}OD^2\cdot x<\frac{1}{2}OD\cdot BD;$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{tg}x.$$

Soňky deňsizligi $\frac{1}{2}\sin x$-e bölüp alarys:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad \text{ýa-da}\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$




*40-njy surat*

Deňsizlikde $x \to 0$ predele geçeliň: $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Diýmek, üçünji teorema görä, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ bolar.

Goý, $x > 0$ bolsun. Birinji teorema görä $x = 0$ nokadyň käbir etrabynda $\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2}$ bolar. Bu ýerden $\sin x > \frac{1}{2}x$ alarys. Belli bolşy ýaly, $\sin x < x$ deňsizlik ýerliklidir. Diýmek, $x$ -iň kiçi bahalary üçin $\frac{x}{2} < \sin x < x$ deňsizlik ýerine ýeter. Argumentiň otrisatel bahalary üçin $\frac{x}{2} > \sin x > x$ deňsizlik dogrudyr.

## §11. Funksiýanyň birtaraply predelleri

Biz funksiýanyň predelini

$$f(x) = a + \alpha(x), \qquad \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f. \tag{1}$$

deňlik boýunça kesgitledik. Goý, diýeliň, (1) diňe $x < x_0$ bahalar üçin dogry bolsun. Bu ýagdaýda $a$ sana $f(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatdaky çep taraply predeli diýilýär we

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = a \tag{2}$$

diýip ýazylýar. $x \to x_0 - 0$ diýmek $x < x_0$, $x \to x_0$ diýmekdir. Eger-de (1) deňlik diňe $x > x_0$ bahalar üçin dogry bolsa, onda $a$ sana $f(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatdaky sag taraply predeli diýilýär we ol

$$\lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = a \tag{3}$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýerde $x \to x_0 + 0$ diýmek $x_0 < x$, $x \to x_0$ diýmekdir. Taraply predelleriň ikisine bilelikde funksiýanyň birtaraply predelleri diýilýär. Predeliň kesgitlemesine görä, $f(x)$ funksiýanyň $x \to x_0$ predeliniň bolmagy üçin, onuň birtaraply predelleriniň bolmagy we olaryň özara deň bolmagy zerur hem ýeterlikdir. Ýagny aşakdaky deňlik ýerlikli bolar:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

**1-nji mysal.** $f(x)$ funksiýa $x = 0$ nokadyň töwereginde

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x < 0 \ \text{üçin},$$

$$f(x) = x + 4, \quad x \geq 0 \ \text{üçin},$$

deňlikler bilen kesgitlenýär. Funksiýanyň $x \to 0$ predeli barmy?

Funksiýanyň çep taraply predelini tapalyň:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sag taraply predelini tapalyň:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} (x + 4) = 4.$$

Çep taraply we sag taraply predeller bar, emma olar özara deň däl. Diýmek, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ – ýok.

**2-nji mysal.** Funksiýa

$$f(x) = \cos x + 1, \quad x \geq 2,$$
$$f(x) = \frac{1}{x - 2}, \quad x < 2$$

deňlikler bilen kesgitlenen. Funksiýanyň $x \to 2$ predeli barmy?

Funksiýanyň çep taraply predelini tapalyň:

$$\lim_{x \to 2 - 0} f(x) = \lim_{x \to 2 - 0} \frac{1}{x - 2} = -\infty.$$

Funksiýanyň sag taraply predelini tapalyň:

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (\cos x + 1) = \cos 2 + 1.$$

Funksiýanyň çep taraply predeli ýok. Diýmek, $\lim_{x \to 2} f(x)$ – ýok.

**3-nji mysal.** Funksiýa $f(x)$

$$f(x) = \cos x + 1, \quad x \leq \pi/2,$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi} x, \qquad x > \pi/2$$

deňlikler bilen kesgitlenen. Funksiýanyň $x \to \pi/2$ predeli barmy?

Funksiýanyň çep taraply predelini tapýarys:

$$\lim_{x \to \pi/2-0} f(x) = \lim_{x \to \pi/2-0} (\cos x + 1) = 1.$$

Sag taraply predeli tapýarys:

$$\lim_{x \to \pi/2+0} f(x) = \lim_{x \to \pi/2+0} \frac{2}{\pi} x = 1.$$

Sag taraply we çep taraply predeller bar we olar deň. Diýmek, funksiýanyň predeli bar we ol 1-e deň, ýagny $\lim_{x \to \pi/2} f(x) = 1$.

## §11. San yzygiderlikleri

0, 1, 2, ..., $n$, ... sanlar bilen belgilenen $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, ... sanlar köplügine san yzygiderligi diýilýär. Yzygiderlik gysgaça $\{a_n\}_0^\infty$ görnüşde ýazylýar. $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... sanlara yzygiderligiň agzalary, $a_n$ sana onuň umumy agzasy diýilýär. Eger $\forall n \geq 0$ üçin $a_n > a_{n+1}$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderlik monoton kemelýän yzygiderlik bolar. Tersine, $a_n < a_{n+1}$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{a_n\}_0^\infty$ monoton ösýän yzygiderlik bolar. Eger-de ýokardaky deňsizlikler $\forall n \geq n_0$ sanlar üçin dogry bolsa, onda $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderlik uzakda monoton kemelýän ýa-da ösýän diýmegi kabul edeliň.

**Kesgitleme.** Eger käbir $a$ san üçin we $\forall \varepsilon > 0$ san üçin $n_0(\varepsilon)$ san tapylyp, $n \geq n_0(\varepsilon)$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall n$ üçin $|a - a_n| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $a$ sana $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderligiň $n$ tükeniksizlige ymtylandaky predeli diýilýär we ol $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ bilen belgilenýär.

Matematiki derňewde subut edilişine görä aşakdaky teorema dogrudyr.

**Teorema.** Ýokarsyndan çäkli monoton ösýän yzygiderligiň ýa-da aşagyndan çäkli monoton kemelýän yzygiderligiň predeli bardyr.

Mysal üçin, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ yzygiderlik ýokarsyndan çäklenen monoton ösýän yzygiderlikdir. Teorema görä onuň predeli bar. Ol predeli $e$ bilen belgileýärler, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $e$ – natural logarifmiň esasy bolýan irrasional sandyr ($e$ = 2,71...). Ýokarky predele matematikada ikinji ajaýyp predel diýilýär. Yzygiderlikler nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biri yzygiderligiň predeli baradadyr. Bu meselä degişli örän köp teoremalar bar. Biz ýokarda monoton yzygiderlikler barada teoremany getirdik. Indi şu nazaryýetde esasy bolan Koşiniň teoremasyny getireliň.

**Koşiniň teoremasy.** Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $n_0(\varepsilon)$ san tapylyp, $n \geq n_0(\varepsilon)$, $m \geq n_0(\varepsilon)$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan $\forall n, m$ üçin $|a_n - a_m| < \varepsilon$ deňsizligiň ýerlikli bolmagy $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderligiň predeliniň bolmagy üçin zerur hem ýeterlikdir.

$\{a_n\}_0^\infty$, we $\{b_n\}_0^\infty$ yzygiderlikleriň jemi $\{a_n + b_n\}_0^\infty$, tapawudy $\{a_n - b_n\}_0^\infty$, köpeltmek hasyly $\{a_n \cdot b_n\}_0^\infty$ we paýy $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_0^\infty$ yzygiderlik bolýar. Eger $\{a_n\}_0^\infty$ we $\{b_n\}_0^\infty$ yzygiderlikleriň predelleri bar bolsa, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ bolsa, onda olaryň jeminiň, tapawudynyň, köpeltmek hasylynyň, $b \neq 0$ bolanda paýynyň hem predeli bardyr we aşakdaky düzgünler dogrudyr:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Yzygiderlikleriň predellerini tapmak meselesine biz ýene-de gaýdyp geleris.

## §12. San yzygiderlikleri we olaryň predelleri

San yzygiderliginiň predeliniň ýene bir kesgitlemesini getireliň.

$[0, \infty)$ aralykda kesgitlenen islendik $f(x)$ funksiýanyň $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, ..., umuman, argument bitin sana deň bolandaky $f(0), f(1), f(2)$, ... bahalarynyň tertipleşdirilen toplumyna san yzygiderligi diýilýär. Adatça, $f(0) = a_0$, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ... belgilenip, yzygiderlik

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

görnüşde ýa-da gysgaça $\{a_n\}_0^\infty$ görnüşde ýazylýar. $a_0, a_1, a_2$, ... sanlara yzygiderligiň agzalary, $a_n$ – umumy agza diýilýär. Yzygiderligiň islendik agzasyny $a_n = f(n)$ formula arkaly kesgitleýärler.

Mysal üçin, $a_n = 2^n$, $n = 1, 2$, ... bolsa, onda yzygiderlik

$$2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ...$$

görnüşde, eger $a_n = 3 + 2n$, $n = 2, 3$, ... bolsa, onda yzygiderlik

$$7, 9, 11, ..., 3 + 2n, ...$$

görnüşde bolar. San yzygiderlikleri bilen bagly esasy bir mesele – agzalaryň tertip belgileri tükeniksizlige ymtylanda olaryň özlerini alyp baryşlary, ýagny yzygiderligiň predeli baradaky meseledir.

**Kesgitleme.** Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $N > 0$ san tapylyp, $\forall n > N$ üçin $|d_n| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{d_n\}_0^\infty$ yzygiderlige $n$ tükeniksizlige ymtylanda tükeniksiz kiçi yzygiderlik diýilýär we ol

$$d_n \underset{n\to\infty}{\sim} t.k.y.$$

bilen belgilenýär.

**Kesgitleme.** Eger $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderlik üçin $a$ san tapylyp, yzygiderligiň agzalary üçin

$$a_n = a + d_n, \quad d_n \underset{n\to\infty}{\sim} t.k.y. \tag{1}$$

deňlik ýerlikli bolsa, onda $a$ sana $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderligiň $n$ tükeniksizlige ymtylandaky predeli diýilýär we ol

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

görnüşde ýazylýar. Predeli bar yzygiderlige ýygnanýan yzygiderlik diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderligiň agzalaryny (1) görnüşde aňladyp bolmasa, onda oňa dargaýan yzygiderlik diýilýär.

Yzygiderligiň predeliniň getirilen dürli kesgitlemesiniň deňgüýçlidigini subut etmek kyn däldir.

$f(x)$ $[0,\infty)$ aralygynda kesgitlenen funksiýa bolsun. $\{a_n\}_0^\infty$, $a_n = f(n)$ yzygiderlige seredeliň. Eger $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ bolsa, onda $a$ san $\{a_n\}_0^\infty$ yzygiderligiň peredeli bolar, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ deňlik dogrudyr.

**Mysal.** $\{a_n\}_0^\infty$; $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ yzygiderligiň predelini tapalyň. Bu ýerden $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ alyp bileris, sebäbi $a_n = f(n)$ boljagy düşnüklidir.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Diýmek,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

diýip ýazmak bolar.

Köp ýagdaýda $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ýok bolsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ hem ýok bolýar. Emma bu hemme wagt beýle däldir. Mysal üçin, $\left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right\}_0^\infty$ yzygiderligiň hemme agzalary 1-e deň bolany sebäpli, ol ýygnanýandyr. Bu ýerde $a_n = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$ bolany üçin, $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\pi\right)$ alyp bileris. Emma

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\pi\right)$$

ýokdur. Geljekde yzygiderlikler baradaky getirilen maglumatlaryň ýeterlik boljakdygy sebäpli, biz şu düşünjeler bilen çäkleneris.

## §13. Üznüksiz funksiýalar

Bellibir köplükde kesgitlenen funksiýalaryň hemmesiniň toplumyny öwrenmek meselesi örän çylşyrymly meseleleriň biridir. Bu işi ýeňilleşdirmek üçin bellibir häsiýetlere boýun funksiýalaryň toplumyny öwrenýärler. Meselem, çyzykly funksiýalaryň köplügi, kwadratik funksiýalaryň köplügi, köpagzalaryň köplügi, ýönekeý funksiýalaryň köplügi we ş.m. Üznüksiz funksiýalar köplügi hem hut şeýle köplükleriň biridir. Goý, $[a,b]$ kesimde $f(x)$ funksiýa kesgitlenen diýeliň we $x$, $x_0$ nokatlar şol kesimde ýatsynlar.

**1-nji kesgitleme.** Eger

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

deňlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz diýilýär.

Diýmek, $x_0$ nokatda üznüksiz bolmak üçin $f(x)$ funksiýanyň $x \to x_0$ predeli bolmaly we ol predel $f(x_0)$-a deň bolmaly.

**2-nji kesgitleme.** Eger $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimiň islendik nokadynda üznüksiz bolsa, onda oňa $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýa diýilýär we bu ýagdaý $f(x) \in C\ [a,b]$ görnüşde belgilenýär.

Predeliň häsiýetini ulanyp, (1) deňligi

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \tag{2}$$

$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$$

görnüşde ýazyp bolýar. (2) deňligi hem funksiýanyň $x_0$ nokatda üznüksizliginiň kesgitlemesi hökmünde kabul etse bolar.

Mysallara ýüzleneliň. Goý, $x_0$ $x$-ler okunyň islendik nokady bolsun. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ bolýandygyny subut edeliň. Alarys:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\cdot\cos\frac{x + x_0}{2}.$$

Bu ýerde $2\cos\frac{x+x_0}{2}$ – çäkli funksiýa, ýagny $x$-iň we $x_0$-uň islendik bahalarynda $\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2$ deňlik ýerliklidir. $\sin\frac{x-x_0}{2}$ funksiýa bolsa $x \to x_0$ tükeniksiz kiçidir. Onda *t.k.f.*-laryň häsiýetine görä $\alpha(x) = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$; $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolar. Diýmek,

$$\sin x = \sin x_0 + \alpha(x),$$

$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$$

diýip ýazyp bileris. (2) deňligiň esasynda $\sin x$ $x_0$ nokatda üznüksizdir diýip bileris. Şeýlelikde, $\sin x$ funksiýa $x$-ler okunyň islendik $x_0$ nokadynda üznüksiz bolýar. Bu bolsa $\sin x$ bütin $x$-ler okunda üznüksizdir diýmekdir, ýagny $\sin x \in C(-\infty; \infty)$. $\sin x$ funksiýanyň şu häsiýeti hemme ýönekeý funksiýalara-da degişlidir, ýagny aşakdaky tassyklama dogrudyr.

**Tassyklama.** Hemme ýönekeý funksiýalar, olaryň üstünde algebraik amallary geçirmek bilen alynýan funksiýalar, bir ýönekeý funksiýany beýleki ýönekeý funksiýanyň argumentiniň ýerine goýlup alynýan funksiýalar öz kesgitlenen ýaýlalarynda üznüksizdirler.

Mysal üçin, $y = \sqrt{\sin x} + \ln\cos x$; $y = a^{\mathrm{tg}x}$; $y = \ln\sin a^x$ funksiýalar öz kesgitlenen ýaýlalarynda üznüksizdirler.

Üznüksiz funksiýalara başga hili kesgitleme hem berseň bolar. Biziň bilşimiz ýaly, $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ diýmek islendik $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme nokatlarynda $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär diýmekdir. Indi üznüksiz funksiýany kesgitleýän (2) deňligi $f(x) - f(x_0) = \alpha(x)$ görnüşde ýazsak we $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, biz şeýle kesgitlemä geleris.

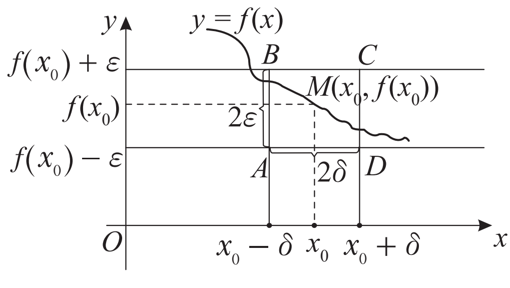
**3-nji kesgitleme.** Eger $f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz diýilýär. Bu $\varepsilon - \delta$ dilinde şeýle görnüşde bolar.

**4-nji kesgitleme.** Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň islendik $x$ nokady üçin $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz diýilýär.

**Bellik.** $f(x) - f(x_0) = \Delta f$ bilen belgiläp, $\lim_{x \to x_0} \Delta f = 0$ deňligiň üznüksizlik bilen deňgüýçlüdigini tassyklamak bolar.

## §14. Funksiýanyň üznüksizliginiň geometrik manysy

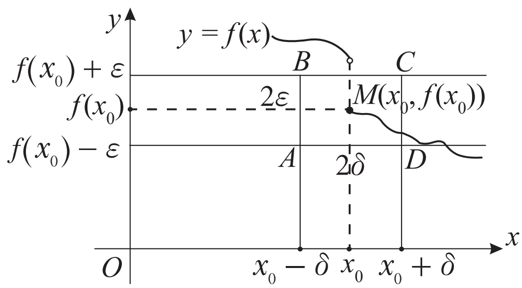
Goý, $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz bolsun. Onda ol $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolmaly we üznüksizligiň kesgitlemeleriniň biri ýerine ýetmeli. Şu ýerde ol kesgitlemeleriň hemmesiniň özara deňgüýçlüdigini bellemek zerurdyr. 4-nji kesgitlemä görä, $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz bolsa, islendik $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, şol etrabyň hemme $x$ nokatlary üçin $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu bolsa, $x$ $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etraba degişli bolanda, $f(x)$ $\Pi_{f(x_0)}^{\varepsilon}$ etraba degişli bolýar diýmekdir. Munuň ýönekeýje geometrik manysy bar. Berlen koordinatalar ulgamynda dört sany $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$, $y = f(x_0) - \varepsilon$, $y = f(x_0) + \varepsilon$ gönüleri geçireliň *(41-nji surat)*.




*41-nji surat*

$f(x)$ funksiýa üznüksiz, diýmek, ýokarda aýdylyşyna görä, $x \in \Pi_{x_0}^{\delta}$ bolanda $f(x) \in \Pi_{f(x_0)}^{\varepsilon}$ bolýar. Bu bolsa $|x - x_0| < \delta$ bolanda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bolýar diýmekdir. Soňky deňsizlikler $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň, $|x - x_0| < \delta$ bolanda, merkezi $M(x_0, f(x_0))$ nokatda, ini $2\delta$, beýikligi $2\varepsilon$ bolan gönüburçlukda ýatýandygyny aňladýar. Tersine, eger $f(x)$ funksiýa

$x_0$ nokatda üznüksiz bolmasa, käbir $\varepsilon > 0$ san tapylyp, $\delta$-ny näçe kiçi alsak-da, $|x - x_0| < \delta$ bolanda $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň bölegi hökman $ABCD$ gönüburçlugyň daşynda, ýagny onuň $BC$ tarapyndan ýokarda ýa-da $AD$ tarapyndan aşakda ýerleşer *(42-nji surat)*.




*42-nji surat*

## §15. Üzülýän funksiýalar

Funksiýanyň üznüksizligini ýene bir gezek kesgitläliň. Goý, $f(x)$ $[a,b]$ kesimde kesgitlenen, $x_0 \in (a, b)$ bolsun.

**5-nji kesgitleme.** Eger $x_0$ nokatda funksiýanyň birtaraply predelleri bar bolsa we olaryň ikisi hem $f(x_0)$-a deň bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz diýilýär.

Bu kesgitlemäniň öňküler bilen deňgüýçlüdigini subut etmek okyjylaryň özlerine galdyrylýar.

**6-njy kesgitleme.** Eger $x_0$ nokatda funksiýanyň birtaraply predelleriniň iň bolmanda biri ýok bolsa ýa-da olaryň ikisi hem bar, ýöne özara deň däl bolsa, ýa-da olaryň ikisi hem bar we deň, ýöne olaryň umumy bahasy $f(x_0)$-a deň bolmasa, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üzülýän funksiýa diýilýär, $x_0$ nokada bolsa üzülme nokady diýilýär.

Üzülme nokady iki hili bolýar. Eger $x_0$ nokatda funksiýanyň birtaraply predelleri bar bolsa, onda şeýle üzülme nokadyna birinji görnüşli üzülme nokady diýilýär. Eger-de bir taraply predelleriň iň bolmanda biri ýok bolsa, onda ikinji görnüşli üzülme nokady diýilýär. Şunuň bilen baglylykda, $x_0$ nokat $f(x)$ funksiýanyň birinji görnüşli üzülme nokady bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatda birinji görnüşli üzülmesi bar diýilýär, eger-de $x_0$ nokat ikinji görnüşli üzülme nokady bolsa, onda ikinji görnüşli üzülmesi bar diýilýär. Mysallara geçeliň.

**1-nji mysal.** $y = \frac{1}{x}$ funksiýany $x = 0$ nokatda derňemeli. Bu funksiýa $x = 0$ nokatda kesgitlenmedik, diýmek, ol şol nokatda üzülýändir. Sebäbi $f(x)$ funksiýa $x = 0$ nokatda üznüksiz bolýan bolsa, kesgitlemä görä, şol nokatda kesgitlenen bolmaly. Funksiýanyň $x = 0$ nokatda çep taraply predelini tapalyň. $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, ýagny predel ýok. Diýmek, $x = 0$ nokat ikinji görnüşli üzülme nokady bolýar. Şonuň üçin $y = \frac{1}{x}$ funksiýanyň $x = 0$ nokatda ikinji görnüşli üzülmesi bar.

**2-nji mysal.** $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0; \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

funksiýany $x = 0$ nokatda derňemeli. Birtaraply predelleri tapalyň. $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0;$ $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1.$ Görşümiz ýaly, predeller özara deň däl. Şoňa görä $x = 0$ nokat birinji görnüşli üzülme nokady, $f(x)$ funksiýanyň bolsa şol nokatda birinji görnüşli üzülmesi bardyr.

**3-nji mysal.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

funksiýany $x = 0$ nokatda barlamaly. Berlişine görä, $f(0) = 0.$ $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ Birtaraply predeller özara deň, emma olaryň umumy bahasy 1 bolup, $f(0) = 0$ baha deň däl. Diýmek, $x = 0$ nokat birinji görnüşli üzülme nokatdyr.

**4-nji mysal.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

funksiýany $x = 0$ nokatda derňemeli. Berlişine görä, $f(0) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Diýmek, 5-nji kesgitlemä görä, $f(x)$ funksiýa $x = 0$ nokatda üznüksizdir.

**Bellik.** Eger $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ bolsa, $P(x)$, $Q(x)$ üznüksiz funksiýalar bolsalar, onda $f(x)$ funksiýanyň üzülme nokatlary $Q(x)$ maýdalawjynyň nollarynyň içinde bolmaly. Özi hem, eger $x_1$ $Q(x) = 0$ deňlemäniň köki $P(x_1) \neq 0$ bolsa, onda $x_1$ hökmany üzülme nokadydyr.

**5-nji mysal.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 - 2x - \frac{5}{4}}$ funksiýanyň üzülme nokatlaryny tapmaly. Bu ýerde $P(x) = \sin x$, $Q(x) = x^2 - 2x - \frac{5}{4}$ üznüksiz funksiýalar. Diýmek, üzülme nokatlary $x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$ deňlemäniň kökleriniň içinde bolmaly. Deňlemäni çözüp taparys: $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. $\sin\frac{5}{2} \neq 0$, $\sin\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$ bolany sebäpli, bu nokatlaryň ikisi hem üzülme nokadydyr.

## §16. Üznüksiz funksiýalaryň häsiýetleri

Üznüksiz funksiýalar we olaryň häsiýetleri matematikanyň hut özünde we beýleki ugurlarda giňden ulanylýar. Şonuň üçin onuň häsiýetleriniň üstünde durup geçeliň we anyklyk üçin olary teoremalar görnüşinde getireliň.

**1-nji teorema.** Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda şol kesimde $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ we $\frac{f}{g}$ funksiýalar hem üznüksiz bolarlar. $\frac{f}{g}$ funksiýanyň üznüksiz bolmagy üçin goşmaça $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$ şert ýerine ýetmelidir.

Teoremanyň subudy predeli bar funksiýalaryň häsiýetlerinden gelip çykýar. Dogrudan hem, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiýanyň üznüksiz boljakdygyny

subut edeliň. Goý, $x_0 \in [a,b]$ bolsun. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiýanyň $x \to x_0$ bolandaky predelini tapalyň. Şerte görä $f(x)$ we $g(x)$ $x_0$ nokatda üznüksiz. Diýmek, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, özi hem $g(x_0) \neq 0$. Onda predeli bar funksiýalaryň häsiýetine görä, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
Bu deňlik kesgitlemä görä $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ gatnaşygyň $x_0$ nokatda üznüksizligini aňladýar. $x_0$ nokadyň $[a,b]$ kesimiň islendik nokady bolany üçin, bu ýerden $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde üznüksizligi gelip çykýar. Beýleki ýagdaýlar hem edil şunuň ýaly subut edilýär.

**2-nji teorema.** Eger $f(x) \in C[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ bolsa we $f(x_0) < 0$ ($f(x_0) > 0$) deňsizlik ýerine ýetse, onda $x_0$ nokadyň käbir etrabynda $f(x) < \dfrac{f(x_0)}{2}$ $\left(f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}\right)$ deňsizlik ýerine ýeter.

**Subudy.** $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üznüksiz. Diýmek, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ alalyň. Predeliň häsiýetine görä, $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etrap tapylyp, $\forall x \in \Pi_{x_0}^{\delta}$ üçin $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ deňsizlik ýa-da $-\dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ deňsizlik ýerlikli bolar. $f(x_0) > 0$ ýagdaýa seredeliň. $-\dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0)$ deňsizlikden alarys:

$$f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) \Rightarrow f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

$f(x_0) < 0$ ýagdaý hem edil şeýle subut edilýär.

**3-nji teorema.** Eger $f(x) \in C[a, b]$ bolsa we $f(x)$ funksiýanyň $a$ we $b$ nokatlardaky bahalary $f(a)$ we $f(b)$ dürli alamatly sanlar bolsalar, onda $(a, b)$ aralygyň iň bolmanda bir nokadynda $f(x)$ nola öwrüler. Ýagny iň bolmanda bir $c \in [a, b]$ üçin $f(c) = 0$ deňlik ýerine ýeter.

**Subudy.** Anyklyk üçin $f(b) < 0$ diýeliň. $[a, b]$ kesimiň $f(x) > 0$ şerti kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügini $A$ bilen belgiläliň. $A$-nyň $[a, b]$ kesimde ýatany üçin onuň takyk ýokarky çägi bar. Goý, ol $c$ nokat bolsun, $c$ nokat $[a, b]$ kesimiň içki nokadydyr. Eger $c$ nokat $A$ köplüge girse $f(c) > 0$ bolardy we 2-nji teorema görä $f(x) > 0$ deňsizlik $c$ nokadyň käbir etraby üçin ýerine ýeterdi. Bu bolsa $c$ nokat takyk ýokarky çäk däl diýmek bolardy. Eger-de $f(c) < 0$ bolsa, onda $f(x) < 0$ deňsizlik, 2-nji teorema görä, $c$ nokadyň käbir etrabynda ýerine ýeterdi we bu hem $c$ takyk ýokarky çäk däl diýmek bolardy. Şoňa görä diňe $f(c) = 0$ ýagdaý galýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**4-nji teorema.** Eger $f(x) \in C(\alpha, \beta)$ bolsa we $(\alpha, \beta)$ aralygyň islendik iki $x = a$ we $x = b$ $(a < b)$ nokatlarynda dürli $f(a) = A, f(b) = B$ bahalara eýe bolsa, onda $A$ we $B$-niň arasynda ýatýan islendik $c$ san üçin $x_0 \in (a, b)$ nokat tapylyp, $f(x_0) = c$ deňlik ýerine ýeter.

Eger täze $f(x) - c$ funksiýa $[a, b]$ kesimde seretsek, onda teoremanyň subudy 3-nji teoremadan gelip çykýar.

3-nji we 4-nji teoremalar ulanyşda deňlemäniň köküniň barlygyny subut etmek üçin giňden peýdalanylýar. Goý, $f(x) \in C(\alpha, \beta)$ we $f(x) = c$ deňlemäniň $(\alpha, \beta)$ aralykda köküniň barlygyny barlamaly bolsun. Eger $(\alpha, \beta)$ aralykda $x = a$, $x = b$ nokatlar tapylyp, $f(a) \le c \le f(b)$ $(f(a) \ge c \ge f(b))$ deňsizlikler ýerine ýetse, onda 4-nji teorema görä $x_0 \in [a, b]$ nokat tapylyp, $f(x_0) = c$ deňlik ýerine ýeter. Bu bolsa $f(x) = c$ deňlemäniň $x = x_0$ köki bar diýmekdir.

**Mysal.** Islendik täk derejeli köpagzanyň iň bolmanda bir hakyky köküniň bardygyny görkezmeli.

**Çözülişi.** $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ täk derejeli köpagza berlen. $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ bolýar. $f(N) \cdot f(-N)$ sanyň $N$ ýeterlik uly bolandaky alamatyny anyklalyň:

$$f(N) \cdot f(-N) = N^n\left(1 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \ldots + \frac{a_n}{N^n}\right)(-N)^n \times$$

$$\times\left(1 + \frac{a_1}{-N} + \frac{a_2}{(-N)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(-N)^n}\right) =$$

$$= -N^{2n}\left(1 + \frac{a_1}{N} + \ldots\right)\left(1 + \frac{a_1}{-N} + \ldots\right).$$

Diýmek, $N$-iň ýeterlik uly bahalarynda $f(N)\cdot f(-N)<0$ bolýar. Bu bolsa $f(-N)$ we $f(N)$ sanlaryň dürli alamatly sanlar boljagyny görkezýär. Şoňa görä, $f(x)$ funksiýa $[-N,\ N]$ kesimde 3-nji teoremanyň şertlerini kanagatlandyrýar. Teoremanyň esasynda käbir $x_0\in(-N,N)$ üçin $f(x_0)=0$ bolýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**Mysal.** $\sin x-\frac{1}{2}x=0$ deňlemäniň kökleriniň barlygyny derňemeli. $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$ funksiýa bütin $x$ okunda üznüksiz, $f(0)=0$;

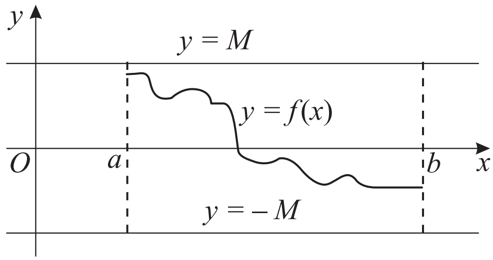
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}>0,\ \ f(\pi)=\sin\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}<0.$$

$f(x)$ täk funksiýa. Şoňa görä-de $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0,\quad f(-\pi)>0.$ 3-nji teorema görä $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ aralygyň her birinde $\sin x-\frac{x}{2}=0$ deňlemäniň iň bolmanda bir köki bardyr. Diýmek, berlen deňlemäniň $x_1=0,\quad x_2\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\ x_3\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ üç köki bar. Iň täsin ýeri şol deňlemäniň şulardan başga köküniň ýoklugydyr. Subut etjek boluň.

**5-nji teorema.** $[a,b]$ kesimde üznüksiz $f(x)$ funksiýa şol kesimde çäklidir. Ýagny $M>0$ san tapylyp, $\forall x\in[a,b]$ üçin $|f(x)|<M$ deňsizlik ýerine ýeter.

**Subudy.** Goý, $f(x)$ $[a,b]$ kesimde çäksiz bolsun. Onda $\{x_n\}_1^\infty$ ($\forall k$ üçin $x_k\in[a,b]$) yzygiderlik tapylyp, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$ bolar. Goý, $x_0$ nokat $\{x_n\}_1^\infty$ yzygiderligiň gürlük nokady bolsun we $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ yzygiderlik $\{x_n\}_1^\infty$ yzygiderligiň $x_0$ nokada ýygnanýan bölek yzygiderligi bolsun. Onda $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$ bolar we $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$ deňlik ýerine ýetmez. Bu bolsa $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda üzülýär diýmekdir. Şu alnan garşylyk teoremany subut edýär.

Teoremanyň geometriki manysy bar. Eger $f(x)\in C[a,b]$ bolsa, onda $M>0$ san tapylyp, $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki grafigi $y=-M$, $y=M$ gönüler bilen çäklenen ýaýlada ýatar *(43-nji surat).*




*43-nji surat*

**6-njy teorema.** Eger $f(x) \in C[a,b]$ bolsa, onda ol şol kesimiň käbir nokadynda iň uly baha, käbir nokadynda iň kiçi baha eýe bolar.

**Subudy.** 5-nji teorema görä, $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimde alýan bahalary san okunda $A$ – çäkli köplük emele getirýär. Goý, $m$ we $M$ şol köplügiň degişlilikde takyk aşaky we ýokarky çäkleri bolsun. Teoremany subut etmek üçin $m \in A$, $M \in A$ degişlilikleri subut etmek ýeterlikdir. $M \in A$ boljagyny subut edeliň. Takyk ýokarky çägiň kesgitlemesine görä $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = M$ şerti kanagatlandyrýan $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in [a,b]$ yzygiderlik tapylar. Goý, $x_0 \in [a,b]$ nokat $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ yzygiderligiň gürlük nokady bolsun. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ yzygiderligiň $x_0$ nokada ýygnanýan $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ bölek yzygiderligini alalyň. Diýmek,

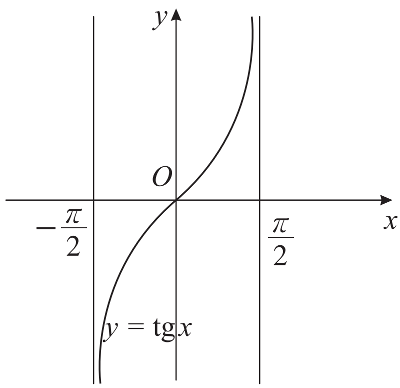
$$\lim_{p\to\infty} x_{k_p} = x_0,$$
$$\lim_{p\to\infty} f(x_{k_p}) = M$$

deňlikler ýerine ýetmeli. $f(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatda üznüksizligi sebäpli

$$\lim_{p\to\infty} f(x_{k_p}) = f(x_0)$$

deňlik hem ýerine ýeter. Bu deňliklerden alarys: $M = f(x_0)$. Şoňa görä-de $M \in A$; $m$ üçin hem edil şeýle subut edilýär.

**Bellik.** Funksiýanyň seredilýän ýaýlasynyň kesim bolýany örän möhümdir. Eger şu şert ýerine ýetmese, teoremanyň ýalňyş bolmagy ähtimaldyr.

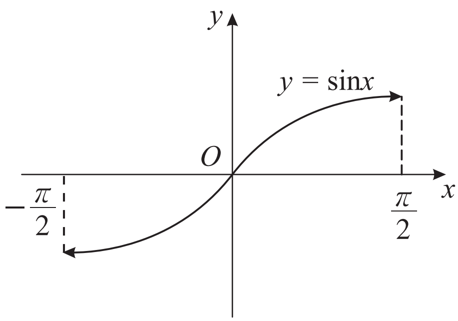



*44-nji surat*

Mysallara ýüzleneliň.

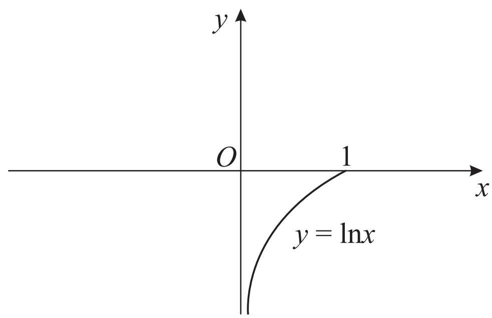
1. $y = \text{tg}x$ funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda üznüksizdir, emma onuň şol aralykda iň uly bahasy-da, iň kiçi bahasy-da ýokdur *(44-nji surat)*.

2. $y = \sin x$ funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda üznüksizdir. Emma onuň şol aralykda iň uly we iň kiçi bahasy ýokdur *(45-nji surat)*.




*45-nji surat*

3. $y = \ln x$ funksiýa $(0,1]$ ýarym aralykda üznüksizdir. $\ln 1 = 0$ onuň şol ýarym aralykdaky iň uly bahasydyr, emma onuň iň kiçi bahasy ýokdur *(46-njy surat)*. Indiki teorema geçmezden ozal täze düşünje girizeliň.




*46-njy surat*

**Kesgitleme.** Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\delta$ san tapylyp, $[a,b]$ kesimiň $|x_1 - x_2| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan islendik iki nokady üçin $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde deňölçegli üznüksiz funksiýa diýilýär.

**7-nji teorema.** $[a,b]$ kesimde üznüksiz $f(x)$ funksiýa şol kesimde deňölçegli üznüksizdir.

Bu teoremany subutsyz kabul edeliň. Bir zady belläliň. Çäkli ýaýlada üznüksiz funksiýa çäksiz bolup biler. Emma islendik çäkli ýaýlada deňölçegli üznüksiz funksiýa hökmany çäklidir. Bu bolsa ýapyk däl çäkli ýaýlalarda üznüksiz funksiýalaryň köplüginiň deňölçegli üznüksiz funksiýalaryň köplügi bilen gabat gelmeýändigini aňladýar.

**Mysal.** $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$ funksiýa $(-1;1)$ aralykda üznüksizdir. Ol $(-1;1)$ aralykda çäksizdir. Diýmek, ol şol aralykda deňölçegli üznüksiz däldir. Sebäbi deňölçegli üznüksiz bolsa çäkli bolardy.

**Mysal.** $y = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiýa $(0;1)$ aralykda üznüksizdir we çäklidir. Emma oňa garamazdan, ol şol aralykda deňölçegli üznüksiz däldir (Subut ediň).

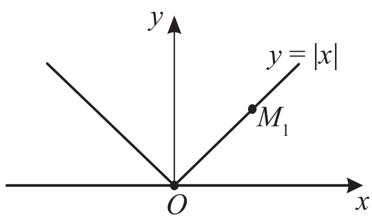
# VI. DIFFERENSIAL HASAPLAÝYŞ

## §1. Funksiýanyň önümi

Bu düşünje matematikanyň iň çuňňur we peýdaly düşünjeleriniň biridir. Ol köp ylymlaryň (fizika, astronomiýa, ykdysadyýet, optimizasiýa nazaryýeti we başgalar) öz ýaýlasyna degişli obýektleri öwrenmeginiň esasy guraly bolup durýandyr. Ýönekeýje meselelere seredeliň.

***Galtaşýan barada mesele.*** $y = f(x)$ $[a,b]$ kesimde kesgitlenen, $x_0 \in (a, b)$. $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $M_0(x_0, f(x_0))$ nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini hasaplalyň.

**Kesgitleme.** Grafigiň $M_0$ we $M_1$ nokatlaryndan geçýän kesiji göni çyzygynyň $M_1 \to M_0$ predel ýagdaýyna galtaşýan göni diýilýär.




*47-nji surat*

Diýmek, galtaşýanyň bolmagy üçin, ýokarda agzalan predel ýagdaý bolmaly we ol $M_1$ nokadyň nähili edip $M_0$ nokada ymtylýandygyna bagly bolmaly däldir.

Mysallara ýüzleneliň.

1. $y = |x|$ funksiýanyň grafiginiň $M_0(0, 0)$ nokadynda galtaşýany barmy diýen sowala jogap bereliň *(47-nji surat)*.

Eger $M_1$ nokat $M_0$ nokatdan sagda ýerleşse, onda $M_0$, $M_1$ nokatlardan geçýän kesiji $y = x$ göni bolardy. $M_1$ nokat $M_0$ nokada sagdan ymtylsa, kesijiniň predel ýagdaýy bar we ol $y = x$ göni bilen gabat gelýär. Eger $M_1$ nokat $M_0$ nokatdan çepde bolsa, $M_0$ we $M_1$ nokatlardan geçýän kesiji $y = -x$ göni bolardy. $M_1$ nokat $M_0$ nokada çepden ymtylanda, kesijiniň predel ýagdaýy $y = -x$ göni bilen gabat gelerdi. Şunlukda, $M_0$ nokatda kesijiniň predel ýagdaýy $M_1$ nokadyň $M_0$ nokada nähili ýol bilen ymtylýandygyna bagly. Diýmek, $M_0$ nokatda $y = |x|$ funksiýanyň grafiginiň galtaşýany ýokdur.

2. $y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $y(0) = 0$, funksiýanyň grafiginiň $M_0(0, 0)$ nokadynda galtaşýany barmy?

$M_1$ nokat hökmünde

$$M_1\left(\frac{1}{2k\pi}, 0\right), \quad k = 1, 2, ...$$

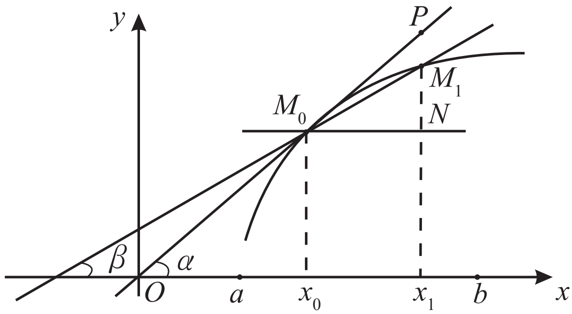
nokatlary yzygiderli alalyň. $M_0$ we $M_1$ nokatdan $k$-nyň islendik bahasynda geçýän kesiji göni çyzyk $y = 0$ göni bilen gabat gelýär. $k$ položitel bahalary kabul edip tükeniksizlige ymtylanda, $M_1$ nokat $M_0$ nokada ymtylýar, kesiji göni bolsa $y = 0$ gönä ymtylýar. Indi $M_1$ nokat hökmünde $M_1\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$ nokatlary alalyň. $M_0$ we $M_1$ nokatdan $k$-nyň islendik bahasynda geçýän kesiji göni $y = x$ göni çyzyk bolýar. $k$ tükeniksizlige ymtylanda onuň predel ýagdaýy ýene-de $y = x$ bilen gabat gelýär. Görşümiz ýaly, kesijiniň predel ýagdaýy $M_1$ nokadyň $M_0$ nokada ymtylyşyna bagly. Şol sebäpli hem $y = x\sin\frac{1}{x}$ funksiýanyň grafiginiň $M_0(0, 0)$ nokatda galtaşýan gönüsi ýokdur.

Indi ýokarda goýlan burç koeffisiýent baradaky meselä dolanyp geleliň. Kesijiniň predel ýagdaýy bar we ol $M_0$, $P$ nokatlardan geçýän göni bilen gabat gelýär diýeliň. Onda biziň gözleýän burç koeffisiýentimiz tg$\alpha$ deň bolar. $M_0$, $M_1$ nokatlardan geçýän kesijiniň burç koeffisiýenti tg$\beta$ deň. Goý, $M_1$ nokat $M_0$ nokada ymtylýar diýeliň *(48-nji surat)*. Onda $x_1$ nokat $x_0$-a, tg$\beta$ bolsa tg$\alpha$ ymtylar, ýagny

$$\lim_{x_1 \to x_0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

deňlik ýerine ýeter. Indi (1) deňligi 48-nji surata esaslanyp özgerdeliň. Görnüşi ýaly, $\operatorname{tg}\beta = \frac{NM_1}{M_0N}$, $NM_1 = f(x_1) - f(x_0)$, $M_0N = x_1 - x_0$, şoňa görä (1) deňlik şeýle görnüşe geler:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$




*48-nji surat*

$f(x_1)-f(x_0)$ tapawuda funksiýanyň $x_0$ nokatdaky artdyrmasy, $x_1-x_0$ tapawuda bolsa argumentiň $x_0$ nokatdaky artdyrmasy diýilýär we olar degişlilikde $\Delta f$ we $\Delta x$ bilen belgilenýär. Ýagny

$$\Delta f = f(x_1)-f(x_0),$$

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

$x_1 \to x_0$ diýmegiň $\Delta x \to 0$ diýmek bilen deňgüýçli bolýandygy görnüp dur. Şoňa görä (2) deňligi aşakdaky ýaly ýazyp bileris:

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Şeýlelikde, tg$\alpha$ – burç koeffisiýenti tapmak meselesi bizi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (4)$$

görnüşdäki predeli tapmak meselesine getirdi.

***Tizlik barada mesele.*** Material nokat $x$-ler oky boýunça $x = s(t)$ kanun boýunça hereket etsin. Düşnükli bolar ýaly, $s(0) = 0$ diýeliň. Onda $s(t)$ material nokadyň $t$ wagtda geçen aralygyny aňladar. Nokadyň $[t, t_1]$ wagt aralygynda geçen ýoly $s(t_1) - s(t)$ deň bolar.

$$\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$$

gatnaşyga nokadyň $[t, t_1]$ wagt aralygyndaky orta tizligi diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$$

predel bar bolsa, onda şol predele nokadyň $t$ wagtdaky tizligi diýilýär we $\vartheta(t)$ bilen belgilenýär. Ýagny

$$\vartheta(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$

$s(t_1) - s(t) = \Delta s$, $t_1 - t = \Delta t$ bolýandygyny görüp we $t_1 \to t$-niň ýerine $\Delta t \to 0$ ýazyp alarys:

$$\vartheta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

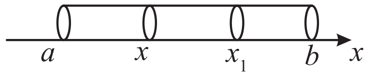
Diýmek, tizlik tapmak meselesi ýene-de

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{5}$$

görnüşdäki predeli tapmak meselesine getirdi.

(5) deňlikde $s$-iň ýerine $f$ harpyny goýsak, $t$-niň ýerine $x$ harpyny goýsak, onda biziň (4) deňlige geljegimiz görnüp dur.

***Dykyzlyk barada mesele.*** $x$-ler okunyň üstünde $[a, b]$ aralygy tutýan we kese kesigi $S$ meýdanly tegelek bolan steržen ýatsyn *(49-njy surat)*.



*49-njy surat*

Onuň dykyzlygy islendik kese kesiginde birmeňzeş bolup, $\rho = \rho(x)$ funksiýa bilen kesgitlensin. Sterženiň $x$ we $x_1$ nokatlaryň arasyndaky böleginiň massasy $m$, göwrümi $V$ bolsun. $\frac{m}{V}$ gatnaşyga şol bölegiň orta dykyzlygy diýilýär we $\rho_s$ bilen belgilenýär:

$$\rho_s = \frac{m}{V}.$$

**Kesgitleme.** Eger $x_1$ nokat $x$ nokada ymtylanda

$$\lim_{x_1 \to x} \rho_s$$

predel bar bolsa, onda şol predele sterženiň $x$ nokatdaky dykyzlygy diýilýär we $\rho(x)$ bilen belgilenýär. Diýmek,

$$\rho(x) = \lim_{x_1 \to x} \rho_s = \lim_{x_1 \to x} \frac{m}{V}.$$

Goý, $\forall x \in [a,b]$ üçin sterženiň $[a,x]$ kesimdäki böleginiň massasy $m = S \cdot f(x)$ formula bilen berlen bolsun. Onda $[x,x_1]$ kesimdäki böleginiň massasy $S\,[f(x_1) - f(x)]$ bolar. $V = S \cdot (x_1 - x)$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\rho(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{S[f(x_1) - f(x)]}{S(x_1 - x)}$$

ýa-da

$$\rho(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Ýene-de $f(x_1) - f(x) = \Delta f$, $x_1 - x = \Delta x$ deňlikleri ulanyp we $x_1 \to x$ predeli $\Delta x \to 0$ bilen çalşyryp alarys:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Biz üç dürli meselä garadyk. Olaryň hemmesi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

görnüşdäki predeli tapmak meselesine syrykdy. Ine, şeýle predeli tapmak meselesini tertipleşdirmek maksady bilen önüm düşünjesi girizilýär.

**Kesgitleme.** Eger $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ predel bar bolsa, onda şol predele $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatdaky önümi diýilýär we ol predel $f'(x)$ ýa-da $\frac{df}{dx}$ bilen belgilenýär.

Kesgitlemä görä

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{6}$$

Söz bilen aýdanymyzda, $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatdaky önümi diýip, onuň şol nokatdaky artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň $\Delta x$ nola ymtylandaky predeline aýdylýar.

Indi biz ýokarda garalan üç meseläniň jogaplaryny önüm düşünjesiniň üsti bilen aýdyp bileris:

1. Galtaşýan barada mesele. $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $M(x, f(x))$ nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýenti $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatdaky önümine deňdir.

2. Tizlik barada mesele. $x = s(t)$ kanun bilen hereket edýän nokadyň $t$ wagtdaky $\vartheta(t)$ tizligi $s(t)$ funksiýanyň $t$ nokatdaky önümine deňdir.

3. Dykyzlyk barada mesele. $[a, x]$ kesimdäki böleginiň massasy $m = Sf(x)$ görnüşde bolan sterženiň $x$ nokatdaky dykyzlygy $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatdaky önümine deňdir.

Şularyň esasynda we başga-da seredilmedik meseleleriň jogaplarynyň esasynda, biz önüm düşünjesi köp meseleleri çözmäge ýardam edýän umumy düşünjedir diýip bileris.

## §2. Kesgitlemä esaslanyp, önüm tapmak düzgüni

Käbir ýönekeý funksiýalar üçin önümi gös-göni kesgitlemäni ulanyp tapmak bolar. Goý, $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatda önümini tapmaly bolsun. Onuň üçin şol nokatda funksiýanyň $\Delta f$ artdyrmasyny hasaplaýarlar we onuň tapylan bahasyny

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

deňlige goýup predeli tapýarlar. Meseläni çözmek üçin $\Delta f = f(x_1) - f(x)$ artdyrmany başgaça ýazmak amatly bolýar. Biz ýokarda $x_1 - x = \Delta x$ bilen belläpdik. Bu ýerden $x_1 = x + \Delta x$ tapýarys we $\Delta f$ artdyrmany $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ görnüşde ýazyp, önüm üçin

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{7}$$

formulany alarys.

**1-nji mysal.** $f(x) = \sqrt{x}$ funksiýanyň $x \neq 0$ nokatdaky önümini tapmaly.

**Çözülişi.** $\Delta f$ artdyrmany tapalyň:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x};$$

deňligiň sag bölegini $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$ aňlatma köpeldip we bölüp alarys:

$$\Delta f = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Artdyrmanyň tapylan bahasyny (7) formulada goýup alarys:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ýa-da } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**2-nji mysal.** $f(x) = x^2 + 3x + 5$ funksiýanyň $x$ nokatdaky önümini tapmaly. Ýokarda görkezilen tertip boýunça hereket edýäris:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = [(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 5] -$$
$$-[x^2 + 3x + 5] = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5 -$$
$$-x^2 - 3x - 5 = 2x\Delta x + 3\Delta x + \Delta x^2,$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + 3\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + 3 + \Delta x),$$

$$f'(x) = 2x + 3.$$

(7) deňlikden görnüşi ýaly, $x$ nokatda önümi bar funksiýa şol nokatda üznüksizdir. Bu tassyklamanyň subudyny biz aşakda getireris. Köp ýönekeý funksiýalaryň önümleri hem hut şeýle usul bilen tapylýar. Biz olaryň tapylyş meselesine aşakda serederis.

## §3. Önüm tapmagyň esasy düzgünleri

Ýokarda görşümiz ýaly, köp meseleleri çözmek bellibir funksiýanyň önümini tapmaklyga syrygýar. Meselem, $y = f(x)$ funksiýanyň grafigine $M(x_0, f(x_0))$ nokatda galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapmak, hereket edýän nokadyň tizligini tapmak, sterženiň dykyzlygyny tapmak meseleleri edil şeýle meselelerdir. Köp ýagdaýda ol önümi, ýokarda görkezişimiz ýaly, gös-göni önümiň kesgitlemesini ulanyp tapyp bolar. Emma köp ýagdaýda beýle usul kynçylyklara sezewar edýär. Şonuň üçin önüm tapmagy aňsatlaşdyrýan birnäçe düzgünler girizilýär. Olar, esasan, şulardan durýar. Goý, $C$ – hemişelik ululyk, $U(x)$, $V(x)$ – seredilýän ýaýlada önümleri bar funksiýalar bolsunlar. Onda aşakdaky formulalar ýerliklidirler:

1. $(C)' = 0$
2. $(CU)' = CU'$
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$
4. $(U \cdot V)' = U'V + V'U$
5. $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$
6. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

Şu düzgünler önüm tapmagyň esasy düzgünleridir. Olary ulanyp has çylşyrymly funksiýalaryň hem önümlerini tapsa bolar.

**Mysal.** $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x}}$ funksiýanyň önümini tapmaly. (6) formulany ulanyp alarys:

$$\left(\frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x^2 + 3x + 5)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})'(x^2 + 3x + 5)}{(\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{(2x + 3)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3x + 5)}{x} =$$

$$= \frac{2(2x + 3)x - x^2 - 3x - 5}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + 3x - 5}{2x\sqrt{x}}.$$

Ýokarky formulalar önümiň kesgitlemesinden, funksiýanyň predeliniň häsiýetinden we önümi bar funksiýalaryň üznüksizliginden gelip çykýar. Biz olaryň hemmesini subut edip durman, nusga hökmünde 4, 5 we 6-njy formulalary subut edeliň.

Önümiň kesgitlemesine görä:

$$(U \cdot V)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x)V(x + \Delta x) - U(x)V(x)}{\Delta x}.$$

Deňligiň sag tarapyny özgerdip, alarys:

$$(U \cdot V)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[U(x + \Delta x) - U(x)]V(x + \Delta x) + U(x)[V(x + \Delta x) - V(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \Delta V}{\Delta x}.$$

Indi predeliň häsiýetini ulanyp alarys:

$$(U \cdot V)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U \cdot V(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x) \cdot \Delta V}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

Kesgitlemä görä, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = U'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V'$. $V(x)$ funksiýanyň üznüksizligini ulanyp, taparys: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} V(x + \Delta x) = V(x)$. Tapylan bahalary ýokarda ýerine goýup alarys:

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U.$$

Şuny hem subut etmek gerekdi.

Indi $\frac{1}{V}$ funksiýanyň önümini tapalyň. Edil ýokardaky ýaly hereket edip alarys:

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{V(x + \Delta x)} - \frac{1}{V(x)}\right] \frac{1}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x) - V(x + \Delta x)}{\Delta x V(x + \Delta x)V(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta V}{V(x + \Delta x)V(x) \cdot \Delta x},$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{V(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{V(x + \Delta x)},$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'(x)}{V^2(x)}.$$

$\frac{U}{V}$ funksiýanyň önümini (4) we (6) formulalary ulanyp, aňsatlyk bilen tapyp bolýar.

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \left(U \cdot \frac{1}{V}\right)' = U'\frac{1}{V} + \left(\frac{1}{V}\right)' U = U'\frac{1}{V} - \frac{V'}{V^2}U,$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}.$$

**Elementar funksiýalaryň önümleriniň tablisasy**

| | |
|---|---|
| 1. $y = C$ | $y' = 0$ |
| 2. $y = x$ | $y' = 1$ |
| 3. $y = x^n$ | $y' = n \cdot x^{n-1}$ |
| $y = \frac{1}{x}$ | $y' = -\frac{1}{x^2}$ |
| 4. $y = a^x$ | $y' = a^x \cdot \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| 5. $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| 6. $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| 7. $y = \cos x$ | $y' = -\sin x$ |
| 8. $y = \mathrm{tg} x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 9. $y = \mathrm{ctg} x$ | $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |

10. $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = \mathrm{arctg}\, x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

13. $y = \mathrm{arcctg}\, x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

## §4. Funksiýanyň differensialy

Goý, $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokatda önümi bar bolsun. Onda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

deňlik ýerine ýeter. Predeliň häsiýetini ulanyp, ýokarky deňligi

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \qquad \alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\sim} t.k.f.$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

deňligi alarys. $f'(x)\Delta x$ aňlatma funksiýanyň $x$ nokatdaky differensialy diýilýär we ol $df$ bilen belgilenýär. Ýagny

$$df = f'(x)\Delta x$$

ýa-da $dx = \Delta x$ bolýandygy üçin,

$$df = f'(x)dx.$$

Şunuň esasynda,

$$\Delta f = df + \alpha \cdot \Delta x \tag{2}$$

ýazyp bileris. $\Delta x$-iň kiçi bahalarynda $\alpha\Delta x$ ululyk $df$ ululykdan has kiçi bolýar. Şoňa görä, (2) deňlikde $\alpha\Delta x$ ululygy taşlap,

$$\Delta f \approx df \tag{3}$$

takmyn deňlik alynýar. Bu deňlik funksiýanyň bahasyny takmyn tapmakda giňden ulanylýar.

**Mysal.** $f(x) = \sqrt{x}$ funksiýanyň $x_1 = 3{,}98$ nokatdaky takmyn bahasyny tapmaly. (3) deňligi ýaýbaň görnüşde ýazalyň:

$$f(x_1) - f(x) \cong f'(x)\Delta x = f'(x)(x_1 - x).$$

Şu ýerde $x = 4$; $x_1 = 3{,}98$ goýsak, $\Delta x = x_1 - x = -0{,}02$ bolýar. Diýmek, $\Delta x$ ýeterlik kiçi we biz (3) formulany ulanyp bileris. Şoňa görä,

$$f(3{,}98) \cong f(4) + f'(4)(3{,}98 - 4);$$

$$f(3{,}98) = \sqrt{3{,}98}, \quad f(4) = \sqrt{4} = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Tapylan bahalary ýerine goýup, alarys:

$$\sqrt{3{,}98} \cong 2 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}02 = 2 - 0{,}005 = 1{,}995.$$

(3) formulanyň amatly ýeri onuň ýönekeýligidir. Emma onuň ýetmez ýeri hem bar. Ol hem şol formula bilen $f(x_1)$ bahanyň nähili takyklykda tapylandygy barada maglumat ýoklugydyr. Indiki bölümleriň birinde biz şu näsazlygy düzedip boljakdygyny görkezeris.

(1) deňlikde $\Delta x \to 0$ predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Bu bolsa, $x$ nokatda önümi bar funksiýa şol nokatda üznüksizdir diýmekdir.

## §5. Çylşyrymly funksiýanyň önümi

Goý, $f(U)$ funksiýa $[c,d]$ kesimde kesgitlenen, $U = U(x)$ funksiýa bolsa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen bolsun we onuň $[a,b]$ kesimiň islendik nokadyndaky bahasy $[c,d]$ kesime degişli bolsun, ýagny $\forall x \in [a,b]$ üçin $U(x) \in [c,d]$. Onda $F(x) = f(U(x))$ funksiýa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen bolýar. Oňa *çylşyrymly funksiýa* diýilýär.

Eger $f(U)$ funksiýanyň $U$ argumente görä $[c,d]$ kesimiň islendik nokadynda önümi bar bolsa hem-de $U(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimiň islendik nokadynda önümi bar bolsa, onda $F(x) = f(U(x))$ çylşyrymly funksiýanyň $[a,b]$ kesimiň islendik nokadynda önümi bardyr we ol önüm

$$F'(x) = f'(U(x)) \cdot U'(x) \tag{1}$$

formula boýunça tapylýandyr. Geliň, formulany getirip çykarmaga girişeliň.

Goý, $x_0 \in [a,b]$, $U(x_0) = U_0$ bolsun. $f(U)$ funksiýa $U_0$ nokatda differensirlenýän funksiýa. Şoňa görä,

$$\lim_{\Delta U \to 0} \frac{f(U_0 + \Delta U) - f(U_0)}{\Delta U} = f'(U_0).$$

Kesgitlemä görä,

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(U(x_0 + \Delta x)) - f(U(x_0))}{\Delta x}.$$

Indi $U(x_0 + \Delta x) - U(x_0) = \Delta U$ deňlikden $U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) + \Delta U$ tapyp we ýokarky deňlige goýup alarys:

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(U_0 + \Delta U) - f(U_0)}{\Delta x}.$$

Bu deňligi, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta U = 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, özgerdip ýazalyň:

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(U_0 + \Delta U) - f(U_0)}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta U \to 0} \frac{f(U_0 + \Delta U) - f(U_0)}{\Delta U} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Bu ýerden:

$$F'(x_0) = f'(U_0)U'(x_0).$$

$x_0$ $[a,b]$ kesimiň islendik nokady bolany üçin, ony $x$ bilen çalşyryp, (1) formulany alarys.

**Mysal.** $y = \sin(\cos x)$ funksiýanyň önümini tapmaly. Düşnükli bolar ýaly, (1) formuladaky $f'(U(x))$ önümiň $f(U)$ funksiýanyň $U$ boýunça önümi bolýandygyny ýatladalyň. $U = \cos x$ goýup, $y = \sin U$ çylşyrymly funksiýany alarys. Onda (1) formula görä alarys:

$y'(x) = \cos U \cdot U'$ ýa-da $y'(x) = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\cos(\cos x)\sin x.$

## §6. Ters, anyk däl we parametrik görnüşde berlen funksiýalardan önüm almak. Ýokary tertipli önümler

**1. Ters funksiýanyň önümini tapmak.**

Goý, $y = f(x)$ funksiýa berilsin. Şu deňligi $x$-e görä çözüp, berlen $y = f(x)$ funksiýanyň $x = \varphi(y)$ ters funksiýasyny alarys. $\varphi(y)$ funksiýanyň $y$-e görä önümini tapalyň. Goý, $x$ nokatda $f(x)$ funksiýanyň önümi bar we $f'(x) \neq 0$ bolsun. $y = f(x)$, $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ deňliklere deňgüýçli $x = \varphi(y)$, $x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y)$ deňlikleri alarys. Şoňa görä,

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{x+\Delta x - x}{f(x+\Delta x)-f(x)}$$

deňlik dogry bolar. $\varphi(y)$ funksiýanyň $y$ nokatda üznüksiz bolýandygy sebäpli, $\Delta y$ nola ymtylanda, $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$ bolany üçin, $\Delta x$ hem nola ymtylar. Diýmek,

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}$$

ýa-da

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

alarys. Bu ýerden:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{1}$$

(1) deňlik ters we göni funksiýalaryň önümlerini özara baglanyşdyrýar. $\varphi'(y)$ önümi $y$ üýtgeýäniň üsti bilen aňlatmak üçin (1) deňlikde $f'(x)$ önümde $x$-iň ýerine $x = \varphi(y)$ goýmak ýeterlikdir.

**1-nji mysal.** $y = \ln x$ funksiýanyň ters funksiýasy $x = e^y$ bolar. Diýmek, (1) formula görä,

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}.$$

$x = e^y$ bolany üçin, bu ýerden

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

alarys.

**2-nji mysal.** $y = \mathrm{arctg}\, x$. Ters funksiýasy $x = \mathrm{tg}\, y$. (1) formula görä:

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y}.$$

$\mathrm{tg} y = x$ bolany üçin, bu ýerden alarys:

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

**2. Parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň önümi.**

Goý, $x$ we $y$-iň arasyndaky funksional baglanyşyk

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \ \alpha \le t \le \beta \tag{2}$$

parametrik görnüşde berlen bolsun. $\dfrac{dy}{dx}$ önümi tapalyň. (2) deňlikleriň iki tarapyndan hem differensial alalyň:

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt.$$

Bu deňlikleri agzama-agza bölüp, alarys:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{3}$$

Biz (3) formula arkaly $\frac{dy}{dx}$ önümi $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ funksiýalaryň üsti bilen aňlatdyk. Eger-de bize $\frac{dy}{dx}$ önümi $x$ argumentiň üsti bilen aňlatmak gerek bolsa, onda $x = \varphi(t)$ deňligi $t$ görä çözüp, $t = u(x)$ funksiýany alarys. $t$-niň bahasyny (3) deňlige goýup,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(u(x))}{\varphi'(u(x))}$$

gerek aňlatmany taparys.

**Mysal.**

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}.$$

Eger $\cos t = \frac{x}{a}$ bahany alnan önümde ýerine goýsak, onda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

alarys, ýagny $\frac{dy}{dx}$ önümi $x$ argumentiň üsti bilen aňladarys.

**3. Anyk däl funksiýanyň önümi.**

Eger funksiýa $y = f(x)$ görnüşde berilse, onda oňa anyk funksiýa diýilýär. Eger funksiýa $y$ tarapyndan çözülmedik

$$F(x, y) = 0$$

deňleme görnüşinde berilse, onda oňa anyk däl funksiýa diýilýär. Anyk däl funksiýanyň $\frac{dy}{dx}$ önümini tapalyň.

Mysala seredeliň. Goý,

$$y^2 + x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

anyk däl funksiýa berilsin. Goý, $y = y(x)$ şol deňlemäniň çözüwi bolsun. $y = y(x)$ çözüwi deňlemä ýerine goýsak, onda

$$y^2(x) + x^2 - 1 \equiv 0$$

toždestwony alarys. Indi şu toždestwonyň iki tarapyndan hem $x$-e görä önüm alalyň:

$$2y \cdot y' + 2x = 0.$$

Şu deňlikden $y'(x)$-i tapýarys:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Eger $y'(x)$ önümi $x_0$ nokatda tapmaly bolsak, onda berlen deňlemede $x$-iň ýerine $x_0$ goýup, $y_0 = \pm\sqrt{1 - x_0^2}$ taparys. Indi biz $y'(x)$ üçin alnan aňlatmada $x = x_0$, $y = y_0$ goýsak, onda $y'(x_0)$ taparys. Görşümiz ýaly, şu mysalda $y(x_0)$-uň iki bahasy bar. Olaryň haýsysyny almaly? Biziň deňlemämiz islendik $|x| \leq 1$ üçin iki funksiýany kesgitleýär: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Diýmek, $y_0 = +\sqrt{1 - x_0^2}$ goýsak, onda birinji anyk funksiýanyň önümini, $y_0 = -\sqrt{1 - x_0^2}$ goýsak, ikinji anyk funksiýanyň önümini taparys.

Umumy ýagdaýda hem edil şunuň ýaly edip $y'(x)$ önümi tapýarlar. Mesele başgaça-da goýlup bilner.

$$y^2 + x\ln(\sin y)^2 + x^3 - 1 = 0$$

deňleme bilen kesgitlenýän we $x = x_0$ bolanda $y = y_0$ bolýan $y = y(x)$ anyk däl funksiýanyň $x = x_0$ nokatdaky önümini tapmaly. Edil öňki mysaldaky ýaly, berlen deňlemede $y$-iň ýerine $y(x)$ goýuldy hasap edip, onuň iki tarapyndan $x$-e görä önüm alýarys:

$$2yy' + \ln(\sin y)^2 + x\frac{1}{\sin^2 y}2\sin y\cos y \cdot y' + 3x^2 = 0$$

ýa-da

$$y' = \frac{-3x^2 - \ln(\sin y)^2}{2y + 2\dfrac{x\cos y}{\sin y}}.$$

Indi $x = x_0$, $y = y_0$ goýup, gözlenýän önümi taparys:

$$y'(x_0) = \frac{-3x_0^2 - \ln(\sin y_0)^2}{2y_0 + 2\dfrac{x_0 \cos y_0}{\sin y_0}}.$$

**4. Ýokary tertipli önümler.**

Goý, käbir aralygyň nokatlarynda $y = f(x)$ funksiýanyň $y' = f'(x)$ önümi bar bolsun. Eger $f'(x)$ funksiýanyň önümi bar bolsa, onda oňa $y = f(x)$ funksiýanyň ikinji tertipli önümi diýilýär we ol

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ýa-da} \quad f^{(2)}(x)$$

görnüşde belgilenýär. Diýmek, kesgitlemä görä,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Ikinji tertipli $f''(x)$ önümden ýene-de önüm alsak, onda oňa üçünji tertipli önüm diýilýär we ol

$$f'''(x), \quad \frac{d^3 f}{dx^3} \quad \text{ýa-da} \quad f^{(3)}(x)$$

bilen belgilenýär. Umuman, $n$-nji tertipli önüm, $(n - 1)$-nji tertipli önümden alnan önüme deňdir. Ol

$$f^{(n)}(x) \quad \text{ýa-da} \quad \frac{d^n f}{dx^n}$$

bilen belgilenýär we kesgitlemä görä,

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

**1-nji mysal.** $y = \dfrac{1}{1+x}$ funksiýanyň islendik $k$ üçin $y^{(k)}(x)$ önümini tapmaly.

$$y' = [(1+x)^{-1}]' = -(1+x)^{-2};$$

$$y'' = [y']' = [-(1+x)^{-2}]' = (-1)(-2)(1+x)^{-3};$$

$$y''' = (y'')' = [(-1)(-2)(1+x)^{-3}]' = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}.$$

Matematiki induksiýa usulyny ulanyp,

$$y^{(k)} = (y^{(k-1)})' = [(-1)(-2)...(-k+1)(1+x)^{-k}]' =$$

$$= (-1)(-2)...(-k)(1+x)^{-k-1}$$

bolýandygyny görmek kyn däldir.

**2-nji mysal.** $y = \sin x$, $y^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $y^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ boljakdygyny görkeziň.

**3-nji mysal.** $y = \cos x$, $y^{(2k-1)} = (-1)^k \sin x$, $y^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ boljakdygyny görkeziň.

## §7. Rolluň, Lagranžyň we Koşiniň teoremalary. Lopitalyň düzgüni

**Rolluň teoremasy.** Eger $y = f(x)$ funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz, kesimiň ähli içki nokatlarynda differensirlenýän we gyraky $x = a$ we $x = b$ nokatlardaky bahalary deň bolsa $[f(a) = f(b)]$, onda $[a; b]$ kesimiň içinde $f'(c) = 0$ şerti kanagatlandyrýan iň bolmanda bir $x = c$ nokat bardyr.

**Subudy.** $y = f(x)$ $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolanlygy sebäpli, ol bu kesimde iň uly $M$ we iň kiçi $m$ bahalara eýe bolýandyr. Eger $M = m$ bolsa, onda $y = f(x)$ hemişelikdir, ýagny $x$-iň ähli bahalarynda $f'(x) = 0$. Onda kesimiň islendik nokadynda $f'(c) = 0$ we teorema subut edildi.

Goý, $M \neq m$ bolsun. Onda bu sanlaryň iň bolmanda biri $f(a) = f(b)$ sana deň däldir. Goý, $M \neq f(a) = f(b)$ bolsun. Ýagny funksiýa öz iň uly bahasyny $x = c$ içki nokatda alýan bolsun: $f(c) = M$. Kesgitlilik üçin $M > 0$ diýeliň. $f(c)$ funksiýanyň iň uly bahasy bolanlygy sebäpli, $f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0$. Özi hem bu deňsizlik $\Delta x > 0$ we $\Delta x < 0$ bolanda hem dogrudyr. Onda

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \quad (\Delta x > 0); \qquad (1)$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0, \quad (\Delta x < 0). \tag{2}$$

Teoremanyň şertine görä, $x = c$ nokatda funksiýanyň önümi bar. Onda $\Delta x \to 0$ predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0.$$

Ýöne $f'(c) \leq 0$ we $f'(c) \geq 0$ aňlatmalar diňe $f'(c) = 0$ bolan ýagdaýda sygyşýandyrlar. Netijede, $[a;\, b]$ kesimiň içinde $x = c$ nokat bar bolup, bu nokatda funksiýanyň $f'(x)$ önümi nola deňdir. Teorema subut edildi.

Bu teoremanyň ýönekeý geometrik manysy bardyr: teoremanyň şertlerinde $y = f(x)$ egriniň $M(c;\, f(c))$ nokadyndaky galtaşýany $Ox$ okuna paralleldir.

**Lagranžyň teoremasy.** Eger $y = f(x)$ $[a;\, b]$ kesimde üznüksiz, kesimiň ähli içki nokatlarynda differensirlenýän bolsa, onda $[a;\, b]$ kesimiň içinde

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \tag{3}$$

şerti kanagatlandyrýan iň bolmanda bir $x = c$ nokat bardyr.

**Subudy.** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sany $Q$ bilen belgiläliň:

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)Q$$

deňlik bilen kesgitlenen $F(x)$ kömekçi funksiýa seredeliň. Bu funksiýa $[a;\, b]$ kesimde üznüksizdir, kesimiň gyraky nokatlarynda nola deňdir. Ýagny

$$F(a) = f(a) - f(a) - (a-a)Q = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - (b-a)Q = f(b) - f(a) -$$
$$-(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Diýmek, bu funksiýa Rolluň teoremasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar. Onda $[a; b]$ kesimiň içinde şeýle bir $x = c$ nokat bar bolup,

$$F'(c) = 0$$

deňlik ýerine ýetýändir. Emma $F'(x) = f'(x) - Q$ bolany üçin,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0$$

ýa-da

$$Q = f'(c).$$

Bu ýerde $Q$-nyň bahasyny goýup,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

deňligi alarys. Bu deňlikden (3) deňlik gelip çykýar. Teorema subut edildi.

**Lagranžyň teoremasynyň geometriki manysy**

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ baha funksiýanyň grafiginiň $A(a; f(a))$ we $B(b; f(b))$ nokatlaryndan geçýän hordanyň gyşarma burçunyň tangensidir. $f'(c)$ bolsa grafige $C(c; f(c))$ nokatda geçirilen galtaşýanyň gyşarma burçunyň tangensidir. Şeýlelikde, eger $AB$ duganyň ähli nokatlarynda galtaşýan bar bolsa, onda bu dugada $C$ nokat tapylyp, bu nokatdaky galtaşýan $AB$ horda paralleldir.

**Bellik.** $a < c < b$ bolanlygy sebäpli $c - a < b - a$ ýa-da $c - a = \theta \cdot (b - a)$ bolar, bu ýerde $\theta$ 0 we 1 arasyndaky käbir san, onda $c = a + \theta \cdot (b - a)$. Bu ýagdaýda (3) formula

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'[a + \theta(b - a)],\ 0 < \theta < 1 \qquad (4)$$

görnüşe eýe bolýar. Lagranžyň teoremasyna çäkli artdyrmalar barada teorema hem diýilýär.

**Koşiniň teoremasy.** Eger $y = f(x)$ we $y = \varphi(x)$ funksiýalar $[a; b]$ kesimde üznüksiz, kesimiň ähli içki nokatlarynda differensirlenýän bolsalar we $\varphi'(x)$ kesimiň içinde nola deň bolmasa, onda $[a; b]$ kesimiň içinde $x = c$ $(a < c < b)$ nokat tapylyp,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{5}$$

deňlik ýerine ýeter.

**Subudy.** $Q$ sany

$$Q = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \tag{6}$$

deňlik bilen kesgitläliň. $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ bolýandygyny göz öňünde tutalyň. Tersine bolan ýagdaýda $\varphi(b) = \varphi(a)$ we Rolluň teoremasyna görä $\varphi'(x)$ kesimiň içinde nola deň bolardy. Bu bolsa teoremanyň şertine ters gelýär.

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)]$$

kömekçi funksiýa seredeliň. $F(a) = 0$ we $F(b) = 0$ deňlikler dogrudyr. $F(x)$ $[a; b]$ kesimde Rolluň teoremasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar. Onda $a$ we $b$ sanlaryň arasynda şeýle bir $x = c$ san bar bolup, $F'(c) = 0$ deňlik ýerine ýeter.

$F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$ bolýanlygy sebäpli, $F'(c) = f'(c) - \varphi'(c)Q = 0$ ýa-da

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Bu ýerde $Q$-nyň (6) bahasyny goýup, (5) deňligi alýarys. Teorema subut edildi.

Goý, $y = f(x)$ we $y = \varphi(x)$ funksiýalar $[a; b]$ kesimde Koşiniň teoremasynyň şertini kanagatlandyrýan bolsunlar we $x = a$ nokatda $f(a) = 0$ we $\varphi(a) = 0$ bolsun.

$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ gatnaşyk $x = a$ bolanda kesgitlenen däldir, ýöne $x \neq a$ bolanda onuň manysy bardyr. Bu gatnaşygyň $x \to a$ bolandaky predelini tapmak soragyny goýmak mümkin. Şeýle görnüşli predelleri hasaplamaklyga «$\dfrac{0}{0}$ kesgitsizligi açmak» diýilýär.

**Teorema (Lopitalyň düzgüni).** Goý, $y = f(x)$ we $y = \varphi(x)$ funksiýalar $[a; b]$ kesimde Koşiniň teoremasynyň şertini kanagatlandyrýan bolsunlar we $x = a$ nokatda $f(a) = \varphi(a) = 0$ bolsun. Eger-de $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ gatnaşyk $x \to a$ bolanda predele eýe bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ predel hem bardyr, özi hem

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

deňlik ýerliklidir.

**Subudy.** $[a; b]$ kesimde $x \neq a$ nokady alalyň. Koşiniň teoremasyna görä,

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)},$$

bu ýerde $a < \zeta < x$. Şert boýunça $f(a) = \varphi(a) = 0$. Diýmek,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}. \tag{7}$$

Eger $x \to a$ bolsa, onda $\zeta \to a$. Özi hem eger $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ bolsa, onda $\lim\limits_{\zeta\to a}\dfrac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}$ predel hem bardyr we $A$ sana deňdir. Bu ýerden:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \lim_{\zeta\to a}\frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Diýmek,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Bellik.** Eger $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ we $f'(x)$ we $\varphi'(x)$ önümler teoremadaky $f(x)$ we $\varphi(x)$ funksiýalara goýlan şertleri kanagatlandyrýan bolsalar, onda Lopitalyň düzgünini $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ gatnaşyga ulanyp alarys:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

we ş.m.

**Bellik.** Lopitalyň düzgünini

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$$

bolanda hem ulanyp bolýar.

Indi $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ gatnaşygyň haçanda $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty$ bolandaky predelini tapalyň. Şeýle görnüşdäki predeli tapmaga «∞:∞ görnüşdäki kesgitsizligi açmak» hem diýilýär.

**Teorema.** Goý, $y = f(x)$ we $y = \varphi(x)$ funksiýalar $x = a$ nokadyň käbir ýörite etrabynda üznüksiz we $x \neq a$ bolanda differensirlenýän bolsunlar. $\varphi'(x)$ şol etrapda nola deň bolmasyn. Goý,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty$$

we

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \tag{8}$$

predel bar bolsun. Onda $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ predel hem bardyr we

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{9}$$

Teorema subutsyz kabul edilýär.

a) $0\cdot\infty$, b) $0^0$, ç) $\infty^0$, d) $1^\infty$, e) $\infty - \infty$

kesgitsizlikler 0/0 we ∞/∞ ýagdaýlara getirilýärler. Dogrudan hem:

a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\,\varphi(x)$ predeli tapmak talap edilýär. Onda

$$\lim_{x\to a} f(x)\,\varphi(x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^{-1}}$$

ýa-da

$$\lim_{x\to a} f(x)\,\varphi(x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{[f(x)]^{-1}}$$

deňlikler arkaly 0/0 ýa-da $\infty/\infty$ kesgitsizligi alýarys.

b) Goý, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ we $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ predeli tapmaly bolsun. $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ belgileme girizeliň. Bu ýerden

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x)$$

deňligi alarys. $x \to a$ bolanda soňky deňligiň sag tarapy $0\cdot\infty$ kesgitsizligi berýär. Onda $\lim\limits_{x\to a}\ln y$ predeli a) bölümi ulanyp taparys. Logarifmik funksiýanyň üznüksizligi sebäpli, $\lim\limits_{x\to a}\ln y = \ln\lim\limits_{x\to a} y$. Eger $\lim\limits_{x\to a}\ln y = b$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to a} y = e^b$ bolar. ç), d), e) ýagdaýlar hem şuňa meňzeş usullar bilen tapylýarlar.

## §8. Teýloryň formulasy

Geçen bölümde biz Lagranžyň formulasyny getirip çykardyk. Şol formula görä,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),\ a < c < b.$$

Formulany biraz özgerdip ýazalyň. Goý, $f(x)$ $a$ nokadyň käbir etrabynda differensirlenýän bolsun; $x$ şol etraba degişli bolsun. Onda biz ýokarky formulany

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a),\quad a < c < x\quad (a > c > x)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden:

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a).$$

$f'(c)(x-a) = R_1$ belgilemäni girizip alarys:

$$(x) = f(a) + R_1. \qquad (1)$$

Eger-de indi $f(x) = f(a)$ diýip kabul etsek, onda (1) formula görä, biziň goýberen ýalňyşlygymyz $R_1 = f'(c)(x-a)$ deň bolar.

Goý, diýeliň, $x - a = 0{,}1$; $|f'(c)| \leq 1$. Onda goýberilen nätakyklyk $|R_1| \leq 0{,}1$ bolar. Bu takyklygyň käbir ýagdaýda ýeterlik bolmagy hem mümkin. Emma inženerlikde köp ýüze çykýan meselelerde takyklygyň ýokarrak bolmagy gerek bolýar. Ol ýokary takyklygy nähili edip gazanyp bolýar diýen sowala jogaby Teýloryň formulasyndan tapyp bolar. Teýloryň formulasyna Lagranžyň formulasynyň dowamy hökmünde garap bolar. Lagranžyň formulasyndan biz $f(x)$ bahany $f(a)$ bilen çalşyryp, ony $x - a$ takyklykda tapdyk diýip bileris. Mesele $f(x)$ bahany has takyk, ýagny $(x-a)^n$ takyklykda tapmakdan durýar. Onuň üçin Teýloryň formulasyndan peýdalanýarlar. Eger $f(x)$ funksiýa $a$ nokadyň käbir etrabynda $n$ gezek differensirlenýän bolsa we $f^{(n)}(x)$ şol etrapda üznüksiz bolsa, onda şol etrapda aşakdaky formula ýerliklidir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n.$$

Şu formula Teýloryň formulasy diýilýär. $R_n$ – formulanyň galyndy agzasy. Eger biz $f(x)$ bahany $f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ takmyn baha bilen çalşyrsak, onda biz Teýloryň formulasyna görä $R_n$ ýalňyşlygy goýbereris. Adatça, $R_n$ üçin $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ formuladan peýdalanýarlar. Oňa Teýloryň formulasynyň Lagranž görnüşindäki galyndy agzasy diýilýär. Bu ýerde $c$  $(a, x)$ aralykdaky käbir nokat. Eger Teýloryň formulasynda $a = 0$ goýsak, onda

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

formulany alarys. Oňa Makloreniň formulasy diýilýär. Makloreniň formulasynyň galyndy $R_n$ agzasy $R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$ formula boýunça tapylýar. Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralykda ýatan käbir nokatdyr. Indi käbir ýönekeý funksiýalar üçin Makloreniň formulasyny we onuň galyndy agzasyny ýazalyň:

$$1.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2},$$

$$R_{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}\sin c}{(2k+2)!}x^{2k+2}.$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralykda ýatýan käbir nokat. $\sin x$ bütin $x$-ler okunda tükeniksiz gezek differensirlenýän funksiýa bolany sebäpli, bu formula islendik $x$ üçin dogrudyr.

$$2.\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1},$$

$$R_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}\sin c}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralyga degişli käbir nokat. $\cos x$ bütin $x$-ler okunda tükeniksiz gezek differensirlenýän funksiýa bolany sebäpli, bu formula islendik $x$ üçin dogrudyr.

$$3.\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{e^c}{n!}x^n.$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralykda ýatýan käbir nokat. $e^x$ bütin $x$-ler okunda tükeniksiz gezek differensirlenýän funksiýa bolany sebäpli, bu formula islendik $x$ üçin dogrudyr.

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + R_{n+2},$

$$R_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{1}{(1+c)^{n+2}}.$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralyga degişli käbir nokat. $\ln(1+x)$ funksiýanyň önümleri $x = -1$ nokatda üzülýändirler. Şonuň üçin bu formula $(-1, \infty)$ aralykdaky islendik $x$ üçin dogrudyr.

5. $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right] + R_{2k+2},$

$$R_{2k+2} = \frac{x^{2k+2}}{2k+2}\left[\frac{1}{(1-c)^{2k+2}} - \frac{1}{(1+c)^{2k+2}}\right].$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralykda ýatan nokat. $\ln\frac{1+x}{1-x}$ funksiýanyň önümleri $-1, 1$ nokatlarda üzülýär. Şoňa görä getirilen formula diňe $(-1, 1)$ aralyk üçin dogrudyr.

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1},$$

$$R_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-2}.$$

Bu ýerde $c$ $(0, x)$ aralyga degişli nokat. $(1+x)^\alpha$ funksiýanyň önümleri $n > \alpha$ bolanda $x = -1$ nokatda üzülýärler. Şol sebäpli bu formula $(-1, \infty)$ aralykdaky islendik $x$ üçin dogrudyr.

**Bellik.** Eger $f(x)$ $m$ derejeli köpagza bolsa, onuň $f^{(n)}(x)$, $n > m$ önümleriniň hemmesi nola deň bolýar. Şoňa görä Makloreniň formulasynda $n > m$ bolsa, onda $R_n \equiv 0$ bolýar we formula

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

görnüşe gelýär. Şuňa meňzeşlikde, islendik $m$ derejeli $f(x)$ köpagza üçin we islendik $a$ san üçin

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

formula hem ýerliklidir.

## §9. Teýloryň formulasy boýunça funksiýanyň takmyn bahasyny tapmak we onuň takyklygyny kesgitlemegiň bir usuly

Goý, $(x_0, x_1)$ aralykda $f(x)$ funksiýanyň hemme önümleri bar bolsun. Onda islendik $x \in (x_0, x_1)$ we $a \in (x_0, x_1)$ üçin Teýloryň

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

formulasy ýerlikli bolar. Eger $|f(x) - A| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\varepsilon$ takyklyk bilen $f(x)$ $x$ nokatda $A$ sana deň diýilýär. Has umumy ýagdaýda $\forall x \in (x_0, x_1)$ üçin $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $(x_0, x_1)$ aralykda $\varepsilon$ takyklyk bilen $P(x)$ funksiýa deň diýilýär.

Indi şeýle mesele goýalyň. $f(x)$ funksiýa $(x_0, x_1)$ aralykda $\varepsilon$ takyklyk bilen deň bolar ýaly edip, $P(x)$ köpagzany tapmaly. Eger $f(x)$ köpagza bolsa, onda mesele aňsatlyk bilen çözülýär. $P(x)$-iň ornuna $f(x)$-iň özüni alaýmaly. Eger $f(x)$ köpagza bolmasa, onda $P(x)$ köpagzany Teýloryň formulasy arkaly tapmaga çalyşýarlar.

$$P_{n-1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

diýip kabul edeliň. Onda Teýloryň formulasyna görä $f(x) - P_{n-1}(x) = R_n$ bolardy. Diýmek, $\forall x \in (x_0, x_1)$ üçin $|R_n| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $P_{n-1}(x)$ köpagza $f(x)$ funksiýa $\varepsilon$ takyklykda deň bolardy. Köp ýagdaýlarda $|R_n(x)| < \varepsilon$ bolar ýaly edip, $n$ sany saýlap alyp bolýar. Mysallara garalyň.

**Mysal.** $[-R, R]$ kesimde

$$|\sin x - P_n(x)| < \varepsilon$$

bolar ýaly edip, $n$ sany saýlap almaly. Teýloryň formulasynyň hususy ýagdaýy bolan Makloreniň formulasyna ýüzleneliň. Alarys:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2},$$

$$R_{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}\sin c}{(2k+2)!} \cdot x^{2k+2}.$$

Eger $P_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ diýip kabul etsek, onda $\sin x - P_{2k+1}(x) = R_{2k+2}$ bolar. Indi $[-R, R]$ kesimde $|R_{2k+2}| < \varepsilon$ deňsizligiň ýa-da

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}\sin c}{(2k+2)!} x^{2k+2} \right| < \varepsilon$$

deňsizligiň ýerine ýetmegini talap edeliň. $|(-1)^{k+1}| = 1$, $|\sin c| \leq 1$, $|x^{2k+2}| \leq R^{2k+2}$ bolýandygy sebäpli, bize

$$\frac{R^{2k+2}}{(2k+2)!} < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetse ýeterlik bolar. Bu ýerden alarys:

$$(2k+2)! > \frac{R^{2k+2}}{\varepsilon}.$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{R^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0$ bolýandygy üçin, soňky deňsizligi kanagatlandyrýan $k$ san bardyr. Goý, $k_0$ şol $k$ sanlaryň kiçisi bolsun. Onda $[-R, R]$ kesimde

$$(2k_0+2)! > \frac{R^{2k_0+2}}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{R^{2k_0+2}}{(2k_0+2)!} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(-1)^{k_0+1}\sin c}{(2k_0+2)!} x^{2k_0+2} \right| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şoňa görä şol aralykda

$$|\sin x - P_{2k_0+1}(x)| < \varepsilon$$

deňsizlik hem ýerlikli bolar. Diýmek, $P_{2k_0+1}(x)$ köpagza sin$x$ funksiýanyň [– $R$, $R$] kesimdäki $\varepsilon$ takyklykdaky ýakynlaşmasy bolar. Bu bolsa $\varepsilon$ takyklykda

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^{k_0} \cdot x^{2k_0+1}}{(2k_0+1)!}$$

dogrudyr diýmekdir. Soňky deňsizligi sin$x$ funksiýanyň bahalary tapylanda giňden ulanýarlar.

Anyk ýagdaýa seredeliň. Goý, $R = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$ bolsun. Onda

$$(2k_0+2)! > \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k_0+2}}{10^{-4}}$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $k_0$ sany ornuna goýma usuly bilen tapsa bolar: $k = 0$, $k = 1$ kanagatlandyrmaýarlar, $k = 2$ kanagatlandyrýar. Diýmek, $k_0 = 2$ bolýar we $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kesimde $\varepsilon = 10^{-4}$ takyklykda

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

deňlik dogry bolýar. Biz indi sin $x$ funksiýanyň $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kesime degişli islendik nokatdaky bahasyny şu deňlikden tapyp bileris. Meselem, sin$x$ funksiýanyň $x = \frac{1}{3}$ nokatdaky bahasyny tapmaly bolsun. Formulada $x = \frac{1}{3}$ goýup, $10^{-4}$ takyklykda alarys:

$$\sin\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{162} + \frac{1}{29160}$$

ýa-da

$$\sin\frac{1}{3} = 0,3272.$$

**Mysal.** $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right]$ üçin $|\sin x - P(x)| < 0{,}0001$ bolar ýaly edip, $P(x)$ köpagzany saýlap almaly.

**Çözülişi.** $a = \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right]$ nokatda sin$x$ üçin Teýloryň formulasyny ýazalyň:

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^k \sin\frac{\pi}{3}}{(2k)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2k} + R_{2k+1}; \quad R_{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}.$$

Bu ýerde, $c$ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right)$ aralykdaky bir nokat.

$$P(x) = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \ldots + \frac{(-1)^k \sin\frac{\pi}{3}}{(2k)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2k}$$

diýip kabul edeliň. Onda mysalyň talabynyň ýerine ýetmegi üçin

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right] \text{ üçin } |R_{2k+1}| < 10^{-4}$$

ýa-da

$$\left|\frac{(-1)^k \cos c}{(2k+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}\right| < 10^{-4}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. $|(-1)^k| = 1$, $|\cos c| \le 1$, $\left|x - \frac{\pi}{3}\right| \le \frac{\pi}{9}$ bolandygy sebäpli,

$$\frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} < 10^{-4}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi biziň üçin ýeterlik bolar. $k_0$ sany ýene-de ornuna goýma usuly bilen tapalyň. $k = 0$, $k = 1$ kanagatlandyrmaýarlar, $k = 2$ kanagatlandyrýar. Diýmek, $k_0 = 2$ we

$$P(x) = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 -$$

$$-\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

ýa-da

$$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

köpagza $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right]$ kesimde $\varepsilon = 10^{-4}$ takyklykda sin $x$ funksiýanyň ýakynlaşmasy bolýar. Indi biz sin$x$ funksiýanyň $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{9}\right]$ üçin bahasyny

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

formula arkaly $\varepsilon = 10^{-4}$ takyklykda tapyp bileris. Funksiýanyň grafigini çyzmakda şeýle formulalaryň ähmiýeti örän uludyr. Berlen kesimde $f(x)$ funksiýa üçin $\varepsilon$ takyklykda ýakynlaşýan köpagza tapylan bolsun. Ýeterlik sandaky nokatlarda $f(x)$ funksiýanyň bahalaryny $\varepsilon$ takyklykda kesgitläp, onuň grafigine ýeterlik derejede golaý takmyn grafik çyzyp bileris. Şeýle grafikleriň ähmiýeti ulanyşda örän uludyr. Sebäbi köp mesele çözülende gözegçiniň gyzyklanýan ululygynyň özüni alyp barşyny şeýle grafigiň üsti bilen öwrenýärler.

Emma köp halatlarda, funksiýanyň bellibir kesimdäki takyk grafigi gerek bolman, funksiýanyň bütin kesgitleniş ýaýlasynda özüni alyp barşyny öwrenmeli bolýar. Ine, şeýle meseleleri çözmekde önüm düşünjesiniň ähmiýeti örän uludyr. Aşakdaky bölümlerde biz agzalan meseläni çözmäge synanyşarys.

## §10. Funksiýanyň monotonlygy we monotonlyk aralyklary

**Kesgitleme.** Eger $(a, b)$ aralykda $f(x)$ kesgitlenen we oňa degişli islendik $x_1 < x_2$ nokatlarda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $(a, b)$ aralykda artýan (kemelýän) funksiýa diýilýär.

**1-nji mysal.** $f(x) = 3x + 5$ bütin $x$-ler okunda artýan funksiýadyr, sebäbi $x_1 < x_2$ üçin $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerlikli bolýar. Dogrudan hem, bu netije $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 5 < 3x_2 + 5 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ deňsizlikleriň düzüminden gelip çykýar.

**2-nji mysal.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $(0, \infty)$ aralykda kemelýän funksiýadyr. Sebäbi islendik $0 < x_1 < x_2$ sanlar üçin

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x_1^2} > \frac{1}{1 + x_2^2} \Leftrightarrow 1 + x_2^2 > 1 + x_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 > x_1^2 \Leftrightarrow x_2 > x_1$$

deňsizlikler ýerliklidir. Köplenç, $f(x)$ funksiýanyň kesgitlenen ýaýlasy onuň artýan we kemelýän aralyklaryndan durýar. Olaryň sany tükenikli ýa-da tükeniksiz bolup biler. Şol aralyklara funksiýanyň monotonlyk aralyklary diýilýär. Haýsy aralykda funksiýa artýar, haýsysynda kemelýär diýen sowala jogap edip, adatça, aşakdaky teoremany getirýärler.

**Teorema.** Eger $f(x)$ funksiýa $(a, b)$ aralykda differensirlenýän bolsa we $\forall x \in (a, b)$ üçin $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bolsa, onda ol şol aralykda artýan (kemelýän) funksiýadyr.

**Subudy.** $\forall x \in (a, b)$ üçin $f'(x) > 0$ ýagdaýa seredeliň. Goý, $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ bolsun. Onda $[x_1; x_2]$ kesim $(a, b)$ aralykda ýatar we şol kesimde $f(x)$ funksiýa Lagranžyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrar. Diýmek, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ deňlik ýerine ýeter. Bu ýerde $c$ $(x_1; x_2)$ aralykdaky bir nokat. Şerte görä, $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Onda $f(x_2) - f(x_1) > 0$ bolar ýa-da $f(x_1) < f(x_2)$ deňsizlik ýerine ýeter. Diýmek, $f(x)$ funksiýa $(a, b)$ aralykda artýan funksiýadyr. $f'(x) < 0$ ýagdaý hem edil şeýle subut edilýär.

**3-nji mysal.** $y = \text{arctg}x$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ aralykda kesgitlenen, $x$-iň islendik bahasynda önümi bar. $y' = \frac{1}{1+x^2}$ deňlikden önümiň $\forall x \in (-\infty, \infty)$ üçin položitelligi gelip çykýar. Onda, teorema görä, $y = \text{arctg}x$ funksiýa bütin $x$-ler okunda artýan funksiýadyr.

**4-nji mysal.** $y = \ln x$ $(0, \infty)$ aralykda kesgitlenen we şol aralykda differensirlenýän funksiýa. Özi hem $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Bu ýerden önümiň islendik $x \in (0, \infty)$ üçin položitelligi we teoremanyň esasynda $\ln x$ funksiýanyň $(0, \infty)$ aralykda artýanlygy gelip çykýar.

**5-nji mysal.** $y = \frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty, \infty)$ aralykda kesgitlenen we differensirlenýän funksiýa. $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ $(-\infty, 0)$ aralykda $y' > 0$ bolýar, $(0, \infty)$ aralykda $y' < 0$ bolýar. Diýmek, $(-\infty, 0)$ aralykda $y = \frac{1}{1+x^2}$ funksiýa artýar, $(0, \infty)$ aralykda bolsa kemelýär. Şol iki aralygyň çägi bolup $x = 0$ nokat hyzmat edýär, özi hem şol nokatda $f'(x) = 0$.

**6-njy mysal.** $y = \frac{1}{|x|}$ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ýaýlada kesgitlenen we differensirlenýän funksiýa, $(-\infty, 0)$ aralykda $y' = \frac{1}{x^2} > 0$, funksiýa artýar, $(0, \infty)$ aralykda $y' = -\frac{1}{x^2} < 0$, funksiýa kemelýär. $x = 0$ nokat şol iki aralygyň çägi bolýar we şol nokatda $y'$ kesgitlenen däldir.

Seredilen mysallardan şeýle netije çykarsa bolar. Funksiýanyň monotonlyk aralyklaryny tapmak üçin onuň önümini tapmaly. Önümiň nola öwrülýän nokatlaryny we önümiň ýok (kesgitlenmedik) nokatlaryny tapmaly. Olary $x$-ler okunda ýerleşdirmeli. Şol nokatlar $x$-ler okuny aralyklara bölerler (kesgitlenen ýaýlasyny böleklere bölerler). Aralyklaryň her birinde (bölekleriň her birinde) bir $c$ nokat alyp, şol nokatda $f'(c)$-niň alamatyny kesgitlemeli. Eger $f'(c) < 0$ bolsa, onda degişli aralykda funksiýa kemelýär, $f'(c) > 0$ bolsa, funksiýa artýar.

**7-nji mysal.** $y = x + \frac{4}{x^2}$ $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ýaýlada kesgitlenen we differensirlenýän funksiýa. $y' = 1 - \frac{8}{x^3}$; $y' = 0$ deňlemeden önümiň nola öwrülýän nokatlaryny tapýarys: $1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2.$

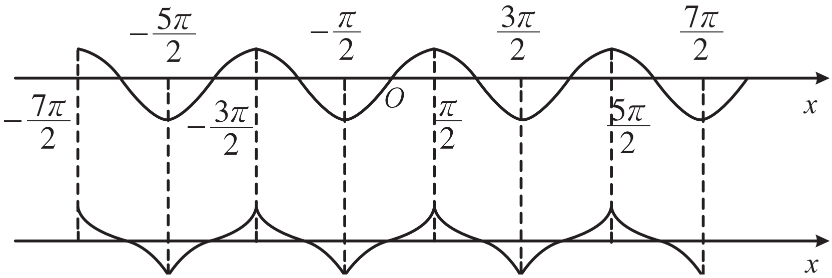
Önüm diňe bir $x_1 = 2$ nokatda nola öwrülýär. Önümiň ýok nokatlaryny taparys. $1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$ deňligiň maýdalawjysy $x_2 = 0$ nokatda nola öwrülýär. Şol nokatda önüm ýok. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ nokatlary $x$-ler okunda ýerleşdirýäris. Olar ol oky $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$ aralyklara bölýärler. $(-\infty, 0)$ aralykda $x = -1$ nokady, $(0, 2)$ aralykda $x = 1$ nokady, $(2, \infty)$ aralykda $x = 3$ nokady alalyň.

$$y'(-1) = 1 - \frac{8}{(-1)^3} = 1 + 8 = 9 > 0,$$

$$y'(1) = 1 - \frac{8}{1^3} = -7 < 0, \quad y'(3) = 1 - \frac{8}{3^3} > 0$$

bolýandygy sebäpli, $(-\infty, 0)$ funksiýanyň artýan, $(0, 2)$ funksiýanyň kemelýän, $(2, \infty)$ funksiýanyň artýan aralygy bolýar.

**8-nji mysal.** $y = \sin x$ $(-\infty, \infty)$ ýaýlada kesgitlenen we differensirlenýän funksiýa, $y' = \cos x$. Önümiň nola öwrülýän nokatlaryny $y' = \cos x = 0$ deňlemeden tapýarys. Ol nokatlar $x_k = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$, $k = 0, 1, ...$ formulalar bilen kesgitlenýärler. Görşümiz ýaly, olaryň sany tükeniksiz. Önümiň kesgitlenmedik nokatlary ýok. Önümiň nollaryny $x$-ler okunda ýerleşdirýäris. Olar ony tükeniksiz köp aralyklara bölýärler. $x_m = \pm m\pi$, $m = 0, 1, ...$ nokatlar şol aralyklaryň merkezleri bolýarlar. $y'(\pm m\pi) = \cos m\pi = (-1)^m$. Diýmek, $x_m = \pm m\pi$ nokadyň ýatýan aralygynda $m$ täk bolanda $y'(\pm m\pi) = (-1)^m < 0$, $m$ jübüt bolanda $y'(\pm m\pi) = (-1)^m > 0$ bolýar. Şoňa görä, $x_m = \pm m\pi$ nokadyň ýatýan aralygynda $m$ jübüt bolanda $\sin x$ artýar, $m$ täk bolanda kemelýär. Jübüt we täk sanlaryň gezekleşip gelýänligi sebäpli, $\sin x$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklary-da gezekleşip gelerler. Ýöne funksiýanyň monotonlyk aralyklaryny bilmek onuň grafiginiň häsiýetini anyklamaga doly mümkinçilik bermeýär.




*50-51-nji suratlar*

Mysal üçin, $y = \sin x$ funksiýanyň monotonlyk aralyklaryny biz ýokarda kesgitledik. Olar $\left(-\frac{\pi}{2} \pm k\pi; \frac{\pi}{2} \pm k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, ...$ bolar. Öňden bilşimiz ýaly, $\sin x$ funksiýanyň grafigi 50-nji suratda görkezilişi ýalydyr.

Emma biz diňe funksiýanyň monotonlyk häsiýetini ulansak, onda ol grafigi 51-nji suratdaky ýaly çyzsak hem bolardy. Diýmek, funksiýanyň grafigini anyklamak üçin ýene-de käbir maglumatlar gerek. Olaryň biri aşakdaky bölümde beýan edilýär.

## §11. Funksiýanyň grafiginiň oýuklygy we güberçekligi

Goý, $f(x)$ funksiýa $(a, b)$ aralykda kesgitlenen we differensirlenýän bolsun. Onda funksiýanyň $(a, b)$ aralykdaky grafiginiň islendik nokadynda galtaşýany bardyr. Biziň bilşimiz ýaly, $f'(x_0)$ $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $(x_0, f(x_0))$ nokadynda geçirilen galtaşýanynyň burç koeffisiýentine deňdir. Oňa görä, ol galtaşýanynyň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Kesgitleme.** Eger $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi $(a,b)$ aralyga degişli $\forall x_0$ üçin özüniň $(x_0, f(x_0))$ nokadynda geçirilen galtaşýanyndan ýokarda (aşakda) ýatsa, onda funksiýanyň grafigi $(a,b)$ aralykda oýuk (güberçek) diýilýär. Adatça, funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy onuň grafiginiň oýuk ýa-da güberçek aralyklaryndan durýar. Şol aralyklara funksiýanyň grafiginiň güberçeklik aralyklary diýilýär. Indi funksiýanyň grafiginiň berlen aralykda haçan güberçek, haçan oýuk bolýandygyny anyklamaga we onuň güberçeklik aralyklaryny tapmaga çalşalyň.

**Teorema.** $f(x)$ funksiýa $(a,b)$ aralykda kesgitlenen we şol aralykda onuň birinji we ikinji tertipli önümleri bar bolsun. Eger $\forall x \in (a,b)$ üçin $f''(x) > 0$ bolsa, onda $(a,b)$ aralykda funksiýanyň grafigi oýukdyr, eger-de $f''(x) < 0$ bolsa, onda onuň grafigi şol aralykda güberçekdir.

**Subudy.** $\forall x \in (a,b)$ nokatda $f(x)$ funksiýa üçin Teýloryň formulasyny ýazalyň:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_2,$$

$$R_2 = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,\ c \in (a,b).$$

Bu formulalar, öňden bilşimiz ýaly, $(a,b)$ aralykda dogrudyrlar. Indi $(x_0, f(x_0))$ nokatda $f(x)$ funksiýanyň grafigine galtaşýanynyň deňlemesini ýazalyň:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$f(x) - y$ tapawuda seredeliň:

$$f(x) - y = [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_2] - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

ýa-da $(a,b)$ aralygyň islendik nokadynda alarys:

$$f(x) - y = R_2.$$

Goý, $\forall x \in (a,b)$ üçin $f''(x) > 0$ bolsun. Onda $f''(c) > 0$ bolar we $(a, b)$ aralygyň islendik nokadynda $R_2 = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 > 0$ bolar. Şoňa görä, $f(x) - y = R_2$ deňlikden $(a, b)$ aralygyň islendik nokadynda $f(x) - y > 0$ ýa-da $f(x) > y$ alarys. Bu bolsa funksiýanyň grafigi galtaşýandan ýokarda ýatýar, ýagny funksiýanyň grafigi $(a,b)$ aralykda oýuk diýmekdir. $f''(x) < 0$ ýagdaý hem edil şeýle subut edilýär.

**Mysallara seredeliň.**

1. $y = x^2$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ aralykda kesgitlenen, birinji we ikinji tertipli önümleri $\forall x \in (-\infty, \infty)$ üçin bar we $y'' = 2 > 0$ bolany sebäpli bu funksiýanyň grafigi bütin $x$-ler okunda oýuk bolýar.

2. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ funksiýa bütin $x$-ler okunda kesgitlenen, birinji we ikinji tertipli önümleri $\forall x \in (-\infty, \infty)$ üçin bar. Ikinji tertipli önümi tapalyň: $y'' = -\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$.

Görşümiz ýaly, $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralykda $y'' > 0$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralykda $y'' < 0$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ aralykda bolsa $y'' > 0$ bolýar. Diýmek, $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ funksiýanyň grafigi $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ we $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ aralyklarda oýuk, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralykda güberçek bolar.

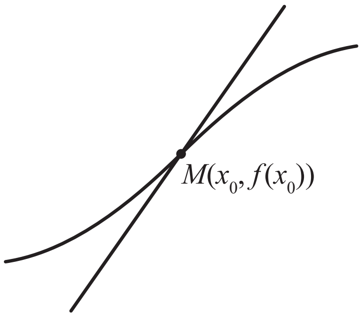
3. $y = \sin x$ funksiýa bütin $x$-ler okunda kesgitlenen we birinji, ikinji tertipli önümleri $\forall x \in (-\infty, \infty)$ üçin bar. Ikinji tertipli önümi $y'' = -\sin x$. Görşümiz ýaly, $k$-nyň bitin bahalarynda $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ aralyklarda $y'' < 0$, $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ aralyklarda $y'' > 0$ bolýar. Diýmek, $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ aralyklarda $\sin x$ funksiýanyň grafigi güberçek, $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ aralyklarda bolsa oýuk. Bu ýagdaý $y = \sin x$ funksiýanyň ýokarda getirilen grafikleriniň ikinjisiniň bolup bilmejekdigini aňladýar we grafigi takyklaşdyrmaga ýardam edýär.

## §12. Grafigiň epin nokady

Funksiýanyň grafigini gurmakda gerek bolýan düşünjeleriň biri-de epin nokadydyr.

**Kesgitleme.** $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýanaşyk ýatýan oýuk we güberçek bölekleriniň $(x_0, f(x_0))$ araçäk nokadyna epin nokady diýilýär.

Bilşimiz ýaly, grafigiň oýuk bölegi özüniň islendik nokadynda geçirilen galtaşýanyndan ýokarda, güberçek bölegi bolsa aşakda ýatýar.




*52-nji surat*

Şoňa görä, eger-de epin nokadynda galtaşýan bar bolsa, onda grafik şol nokatda galtaşýanynyň bir tarapyndan beýleki tarapyna geçmeli bolar *(52-nji surat)*.

Eger-de $(x_0, f(x_0))$ epin nokady üçin $f''(x_0)$ bar bolsa, onda hökmany $f''(x_0) = 0$ bolar. Dogrudan hem, goý, $f''(x_0) > 0$ diýeliň. Onda $f'(x)$ $x_0$ nokadyň käbir etrabynda artýan funksiýa bolardy we $f(x)$ funksiýanyň grafigi $(x_0, f(x_0))$ nokatdan geçýän galtaşýanynyň bir tarapynda ýatardy. Bu bolsa $(x_0, f(x_0))$ nokadyň epin nokady bolmagyna garşy gelerdi. Şunuň esasynda biz şeýle netijä geleris.

**Teorema.** Goý, $(x_0, f(x_0))$ epin nokady bolsun.

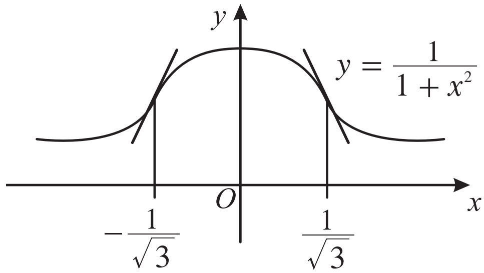
Onda: 1) eger $x_0$ nokatda $f'(x_0)$ bar bolsa, $f(x)$ funksiýanyň grafigi $(x_0, f(x_0))$ nokatdaky galtaşýanynyň bir tarapyndan beýleki tarapyna geçer;

2) eger $x_0$ nokatda $f''(x_0)$ bar bolsa, onda hökmany $f''(x_0) = 0$ bolar.

Bu teorema $(x_0, f(x_0))$ nokadyň $f(x)$ funksiýanyň epin nokady bolmagynyň zerurlyk şertini kesgitleýär. Mysallara seredeliň.

1. $y = \frac{1}{1+x^2}$. Ýokarda görşümiz ýaly, bu funksiýanyň grafigi $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralykda oýuk, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ aralykda güberçek we $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ aralykda oýuk.

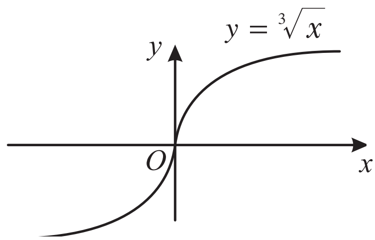
Diýmek, $\left(x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{3}{4}\right)$ we $\left(x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{3}{4}\right)$ nokatlar epin nokatlarydyr. $y'' = \frac{-(2-6x^2)}{(1+x^2)^3}$ bolany sebäpli, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nokatlarda $y''$ bar we $y''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$, $y''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$ *(53-nji surat)*.




*53-nji surat*

2. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ aralykda kesgitlenen, $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$.

$x < 0$ bolanda $y''(x) > 0$ we funksiýanyň grafigi oýuk, $x > 0$ bolanda $y''(x) < 0$ we funksiýanyň grafigi güberçek. Diýmek, (0, 0) nokat epin nokady, ýöne şol nokatda $y''$ ýokdur *(54-nji surat).*




*54-nji surat*

Indi $(x_0, f(x_0))$ nokadyň $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň epin nokady bolmagynyň ýeterlik şertini kesgitleýän teoremany getireliň.

**Teorema.** Eger $x_0$ nokadyň käbir ýörite etrabynda $f(x)$ üznüksiz, $f''(x)$ bar bolsa we $x_0$ nokatdan geçende $f''(x)$ alamatyny üýtgedýän bolsa, onda $x_0$ epin nokadydyr. Eger alamaty üýtgemese, $(x_0, f(x_0))$ epin nokady däldir.

**Subudy.** $f''(x)$ $x_0$ nokatdan geçende alamatyny üýtgedýänligi sebäpli, käbir $(x_0 - \delta, x_0)$ aralykda ol alamatyny saklar. Goý, diýeliň, $f''(x)$ şol aralykda položitel bolsun. Onda ol käbir $(x_0, x_0 + \delta)$ aralykda otrisatel bolar. Onda, ýokarda subut edenimize görä, $(x_0 - \delta, x_0)$ aralykda $f(x)$ funksiýanyň grafigi oýuk, $(x_0, x_0 + \delta)$ aralykda bolsa güberçek bolar. Diýmek, $(x_0, f(x_0))$ nokat epin nokadydyr. Ikinji teklip hem edil şeýle subut edilýär.

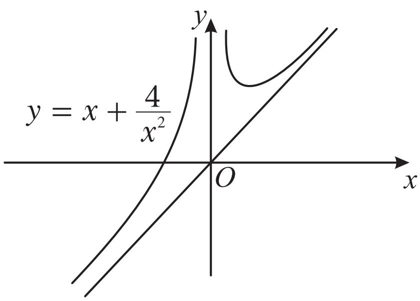
Ýokarda getirilen teoremalardan şeýle düzgün gelip çykýar. $f(x)$ funksiýanyň kesgitlenen ýaýlasynda sanly nokatlardan özge nokatlarda $f''(x)$ bar diýeliň. $f''(x)$ önümiň nola öwrülýän sanawly nokatlaryny tapalyň. Şu nokatlaryň tükenikli predel nokady ýok bolsun. $f''(x)$ önümiň nola öwrülýän nokatlaryny we onuň ýok bolan nokatlaryny $x$-ler okunda ýerleşdireliň. Ol nokatlar $x$-ler okuny aralyklara bölerler. Bu aralyklar $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň güberçeklik aralyklarydyr.

Şol aralyklaryň her birinde haýsy hem bolsa bir $x_0$ nokat alýarlar we $f''(x)$ önümiň şol nokatdaky bahasynyň alamatyny kesgitleýärler. Eger $f''(x) > 0$ bolsa, onda degişli aralykda grafik oýuk, $f''(x) < 0$ bolsa, onda grafik güberçek bolar.

Epin nokatlary $f''(x)$ önümiň ýok nokatlarynda we nola öwrülýän nokatlarynda bolup bilerler. Şol nokatlaryň birini – $x_0$ nokady saýlap alalyň. Eger $x_0$ nokatdan geçende $f''(x)$ alamatyny üýtgetse, $x_0$ nokatda $f(x)$ üznüksiz bolsa, onda $(x_0, f(x_0))$ epin nokady bolar. Eger $f''(x)$ alamatyny üýtgetmese, onda $(x_0, f(x_0))$ nokat epin nokady däldir.

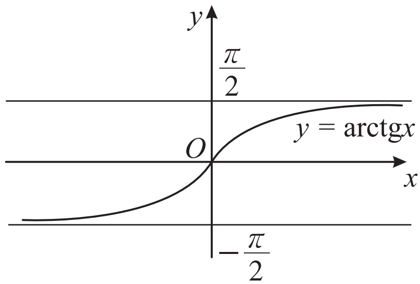
**Mysallara seredeliň.**

1. $y = x + \frac{4}{x^2}$. Önümleri tapalyň: $y' = 1 - \frac{8}{x^3}$; $y'' = \frac{24}{x^4}$. $y''(x)$ hiç ýerde nola öwrülmeýär we diňe bir $x = 0$ nokatda ýok. $x = 0$ nokat $x$-ler okuny $(-\infty, 0)$ we $(0, \infty)$ böleklere bölýär. Olaryň hersinde bir nokat alalyň. Birinjide $x_1 = -1$, ikinjide $x_2 = 1$. $y''(-1) = 24 > 0$, $y''(1) = 24 > 0$ bolany sebäpli, $(-\infty, 0)$ we $(0, \infty)$ aralyklaryň ikisinde-de funksiýanyň grafigi oýuk, epin nokady ýok *(55-nji surat)*.




*55-nji surat*

2. $y = \operatorname{arctg} x$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ ýaýlada kesgitlenen, $y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$;
$y''$ hemme ýerde kesgitlenen we diňe $x = 0$ nokatda nola öwrülýär. $x = 0$ nokady $x$-ler okunda ýerleşdirýäris. Ol oky $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ böleklere bölýär. $(-\infty, 0)$ aralykda $y''(x) > 0$, diýmek, grafik oýuk, $(0, \infty)$ aralykda $y''(x) < 0$, grafik güberçek. $(0, 0)$ nokat grafigiň ýanaşyk ýatan güberçek we oýuk bölekleriniň araçägi. Şoňa görä, ol epin nokady bolýar *(56-njy surat)*.



*56-njy surat*

3. $y = \sin x$ funksiýanyň grafiginiň epin nokatlaryny tapmaly. $y'' = -\sin x$. $y''(x)$ bütin $x$-ler okunda kesgitlenen. $y'' = 0$ deňlemäniň kökleri bolup, $x_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, sanlar hyzmat edýärler. $y'' = -\sin x$ önüm $x_k = k\pi$ nokatlardan geçende alamatyny üýtgedýär. Diýmek, $(k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ nokatlaryň hemmesi epin nokatlarydyr.

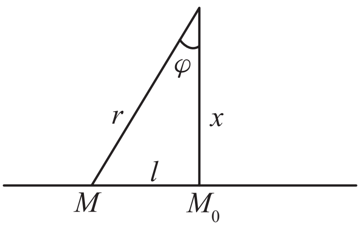
## §13. Funksiýanyň ekstremumy

Durmuşda köp meseleler funksiýany derňemeklige getirýär. Mysallara ýüzleneliň. Goý, şol bir göwrümli, konus görnüşli çadyrlaryň gapdal üstüniň meýdany iň kiçi bolanynyň beýikliginiň esasynyň radiusyna bolan gatnaşygyny tapmak gerek bolsun. Konusyň esasynyň radiusyny $x$ bilen, beýikligini $h$ bilen, apofemasyny $l$ bilen bellesek, onda onuň gapdal üstüniň meýdany $S = \pi x l$, göwrümi $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2 h$ bolar. $l$ apofemany tapalyň: $l = \sqrt{x^2 + h^2}$; $h$-yň bahasyny göwrümi kesgitleýän deňlikden tapalyň: $h = \dfrac{3V}{\pi x^2}$. Indi biz konusyň gapdal üstüniň meýdanyny

$$S = \pi x \sqrt{x^2 + \left(\frac{3V}{\pi x^2}\right)^2}$$

görnüşde ýazyp bileris. Biziň meselämiz şu funksiýa $x$-iň haýsy bahalarynda iň kiçi baha eýe bolup biler diýen meselä, ýagny funksiýany derňemek meselesine getirildi.

Ýene bir mysal. Jaýda elektrik lampasy asylýar. Lampanyň ýere bolan proýeksiýasy $M_0$ nokat. Ýeriň $M_0$ nokatdan $l$ uzaklykda ýatýan $M$ nokadynda ýagtylanma iň güýçli bolar ýaly, elektrik lampasyny haýsy beýiklikde asmaly diýen sowala jogap berjek bolalyň *(57-nji surat).*




*57-nji surat*

Lampanyň beýikligini $x$ bilen, $M$ nokadyň lampadan uzaklygyny $r$ bilen, lampadan inderilen perpendikulýar bilen lampadan $M$ nokada geçirilen ýapgydyň arasyndaky burçy $\varphi$ bilen belgiläliň. Onda ýagtylanma $I$

$$I = c\frac{\cos\varphi}{r^2}$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde $c$ hemişelik san.

Çyzgydan görnüşi ýaly, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + l^2}$. Onda $I$ üçin

$$I = c\frac{x}{\sqrt{(x^2 + l^2)^3}}$$

deňligi alarys. Ýene-de biziň meselämiz $I(x)$ funksiýanyň $x$-iň mümkin bolan bahalarynyň içinde nirede iň uly baha eýe bolýandygyny kesgitlemek, ýagny funksiýany derňemek meselesine getirildi. Diýmek, funksiýany derňemek meselesi diňe arassa matematika üçin däl-de, köpdürli pudaklarda ýüze çykýan meseleleri çözmek üçin hem wajypdyr. Funksiýanyň ekstremumy diýen düşünje funksiýany derňemekligiň esasy elementleriniň biridir. Şol düşünjäni girizeliň. Goý, $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen we $x_0 \in (a,b)$ bolsun.

**Kesgitleme.** Eger $x_0$ nokadyň käbir etrabynyň $x_0$-dan özge hemme nokatlary üçin $f(x) < f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda maksimuma eýe diýilýär. $x_0$ nokada funksiýanyň maksimum nokady, $f(x_0)$ baha funksiýanyň *maksimal bahasy* diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $x_0$ nokadyň käbir etrabynyň $x_0$-dan özge hemme nokatlary üçin $f(x) > f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda minimuma eýe diýilýär. $x_0$ nokada funksiýanyň minimum nokady, $f(x_0)$ baha funksiýanyň *minimal bahasy* diýilýär.

Minimum we maksimum nokatlara funksiýanyň ekstremum nokatlary, minimal we maksimal bahalaryna bilelikde ekstremal bahalary diýip at berýärler. Biziň çözmeli meselämiz ekstremum nokatlary nähili edip tapmaly, olaryň haýsysynyň maksimum, haýsysynyň minimum nokady bolmalydygyny nähili edip kesgitlemeli diýen sowala jogap tapmakdan durýar. Şu meseläni çözmäge gerek boljak teoremalara seredeliň.

**Fermanyň teoremasy.** Eger $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda maksimuma (minimuma) eýe bolsa we $x_0$ nokatda $f'(x_0)$ bar bolsa, onda $f'(x_0)$ önüm hökman nola deňdir.

**Subudy.** Kesgitlemä görä, $x_0$ nokadyň $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etraby bar bolup, şol etrabyň islendik $x_1$ nokady üçin $f(x_0) > f(x_1)$ deňsizlik ýerlikli bolar. $x_1 - x_0$ tapawudy $\Delta x$ bilen belgiläliň. Önümiň kesgitlemesine görä,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$x_0 + \Delta x = x_1$ nokadyň $\Pi_{x_0}^{\delta}$ etraba degişli bolany sebäpli, $f(x_1) < f(x_0)$ ýa-da $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ deňsizlik ýerlikli bolar. $\Delta x$-iň položitel bahalary üçin $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, otrisatel bahalary üçin $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ bolar. Diýmek,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$$

bolar. Bu bolsa $f'(x_0) = 0$ diýmekdir. $x_0$ minimum nokady bolan ýagdaýy hem edil seýle subut edilýär. Funksiýanyň $f'(x)$ önüminiň nola öwrülýän nokatlaryna *funksiýanyň durum nokatlary* diýilýär.

Fermanyň teoremasyna görä, eger $x_0$ nokat ekstremum nokat bolsa we şol nokatda önüm bar bolsa, onda $x_0$ hökman durum nokadydyr. Diýmek, ekstremum nokatlar funksiýanyň durum nokatlarynyň we onuň önüminiň ýok bolan nokatlarynyň arasynda bolmaly. Emma durum nokatlarynyň hemmesi ýa-da funksiýanyň önüminiň ýok nokatlarynyň hemmesi ekstremum nokady bolmaly diýsek ýalňyşarys.

**Mysallara ýüzleneliň.**

1. $y = x^2$ funksiýanyň durum nokatlaryny tapalyň. Onuň üçin onuň birinji tertipli $y'(x)$ önümini we soňra $y'(x) = 0$ deňlemäniň köklerini tapmaly. Alarys: $y' = 2x$; $2x = 0$; $x = 0$. Görşümiz ýaly, diňe bir $x = 0$ durum nokady bar. $\forall x \neq 0$ üçin $y(x) > y(0)$ ýa-da $x^2 > 0$ bolýany sebäpli, $x = 0$ durum nokady minimum nokadydyr.

2. $y = x^3(1 - x)$ funksiýanyň durum nokatlaryny tapalyň. Birinji tertipli önümi tapýarys we nola deňleýäris:

$$y' = 3x^2 - 4x^3 = 0.$$

Bu deňlemäniň iki köki bar. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$; $y(x_1) = 0$, $x_1$ nokadyň golaý çepinde $y(x) < 0$, golaý sagynda $y(x) > 0$ bolany üçin, $x_1 = 0$ nokat ekstremum nokady däldir. $y = x^3(1 - x)$ funksiýany $\left(x - \frac{3}{4}\right)$ tapawudyň derejeleri boýunça ýazalyň:

$$y(x) = \frac{27}{256} - \frac{9}{8}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^3 - \left(x - \frac{3}{4}\right)^4.$$

$y(x_2) = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256}$. $x_2$ nokadyň golaý töweregindäki nokatlar üçin $y(x) < y(x_2)$ boljagy görnüp dur. Diýmek, $x_2 = \frac{3}{4}$ nokat maksimum nokadydyr.

3. $y = |x|$ funksiýa hemme ýerde kesgitlenen we $x = 0$ nokatda onuň önümi ýok. $y(0) = 0$ we $x \neq 0$ nokatlaryň hemmesi üçin $y(x) > y(0)$. Diýmek, $x = 0$ nokat minimum nokadydyr.

4. $y = -x\ln|x|$, $x \neq 0$, $y(0) = 0$ funksiýa hemme ýerde kesgitlenen we $x = 0$ nokatda önümi ýok. $x = 0$ nokadyň sag golaýynda $y(x) > 0$, çep golaýynda $y(x) < 0$ bolany sebäpli, $x = 0$ nokat ekstremum nokady däldir.

Mysallara seretmekden biz şeýle netije çykaryp bilýäris. Funksiýanyň ekstremum nokatlarynyň onuň durum nokatlarynyň we onuň önüminiň ýok nokatlarynyň arasynda bolmagy ekstremumyň zerurlyk şertidir. Mysallardan görnüşi ýaly, bu şert ýeterlik däldir.

**Teorema** (ekstremumyň ýeterlik şerti ). Goý, $x_0$ nokat funksiýanyň durum nokady ýa-da onuň önüminiň ýok nokady bolsun. $x_0$ nokadyň käbir etrabynda $f(x)$ üznüksiz we $x_0$ nokatdan başga nokatlarda önümi bar bolsun. Onda, eger $x_0$ nokatdan çepden saga geçilende $f'(x)$ alamatyny aýyrmakdan goşmaga üýtgetse $x_0$ nokatda minimum, goşmakdan aýyrmaga üýtgetse $x_0$ nokatda maksimum bolar, eger alamatyny üýtgetmese $x_0$ nokatda ekstremum bolmaz.

**Subudy.** Goý, $x_0$ nokatdan çepden saga geçilende önüm alamatyny aýyrmakdan goşmaga üýtgetsin. Meseläniň şertine görä, käbir $\delta$ san tapylyp, $(x_0 - \delta, x_0)$ aralykda $f'(x) < 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ aralykda $f'(x) > 0$ bolar. $f(x)$ üznüksiz we $(x_0 - \delta, x_0)$ aralykda kemelýän funksiýa, diýmek, $\forall x \in (x_0 - \delta, \ x)$ üçin $f(x) > f(x_0)$ deňlik ýerlikli bolar. $(x_0, x_0 + \delta)$ aralykda $f(x)$ üznüksiz we artýan funksiýa, diýmek, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ üçin $f(x) > f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýeter. Bu bolsa, kesgitlemä görä, $x_0$ minimum nokady diýmekdir. Galan ýagdaýlary hem edil şeýle subut edilýär.

Funksiýanyň ekstremumyny tapmak meselesi onuň monotonlyk aralyklaryny tapmak bilen örän içgin baglanyşyklydyr. Bilşimiz ýaly, funksiýanyň durum nokatlary we önümiň ýok nokatlary monotonlyk aralyklaryň araçägi bolýarlar. Şoňa görä, monotonlyk aralyklary gurlandan soň, ekstremum nokatlaryny tapmak üçin, şol aralyklaryň araçäk nokatlaryny ýokardaky teorema görä barlamak ýeterlikdir.

Mysallar çözülende teoremanyň tassyklamalaryny aşakdaky tablisa görnüşinde ýazmak amatly bolýar.

| | $x < x_0$ | $f(x_0)$ | $x > x_0$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | bar | – | maksimum |
| $f'(x)$ | – | bar | + | minimum |
| $f'(x)$ | – | bar | – | ekstremum ýok |
| $f'(x)$ | + | bar | + | ekstremum ýok |

Aşakda ekstremumy kesgitlemegiň ýene bir ýeterlik şerti getirilýär.

**Teorema** (ekstremumyň ýeterlik şerti). $x_0$ nokadyň käbir etrabynda $f'(x)$ hem-de $f''(x)$ bar we $f'(x_0) = 0$ bolsun. Onda, eger $f''(x_0) < 0$ bolsa $x_0$ nokatda maksimum, $f''(x_0) > 0$ bolsa $x_0$ nokatda minimum bolar.

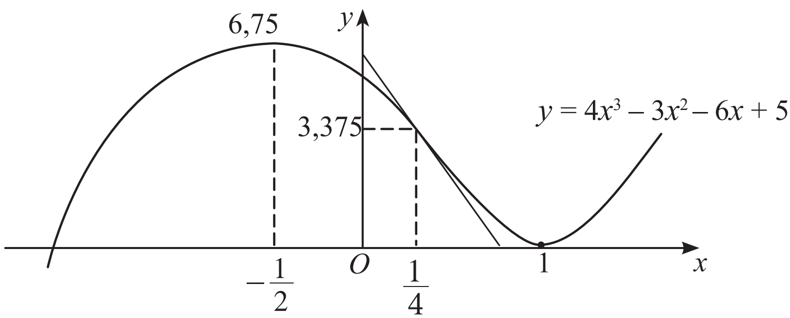
**Subudy.** $f''(x_0) > 0$ ýagdaýda $f'(x)$ $x_0$ nokadyň käbir etrabynda artýan funksiýa bolýar. Diýmek, $x_0$ nokatdan çepden saga geçilende $f'(x)$ alamatyny aýyrmakdan goşmaga üýtgedýär. Onda, ýokarky teorema görä, $x_0$ nokatda minimum bolar. $f''(x_0) < 0$ ýagdaýda $f'(x)$ $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kemelýän funksiýa bolýar, özi hem $f'(x_0) = 0$. Diýmek, $x_0$ nokatdan çepden saga geçilende $f'(x)$ alamatyny goşmakdan aýyrmaga üýtgedýär. Şoňa görä-de $x_0$ nokatda maksimum bolar. Teorema subut edildi.

**Mysal.** $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapalyň. Funksiýanyň birinji we ikinji tertipli önümleri hemme ýerde bar. Onda onuň ekstremum nokatlary durum nokatlarynyň arasynda bolar. Durum nokatlaryny tapalyň. Onuň üçin, birinji tertipli önümi nola deňläp, alnan deňlemäniň köklerini tapsak bolar. Alarys:

$$y' = 12x^2 - 6x - 6; \quad 2x^2 - x - 1 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2};$$

$x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ durum nokatlarynda $y''(x)$-iň bahalarynyň alamatyny kesgitläliň: $y'' = 24x - 6$; $y''(1) = 18 > 0$, $y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -18 < 0$. Diýmek, $x_1 = 1$ nokatda minimum, $x_2 = -\frac{1}{2}$ nokatda maksimum bolar. Funksiýanyň güberçeklik aralyklaryny tapalyň. Onuň üçin

$y'' = 24x - 6 = 0$ deňlemäniň köküni tapýarys: $x_3 = \frac{1}{4}$. $x_3 = \frac{1}{4}$ nokat $x$-ler okuny iki bölege bölýär: $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$. Olaryň birinjisinde $y''(x) < 0$, ikinjisinde $y''(x) > 0$. Diýmek, $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ aralykda funksiýanyň grafigi güberçek, $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ aralykda bolsa oýuk bolar. $x_3 = \frac{1}{4}$ nokat şol aralyklaryň araçägi we şol nokadyň töwereginde funksiýa üznüksiz. Diýmek, $x_3 = \frac{1}{4}$ nokat epin nokady. Indi $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$ nokatlary $x$-ler okunda ýerleşdireliň we $f(x)$ funksiýanyň şol nokatlardaky bahalaryny tapalyň: $f(1) = 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6,75$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 3,375$.




*58-nji surat*

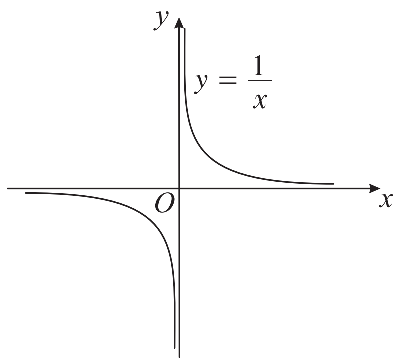
$\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \infty$ bolany sebäpli, $y(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ funksiýanyň grafiginiň görnüşi 58-nji suratdaky ýaly bolýar. Görşümiz ýaly, funksiýanyň monotonlyk aralyklaryny, onuň ekstremum nokatlaryny, ekstremal bahalaryny, güberçeklik aralyklaryny we epin nokatlaryny bilmek funksiýanyň üzülýän nokatlaryndan özge nokatlarda onuň grafiginiň özüni alyp barşyny häsiýetlendirmäge mümkinçilik berýär. Funksiýanyň grafiginiň $x$ tükeniksizlige ymtylanda özüni nähili alyp barýandygynyny has anyk häsiýetlendirmek üçin ýene bir düşünje girizeliň.

## §14. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary

Käbir ýagdaýlarda, funksiýanyň grafigi tekizligiň tükeniksizlikdäki nokatlaryna bellibir göni çyzyga ýakynlaşmak bilen ymtylýarlar. Ine, şeýle gönülere funksiýanyň grafiginiň asimptotalary diýilýär. Olary has takyk kesgitläliň.

**Kesgitleme.** $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ predelleriň iň bolmanda biri tükeniksizlige deň bolsa, onda $x = x_0$ gönä $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy diýilýär.

**1-nji mysal.** $y = \dfrac{1}{x}$ üçin $x = 0$ üzülme nokady we $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = \infty$ deň. Şoňa görä $x = 0$ göni $y = \dfrac{1}{x}$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasydyr *(59-njy surat)*.



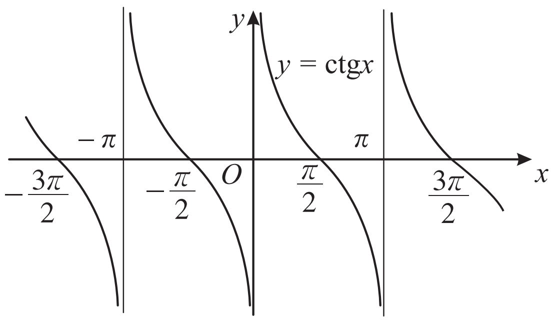

*59-njy surat*

**2-nji mysal.** $y = \ln x$ üçin $x = 0$ üzülme nokady we $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$. Şoňa görä $x = 0$ göni $y = \ln x$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasydyr.

Goý, $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$ we $Q(x)$ üznüksiz funksiýalar bolsunlar. Eger $Q(x_0) = 0$, $P(x_0) \neq 0$ bolsa, onda $x = x_0$ göni $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy bolar.

**3-nji mysal.** $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ funksiýa üznüksiz funksiýalaryň gatnaşygyna deň. Maýdalawjy $\sin x$ funksiýa $x_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

nokatlarda nola deň, cos$x$ bolsa nola deň däl. Diýmek, $x = k\pi$, $k = 0$, $\pm 1$, ... gönüleriň hemmesi $y = \text{ctg}x$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotalarydyr *(60-njy surat)*.




*60-njy surat*

**Kesgitleme.** Eger $f(x)$ funksiýa $x > N$ bahalar üçin kesgitlenen bolsa we

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$$

predel deňlik ýerine ýetse, onda $y = kx + b$ gönä $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x$ tükeniksizlige ymtylandaky ýapgyt asimptotasy diýilýär. Eger $f(x)$ $x < N$ bahalar üçin kesgitlenen bolsa we

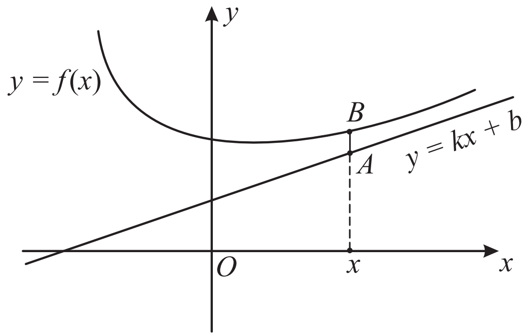
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - b] = 0$$

predel deňlik ýerine ýetse, onda $y = kx + b$ gönä $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x$ minus tükeniksizlige ymtylandaky ýapgyt asimptotasy diýilýär. Bu kesgitlemäniň geometrik manysy hem bar.

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$ diýmek $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen $y = kx + b$ göniniň arasyndaky $x$ nokatdan geçýän dik göni boýunça $AB = |f(x) - kx - b|$ uzaklyk $x$ tükeniksizlige ymtylanda nola ymtylýar diýmekdir *(61-nji surat)*.

Asimptotanyň deňlemesine degişli $k$ we $b$ sanlary kesgitläliň. Eger $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$ predel deňlik dogry bolsa, onda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - kx - b}{x} = 0$$




*61-nji surat*

ýa-da

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

deňlik hem dogrudyr. Bu ýerden

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

deňligi alarys. Diýmek, asimptotanyň bolmagy üçin hökman $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ predel bolmalydyr. Eger ol predel bolmasa, onda asimptota ýok boldugy bolýar. Goý, $k$ tapyldy diýeliň. Onuň tapylan $k_0$ bahasyny $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$ deňlikde ýerine goýup we ol deňligi biraz özgerdip ýazalyň:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - k_0x] - \lim_{x\to\infty} b = 0.$$

Bu ýerden alarys:

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k_0x].$$

Diýmek, asimptotanyň bolmagy üçin, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k_0x]$ predeliň bolmagy zerurdyr. Eger ol predel ýok bolsa, onda asimptotanyň bolmadygydyr. Şoňa görä iki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k_0,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - k_0 x] = b$$

predeliň bolmagy asimptota bolmagy üçin zerur hem ýeterlikdir. Grafigiň $x \to -\infty$ asimptotasy hem edil şeýle tapylýar.

**Mysala seredeliň.** $y = x - \frac{2}{x^2}$ funksiýanyň asimptotalaryny kesgitlemeli. Ilki bilen dik asimptotalaryny tapalyň. $y = \frac{x^3 - 2}{x^2}$ iki üznüksiz funksiýanyň gatnaşygynyň barlygy sebäpli, onuň dik asimptotalary maýdalawjynyň nola öwrülen nokatlarynda bolarlar. Maýdalawjy $x = 0$ bolanda nola öwrülýär, sanawjy bolsa $x = 0$ bahada nola deň däl. Diýmek, $x = 0$ ýeke-täk dik asimptota. Indi $y = kx + b$ ýapgyt asimptotalary tapalyň. Onuň üçin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$

predelleri tapmaly. Alarys:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 - 2}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[x - \frac{2}{x^2} - x\right] = -\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2} = 0.$$

Diýmek, $k = 1$, $b = 0$; $y = x$ göni $x \to \infty$ bolanda ýapgyt asimptotadyr. Şuňa meňzeşlikde,

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3 - 2}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - \frac{2}{x^2} - x\right] = 0.$$

Diýmek, $k = 1$, $b = 0$; $y = x$ göni $x \to -\infty$ bolanda hem asimptota bolýar. Biziň mysalymyzdan şeýle netije çykaryp bileris.

**Netije.** Eger $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = b$ bolsa, onda $y = kx + b$ göni $x \to \infty$ bolanda hem, $x \to -\infty$ bolanda hem asimptota bolar.

**4-nji mysal.** $y = 3x + 5\sin x$ funksiýanyň asimptotalaryny tapmaly. Funksiýa hemme ýerde kesgitlenen we üzülme nokatlary ýok. Şonuň üçin onuň dik asimptotalary bolup bilmez. Indi ýapgyt asimptotalary tapjak bolalyň.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+5\sin x}{x} = 3;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}[3x+5\sin x-3x] = 5\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\sin x.$$

Soňky predeli ýok, diýmek, $y = 3x + 5\sin x$ funksiýanyň ýapgyt asimptotalary hem ýok.

**Bellik.** $y = kx + b$ funksiýanyň özüni $x$ tükeniksizlige ymtylanda alyp barşy belli bolany sebäpli, $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x$ tükeniksizlige ymtylanda özüni alyp barşyny göni bilen deňeşdirýärler. Ine, şu ýerden hem asimptota düşünjesi gelip çykýar. Adatça, biz $f(x)$ funksiýanyň grafigini tükeniksizlikde özüni alyp barşy belli bolan islendik funksiýanyň grafigi bilen deňeşdirmäge haklydyrys. Şol sebäpli, asimptotik gönüleriň ýerine asimptotik egri düşünjesini hem girizse bolar.

**5-nji mysal.** $f(x) = \dfrac{3x^4-5x^2+6x\cdot\sin x+\cos x}{2x^2-3x+4}$ funksiýanyň grafiginiň tükeniksizlikde özüni alyp barşyny derňemeli.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4-5x^2+6x\cdot\sin x+\cos x}{x(2x^2-3x+4)} = \pm\infty$$

bolýandygy sebäpli, bu funksiýanyň grafiginiň $y = kx + b$ göni görnüşinde asimptotasy ýok. Geliň, asimptotany $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ egri görnüşinde gözläliň. Belli bolşy ýaly, $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ egriniň grafigi paraboladyr. Parabolanyň tükeniksizlikde özüni alyp barşy belli bolansoň, onuň bilen berlen funksiýanyň grafigini deňeşdirmegiň manysy ýok däl.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\tilde{y}} = 1,\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-\tilde{y}] = 0$$

deňlikler ýerine ýetseler, $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň grafigi $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň asimptotasy bolýar diýip kabul edeliň.

Ýokarky deňlikleri ulanyp, $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ aňlatma girýän $a$, $b$, $c$ koeffisiýentleri tapalyň:

$$1 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\tilde{y}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4 - 5x^2 + 6x\sin x + \cos x}{(2x^2 - 3x + 4)(ax^2 + bx + c)} = \frac{3}{2a};$$

ýa-da $a = \dfrac{3}{2}$.

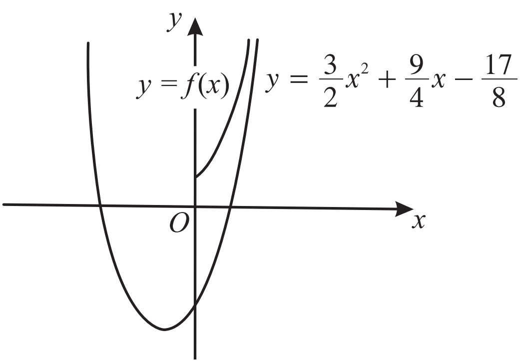
$$0 = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^4 - 5x^2 + 6x\sin x + \cos x}{2x^2 - 3x + 4} - \frac{3}{2}x^2 - bx - c\right] \text{ ýa-da}$$

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4 - 5x^2 + 6x\sin x + \cos x - (2x^2 - 3x + 4)\left(\frac{3}{2}x^2 + bx + c\right)}{2x^2 - 3x + 4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(2b - \frac{9}{2}\right)x^3 - (5 + 2c - 3b + 6)x^2}{2x^2 - 3x + 4} +$$

$$+ \lim_{x\to\infty}\frac{[6\sin x - (4b - 3c)]x + \cos x - 4c}{2x^2 - 3x + 4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(2b - \frac{9}{2}\right)x^3 - (5 + 2c - 3b + 6)x^2}{2x^2 - 3x + 4}.$$




*62-nji surat*

Bu deňlik $2b - \frac{9}{2} = 0,\ 5 + 2c - 3b + 6 = 0$ bolanda ýerliklidir. Bu ýerden alarys: $b = \frac{9}{4};\ c = -\frac{17}{8}$. Diýmek, biz $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{17}{8}$ egri $f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x$ tükeniksizlige ymtylandaky asimptotasydyr diýip bileris *(62-nji surat).*

## §15. Funksiýanyň grafigini gurmagyň umumy düzgüni

Ýokarda funksiýanyň grafiginiň elementlerini, ýagny monotonlyk aralyklaryny, güberçeklik aralyklaryny, asimptotalaryny we funksiýanyň ekstremumlaryny tapmak barada gürrüň edildi. Indi şol düşünjeleri ulanyp, funksiýanyň grafigini gurmaga girişeliň. Grafigi aşakdaky tertipde gurmak hödürlenýär:

1) funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapmak;

2) funksiýanyň üznüksizligini barlamak;

3) funksiýanyň täkligini, jübütligini barlamak;

4) funksiýanyň periodikligini barlamak;

5) funksiýanyň önüminiň nola öwrülýän we ýok nokatlaryny tapmak;

6) monotonlyk aralyklaryny we ekstremumlaryny tapmak;

7) ikinji tertipli önümiň nollaryny we ýok nokatlaryny tapmak;

8) güberçeklik aralyklaryny we epin nokatlaryny tapmak;

9) asimptotalary tapmak;

10) funksiýanyň grafiginiň koordinata oklaryny kesýän nokatlaryny tapmak;

11) grafigi gurmak.

Funksiýanyň grafiginiň gurluşyny mysalda görkezeliň. $y = x - \frac{4}{x^2}$ funksiýanyň grafigini guralyň:

1) funksiýa $x = 0$ nokatdan başga ýerde kesgitlenen;

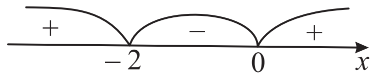
2) $x = 0$ nokat üzülme nokady; $x$-ler okunyň galan nokatlarynyň barysynda üznüksiz.

$$\lim_{x \to 0-0} y = \lim_{x \to 0+0} y = -\infty;$$

3, 4) funksiýa täk hem, jübüt hem, periodik hem däl;

5) funksiýanyň önümini tapalyň: $y' = 1 + \frac{8}{x^3}$. Önüm $x_1 = 0$ nokatda ýok. $1 + \frac{8}{x^3} = 0$ deňlemäni çözüp, önümiň nola öwrülýän nokatlaryny taparys: $1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = -8;\ x_2 = -\sqrt[3]{8} = -2.$

6) $x_1 = 0,\ x_2 = -2$ nokatlary $x$-ler okunda ýerleşdirýäris. Olar $x$-ler okuny üç aralyga bölerler *(63-nji surat)*.



*63-nji surat*

Olaryň her birinde bir nokat alalyň: $x = -3,\ x = -1,\ x = 1.$

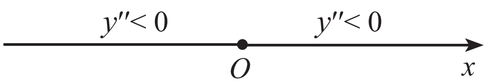
$$y'(-3) = 1 + \frac{8}{(-3)^3} > 0;\ y'(-1) = 1 + \frac{8}{(-1)^3} < 0;\ y'(1) = 1 + 8 > 0.$$

Diýmek, $(-\infty, -2)$ aralykda funksiýa monoton artýar, $(-2; 0)$ aralykda funksiýa kemelýär, $(0; \infty)$ aralykda artýar. $x_2 = -2$ ekstremum nokady. Birinji tertipli önüm $x_2$ nokatdan çepden saga geçilende alamatyny goşmakdan aýyrmaga üýtgedýär. Şoňa görä $x_2 = -2$ nokat maksimum nokady. $x = 0$ nokatda ekstremum ýok. Funksiýanyň $x_2 = -2$ nokatdaky bahasyny tapalyň: $y(-2) = -3$.

Grafigiň $x_2 = -2$ nokada degişli nokady $M_1(-2, -3)$ bolar.

7, 8) funksiýanyň ikinji tertipli önümini tapalyň: $y''(x) = -\frac{24}{x^4}$.

Ol $x_1 = 0$ nokatda üzülýär, galan nokatlarda nola deň däl. $x_1 = 0$ nokady $x$-ler okunda ýerleşdireliň. Ol nokat $x$-ler okuny iki bölege bölýär.

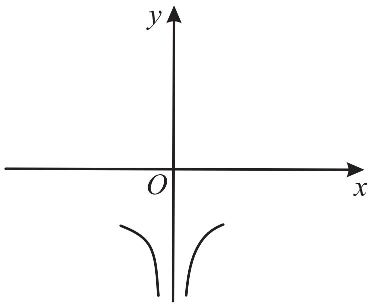



Olaryň hersinde bir nokady saýlap alalyň: $x = -1,\ x = 1;\ y''(-1) = -24 < 0,\ y''(1) = -24 < 0$. Şoňa görä funksiýanyň grafigi $(-\infty, 0)$ we $(0, \infty)$ aralyklaryň ikisinde hem güberçek.

9) funksiýa diňe $x_1 = 0$ nokatda üzülýär we $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = -\infty$. Şoňa görä $x = 0$ göni dik asimptotadyr. Grafigiň $x = 0$ asimptotanyň töweregindeözüni alyp barşy 64-nji suratda görkezilen.

Ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = 1;$$




*64-nji surat*

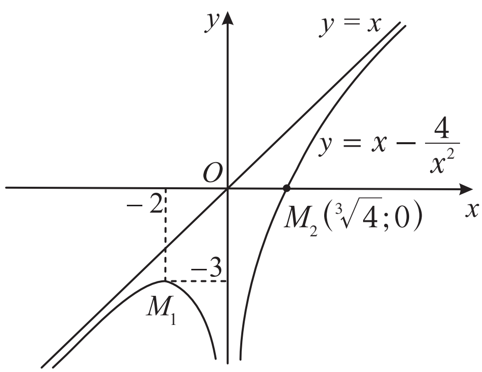
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = 0$$

Diýmek, $y = kx + b$ ýa-da $y = x$ göni $x \to \pm\infty$ bolanda asimptotadyr.

10) grafigiň koordinata oklary bilen kesişýän nokatlaryny tapalyň. $y = x - \frac{4}{x^2}$ formuladan görnüşi ýaly, grafik $y$-ler okuny kesmeýär. $y = 0$ ýa-da $x - \frac{4}{x^2} = 0$ deňlemäni çözüp, grafigiň $x$-ler okuny kesýän nokatlaryny taparys. Deňlemäniň diňe bir hakyky köki bar. $x_3 = \sqrt[3]{4}$ ýa-da $M_2(\sqrt[3]{4}, 0)$ nokat bolýar.

11) grafigi guralyň. Onuň üçin tapylan nokatlary bir çyzgyda ýerleşdireliň, soňra grafigiň tapylan elementlerini göz öňünde tutup, grafigi guralyň *(65-nji surat)*.




*65-nji surat*

1. $(0, \infty)$ aralykda funksiýanyň grafigi üznüksiz, artýar, güberçek, $M_2$ nokatdan geçýär, $x \to \infty$ bolanda $y = x$ asimptota aşakdan ymtylýar, $x \to 0$ bolanda $x = 0$ asimptota boýunça $-\infty$-e ymtylýar.

2. $(-2, 0)$ aralykda funksiýa üznüksiz, kemelýär, $M_1(-2, -3)$ nokat onuň iň beýik nokady, güberçek we $x \to 0 - 0$ bolanda $-\infty$-e ymtylýar.

3. $(-\infty, -2)$ aralykda funksiýa üznüksiz, artýar, $M_1(-2, -3)$ nokat grafigiň iň ýokarky beýik nokady, güberçek we $x \to -\infty$ bolanda $y = x$ asimptota aşakdan ymtylýar.

Şularyň esasynda grafigi diňe suratda görkezilişi ýaly gurup bolýandygy şübhesizdir. Çyzylan egriniň taryhy ady bardyr. Oňa Nýutonyň çarşagy diýip at beripdirler.

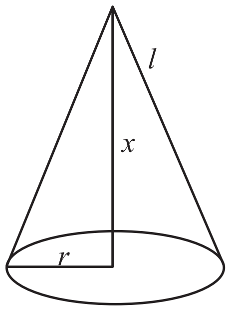
## §16. Funksiýanyň kesimdäki iň uly we iň kiçi bahalary

$f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen. Onuň birinji tertipli önüminiň şol kesimdäki nola öwrülýän nokatlarynyň we kesgitlenmedik nokatlarynyň sany çäkli bolsun. Eger şol kesime degişli $x_1$ we $x_2$ nokatlar tapylyp, $\forall x \in [a, b]$ üçin $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ deňsizlikler ýerlikli bolsa, onda $f(x_1)$ baha funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň kiçi bahasy, $f(x_2)$ baha funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň uly bahasy diýilýär. Önümiň noldan üýtgeşik nokatlarynda funksiýa monoton artýar ýa-da kemelýär. Şol nokatlarda funksiýa iň uly baha ýa-da iň kiçi baha eýe bolup bilmez. Diýmek, funksiýa iň uly ýa-da iň kiçi baha diňe önümiň nola öwrülýän nokatlarynda, önümiň ýok nokatlarynda we kesimiň gyra $x = a,\ x = b$ nokatlarynda ýetip biler.

Bu ýerden şeýle düzgün gelip çykýar. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin onuň önüminiň nola öwrülýän nokatlaryndaky bahalaryny, önümiň ýok nokatlaryndaky bahalaryny we $x = a,\ x = b$ nokatlardaky bahalaryny hasaplamaly. Şol bahalaryň ulusy funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki iň uly bahasy, kiçisi bolsa iň kiçi bahasy bolar.

**1-nji mysal.** $y = 3x^2 - 2x + 5$ funksiýanyň $[-1; 4]$ kesimdäki iň uly we iň kiçi bahasyny tapmaly. Funksiýanyň $y' = 6x - 2$ önümi $[-1; 4]$ aralykda kesgitlenen we diňe bir $x = \frac{1}{3}$ nokatda nola öwrülýär. Şoňa görä, üç $x = \frac{1}{3},\ x = -1,\ x = 4$ nokatlardaky bahalaryny tapmak ýeterlik. $y(-1) = 10$; $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}$; $y(4) = 45$. Diýmek, funksiýanyň $[-1; 4]$ kesimdäki iň uly bahasy 45, iň kiçi bahasy $\frac{14}{3}$ bolar.

**2-nji mysal.** Göwrümleri şol bir sana deň bolan konus görnüşdäki çadyrlaryň arasynda gapdal üstüniň meýdanynyň iň kiçisiniň beýikliginiň esasynyň radiusyna bolan gatnaşygyny tapmaly.




*66-njy surat*

**Çözülişi.** 66-njy suratdan görnüşi ýaly, konusyň gapdal üsti $S = \pi rl = \pi r\sqrt{x^2 + r^2}$, göwrümi $V_0 = \frac{1}{3}\pi r^2 x$ bolar. Bu ýerden $r^2 = \frac{3V_0}{\pi x}$ tapyp, $S$-iň bahasynda ýerine goýup alarys:

$$S = \pi\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}x + \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}}.$$

$S$-iň iň kiçi bahasy $\pi\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}x + \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}}$ funksiýanyň $(0, \infty)$ aralykdaky bahalarynyň iň kiçisine deňdir. Ony kesgitlemek üçin $y = \pi\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}x + \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}}$ funksiýanyň önümini tapalyň:

$$y' = \frac{\pi\left(\frac{3V_0}{\pi} - \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{2}{x^3}\right)}{2\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}x + \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}}}.$$

Önüm $(0, \infty)$ aralygyň hemme nokatlarynda bar. Onuň nollaryny tapalyň: $y' = 0 \Rightarrow \frac{3V_0}{\pi} - \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}}$. Funksiýanyň bahasy $x \to 0$ we $x \to \infty$ bolanda tükeniksizlige ymtylýar. Diýmek, iň kiçi bahasy $y(x)$-iň $x = \sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}}$ nokatdaky bahasy bolar:

$$y\left(\sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}}\right) = \pi\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}\sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}} + \left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6V_0}\right)^2}}.$$

Indi beýikligiň esasyň radiusyna bolan gatnaşygyny tapalyň:

$$\frac{x}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}}}{\sqrt{\frac{3V_0}{\pi}}}\sqrt[6]{\frac{6V_0}{\pi}} = \frac{\sqrt[6]{\left(\frac{6V_0}{\pi}\right)^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{6V_0}{\pi}}}{\sqrt[6]{\left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(\frac{6V_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{6V_0}{\pi}}{\left(\frac{3V_0}{\pi}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{6^3}{3^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}.$$

## §17. Wektor funksiýalaryň önümi, wektor funksiýalary derňemek

Goý, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiýalar $(a, b)$ aralykda kesgitlenen bolsunlar. Onda koordinatalary funksiýalar bolan $\vec{V}(t)=\{x(t), y(t), z(t)\}$ wektora *wektor funksiýa* diýilýär. Eger onuň koordinatalary $(a, b)$ aralykda üznüksiz bolsalar, onda wektor funksiýa $(a, b)$ aralykda üznüksiz diýilýär. Eger onuň koordinatalary $(a, b)$ aralykda differensirlenýän bolsalar, onda wektor funksiýa $(a, b)$ aralykda differensirlenýän diýilýär. Wektor funksiýanyň birinji, ikinji we ş.m. önümleri $\frac{d\vec{V}}{dt}, \frac{d^2\vec{V}}{dt^2}, \ldots$ ýa-da $\vec{V}', \vec{V}'', \ldots$ görnüşde belgilenýär we kesgitlemä görä,

$$\frac{d^k\vec{V}}{dt^k}=\left\{\frac{d^kx}{dt^k}, \frac{d^ky}{dt^k}, \frac{d^kz}{dt^k}\right\}.$$

Önüm düşünjesini wektor funksiýalaryň skalýar we wektor köpeltmek hasyllaryna hem geçirse bolar. Aşakdaky formulalaryň dogrudygyny aňsatlyk bilen barlap bolar:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}(t)\cdot\vec{U}(t))=\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{U}\right)+\left(\vec{V}\cdot\frac{d\vec{U}}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{V}(t)\times\vec{U}(t)]=\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\times\vec{U}\right]+\left[\vec{V}\times\frac{d\vec{U}}{dt}\right],$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}(t)\times\vec{U}(t)\cdot\vec{W}(t)=\frac{d\vec{V}}{dt}\times\vec{U}\cdot\vec{W}+\vec{V}\times\frac{d\vec{U}}{dt}\cdot\vec{W}+\vec{V}\times\vec{U}\cdot\frac{d\vec{W}}{dt}.$$

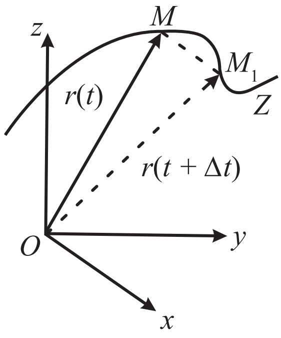
Mysal üçin, şol formulalaryň ikinjisi şeýle subut edilýär. Goý, $\vec{V}(t)=\{x_1(t), y_1(t), z_1(t)\}$, $\vec{U}(t)=\{x_2(t), y_2(t), z_2(t)\}$ bolsun. Alarys:

$$\frac{d}{dt}[\vec{V}(t)\times\vec{U}(t)]=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} 1 & j & k \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t)\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} & \dfrac{dz_2}{dt} \end{vmatrix} = \left[\frac{d\vec{V}}{dt}\times\vec{U}\right]+\left[\vec{V}(t)\times\frac{d\vec{U}}{dt}\right].$$

Indi giňişlikde $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha < t < \beta$ deňlemesi bilen berlen $Z$ egri çyzyga we $t$-niň her bir bahasy üçin $M(x(t), y(t), z(t))$ nokada seredeliň. $t$ parametr $(\alpha, \beta)$ aralykdaky bahalaryny $\alpha$-dan başlap $\beta$ çenli alyp çyksa, onda $M$ nokat $Z$ egrini bir ujundan beýleki ujuna çenli çyzyp çykar. Şonuň üçin, $Z$ egrä $M$ nokadyň traýektoriýasy hökmünde garasa bolar. Koordinatalar başlangyjyny $M$ nokat bilen birleşdirýän $\overrightarrow{OM}$ wektora $M$ nokadyň radius wektory diýilýär we ol, adatça, $\vec{r}(t)$ bilen belgilenýär. Görşümiz ýaly, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ýa-da $\vec{r}(t) = ix(t) + jy(t) + kz(t)$ ýazyp bileris. Eger $t$ parametre wagt hökmünde garalsa, onda $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$ önüm $M$ nokadyň $t$ pursatdaky tizligi, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$ bolsa onuň şol wagtdaky tizlenmesi bolar. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – tizlik wektorynyň $Z$ traýektoriýa $M$ nokatda galtaşýan wektor boljakdygyny, başgaça aýdanyňda, şol nokatdaky galtaşýan göniniň ugrukdyryjy wektory boljakdygyny görkezeliň *(67-nji surat)*. $Z$ egriniň üstünde $M(x(t), y(t), z(t))$ we $M_1(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))$ nokatlary alalyň. Bilşimiz ýaly, $M$ we $M_1$ nokatlardan geçýän kesijiniň $M_1$ nokat $M$ nokada ymtylandaky predel ýagdaýyna (eger bar bolsa) $M$ nokatda $Z$ egrä geçirilen galtaşýan diýilýär. $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{MM_1}$ wektor şol kesijiniň üstünde ýatyr. Diýmek, bu wektoryň predel ýagdaýy (eger bar bolsa) galtaşýanyň ugrukdyryjysy bolar. Goý, $\vec{r}(t)$ differensirlenýän bolsun. Onda



*67-nji surat*

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Görşümiz ýaly, $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{MM_1}$ wektoryň predel ýagdaýy bar. Onda kesijiniň hem predel ýagdaýy, ýagny galtaşýan göni bar we $\frac{d\vec{r}}{dt}$ wektor şol galtaşýanyň ugrukdyryjysy bolar.

**Mysal.** $x = t + \sin t$, $y = t + \cos t$, $z = t$ egriniň $t = \frac{\pi}{4}$ degişli $M\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right)$ nokadyndan geçýän galtaşýanynyň deňlemesini ýazmaly.

**Çözülişi.** $\vec{r}(t) = \{t + \sin t, t + \cos t, t\}$ egriniň $M(x(t), y(t), t)$ nokadynyň radius wektory $\vec{r}(t)$ bolsa, onuň şol nokatdaky galtaşýan gönüsiniň ugrukdyryjy wektory $\frac{d\vec{r}}{dt}$ bolar we $t = \frac{\pi}{4}$ degişli $M\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ nokatdaky galtaşýanyň ugrukdyryjysy $\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ýa-da $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left\{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$ bolar. Onda galtaşýanyň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{x - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{1}.$$

Parametre $t = t_0$ baha berip, $Z$ egriniň $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ bellibir nokadyny alalyň. $M_0$ nokatdan geçýän we galtaşýana perpendikulýar bolan tekizlige $Z$ egriniň $M_0$ nokatdaky normal tekizligi diýilýär. $M_0$ nokatdaky galtaşýan $\frac{d\vec{r}}{dt}$ wektoryň şol tekizligiň normal wektory boljakdygy düşnüklidir. Şoňa görä normal tekizligiň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

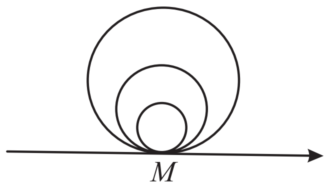
$M(x_0, y_0, z_0)$ nokatdan geçýän we normal tekizlige perpendikulýar tekizlikleriň çogdumyna seredeliň. Olaryň içinde geometriýada we mehanikada gerek bolýan biri bar. Oňa sepleşýän tekizlik diýilýär. Ol $M_0$ nokatdaky $\vec{r}'(t_0)$ we $\vec{r}''(t_0)$ wektorlaryň üstünde gurlan tekizlikdir. Eger $Z$ egrä hereket edýän $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadyň traýektoriýasy hökmünde garasak, onda sepleşýän tekizlik $M_0$ nokatdaky tizligi we tizlenmäni saklaýan tekizlikdir diýip bileris.

Sepleşýän tekizligiň deňlemesini $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$ görnüşde ýa-da ýaýbaň halda

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

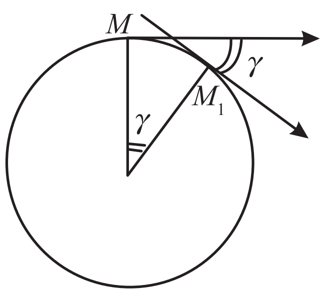
görnüşde ýazyp bolar.

Egrini häsiýetlendirýän ýene bir düşünje girizeliň. Tekizlikde göni çyzyga bir nokatda galtaşýan töwereklere seredeliň *(68-nji surat).*



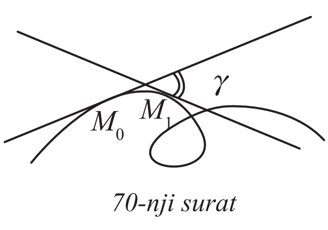

*68-nji surat*

Suratdan görnüşi ýaly, göni çyzygy $M$ nokadyň töwereginde büküp, islendik töwerek bilen gabat getirmek mümkin. Ýöne töweregiň radiusy näçe kiçi bolsa, şonça-da gönini köp bükmeli bolýar. Onuň üçin, eger $r$ töweregiň radiusy bolsa, $k=\frac{1}{r}$ ululyga töweregiň $M$ nokatdaky bükülmesi diýip at bermek bolar. Bükülmäni başgaça-da kesgitläp bolýar *(69-njy surat).*




*69-njy surat*

$\breve{MM_1}=\Delta s$ we $M$ hem-de $M_1$ nokatlardaky galtaşýanlaryň arasyndaky burçy $\gamma$ bilen belgiläliň. $\frac{\gamma}{\Delta s}$ gatnaşygyň töweregiň $M$ nokatdaky bükülmesini häsiýetlendirýändigi görnüp dur. Şonuň üçin $\frac{\gamma}{\Delta s}$ gatnaşyga töweregiň $M$ nokatdaky bükülmesi diýilýär. Bu iki kesgitlemäniň şol bir zatdygy aýdyňdyr. Ikinji kesgitlemäni islendik $Z$ egriniň $M_0$ nokadyndaky bükülmesini hasaplamak üçin ulanyp bolar *(70-nji surat).*




*70-nji surat*

$Z$ egriniň üstünde $M_0$ nokada golaý $M_1$ nokat alalyň. Olardan geçýän galtaşýanlaryň arasyndaky burçy $\gamma$ bilen, $\breve{M_0M_1}$ duganyň uzynlygyny $\Delta s$ bilen belgiläliň. $\dfrac{\gamma}{\Delta s}$ gatnaşyga $\breve{M_0M_1}$ duganyň ortaça bükülmesi diýip bileris. Eger $M_1 \to M_0$ bolanda $\lim\limits_{M_0 \to M_1} \dfrac{\gamma}{\Delta s} = k$ predel bar bolsa, onda $k$ sana $Z$ egriniň $M_0$ nokatdaky bükülmesi diýilýär. Goý, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ $Z$ egriniň $M(x(t), y(t), z(t))$ nokatdaky radius wektory bolsun. $M_0$ nokat parametriň $t = t_0$ bahasyna degişli nokat bolsun. Öňden bilşimiz ýaly, $\dot{\vec{r}}(t_0), \dot{\vec{r}}(t)$ $Z$ egrä degişlilikde $M_0$ we $M$ nokatlarda galtaşýan wektorlardyr. Diýmek, $|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \dot{\vec{r}}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t_0)| \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| \sin\gamma$. Bu deňligiň iki tarapyny hem $\Delta s$-e bölüp we $t \to t_0$ bolanda predele geçip alarys:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\sin\gamma}{\Delta s} = \lim_{t \to t_0} \frac{\sin\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\Delta s} = k,$$

$$\lim_{t \to t_0} |\dot{\vec{r}}(t_0)| \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| = |\dot{\vec{r}}(t_0)|^2;$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \dot{\vec{r}}(t)|}{\Delta s} = \lim_{t \to t_0} \left| \dot{\vec{r}}(t_0) \times \frac{\dot{\vec{r}}(t) - \dot{\vec{r}}(t_0)}{\Delta s} \right| =$$

$$= \left| \dot{\vec{r}}(t_0) \times \frac{\ddot{\vec{r}}(t_0)}{\frac{ds}{dt}} \right|, \quad \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t_0)|$$

ýa-da

$$\frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}{|\dot{\vec{r}}(t_0)|} = |\dot{\vec{r}}(t_0)|^2 \cdot k.$$

Bu ýerden:

$$k = \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}{|\dot{\vec{r}}(t_0)|^3}.$$

Ýaýbaň görnüşde

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}^2}}{[x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + z'(t_0)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Eger $Z$ egri $(x, y)$ tekizlikde ýatsa, onda alarys:

$$k = \left| \frac{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}{[x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Adatça, tekizlikde absolýut ululyk alamatyny taşlap,

$$k = \frac{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}{[x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

görnüşdäki formuladan peýdalanýarlar.

$$\frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{x'(t)^3} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

bolany sebäpli, $k$-nyň alamaty boýunça egriniň güberçek we oýuk bolýan böleklerini tapyp bolýar.

**Mysal.** $x = t, \quad y = t^2$ egriniň islendik nokadyndaky bükülmesini tapalyň.

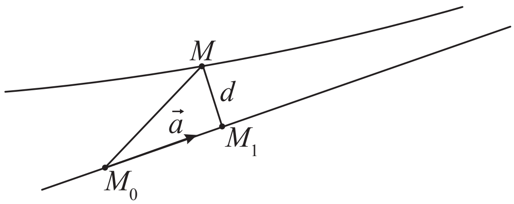
$$k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Islendik $t$ üçin $k > 0$, $x'(t) = 1 > 0$ bolany üçin, $x = t$, $y = t^2$ egri oýuk egridir diýip bileris. Eger töweregiň bükülmesi $k$ bolsa, onda kesgitlemä görä $\frac{1}{k} = R$ töweregiň radiusyna deň bolýar. Şuňa meňzeşlikde, islendik egri üçin $\frac{1}{k}$ sana bükülme radiusy diýilýär. Kesgitlenen nokatda egrä galtaşýan we radiusy bükülme radiusyna deň bolan töwerege bükülme töweregi diýilýär.

Indi parametrik görnüşde berlen egriniň asimptotasyny tapmaga girişeliň. Deňlemesi $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $T_1 < t < T_2$ görnüşdäki $Z$ egri berlen. Goý, $\alpha \in (T_1, T_2)$ üçin

$$\lim_{t\to\alpha} r(t) = \lim_{t\to\alpha}\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \to \infty \qquad (1)$$

bolsun. Eger-de $t \to \alpha$ bolanda $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{l}$, $\vec{a} = \{m, n, l\}$ göni bilen $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadyň arasyndaky $d(t)$ uzaklyk nola ymtylsa, onda şol gönä asimptota diýilýändigini biz öň hem aýdypdyk.




*71-nji surat*

71-nji suratdan görnüşi ýaly, $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}\lambda$, $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_0M} - \vec{a}\lambda$,

$$\vec{a}(\overrightarrow{M_0M_1} - \vec{a}\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\overrightarrow{M_0M} - \vec{a}\cdot\vec{a}\cdot\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{(\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M})}{|\vec{a}|^2}.$$

Diýmek, $\qquad d = |\overrightarrow{M_1M}| = \left|\overrightarrow{M_0M} - \dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right|$ $\quad$ ýa-da

$$d = \left[\left(x(t) - x_0 - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot m\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(y(t) - y_0 - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot n\right)^2 + \left(z(t) - z_0 - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot l\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Kesgitlemä görä, gönininiň asimptota bolmagy üçin $\lim\limits_{t\to\alpha} d = 0$ bolmaly ýa-da oňa deňgüýçli aşakdaky deňlikler ýerine ýetmeli:

$$\lim_{t\to\alpha}\left(x(t) - x_0 - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot m\right) = 0, \qquad (2)$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(y(t) - y_0 - \frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot n\right) = 0, \qquad (3)$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(z(t)-z_0-\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}\cdot l\right)=0. \tag{4}$$

Görnüşi ýaly, $\lim\limits_{t\to\alpha}\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}=\infty$. Onda alarys: $\lim\limits_{t\to\alpha}\dfrac{d}{\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}}=0$ ýa-da

$$\lim_{t\to\alpha}\sqrt{\left[\frac{x(t)-x_0}{(\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}):|\vec{a}|^2}-m\right]^2+\left[\frac{y(t)-y_0}{(\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}):|\vec{a}|^2}-n\right]^2+\left[\frac{z(t)-z_0}{(\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}):|\vec{a}|^2}-l\right]^2}=0.$$

Bu ýerden:

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{x(t)}{\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}}=m,\quad \lim_{t\to\alpha}\frac{y(t)}{\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}}=n,\quad \lim_{t\to\alpha}\frac{z(t)}{\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}}=l.$$

Soňky deňliklerden tapýarys:

$$\lim_{t\to\alpha}\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{n}{m}=p;\qquad \lim_{t\to\alpha}\frac{z(t)}{x(t)}=\frac{l}{m}=q;$$

$$n=pm,\ l=qm. \tag{1'}$$

**Bellik.** (1′) predellerde $\lim\limits_{t\to\alpha}x(t)=\infty$ hasap edilýär. Eger beýle bolmasa, onda maýdalawjy hökmünde şu şerti kanagatlandyrýan koordinata alynýar.

Indi $\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{M_0M}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{(x-x_0)+(y-y_0)p+(z-z_0)q}{1+p^2+q^2}\cdot\dfrac{1}{m}$ bolýandygyny göz öňünde tutup, (2), (3), (4) deňlikleri täzeden ýazalyň:

$$\lim_{t\to\alpha}\left(x(t)-x_0-\frac{x-x_0+(y-y_0)p+(z-z_0)q}{1+p^2+q^2}\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(y(t)-y_0-\frac{x-x_0+(y-y_0)p+(z-z_0)q}{1+p^2+q^2}\cdot p\right)=0,$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(z(t)-z_0-\frac{x-x_0+(y-y_0)p+(z-z_0)q}{1+p^2+q^2}\cdot q\right)=0$$

ýa-da

$$\lim_{t\to\alpha}\left(x(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}\right)=A=x_0-\frac{x_0+py_0+qz_0}{1+p^2+q^2},$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(y(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}\cdot p\right)=B=y_0-\frac{x_0+py_0+qz_0}{1+p^2+q^2}\cdot p,$$

$$\lim_{t\to\alpha}\left(z(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}\cdot q\right)=C=z_0-\frac{x_0+py_0+qz_0}{1+p^2+q^2}\cdot q.$$

$(x_0, y_0, z_0)$ nokat bilen bilelikde $\forall t_0$ üçin $(x_0+t_0m, y_0+t_0n, z_0+t_0l)$ nokadyň hem şol gönä degişlidigini göz öňünde tutup, soňky deňlikleri

$$x_0=\lim_{t\to\alpha}\left(x(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}\right), \tag{2'}$$

$$y_0=\lim_{t\to\alpha}\left(y(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}p\right), \tag{3'}$$

$$z_0=\lim_{t\to\alpha}\left(z(t)-\frac{x+py+qz}{1+p^2+q^2}q\right) \tag{4'}$$

görnüşde ýazmak bolar. Ahyrda biz şeýle netijä gelýäris. Asimptotanyň bolmagy üçin (1), (2), (3), (4) predelleriň bolmagy zerurdyr. Predelleriň bar ýagdaýynda (1′), (2′), (3′), (4′) deňliklerden gerek $p$, $q$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ sanlary tapýarlar we göni çyzygyň deňlemesinde ýerine goýup, asimptotany alýarlar.

**Mysal.** $x=t-\dfrac{2}{t^2},\ y=t,\ z=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$ egriniň asimptotalaryny tapmaly.

**Çözülişi.** $r^2=x^2+y^2+z^2$ $t\to 0$ we $t\to\infty$ bolanda tükeniksizlige ymtylýar. Bu sebäbe görä, onuň iki asimptotasy bolmagy mümkin.

I. $t\to 0$ ýagdaýa seredeliň. (1′) – (4′) predelleri tapalyň:

1. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{t-\dfrac{2}{t^2}}=0,\ p=0;\ \dfrac{n}{m}=0\Rightarrow n=0.$

$$\lim_{t\to 0}\frac{z(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{2+t^2}{1+t^2}}{t-\dfrac{2}{t^2}} = 0,\ q = 0;\quad \frac{l}{m} = 0 \Rightarrow l = 0.$$

$$2.\ x_0 = \lim_{t\to 0}\left(t-\frac{2}{t^2}-\frac{t-\dfrac{2}{t^2}+t\cdot 0+\dfrac{2+t^2}{1+t^2}\cdot 0}{1+0^2+0^2}\right) = 0.$$

$$3.\ y_0 = \lim_{t\to 0}\left(t-\frac{t-\dfrac{2}{t^2}+t\cdot 0+\dfrac{2+t^2}{1+t^2}\cdot 0}{1+0^2+0^2}\cdot 0\right) = 0.$$

$$4.\ z_0 = \lim_{t\to 0}\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}-\frac{t-\dfrac{2}{t^2}+t\cdot 0+\dfrac{2+t^2}{1+t^2}\cdot 0}{1+0^2+0^2}\cdot 0\right) = 2.$$

Göni çyzygyň deňlemesinde tapylan näbellileriň bahalaryny goýup, birinji asimptotany alarys:

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-2}{0} \text{ ýa-da } y = 0;\ z = 2.$$

II. $t \to \infty$ ýagdaýa seredeliň. (1′) – (4′) predelleri tapalyň:

$$1.\ \lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{t-\dfrac{2}{t^2}} = 1,\ p = 1;\ \frac{n}{m} = 1 \Rightarrow n = m.$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{z(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{2+t^2}{1+t^2}}{t-\dfrac{2}{t^2}} = 0,\ q = 0;\quad \frac{l}{m} = 0 \Rightarrow l = 0.$$

$$2.\ x_0 = \lim_{t\to\infty}\left(t-\frac{2}{t^2}-\frac{t-\dfrac{2}{t^2}+t}{2}\right) = 0.$$

$$3.\ y_0 = \lim_{t\to\infty}\left(t-\frac{t-\dfrac{2}{t^2}+t}{2}\right) = 0.$$

4. $z_0 = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{2+t^2}{1+t^2} - \dfrac{t-\dfrac{2}{t^2}+t}{2}\cdot 0\right) = 1.$

Göni çyzygyň deňlemesine tapylan näbellileri goýup, ikinji asimptotany alarys:

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y-0}{m} = \frac{z-1}{0} \quad \text{ýa-da} \quad x = y, \quad z = 1.$$

# VII. INTEGRAL HASAPLAÝYŞ

## §1. Kesgitsiz integral

Geçen bölümlerde funksiýanyň önümini tapmak bilen baglanyşykly meseleleriň birnäçesine garap geçdik. Funksiýanyň grafigine geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapmak funksiýanyň birinji tertipli önümini tapmak bilen baglanyşykly. Hereket edýän nokadyň tizligini we tizlenmesini tapmak funksiýanyň birinji we ikinji tertipli önümlerini tapmak bilen baglanyşykly. Bu mysallary dowam etdirse bolar. Emma durmuşda edil ýokarda agzalanlara ters bolan meseleleri çözmek gerek bolýan wagtlary hem az däl. Mysal üçin, dykyzlyk boýunça jisimiň massasyny tapmak, tizlik boýunça hereketiň kanunyny tapmak, tizlenme boýunça tizligi kesgitlemek ýaly meseleleriň sany diýseň köp. Olaryň hemmesi bir esasy meselä syrygýar, ýagny berlen önüm boýunça funksiýany kesgitlemek. Ine, şu mesele matematikanyň integral hasaplaýyş diýen bölüminiň esasy meselesidir. Kesgitsiz integral düşünjesi bolsa şol meseläni çözmek üçin girizilen guraldyr.

### 1. Asyl funksiýa we onuň häsiýetleri

Goý, $f(x)$ we $F(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde kesgitlenen, $F(x)$ şol kesimde differensirlenýän bolsun.

**Kesgitleme.** Eger $\forall x \in [a,b]$ üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerlikli bolsa, onda $F(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde $f(x)$ funksiýanyň *asyl funksiýasy* diýilýär.

Mysal üçin, $y = \frac{x^3}{3} + 5$ funksiýa $(-\infty, \infty)$ aralykda $y = x^2$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr, sebäbi $\forall x \in (-\infty; \infty)$ üçin $\left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2$.

$y = \ln x$ funksiýa $(0, \infty)$ aralykda $y = \dfrac{1}{x}$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr, sebäbi $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Asyl funksiýalaryň iki sany esasy häsiýeti bar.

**1-nji häsiýet.** $f(x)$ funksiýanyň islendik iki asyl funksiýasynyň tapawudy hemişelik sandyr.

**Subudy.** Goý, $F_1(x)$, $F_2(x)$ asyl funksiýalar bolsun. Onda $\forall x \in [a,b]$ üçin $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$ deňlikler ýerliklidir we

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

bolar. Diýmek, $\forall x \in [a,b]$ üçin $F_1(x) - F_2(x) = C$.

**2-nji häsiýet.** $f(x)$ funksiýanyň islendik $F(x)$ asyl funksiýasynyň üstüne hemişelik san goşsak ýene-de asyl funksiýa alarys.

**Subudy.** Şerte görä $F'(x) = f(x)$, $C$ – hemişelik san. Onda $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ bolar, ýagny $F(x) + C$ asyl funksiýadyr.

**Netije.** Goý, $\mathfrak{I}(x)$ asyl funksiýalaryň biri bolsun. Onda asyl funksiýalaryň toplumy

$$F(x) = \mathfrak{I}(x) + C$$

formula arkaly tapylar.

Mysal üçin, $\mathfrak{I}(x) = \dfrac{x^3}{3}$ funksiýa $f(x) = x^2$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Onda $f(x) = x^2$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň toplumy $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ formula arkaly kesgitlener.

## 2. Kesgitsiz integral we onuň häsiýetleri

**Kesgitleme.** $f(x)$ funksiýanyň $[a,b]$ kesimdäki asyl funksiýalarynyň toplumyna $f(x)$ funksiýanyň kesgitsiz integraly diýilýär we ol

$$\int f(x)dx$$

bilen belgilenýär.

Eger $\mathfrak{I}(x) + C$ $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň toplumy bolsa, onda kesgitlemä görä:

$$\int f(x)dx = \mathfrak{I}(x) + C.$$

Bu formula kesgitsiz integraly hasaplaýyş formulasydyr. $f(x)$ – integralyň aşagyndaky funksiýa, $f(x)dx$ – integralyň aşagyndaky aňlatma, $\int$ – integral belgisi, $C$ bolsa integrirlemegiň hemişeligi.

**Mysallar.** $\mathfrak{I}(x) = \frac{x^3}{3}$ funksiýa $f(x) = x^2$ funksiýanyň asyl funksiýasy. Diýmek, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ diýip ýazyp bolar. $\mathfrak{I}(x) = \sin x$ funksiýa $f(x) = \cos x$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr. Diýmek, $\int \cos x dx = \sin x + C$ diýip ýazyp bolar.

Görşümiz ýaly, integral $\mathfrak{I}(x)$ funksiýany onuň $f(x)$ önümi boýunça dikeldýär. Bu prosese $f(x)$ funksiýadan integral almak ýa-da $f(x)$ funksiýanyň integralyny hasaplamak diýilýär. Biz ýokarda $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ funksiýalardan integral aldyk.

Indi kesgitsiz integralyň häsiýetleriniň üstünde durup geçeliň.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ ($a$ – hemişelik ululyk, $a \neq 0$).

5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Elbetde, bu deňlikler bellibir kesimde ýa-da aralykda seredilýär. Şol deňliklerde gabat gelýän $f(x)$, $g(x)$ funksiýalaryň integrallary bar, üçünji häsiýetde bolsa $f'(x)$ seredilýän ýaýlada bar diýip hasap edilýär. Biz bu häsiýetleri ýokarky şertlerde okyjynyň özi aňsatlyk bilen subut eder diýip pikir edýäris. Bäşinji häsiýetiň goşulyjylarynyň sanynyň ikiden köp (tükenikli) ýagdaýynda hem dogrulygy induksiýany ulanyp aňsatlyk bilen subut edilýär. Elbetde, haýsy funksiýanyň kesgitsiz integraly bar diýen sowal gös-göni ýüze çykýar. Biz ol sowaly açyk galdyryp, ýöne $(a,\ b)$ aralykda üznüksiz funksiýanyň integralynyň bardygyny subutsyz belläp geçeliň.

## 3. Ýönekeý funksiýalaryň integrallarynyň sanawy

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1.$

3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + m}\right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C.$

15. $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C.$

## 4. Kesgitsiz integraly hasaplamagyň usullary

**1. Gönümel integrirlemek usuly.** Berlen funksiýanyň kesgitsiz integralyny ýönekeý funksiýalaryň integrallarynyň sanawyny, integralyň häsiýetlerini ulanyp tapmaklyga gönümel integrirlemek usuly diýilýär. Bu usulyň düýp manysy integralyň aşagyndaky funksiýanyň üstünde toždestwolaýyn özgertme geçirmek we integralyň häsiýetlerini ulanmak bilen berlen integraly bir ýa-da birnäçe sanawdaky integrallara getirmekden ybaratdyr. Mysallara seredeliň.

1. $\int \frac{5x^4 - 3x^3 - 2x + 1}{x^2} dx.$

Integralyň aşagyndaky funksiýanyň sanawjysyny maýdalawja bölüp we integralyň 4-nji, 5-nji häsiýetlerini ulanyp alarys:

$$\int \frac{5x^4 - 3x^3 - 2x + 1}{x^2} dx = 5\int x^2 dx - 3\int x dx - 2\int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

2. $\int \frac{2x^5 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx.$

Integralyň aşagyndaky kökleri dereje görnüşinde ýazyp we derejäniň häsiýetlerini ulanyp alarys:

$$\int \frac{2x^5 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int 2x^5 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}} dx = 2\int x^5 \cdot x^{-\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{55}{12}} dx = 2\frac{x^{\frac{55}{12}+1}}{\frac{55}{12}+1} + C = \frac{24}{67}x^{\frac{67}{12}} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

Integralyň aşagyndaky funksiýany özgerdeliň:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}\right)\sin x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right] dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1 - \cos x)'}{1 - \cos x} dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} dx = \frac{1}{2}\ln|1 - \cos x| - \frac{1}{2}\ln|1 + \cos x| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + C = \ln\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{4 + 3x^2} dx.$

Integralyň aşagyndaky funksiýanyň sanawjysyny maýdalawja bölüp alarys:

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)(4 + 3x^2) - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Diýmek,

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{4 + 3x^2} dx = \int \left[ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}{4 + 3x^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int x dx - \frac{2}{3} \int dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}{4 + 3x^2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x +$$

$$+ \int \frac{-\frac{1}{3}x}{4 + 3x^2} dx + \int \frac{\frac{5}{3}}{4 + 3x^2} dx = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{18} \int \frac{6x}{4 + 3x^2} dx +$$

$$+ \frac{5}{3} \int \frac{1}{3\left[\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + x^2\right]} dx = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{18} \int \frac{(4 + 3x^2)'}{4 + 3x^2} dx +$$

$$+ \frac{5}{9} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{18} \ln(4 + 3x^2) +$$

$$+ \frac{5}{9} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}} + C.$$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx.$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ toždestwony ulanyp alarys:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$$

$$= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \ln|\cos x| + C.$$

**2. Üýtgeýäni çalşyrma usuly.** Hemme integrallary gönümel usul bilen tapyp bolmaýar. Bu hili integrallary hasaplamak üçin täze usullary girizmeli bolýar. Şol usullaryň biri-de üýtgeýäni çalşyrma usulydyr. Ol şundan ybarat. Goý, $\int f(x)dx$ hasaplamaly bolsun. $f(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasyny $F(x)$ bilen belgiläliň. Onda kesgitlemä görä,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Goý, $f(x)$ seredilýän ýaýlada üznüksiz bolsun. $x = \varphi(t)$ deňlik bilen täze $t$ üýtgeýän girizeliň. $x = \varphi(t)$ funksiýanyň bahalary $f(x)$-iň üznüksizlik ýaýlasyna degişli, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – üznüksiz funksiýalar bolsun. Onda $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ üznüksiz bolar we ýokardaky aýdylanlara görä $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ integral bardyr. $F(\varphi(t))$ çylşyrymly funksiýanyň önümi $F'(\varphi(t)) = F_x'(\varphi(t))\varphi'(\mathrm{t})$ bolar we $F_x' = f(x)$ bolýandygy sebäpli $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ýazyp bileris. Diýmek, $F(\varphi(t))$ funksiýa $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ funksiýanyň asyl funksiýasy bolýar. Şoňa görä

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

deňlik dogrudyr. $x = \varphi(t)$ bolanda $F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$ bolýanlygyny göz öňünde tutup, soňky deňligi

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

görnüşde ýazyp bileris. Ine, şu formula kesgitsiz integralda üýtgeýäni çalşyrma formulasy diýilýär. Bu formulany $\int f(x)dx$ integraly gönümel usul bilen alyp bolmaýan, emma $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ integraly alyp bolýan ýagdaýda ulanmak amatlydyr.

**Mysallara seredeliň.**

1. $\int \sin(ax + b)dx$; $ax + b = t$ ýa-da $x = \dfrac{t-b}{a}$ çalşyrma girizeliň. $\dfrac{t-b}{a}$ funksiýanyň özi we önümi üznüksiz. Diýmek, biz ýokarky formuladan peýdalanyp bileris.

$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin t \cdot \dfrac{1}{a}dt = -\dfrac{1}{a}\cos t + C$; $t$-niň ýerine onuň $t = ax + b$ bahasyny goýup alarys:

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

2. $\int \frac{dx}{ax+b}$; $ax + b = t$ ýa-da $x = \frac{t-b}{a}$ çalşyrma girizip alarys:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{\frac{1}{a}}{t}dt = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

3. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$; $t = \varphi(x)$ çalşyrma girizeliň; $\varphi(x)$ funksiýanyň önümi bar hasap edip, soňky deňligiň iki tarapyndan differensial alalyň: $dt = \varphi'(x)dx$; $\varphi(x)$-iň we $\varphi'(x)dx$-iň ýerine degişlilikde $t$ we $dt$ goýup alarys:

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$; $t$-niň ýerine $t = \varphi(x)$ bahasyny goýup,

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

deňligi alarys. Mysalyň özboluşly üýtgeşikligi bar. Biz çalşyrmany $x = \varphi(t)$ görnüşde däl-de, $t = \varphi(x)$ görnüşde girizdik we bize $x$ üýtgeýäni $t$-niň üsti bilen aňlatmak gerek hem bolmady.

4. $\int \sin^5 x \cos x dx$; $t = \sin x$ çalşyrma girizeliň, onuň iki tarapyndan differensial alalyň: $dt = \cos x dx$; $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ bahalary integralda ýerine goýup alarys:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Integraly üýtgeýänleri çalşyrma formulasynda ulanylan $x = \varphi(t)$ görnüşdäki çalşyrma bilen ($x = \arcsin t$) hasaplap görseňiz, ýene-de şol netijä gelersiňiz. Bu bolsa 3-nji we 4-nji mysallarda ulanylan ýeňilleşdirilen usulyň dogrulygynyň bir tassyklamasy bolar.

**3. Bölekleýin integrirleme usuly.** Goý, seredilýän ýaýlada $U(x)$, $U'(x)$, $V(x)$, $V'(x)$ funksiýalar üznüksiz bolsun, onda

$$\int U(x)dV(x) = U(x)V(x) - \int V(x)dU(x)$$

ýa-da gysgaça

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

formula dogrudyr. Bu formula kesgitsiz integraly bölekleýin integrirleme formulasy diýilýär. Subut etmek üçin formulany

$$\int U(x)V'(x)dx = U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)dx$$

görnüşde ýazyp, onuň sag tarapyndan önüm alalyň:

$$\left[U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)dx\right]' = (U(x)\cdot V(x))' - \left(\int V(x)U'(x)dx\right)' =$$

$$= U'(x)V(x) + V'(x)U(x) - V(x)U'(x) = V'(x)U(x).$$

Görşümiz ýaly, formulanyň sag tarapynyň önümi formulanyň çep tarapyndaky integralyň aşagyndaky funksiýa deň, ýagny onuň asyl funksiýasy bolýar. Bu bolsa formula dogry diýmekdir. Mysallara seredeliň.

1. $\int x\ln x dx$. Bölekleýin integrirlemek üçin integralyň aşagyndaky aňlatmanyň haýsy böleginiň $U$ we haýsy böleginiň $dV$ bolýandygyny anyklamaly. Bu örän wajypdyr. Sebäbi $U$ we $dV$ nädogry kesgitlenen ýagdaýynda integralyň alynmazlygy hem ähtimaldyr.

Mysalda $U=\ln x$, $xdx=dV$ diýip kabul edeliň. Formulany ulanmak üçin ýene-de $dU$, $V$ ululyklary tapmaly. $U=\ln x$ deňlikden $dU = \frac{1}{x}dx$-i tapýarys. $xdx = dV$ deňlikden $V$-ni tapmak üçin onuň iki tarapyndan integral alýarys: $\int dV = \int xdx$ ýa-da $V = \frac{x^2}{2}$ (bize integralyň diňe bir bahasy gerek). Formulany ulanyp alarys:

$$\int x\ln x dx = \int UdV = U\cdot V - \int VdU = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. $\int (2x^2 - x + 5)e^x dx$; $U = 2x^2 - x + 5$; $e^x dx = dV$ bolsun. $dU$ we $V$ ululyklary tapalyň: $dU = (4x - 1)dx$, $\int dV = \int e^x dx$ ýa-da $V = e^x$. Formulany ulanyp alarys:

$$\int (2x^2 - x + 5)e^x dx = \int UdV = UV - \int VdU =$$

$$= (2x^2 - x + 5)e^x - \int e^x (4x - 1)dx.$$

Indi $\int (4x - 1)e^x dx$ integraly hem bölekleýin integrirläp tapalyň. $U = 4x - 1$, $e^x\, dx = dV$ bolsun. Onda $dU = 4dx$, $V = e^x$ bolar we formulany ulanyp alarys:

$$\int (4x - 1)e^x dx = \int UdV = UV - \int VdU =$$

$$= (4x - 1)e^x - \int e^x 4dx = (4x - 1)e^x - 4e^x + C.$$

Şeýlelikde,

$$\int (2x^2 - x + 5)e^x dx = (2x^2 - x + 5)e^x - \int (4x - 1)e^x dx =$$

$$= (2x^2 - x + 5)e^x - (4x - 1)e^x + 4e^x + C.$$

Görşümiz ýaly, mysaly çözmekde bölekleýin integrirlemek usulyny iki gezek yzly-yzyna ulanmaly boldy. Usuly köp gezek gaýtalap ulanmaly wagtlary hem az däl. Aşakda bölekleýin integrirlemek usuly bilen hasaplanýan integrallaryň görnüşlerini getirýäris.

1. $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$. Bu ýerde $P_n(x) - n$ derejeli köpagza, $\alpha$ – hakyky san. Integraly hasaplamak üçin $P_n(x) = U$, $e^{\alpha x} dx = dV$ belgilemeleri girizmek amatly bolýar. Bir gezek bölekleýin integrirlenenden soň ýene-de $n$ derejeli $P_n(x)$-iň ýerine $(n - 1)$ derejeli $P_{n-1}(x)$ köpagza duran ýokarka meňzeş integraly hasaplamaly bolýarys. $P_{n-1}(x) = U$, $e^{\alpha x} dx = dV$ belgilemeleri girizip, ýene-de bölekleýin integrirleýäris. Bu prosesi $n$ gezek gaýtalanymyzdan soň integral alynýar.

2. $\int P_n(x)\ln x dx$. $U = \ln x$, $P_n(x)dx = dV$ belgilemeleri girizip, bölekleýin integrirlemeli.

3. $\int P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x dx$. $P_n(x)$ – köpagza, $\alpha, \beta$ – hakyky sanlar. Şeýle integrallaryň ikisini birden hasaplap bolýan emeli ýoly bar. $\int P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}dx$ integraly 1-nji mysaldaka meňzeş edip hasaplaýarlar. Netijede, $\int P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}dx = Q_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + C$ görnüşde deňlik alýarlar. $Q_n(x)$ – koeffisiýentleri kompleks san bolan köpagza. Ony $Q_{n1} + iQ_{n2}$ görnüşde hyýaly we hakyky böleklere bölüp ýazýarlar we $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ formulany ulanyp, ýokarky deňligi

$$\int P_n e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)dx =$$
$$= (Q_{n1} + iQ_{n2})e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_1 + iC_2$$

görnüşde ýazýarlar we hakyky hem-de hyýaly böleklerini aýratyn deňeşdirip, aşakdaky iki deňligi alýarlar:

$$\int P_n e^{\alpha x}\cos\beta x dx = (Q_{n1}\cos\beta x - Q_{n2}\sin\beta x)e^{\alpha x} + C_1,$$

$$\int P_n e^{\alpha x}\sin\beta x dx = (Q_{n1}\sin\beta x + Q_{n2}\cos\beta x)e^{\alpha x} + C_2.$$

4. $\int \cos\beta x e^{\alpha x}dx$. Bu integral ýokarda seredilen integralyň $(P_n(x) = 1)$ hususy görnüşi. Alarys:

$$\int e^{(\alpha+i\beta)x}dx = \frac{1}{\alpha + i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x} + C = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) +$$
$$+ C_1 + iC_2 = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} +$$
$$+ i\frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C_1 + iC_2.$$

Diýmek,

$$\int \cos\beta x e^{\alpha x}dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C_1,$$

$$\int \sin\beta x e^{\alpha x}dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C_2.$$

Bu integraly bölekleýin integrirleme usuly bilen hem tapyp bolýar. $U = \cos\beta x$, $dV = e^{\alpha x}dx$ belgilemeleri girizip we iki gezek yzly-yzyna bölekleýin integrirläp alarys:

$$\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\cos\beta x e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha}\int \sin\beta x e^{\alpha x} dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos\beta x e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}\sin\beta x e^{\alpha x} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx.$$

Soňky integraly deňligiň çep tarapyna geçirip ýazalyň:

$$\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx = \left(\frac{1}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha^2}\sin\beta x\right)e^{\alpha x}.$$

Bu ýerden, alarys:

$$\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}\left[\frac{1}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha^2}\sin\beta x\right]e^{\alpha x} + C$$

ýa-da

$$\int \cos\beta x e^{\alpha x} dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}e^{\alpha x} + C.$$

5. $\int P_n(x)\mathrm{arctg}x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$ integrallar hem degişlilikde $U = \mathrm{arctg}x$, $P_n(x)dx = dV$; $U = \arcsin x$, $P_n(x)dx = dV$; $U = \arccos x$, $P_n(x)dx = dV$ belgilemeleri girizip, bölekleýin integrirläp ýönekeýleşdirilýär.

Biz ýokarda kesgitsiz integraly hasaplamagyň üç usulynyň üstünde durup geçdik. Kä ýagdaýda bir integraly hasaplamak üçin usullaryň üçüsini-de ulanmaly ýerleri gabat gelýär. Seredilen usullaryň hiç biriniň-de integraly hasaplamaga ýardam etmeýän wagtlary bolýar. Aşakda biz şeýle integrallaryň käbirlerine seredip geçeris. Şol integrallara geçmezden ozal, ýokarda gabat gelen $(\alpha + i\beta)$ görnüşde bolýan kompleks sanlar barada maglumat bereliň.

## 5. Kompleks sanlar we olaryň üstünde amallar

Bitin, rasional we hakyky sanlar bilen bir hatarda kompleks sanlar hem matematikanyň esasy düşünjeleriniň biridir. Olar köp meseleleri çözmäge ýardam edýän wajyp matematiki guraldyr. $x^2 + 1 = 0$ deňlemäniň hakyky köki ýokdugy düşnükli. Şol deňlemäniň hyýaly köki bar diýeliň we ony $i$ harpy bilen belgiläliň. Kesgitlemä görä $i^2 = -1$ bolmaly. $-i$ sanyň hem şol deňlemäniň köki boljakdygy aýdyň. Şeýlelikde, $i$ sany girizmek bilen biz $x^2 + 1 = 0$ deňlemäniň iki köküni tapdyk. Olar $x_1 = i$, $x_2 = -i$. $i$ sana hyýaly birlik diýilýär. Onuň esasy häsiýeti $i^2 = -1$ bolmagydyr. Indi islendik hakyky $\beta$ san üçin $\beta i$ hyýaly san girizeliň: $(\beta i)^2 = \beta^2 \cdot i^2 = -\beta^2$ diýip kabul edeliň. Onda $\pm\beta i$ hyýaly sanlar $x^2 + \beta^2 = 0$ deňlemäniň köki bolarlar. Seýle hyýaly sanlaryň köplügi edil hakyky sanlar köplügi ýaly giňdir. Kompleks sanlar diýip atlandyrylýan we hyýaly sanlar köplügini hem-de hakyky sanlar köplügini öz içinde saklaýan täze bir sanlar köplügini girizeliň.

**Kesgitleme.** $\alpha + \beta i$ görnüşdäki sana kompleks san diýilýär. $\alpha$ hakyky sana onuň hakyky bölegi, $\beta$ hakyky sana onuň hyýaly bölegi diýilýär. Görnüşi ýaly, $\beta = 0$ görnüşdäki kompleks sanlar köplügi hakyky sanlar köplügi bilen gabat gelýär, $\alpha = 0$ görnüşdäki kompleks sanlar köplügi hyýaly sanlar köplügi bilen gabat gelýär. Diýmek, kompleks sanlar köplügi şol iki köplügi öz içinde saklaýar.

$\alpha = 0$, $\beta = 0$ bolan kompleks sana nola deň san diýilýär we $\alpha + \beta i = 0$ ýazylýar. $\alpha + \beta i$ we $\alpha_1 + \beta_1 i$ sanlarda $\alpha = \alpha_1$ we $\beta = \beta_1$ bolsa, olara deň sanlar diýilýär we $\alpha + \beta i = \alpha_1 + \beta_1 i$ ýazylýar. Diýmek, kompleks sanyň nola deň bolmagy üçin onuň hakyky bölegi-de, hyýaly bölegi-de nola deň bolmalydyr. Iki kompleks sanyň deň bolmagy üçin olaryň hakyky bölekleri-de özara deň, hyýaly bölekleri-de özara deň bolmalydyr. Amatlylyk üçin kompleks sany $z$ harpy bilen belgiläliň. Mysal üçin, $z = \alpha + \beta i$, $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ we ş.m. Kompleks sanlar köplüginde arifmetikanyň dört amalyny kesgitläp bolýar.

**1. Kompleks sanlary goşmak.** Kompleks sanlary goşanyňda ýene-de kompleks san emele gelýär. Onuň hakyky bölegi goşulyjylaryň hakyky bölekleriniň, hyýaly bölegi bolsa hyýaly bölekleriniň jemine deňdir. $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ we $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ kompleks sanlaryň jemi $z_1 + z_2$ bilen belgilenýär we kesgitlemä görä

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i.$$

**2. Kompleks sanlary aýyrmak.** Kompleks sanlary biri-birinden aýranyňda ýene-de kompleks san emele gelýär. Ol $z_1 - z_2$ bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)i.$$

**3. Kompleks sanlary köpeltmek.** $z_1$ we $z_2$ kompleks sanlaryň köpeltmek hasyly kompleks sandyr. Ol $z_1 \cdot z_2$ bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)i.$$

Bu formula şeýle tapylýar. $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ we $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ sanlara edil hakyky sanlar hökmünde garap, olary köpeldýärler:

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 i + \beta_1\alpha_2 i + \beta_1\beta_2 i^2.$$

Soňra $i^2 = -1$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$z_1 z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)i.$$

**4. Kompleks sanlary bölmek.** Kompleks sanlaryň gatnaşygy ýene-de kompleks sandyr. Ol $z_1/z_2$ ýa-da $z_1 : z_2$ bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Bu formula şeýle tapylýar. $\dfrac{z_1}{z_2}$ gatnaşygyň sanawjysyny we maýdalawjysyny $\overline{z_2} = \alpha_2 - \beta_2 i$ sana köpeldýärler. Soňra sanawjyny we maýdalawjyny ýönekeýleşdirýärler:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)}{(\alpha_2 + \beta_2 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Kompleks sanlar köplüginde kesgitlenen goşmak, aýyrmak we köpeltmek amallary hakyky sanlar köplüginde kesgitlenen edil şu hili amallaryň hemme häsiýetlerine eýedirler:

a) orun çalşyrma häsiýeti:

islendik $z_1$ we $z_2$ kompleks san üçin $z_1z_2 = z_2z_1$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

b) utgaşdyrma häsiýeti:

islendik $z_1, z_2, z_3$ kompleks sanlar üçin $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$, $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

ç) paýlaşdyrma häsiýeti:

islendik $z_1, z_2, z_3$ kompleks sanlar üçin $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Diýmek, kompleks sanlar üstünde arifmetiki amallar geçirilende, biz hakyky sanlardaky ýaly hereket edip bileris. Ýatda saklamaly bir zat, ol hem $i^2 = -1$ bolmagydyr.

**Mysallara seredeliň.** $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 2 + 5i$ sanlar berlen. $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1z_2$, $z_1/z_3$, $z_3(z_1 + z_2)$, $3z_1 + 5z_3 + (z_1 + z_2)^2$ sanlary hasaplamaly.

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-1 + 2i) = (2 - 1) + (-3 + 2)i = 1 - i.$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-1 + 2i) = (2 + 1) + (-3 - 2)i = 3 - 5i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)(-1 + 2i) = -2 + 4i + 3i - 6i^2 = -2 + 4i + $$
$$+ 3i + 6 = 4 + 7i.$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{2 - 3i}{2 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{4 - 10i - 6i + 15i^2}{4 + 25} =$$
$$= \frac{-11 - 16i}{29} = -\frac{11}{29} - \frac{16}{29} \cdot i.$$

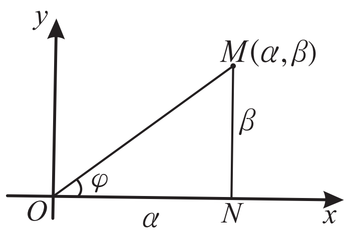
$$z_3(z_1 + z_2) = (2 + 5i)(2 - 3i - 1 + 2i) = (2 + 5i)(1 - i) = 2 -$$
$$- 2i + 5i - 5i^2 = 7 + 3i.$$

$$3z_1 + 5z_3 + (z_1 + z_2)^2 = 3(2 - 3i) + 5(2 + 5i) + [(2 - 3i) +$$
$$+ (-1 + 2i)]^2 = 6 - 9i + 10 + 25i + [1 - i]^2 = 16 + 16i + 1 -$$
$$- 2i + i^2 = 16 + 16i - 2i = 16 + 14i.$$

Ýene-de bir düşünjäni bilmek peýdaly bolmagy mümkin. $\alpha + \beta i$ kompleks san tekizlikde $M(\alpha, \beta)$ nokat görnüşinde şekillendirilýär we $M(\alpha, \beta)$ nokada kompleks sanyň geometriki görnüşi diýilýär.

## 6. Kompleks sanyň trigonometrik görnüşi

Goý, $z = \alpha + \beta i$ kompleks san berilsin. Tekizlikde $M(\alpha, \beta)$ nokady guralyň *(72-nji surat)*. $OM = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ položitel sana $z$ kompleks sanyň moduly diýilýär we ol $|z|$ bilen belgilenýär, $\varphi$ burça bolsa $z$ kompleks sanyň argumenti diýilýär we ol arg $z$ bilen belgilenýär. Diýmek,




*72-nji surat*

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = OM,$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

$\Delta OMN$-den alarys: $\beta = OM\sin\varphi$, $\alpha = OM\cos\varphi$; $z = \alpha + \beta i$ deňlikde $\alpha$ we $\beta$-nyň bahalaryny goýup alarys:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ine, kompleks sanyň şeýle ýazylyşyna onuň trigonometrik görnüşi diýilýär. Eýleriň

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

formulasyny ulanyp, kompleks sanyň trigonometrik görnüşini

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

ýaly hem ýazyp bileris.

**Mysal.** $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazalyň. Onuň üçin ol sanyň modulyny we argumentini tapmaly hem-de $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ formulada ýerine goýmaly.

**Tapýarys:** $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ gözlenýän trigonometrik görnüş bolar.

Kompleks derejeli $e^z$ funksiýanyň esasy häsiýetlerini belläp geçeliň.

**1. Birinji häsiýet.** Eger $z = x + iy$ bolsa, onda

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

deňlik dogrudyr.

**2. Ikinji häsiýet.** Islendik $\alpha$ hakyky san üçin $(e^z)^\alpha = e^{\alpha z}\cdot e^{2\pi k\alpha i}$, $k$ – islendik bitin san, deňlik dogrudyr.

Birinji häsiýetden $e^{z+2\pi i} \equiv e^z$ toždestwo, ýagny $e^z$ funksiýanyň $2\pi i$ periodly funksiýadygy gelip çykýar. Ikinji häsiýetden $e^z$ funksiýanyň $\alpha$ derejesiniň şol bir $z$ nokatdaky bahasynyň birden köp, hatda tükeniksiz sanda bolmagynyň mümkinligi gelip çykýar.

Ikinji häsiýeti $\alpha$ bitin san, rasional san we irrasional san bolanda derňäliň.

**Birinji ýagdaý.** $\alpha = n$, $n$ – bitin san. Birinji häsiýete görä $e^{2k\pi ni} = 1$ we $(e^z)^n = e^{nz}$ bolar. Diýmek, $e^z$ funksiýanyň $n$-nji derejesiniň diňe bir bahasy bar, ol hem $e^{nz}$ bolýar.

**Ikinji ýagdaý.** $\alpha = \frac{m}{n}$. $\frac{m}{n}$ – gysgalmaýan drob, $n$, $m$ – bitin sanlar. Islendik $k_1 \in \{0, 1, ...., n-1\}$, $k_2 \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $k_1 \neq k_2$ üçin $e^{2\pi\frac{m}{n}k_1 i} \neq e^{2\pi\frac{m}{n}k_2 i}$ boljakdygyny görkezeliň. Dogrudan hem, birinji häsiýete görä,

$$e^{2\pi\frac{m}{n}k_1 i} = \cos 2\pi\frac{m}{n}k_1 + i\sin 2\pi\frac{m}{n}k_1,$$

$$e^{2\pi\frac{m}{n}k_2 i} = \cos 2\pi\frac{m}{n}k_2 + i\sin 2\pi\frac{m}{n}k_2.$$

Eger deňlikleriň çep taraplary deň bolsalar, onda

$$\cos 2\pi\frac{m}{n}k_1 = \cos 2\pi\frac{m}{n}k_2,$$

$$\sin 2\pi\frac{m}{n}k_1 = \sin 2\pi\frac{m}{n}k_2.$$

deňlikler hem dogrudyrlar. Şoňa görä

$$\sin 2\pi \frac{m}{n} \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot \sin 2\pi \frac{m}{n} \frac{k_1 + k_2}{2} = 0,$$

$$\sin 2\pi \frac{m}{n} \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot \cos 2\pi \frac{m}{n} \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

Bu ýerden käbir bitin $s$ san üçin

$$2\pi \frac{m}{n} \frac{k_1 - k_2}{2} = \pi s \text{ ýa-da } k_1 - k_2 = \frac{n \cdot s}{m}$$

deňligiň zerurlygy gelip çykýar. $\frac{n}{m}$ gysgalmaýan drob. Diýmek, $k_1 - k_2$ tapawudyň bitin san bolmagy üçin $\frac{s}{m}$ bitin san bolmaly. Bu bolsa $k_1 - k_2$ tapawut $n$-den uludyr ýa-da deňdir diýmek bolýar. Emma $k_1$, $k_2$ sanlaryň kesgitlenişine görä $|k_1 - k_2| \le n - 1.$ Bu gapma-garşylyk $e^{2\pi \frac{m}{n} k_1 i} = e^{2\pi \frac{m}{n} k_2 i}$ teklibiň dogry däldigini, ýagny $(e^z)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}z} \cdot e^{2\pi k \frac{m}{n} i}$, $k = 0, 1, ..., n - 1$, sanlaryň dürli sanlardygyny subut edýär.

Goý, indi $k_1 \notin \{0, 1, ..., n - 1\}$ islendik bitin san bolsun. Onda käbir bitin $s$ san tapylyp, $k_1 - sn \in \{0, 1, ..., n - 1\}$ bolar. $k_1 - sn = k$ bilen belläp, $k_1 = sn + k$ alarys.

$$e^{2\pi \frac{m}{n} k_1 i} = e^{2\pi \frac{m}{n}(sn+k)i} = e^{2\pi \frac{m}{n} ki + 2\pi msi} = e^{2\pi \frac{m}{n} ki}$$

bolany sebäpli, $(e^z)^{\frac{m}{n}}$ derejäniň ýokarda getirilen $n$ dürli bahalaryndan başga bahasy ýokdur. Şeýlelikde, $\alpha = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}$ – gysgalmaýan rasional drob bolan ýagdaýynda $(e^z)^{\frac{m}{n}}$ derejäniň

$$(e^z)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}z} \cdot e^{2\pi k \frac{m}{n} i}, \ k \in \{0, 1, ..., n - 1\},$$

formula bilen kesgitlenýän $n$ dürli bahasy bardyr.

**Üçünji ýagdaý.** $\alpha$ – irrasional san. Bu ýagdaýda islendik $k_1 \neq k_2$ bitin sanlar üçin $e^{2\pi k_1 \alpha i} \neq e^{2\pi k_2 \alpha i}$ bolar (subudy ikinji ýagdaýdaky ýaly geçirilýär). Diýmek, $\alpha$ irrasional bolan ýagdaýynda $(e^z)^\alpha$ derejäniň tükeniksiz köp dürli bahalary bardyr. Indi $\alpha = n$, $\alpha = \frac{1}{n}$, $n$ – bitin položitel san bolanda $(e^z)^\alpha$ derejäniň bahalaryny $z = x + yi$ üçin ýazalyň:

$$(e^z)^n = e^{nz} = e^{nx+nyi} = e^{nx}(\cos ny + i\sin ny),$$

$$(e^z)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}z} \cdot e^{2k\frac{1}{n}\pi i} = e^{\frac{1}{n}(x+yi)} \cdot e^{2k\pi\frac{1}{n}i} = e^{\frac{1}{n}x} e^{\frac{1}{n}yi} e^{2k\pi\frac{1}{n}i} = e^{\frac{1}{n}x} e^{\left(\frac{1}{n}y + 2k\pi\frac{1}{n}\right)i}, \qquad (1)$$

$$k \in \{0, 1, ..., n-1\},$$

ýa-da

$$(e^z)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}x}\left[\cos\frac{1}{n}(y + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{n}(y + 2k\pi)\right], \qquad (2)$$

$$k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

## 7. Kompleks sanlardan kök almak we olary derejä götermek

Kompleks $\alpha + \beta i$ sany $k$ ($k$ – bitin san) derejä götermeli bolsun. $\alpha + \beta i$ sany trigonometrik görnüşde ýazalyň:

$$\alpha + \beta i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{i\varphi},$$

bu ýerde $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |\alpha + i\beta|$; $\varphi = \arg(\alpha + \beta i)$; deňligiň iki tarapyny $k$ derejä göterip alarys:

$$(\alpha + \beta i)^k = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^k \cdot (e^{i\varphi})^k.$$

Geçen bölümdäki (1) formulany ulanyp taparys:

$$(\alpha + \beta i)^k = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^k \cdot (\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Diýmek, kompleks sanyň $k$ derejesi ýene-de kompleks san bolýar. Onuň moduly berlen kompleks sanyň modulynyň $k$ derejesine, argumenti bolsa berlen sanyň argumentiniň $k$ esse köpeldilenine deňdir.

**1-nji mysal.** $1 + \sqrt{3} \cdot i$ sany 12-nji derejä götermeli.

$$|1 + \sqrt{3} \cdot i| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2; \quad \arg(1 + \sqrt{3} \cdot i) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Diýmek,

$$(1 + \sqrt{3} \cdot i)^{12} = 2^{12}\left(\cos 12 \cdot \frac{\pi}{3} + i\sin 12 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2^{12}(\cos 4\pi + i\sin 4\pi)$$

ýa-da

$$(1 + \sqrt{3}\, i)^{12} = 2^{12}.$$

Indi $\alpha + \beta i$ sandan $n$ derejeli kök alalyň. Kesgitlemä görä $\sqrt[n]{\alpha + i\beta} = (\alpha + i\beta)^{\frac{1}{n}}$ bolany üçin, $(\alpha + \beta i)$ sanyň trigonometrik görnüşiniň iki tarapyny hem $\dfrac{1}{n}$ derejä göterip alarys:

$$(\alpha + i\beta)^{\frac{1}{n}} = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^{\frac{1}{n}} \cdot (e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}}.$$

Geçen bölümdäki (2) formulany ulanyp, alarys:

$$\sqrt[n]{\alpha + i\beta} = (\alpha + i\beta)^{\frac{1}{n}} = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{3}$$

**Bellik.** Çykarylan formulada $(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2n}}$ köküň diňe bir arifmetiki bahasy alynýar (položitel hakyky bahasy). Görşümiz ýaly, kompleks sanyň $n$ derejeli köküniň $n$ bahasy bar. Şu ýerde islendik hakyky sanyň hem $n$ derejeli köküniň $n$ bahasynyň bardygyny ýatlamak ýerliklidir.

**2-nji mysal.** $\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ sandan 3 derejeli kök almaly. (3) formulany ulanmak üçin berlen sanyň modulyny we argumentini tapmak gerek.

$$\left|\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right) = \operatorname{arctg}\frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 15^\circ = \frac{\pi}{12}.$$

Tapylan bahalary (3)-de ýerine goýup alarys:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}=(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12\cdot 3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{\pi}{12\cdot 3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],\quad k=0,1,2.$$

Diýmek, köküň üç bahasy bar:

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{36}+i\sin\frac{\pi}{36}\right),\ \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\left(\cos\frac{25}{36}\pi+i\sin\frac{25}{36}\pi\right),$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\left(\cos\frac{49}{36}\pi+i\sin\frac{49}{36}\pi\right).$$

**3-nji mysal.** 1-den $n$ derejeli kök almaly. Onuň moduly $|1| = 1$, argumenti $\varphi = \text{arctg}\, 0 = 0$. (2) formulany ulanyp alarys:

$$\sqrt[n]{1}=(1)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k\right),\quad k=0,1,..,n-1,$$

ýa-da

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2\pi}{n}k+i\sin\frac{2\pi}{n}k,\quad k=0,1,..,n-1.$$

Şeýlelikde, 1-den $n$ derejeli köküň $n$ bahasy bar. Olaryň her biriniň moduly bire deň, argumentleri bolsa $\frac{2\pi}{n}$ burça kratny bolýarlar.

**4-nji mysal.** $\sqrt[6]{1}$ köküň bahalaryny tapalyň. Formula görä

$$\sqrt[6]{1}=\cos\frac{2\pi}{6}k+i\sin\frac{2\pi}{6}k,\quad k=0,1,2,3,4,5.$$

*Köküň bahalary*:

$$\varepsilon_0=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ=1,$$

$$\varepsilon_1=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_3 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

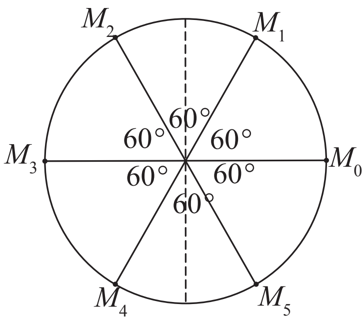
$$\varepsilon_5 = \cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Kökleriň geometrik görnüşleri, degişlilikde şeýle bolarlar:

$$M_0(1,0),\quad M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad M_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$M_3(-1,0),\quad M_4\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad M_5\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bu nokatlaryň hemmesi merkezi başlangyçda bolan, radiusy bire deň töweregiň üstünde ýatýarlar. Töwerek boýunça her $60^0$-dan ol nokatlaryň biri ýerleşýändir *(73-nji surat)*.




*73-nji surat*

## 8. Köpagzalar barada düşünje

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

görnüşdäki aňlatma köpagza diýilýär. Bu ýerde $n$ – otrisatel däl bitin san, oňa köpagzanyň derejesi diýilýär. $a_0 \neq 0$, $a_1$, ..., $a_n$ – hemişelik sanlar, olara köpagzanyň koeffisiýentleri diýilýär. Köpagzany düzýän goşulyjylaryň her birine agza diýilýär. Köpagzany gysgaça $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $R_n(x)$ we ş.m. ýa-da $p_n(x)$, $q_n(x)$, $r_n(x)$ we ş.m. bilen belgilemek bolar.

Köpagzalar köplüginde goşmak, aýyrmak we köpeltmek amallaryny kesgitläliň. $P_n(x)$ we $Q_m(x)$ köpagzalaryň jemi $P_n(x) + Q_m(x)$ bilen belgilenýär. Ol $s$ derejeli köpagzadyr. Jemiň $x^i$, $i = \overline{0, s}$, derejäni saklaýan agzasynyň koeffisiýenti $P_n(x)$ we $Q_m(x)$ goşulyjylaryň $x^i$ derejäni saklaýan agzalarynyň koeffisiýentleriniň jemine deňdir. Eger-de goşulyjylaryň birinde şol agza ýok bolsa, onda oňa degişli koeffisiýent nola deň hasap edilýär. Eger $n$ we $m$ derejeler dürli bolsalar, onda $s$ olaryň ulusyna deň bolýar. Eger $m = n$ bolsa, onda $s \leqslant n$ bolar.

$P_n(x)$ we $Q_m(x)$ köpagzalaryň tapawudy $P_n(x) - Q_m(x)$ bilen belgilenýär. Ol $s$ derejeli köpagzadyr. Tapawudyň $x^i$, $i = \overline{0, s}$, derejäni saklaýan agzasynyň koeffisiýenti $P_n(x)$ köpagzanyň $x^i$ derejäni saklaýan agzasynyň koeffisiýentinden $Q_m(x)$ köpagzanyň $x^i$ derejäni saklaýan agzasynyň koeffisiýentini aýyrmak bilen tapylar. $s$ dereje ýokardaky ýaly kesgitlenýär. Mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** $P_3(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, $Q_5(x) = -x^5 + 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.

a) $P_3(x) + Q_5(x) = (-1 + 0)x^5 + (4 + 0)x^4 + (3 + 0)x^3 + (3 - 2)x^2 -$
$- (5 + 0)x + 6 = -x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 6$.

b) $P_3(x) - Q_5(x) = (0 + 1)x^5 + (0 - 4)x^4 + (3 - 0)x^3 + (-2 - 3)x^2 +$
$+ (0 + 5)x + 5 - 1 = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 5x + 4$.

**2-nji mysal.** $P_3 = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, $Q_3 = -2x^3 + 4x^2 - x + 5$.

a) $P_3(x) + Q_3(x) = (2 - 2)x^3 + (-3 + 4)x^2 + (5 - 1)x + 5 - 1 = x^2 +$
$+ 4x + 4$.

b) $P_3(x) - Q_3(x) = (2 + 2)x^3 + (-3 - 4)x^2 + (5 + 1)x - 1 - 5 = 4x^3 -$
$- 7x^2 + 6x - 6$.

$P_n(x)$ we $Q_m(x)$ köpagzalaryň köpeltmek hasyly $P_n(x) \cdot Q_m(x)$ bilen belgilenýän köpagzadyr. Onuň derejesi köpeldijileriň derejeleriniň jemine deňdir. Bir köpagzany beýleki köpagza köpeltmek edil algebranyň bir jemi beýleki jeme köpeltmek kanuny boýunça geçirilýär. Bir üýtgeşiklik, ol hem alnan agzalary $x$-iň derejeleri boýunça tertipleşdirmekden durýar.

**3-nji mysal.** $P_3 = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $Q_2 = b_0x^2 + b_1x + b_2$.

$$P_3 \cdot Q_2 = (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(b_0x^2 + b_1x + b_2) = a_0b_0x^5 + a_0b_1x^4 +$$
$$+ a_0b_2x^3 + a_1b_0x^4 + a_1b_1x^3 + a_1b_2x^2 + a_2b_0x^3 + a_2b_1x^2 + a_2b_2x +$$
$$+ a_3b_0x^2 + a_3b_1x + a_3b_2 = a_0b_0\, x^5 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 +$$
$$+ a_2b_0)x^3 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\, x^2 + (a_2b_2 + a_3b_1)x + a_3b_2.$$

Köpagzany goşmak we köpeltmek amallary edil sanlardaky ýaly orun çalşyrma, utgaşdyrma we paýlaşdyrma kanunlaryna boýundyr. Bir köpagzany beýleki köpagza bölüp hem bolýar. Goý, $P_n(x)$ we $Q_m(x)$ islendik köpagzalar bolsunlar. Hemişe $P_n(x) = Q_m(x) \cdot r(x) + q(x)$ deňlik ýerlikli bolar ýaly edip, derejesi $n$-den kiçi $r(x)$ köpagzany we derejesi $m$-den kiçi $q(x)$ köpagzany tapyp bolýar. Berlen $P_n(x)$ we $Q_m(x)$ üçin şol deňligi kanagatlandyrýan $r(x)$ we $q(x)$ köpagzalar ýeke-täkdir. $r(x)$ köpagza paý, $q(x)$ köpagza galyndy diýilýär. Eger $m > n$ bolsa, onda $r(x) \equiv 0$, $q(x) = P_n(x)$ boljakdygy düşnüklidir. $n \geq m$ bolan ýagdaýda paý we galyndy şeýle tapylýar.

Goý, $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$ bolsun. $P_n(x)$ köpagzanyň iň uly derejeli agzasyny, ýagny $a_0x^n$-i $Q_m(x)$ köpagzanyň iň uly derejeli agzasyna, ýagny $b_0x^m$-e böleliň. Netijede, $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ alarys. Indi $Q_m(x)$ köpagzany $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ paýa köpeldip we $P_n(x)$ köpagzadan aýryp, täze $P_n^1(x)$ köpagza alarys.

$$P_n^1(x) = \left(a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1\right)x^{n-1} + \left(a_2 - \frac{a_0}{b_0}b_2\right)x^{n-2} + ... + a_n.$$

Eger $n - 1 \geq m$ bolsa, şu amaly $P_n^1(x)$ üçin gaýtalap, $P_n^2(x)$ köpagzany alarys. Eger $P_n^2(x)$ köpagzanyň derejesi $m$-den kiçi bolmasa, şu amaly $P_n^2(x)$ üçin hem gaýtalap, $P_n^3(x)$ köpagzany alarys. Eger $P_n^3(x)$-iň derejesi hem $m$-den kiçi bolmasa, şu amaly ýene-de gaýtalaýarys we ş.m. $P_n(x)$, $P_n^1(x)$, $P_n^2(x)$, ... köpagzalaryň derejeleri her ädimde iň bolmanda bir sana kemelýänligi sebäpli, käbir $k$ san üçin $P_n^k(x)$-iň derejesi $m$-den kiçi bolar. Şu ýagdaýda $P_n^k(x)$-e galyndy diýilýär we ol $q(x)$ bilen belgilenýär. Her gezek $P_n^s(x)$, $s < k$, köpagzanyň ýokary derejeli agzasyny $Q_m(x)$-iň hem şeýle agzasyna bölenimizde alnan paýlaryň jemine paý diýilýär we ol $r(x)$ bilen belgilenýär. Mysala seredeliň.

$$P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5, \quad Q_2(x) = x^2 - 4x + 1.$$

Bölmek üçin edil sanlary bölüş usuly ulanylýar:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5 \\ \underline{2x^4 - 8x^3 + 2x^2 \qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 \\ \hline 2x^2 + 5x + 19 \end{array} \\
-\begin{array}{l} 5x^3 - x^2 - x + 5 \\ \underline{5x^3 - 20x^2 + 5x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 19x^2 - 6x + 5 \\ \underline{19x^2 - 76x + 19} \end{array} & \\
70x - 14 &
\end{array}$$

Diýmek, $r(x) = 2x^2 + 5x + 19$ – paý, $q(x) = 70x - 14$ – galyndy we

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5 = (x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 5x + 19) + 70x - 14$$

toždestwo ýerliklidir. Soňky toždestwony

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 - 4x + 1} = 2x^2 + 5x + 19 + \frac{70x - 14}{x^2 - 4x + 1}$$

görnüşde hem ýazyp bolar.

## 9. Köpagzanyň köki barada düşünje

Eger köpagzanyň aňlatmasynda $x$-iň ýerine $x_0$ goýanymyzda aňlatma nola öwrülse, ýagny $P_n(x_0) = 0$ bolsa, onda $x_0$ sana $P_n(x)$ köpagzanyň köki diýilýär. Eger-de $P_n(x_0) = 0$, $P_n'(x_0) = 0, \ldots,$ $P_n^{(k-1)}(x_0) = 0$, $P_n^{(k)}(x_0) \neq 0$ bolsa, onda $x_0$ sana $k$ sepli kök diýilýär. Mysal üçin, $P_3(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ köpagzanyň kökleri $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ sanlardyr.

$$P_3'(x) = 3x^2 - 2x - 8; \quad P_3'(-3) = 25; \quad P_3'(2) = 0;$$

$$P_3''(x) = 6x - 2; \quad P_3''(2) = 10.$$

Diýmek, $P_3(-3) = 0$, $P_3'(-3) \neq 0$ bolandygy sebäpli, $x_1 = -3$ ýönekeý kök bolýar. $P_3(2) = 0$, $P_3'(2) = 0$, $P_3''(2) \neq 0$ bolandygy sebäpli, $x_2 = 2$ iki sepli kök bolýar. $P_3(x) = (x-2)^2(x+3)$ görnüşde ýazyp bolýandygy üçin bu köpagzanyň başga köki ýok. Sebäbi $x_0 \neq 2$, $x_0 \neq -3$ islendik $x_0$ san üçin $P_3(x_0) \neq 0$ boljakdygy aýdyňdyr.

Eger-de $x = 2$ sepli köki sepiniň sany boýunça 2 kök hasap etsek, onda $P_3(x)$ köpagzanyň kökleriniň sany üçe, ýagny köpagzanyň derejesine deň bolar. Eger biz köpagzanyň diňe hakyky köklerine seretsek, onda hemişe beýle bolmazlygy hem mümkin. Meselem, $P_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ köpagzany $P_3(x) = (x^2+1)(x+1)$ görnüşde ýazyp bolýar. Şoňa görä, ol diňe $x_1 = -1$ bahada nola öwrülýär, ýagny hakyky kökleriniň sany bire deň, ol bolsa köpagzanyň derejesine deň däldir.

Emma $x = i$, $x = -i$ kompleks sanlaryň hem şol köpagzanyň kökleri boljakdygy we onuň $x = -1$, $x = i$, $x = -i$ köklerden özge köküniň ýoklugy görnüp dur. Ýene-de kökleriň sany, hakyky we kompleks kökleri hasap edenimizde, köpagzanyň derejesine deň boldy. Bu ýagdaýyň islendik köpagza üçin dogrulygyny algebranyň esasy teoremasy tassyklaýar.

**Teorema** (algebranyň esasy teoremasy). Islendik kompleks ýa-da hakyky koeffisiýentli köpagzanyň hakyky we kompleks kökleriniň sany, islendik sepli köküň mukdary onuň sepine deň hasap edilende, köpagzanyň derejesine deňdir.

Mesele çözülende gerek bolýan käbir maglumatlary getireliň.

1. Eger $x_0$ san $P_n(x)$ köpagzanyň köki bolsa, onda $P_n(x)$ köpagza $x - x_0$ tapawuda galyndysyz bölünýändir, ýagny käbir $P_{n-1}(x)$ köpagza üçin $P_n(x) \equiv P_{n-1}(x)(x - x_0)$ toždestwo dogrudyr.

2. Eger $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ köpagzanyň kökleri $x_1, x_2, ..., x_n$ bolsalar (olaryň içinde deňleri hem bolmagy mümkin), onda $P_n(x) \equiv a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$ toždestwo dogrudyr. Eger kökleriň biri $k$ sepli kök bolsa, ýagny $x_1, x_2, ..., x_n$ kökleriň $k$ sanysy $\alpha$ deň bolsa, onda deňligiň sag tarapynda $x - \alpha$ tapawut $k$ gezek gaýtalanýandyr. Goý, $x_1, x_2, ..., x_s$ $P_n(x)$ köpagzanyň dürli kökleri bolsunlar, $k_1, k_2, ..., k_s$ degişlilikde olaryň sepleriniň sany bolsun. Onda ýokarky toždestwony

$$P_n(x) \equiv a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_s)^{k_s}$$

görnüşde ýazyp bolar. Ýönekeý kök üçin sepiň sanynyň bire deňligini belläp geçeliň.

3. Eger $P_n(x)$ hakyky koeffisiýentli köpagza bolsa we $x = \alpha + \beta i$ kompleks san onuň $k$ sepli köki bolsa, onda hökmany ýagdaýda onuň $x = \alpha - \beta i$ kompleks köki bardyr we onuň sepiniň sany hem $k$ deňdir. Eger $x_1, x_2, ..., x_r$ köpagzanyň hakyky kökleri, $k_1, k_2, ..., k_r$ degişlilikde olaryň seplerininiň sany bolsa, $\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_1 - \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \alpha_2 - \beta_2 i, ..., \alpha_s + \beta_s i, \alpha_s - \beta_s i$ onuň kompleks kökleri, $m_1, m_2, ..., m_s$ degişlilikde olaryň seplerininiň sany bolsa, onda

$$P_n(x) \equiv a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_r)^{k_r}[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{m_1} \times$$

$$\times[(x - \alpha_2)^2 + \beta_2^2]^{m_2} \cdot ... \cdot [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{m_s}$$

toždestwo dogrudyr.

4. Islendik täk derejeli, hakyky koeffisiýentli köpagzanyň iň bolmanda bir hakyky köki bardyr.

## 10. Rasional funksiýalar barada maglumat

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ köpagzalar berlen.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

gatnaşyga rasional funksiýa diýilýär. Eger $n < m$ bolsa $R(x)$ dogry rasional funksiýa, $n \geq m$ bolsa nädogry rasional funksiýa diýilýär. Goý, $R(x)$ nädogry rasional funksiýa bolsun. Öňden belli bolşy ýaly, $P_n(x)$ köpagzany $Q_m(x)$ köpagza bölüp,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \equiv r(x) + \frac{q(x)}{Q_m(x)}$$

toždestwony ýazyp bileris. Bu ýerde $r(x)$ derejesi $n$-den kiçi köpagza, $q(x)$ derejesi $m$-den kiçi köpagzadyr, ýagny $\frac{q(x)}{Q_m(x)}$ dogry rasional funksiýadyr.

$\dfrac{A}{x-x_0}$, $\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$, $\dfrac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, $\dfrac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$ ($k$ – islendik položitel bitin san) görnüşdäki droblara ýönekeý rasional droblar diýilýär. Islendik dogry rasional funksiýa ýönekeý droblaryň jemine dargaýar. Şu sözlemi takyklalyň. Goý, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ dogry rasional funksiýa ($n < m$) bolsun. $Q_m(x) = b_0x^m + ... + b_m$ köpagzanyň kökleri belli diýeliň. Onda geçen bölümde aýdylyşyna görä

$$Q_m(x) = b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot ...\cdot(x-x_r)^{k_r}[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\times$$
$$\times[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^{m_2}\cdot ...\cdot[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s} \qquad (1)$$

görnüşde ýazyp bolýar. Şu ýagdaýda $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ dogry rasional funksiýa ýönekeý droblaryň jemine aşakdaky formula boýunça dargaýar:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_1^2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_1^{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\right] +$$
$$+\left[\frac{A_2^1}{x-x_2} + \frac{A_2^2}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{A_2^{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}\right] + ... +$$
$$+\left[\frac{A_r^1}{x-x_r} + \frac{A_r^2}{(x-x_r)^2} + ... + \frac{A_r^{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}\right] +$$
$$+\left[\frac{B_1^1+C_1^1x}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{B_1^2+C_1^2x}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^2} + ... + \frac{B_1^{m_1}+C_1^{m_1}x}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}}\right] +$$
$$+\left[\frac{B_2^1+C_2^1x}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2} + \frac{B_2^2+C_2^2x}{[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^2} + ... + \frac{B_2^{m_2}+C_2^{m_2}x}{[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^{m_2}}\right] +$$
$$+ ... +\left[\frac{B_s^1+C_s^1x}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \frac{B_s^2+C_s^2x}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^2} + ... + \frac{B_s^{m_s}+C_s^{m_s}x}{[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}}\right]. \qquad (2)$$

Getirilen formulada her bir kwadrat ýaý bir hakyky köke ýa-da iki çatyrymly $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ görnüşdäki köklere degişlidir. Eger kökler ýönekeý bolsalar, onda formula ýönekeýleşýär:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_r}{x-x_r} + \frac{B_1 + C_1 x}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} +$$

$$+ \frac{B_2 + C_2 x}{(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \ldots + \frac{B_s + C_s x}{(x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2}. \quad (3)$$

Eger $Q_m(x)$ köpagzanyň hemme köki hakyky we ýönekeý bolsa, onda formula

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-x_m} \quad (4)$$

görnüşe geler.

Elbetde, biz getirilen formulalary ulanmak islesek, şol formulalara girýän $A_1^1, A_1^2, B_1^1, B_1^2, \ldots, C_1^1, C_1^2, \ldots$ koeffisiýentleri tapmaly bolarys. Olar şeýle tapylýar. (2) deňligiň sag tarapyny umumy maýdalawja getireliň:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \equiv \frac{N(x)}{(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\ldots[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}}.$$

Bu ýerde $N(x)$ käbir köpagza. Indi deňlikde $Q_m(x)$-iň ýerine onuň (1) formuladaky bahasyny goýup we gysgalýanlary gysgaldyp,

$$P_n(x) \equiv b_0 N(x) \quad (5)$$

toždestwony alarys. Biziň tapmaly koeffisiýentlerimiziň sany göni $m$ sany, ýagny $Q_m(x)$-iň derejesine deňdir. Olary tapmak üçin (5) toždestwoda $x$-iň ýerine islendik dürli $m$ san goýýarlar we

$$\begin{cases} P_n(a_1) = b_0 N(a_1), \\ P_n(a_2) = b_0 N(a_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n(a_m) = b_0 N(a_m) \end{cases}$$

ulgamy alýarlar. Ulgam tapylmaly koeffisiýentlere görä çyzykly deňlemeler ulgamy bolýar. Olary şol ulgamdan tapýarlar we (2) deňlikde ýerine goýýarlar. Bu bir usul. Koeffisiýentleri tapmagyň ikinji usuly şeýle: (5) toždestwodaky $P_n(x)$ we $b_0 N(x)$ köpagzalarda $x$-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini özara deňläp, deňlemeler ulgamyny alýarlar. Näbelli koeffisiýentler bu ulgamy çözmek bilen tapylýar.

(3), (4) formulalardaky näbelli koeffisiýentler hem edil şeýle usullar bilen tapylýar. Ýöne (4) formuladaky näbelli koeffisiýentleri has ýönekeý usul bilen, ýagny

$$A_i = \frac{P'_n(x_i)}{Q'_m(x_i)}, \quad i = \overline{1,n} \tag{6}$$

formula bilen hem tapyp bolýar. Bu ýerde $Q'_m(x)$ köpagza $Q_m(x)$ köpagzanyň önümidir. Mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** $\dfrac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 12x^2 + 11x - 3}$ rasional funksiýany ýönekeý droblara dargadalyň. Bizde $P_2(x) = 2x^2 - x + 5$, $Q_3(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$. Maýdalawjynyň, ýagny $Q_3(x)$-iň köklerini tapalyň. Olar $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{3}{2}$ bolar. Kökler hakyky hem dürli. Onda (4) formula boýunça alarys:

$$\frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A_1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x - \frac{3}{2}}.$$

Indi $Q'_3(x) = 12x^2 - 24x + 11$ bolýandygyny göz öňünde tutup, (6) formuladan taparys:

$$A_1 = \frac{P_2\left(\frac{1}{2}\right)}{Q'_3\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2}; \quad A_2 = \frac{P_2(1)}{Q'_3(1)} = -6; \quad A_3 = \frac{P_2\left(\frac{3}{2}\right)}{Q'_3\left(\frac{3}{2}\right)} = 4.$$

Näbelli koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny ýerine goýup alarys:

$$\frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 12x^2 + 11x - 3} = \frac{\frac{5}{2}}{x - \frac{1}{2}} - \frac{6}{x - 1} + \frac{4}{x - \frac{3}{2}}.$$

**2-nji mysal.**

$\dfrac{x^2+4x-3}{x^4-1}$ rasional funksiýany ýönekeý droblara dargadalyň.

Bizde $P_2(x) = x^2 + 4x - 3$, $Q_4(x) = x^4 - 1$. Maýdalawjynyň köklerini tapalyň. Olar $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i, x_4 = -i$ bolar. Diýmek, maýdalawjynyň iki hakyky köki, iki kompleks köki bar. Kökler ýönekeý kökler. (3) formulany ulanyp alarys:

$$\frac{P_2(x)}{Q_4(x)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 + C_1x}{x^2+1^2}.$$

Näbelli koeffisiýentleri tapmak üçin deňligiň sag tarapyny umumy maýdalawja getireliň:

$$\frac{P_2(x)}{Q_4(x)} = \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (B_1 + C_1x)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

ýa-da

$$\frac{P_2(x)}{Q_4(x)} = \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (B_1 + C_1x)(x-1)(x+1)}{x^4-1}.$$

$Q_4(x) = x^4 - 1$ bolandygy üçin, deňligiň iki tarapyny hem $x^4 - 1$ gysgaldyp alarys:

$$x^2 + 4x - 3 = A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) +$$
$$+(B_1 + C_1x)(x-1)(x+1).$$

Indi şu deňlikde $x$-iň ýerine (islendik dört sany goýup bolýar) $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ goýup, näbelli koeffisiýentler tapylýan ulgamy alarys:

$$2 = A_1 \cdot 4; \quad -6 = -A_2 \cdot 4; \quad -3 = A_1 - A_2 - B_1;$$

$$9 = A_1 \cdot 15 + A_2 \cdot 5 + (B_1 + 2C_1) \cdot 3.$$

Ulgamy çözüp taparys:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{3}{2}, \quad B_1 = 2, \quad C_1 = -2.$$

Tapylan bahalary formulada ýerine goýup, gerek dargamany alarys:

$$\frac{x^2 + 4x - 3}{x^4 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{2 - 2x}{x^2 + 1}.$$

**3-nji mysal.**

$\dfrac{5x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^7 + 5x^6 + 9x^5 + 7x^4 - x^3 - 9x^2 - 8x - 4}$ rasional funksiýany ýönekeý droblara dargadalyň. Maýdalawjynyň kökleri $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ iki sepli kök, $x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iki sepli kök, $x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ iki sepli kök. (2) formulany ulanýarys.

$$\frac{P_4(x)}{Q_7(x)} = \frac{A_1}{x - 1} + \left[\frac{A_2}{x + 2} + \frac{A_3}{(x + 2)^2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{B_1 + C_1 x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{B_2 + C_2 x}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}\right].$$

Sag tarapyň umumy maýdalawjysy bolup $(x - 1)(x + 2)^2 \times \times \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2$ hyzmat edýär. Maýdalawjyny ýönekeýleşdirsek, onuň $Q_7(x)$ bilen gabat gelýändigini görmek kyn däl. Şonuň üçin aşakdaky deňligi alarys:

$$\frac{P_4(x)}{Q_7(x)} = \{A_1 (x + 2)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2 +$$

$$+ A_2 (x + 2)(x - 1)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2 +$$

$$+A_3(x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2+$$

$$+(B_1+C_1x)(x-1)(x+2)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+$$

$$+(B_2+C_2x)(x-1)(x+2)^2\}/Q_7(x).$$

Deň maýdalawjylary gysgaldyp,

$$P_4(x)=[A_1(x+2)^2+A_2(x-1)(x+2)+A_3(x-1)]\times$$
$$\times\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2+(B_1+C_1x)(x-1)(x+2)^2\cdot\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+$$
$$+(B_2+C_2x)(x-1)(x+2)^2$$

deňligi ýazyp bileris. Indi şu deňlikde $x$-iň ýerine islendik 7 sany $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ sanlary goýup, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $C_1$, $B_2$, $C_2$ näbelli koeffisiýentler tapylýan ulgamy alarys.

**Bellik.** Näbelli koeffisiýentler tapylýan ulgamyň ýönekeý bolmagy üçin $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ sanlar hökmünde ilki bilen maýdalawjynyň dürli köklerini almaly, eger olar ýediden az bolsalar, olaryň üstüni başga sanlar bilen ýetirmeli. Eger alnan kökleriň içinde kompleks kök bar bolsa, onda çatyrymly kompleks köki almagyň geregi ýokdur. Bu usuly islendik rasional funksiýa ýönekeý droblara dargadylanda ulanmak amatlydyr. Mysaly dowam etdireliň.

$$a_1=1,\quad a_2=-2,\quad a_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad a_4=0,\quad a_5=-1,\quad a_6=2$$

bolsun. $a_3$-üň ýerine kompleks san alanymyz üçin $a_7$-niň geregi ýok bolýar, ýagny $x$-iň ýerine kompleks san goýmak iki hakyky san goýana barabar bolýar.

Alarys:

$x=1;\qquad 2=81A_1,$

$x=-2;\quad 113=-27A_3,$

$x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;$

$$-4+\frac{2\sqrt{3}}{2}i=-\frac{9}{2}B_2+\frac{C_2}{2}-\frac{3B_2\sqrt{3}}{2}i+\frac{5C_2\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4=-\frac{9}{2}B_2+\frac{C_2}{2},\quad \frac{2\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}\,B_2}{2}+\frac{5\sqrt{3}\,C_2}{2},$$

$x=0$; $\quad 1=4A_1-2A_2-A_3-4B_1-4B_2,$

$x=-1$; $\quad 12=A_1-2A_2-2A_3-2B_1+2C_1-2B_2+2C_2,$

$x=2$; $\quad 57=784A_1+196A_2+49A_3+112B_1+224C_1+16B_2+32C_2.$

Ulgamyň birinji dört deňlemesinden tapýarys:

$$A_1=\frac{2}{81},\quad A_3=-\frac{113}{27};\quad B_2=1,\quad C_2=1.$$

Tapylan bahalary soňky üç deňlemä goýup alarys:

$$\frac{58}{81}=-2A_2-4B_1,$$
$$\frac{292}{81}=-2A_2-2B_1+2C_1,$$
$$\frac{15772}{81}=196A_2+112B_1+224C_1.$$

Bu ýerden:

$$A_1=\frac{2}{81},\ A_2=-\frac{535}{189},\ A_3=-\frac{113}{27},$$
$$B_1=\frac{701}{567},\ C_1=\frac{118}{567},\ B_2=1,\ C_2=1.$$

Tapylan bahalary ýerine goýup alarys:

$$\frac{5x^4-3x^3+x^2-2x+1}{x^7+5x^6+9x^5+7x^4-x^3-9x^2-8x-4}=\frac{\frac{2}{81}}{x-1}+$$

$$+\left[\frac{-\frac{535}{189}}{x+2}-\frac{\frac{113}{27}}{(x+2)^2}\right]+\left[\frac{\frac{701}{567}-\frac{118}{567}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1+x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\right].$$

## 11. Rasional funksiýalary integrirlemek

Biz ýokarda nädogry rasional funksiýany $R(x) = r(x) + \dfrac{q(x)}{Q(x)}$ görnüşde aňladyp bolýandygyny görkezipdik. Bu ýerde $r(x)$ köpagza, $\dfrac{q(x)}{Q(x)}$ bolsa dogry rasional funksiýa. Diýmek, integralyň häsiýetine görä, $R(x)$ funksiýadan alnan kesgitsiz integral iki integralyň, ýagny $r(x)$-den alnan hem-de $\dfrac{q(x)}{Q(x)}$-den alnan integrallaryň jemine deň. $r(x)$ köpagza bolansoň, ondan integral alyp bolýar we esasy mesele $\dfrac{q(x)}{Q(x)}$ dogry rasional funksiýadan integral almagy başarmaga syrygýar.

Ýokarda dogry rasional funksiýanyň ýönekeý droblaryň jemine dargaýandygyny görüpdik. Diýmek, dogry rasional funksiýadan integral almak, öz gezeginde, ýönekeý droblardan integral almaga syrygýar. Şeýlelikde, islendik rasional funksiýadan integral almak meselesi, rasional funksiýanyň maýdalawjysynyň köklerini tapyp bolýan ýagdaýynda köpagzadan we ýönekeý droblardan integral almaga getirilýär. Şol sebäpli, aşakda geçen bölümde getirilen dört sany ýönekeý drobdan integral alnyşy görkezilýär.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}dx.$

Integralyň häsiýetine görä, $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}dx.$ Soňky integralyň aşagyndaky funksiýanyň maýdalawjysynyň önümi sanawja deň. Onda integrallaryň sanawyndan belli bolşy ýaly, ol integral maýdalawjynyň logarifmine deňdir, ýagny

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\int \frac{1}{x-\alpha}dx = A\cdot \ln|x-\alpha| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx,\ k \neq 1.$

Integralda $x - \alpha = t$, $dx = dt$ çalşyrma girizeliň. Alarys:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = \int \frac{A}{t^k}dt = A\cdot\int t^{-k}dt = A\cdot\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{1-k}\cdot t^{1-k} + C = \frac{A}{1-k}\cdot(x-\alpha)^{1-k} + C.$$

3. $\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx.$

Integralda $x-\alpha = t,\quad dx = dt$ çalşyrma girizeliň. Alarys:

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int \frac{A(\alpha+t)+B}{t^2+\beta^2}dt = \int \frac{At+A\alpha+B}{t^2+\beta^2}dt =$$

$$= \int \frac{At}{t^2+\beta^2}dt + \int \frac{A\alpha+B}{t^2+\beta^2}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2+\beta^2}dt + (A\alpha+B)\int \frac{dt}{t^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+\beta^2) + \frac{A\alpha+B}{\beta}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{\beta} + C = \frac{A}{2}\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2] +$$

$$+ \frac{A\alpha+B}{\beta}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

4. $\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx.$

Integralda $x-\alpha = t\beta,\quad dx = \beta dt$ çalşyrma girizeliň. Alarys:

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = \int \frac{A(\alpha+t\beta)+B}{[t^2\cdot\beta^2+\beta^2]^k}\beta dt =$$

$$= \frac{1}{\beta^{2k-1}}\int \frac{A\beta t + A\alpha + B}{(t^2+1)^k}dt = \frac{A}{\beta^{2k-2}}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k} +$$

$$+ \frac{A\alpha+B}{\beta^{2k-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}.$$

Indi $\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k} = Z_k;\ \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k$ integrallary aýratyn hasaplalyň.

$Z_k$ integralda $t^2+1 = z,\quad 2t\,dt = dz$ çalşyrma girizeliň.

$$Z_k = \int \frac{tdt}{(t^2+1)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^k} = \frac{1}{2}\int z^{-k}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-k+1}}{-k+1} +$$

$$+ C_1 = \frac{z^{1-k}}{2(1-k)} + C_1 = \frac{1}{2(1-k)}(t^2+1)^{1-k} + C_1.$$

$I_k$ integraly ýörite usul bilen hasaplalyň:

$I_k(\alpha) = \int \frac{dt}{(\alpha t^2 + 1)^k}$ integraldan $\alpha$ boýunça önüm alalyň:

$$I_k'(\alpha) = -k\int \frac{t^2 dt}{(\alpha t^2 + 1)^{k+1}} = -\frac{k}{\alpha}\int \frac{\alpha t^2 dt}{(\alpha t^2 + 1)^{k+1}} =$$

$$= -\frac{k}{\alpha}\int \frac{(\alpha t^2 + 1) - 1}{(\alpha t^2 + 1)^{k+1}} dt = -\frac{k}{\alpha} I_k(\alpha) + \frac{k}{\alpha}\cdot I_{k+1}(\alpha).$$

Indi $I_k'(\alpha)$ integraly bölekleýin integrirläp tapalyň:

$$I_k'(\alpha) = -k\int \frac{t^2 dt}{(\alpha t^2 + 1)^{k+1}} = \frac{1}{2\alpha}\int td\left(\frac{1}{(\alpha t^2 + 1)^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{t}{(\alpha t^2 + 1)^k} - \frac{1}{2\alpha} I_k(\alpha).$$

$I_k'(\alpha)$-nyň tapylan iki bahasyny deňläp alarys:

$$-\frac{k}{\alpha} I_k(\alpha) + \frac{k}{\alpha} I_{k+1}(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{t}{(\alpha t^2 + 1)^k} - \frac{1}{2\alpha} I_k(\alpha)$$

ýa-da

$$I_{k+1}(\alpha) = \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(\alpha t^2 + 1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k(\alpha)$$

görnüşde yzygiderli hasaplaýyş formulasyny alarys. $\alpha = 1$ goýup, bize gerek $I_k$ üçin

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\cdot\frac{t}{(t^2 + 1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k$$

görnüşde yzygiderli hasaplaýyş formulasyny alarys.

$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t$ bolany üçin, yzygiderli hasaplap taparys:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{(t^2 + 1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C,$$

$$I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] + C$$

we ş.m.

Şeýle etmek bilen, gerek $I_k$-ny tapyp,

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}dx = \frac{A}{\beta^{2k-2}}Z_k + \frac{A\alpha+B}{\beta^{2k-1}}I_k$$

formulada $Z_k$-nyň we $I_k$-nyň tapylan bahalaryny goýup we $t$-niň ýerine onuň $t = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$ bahasyny goýup, gözlenýän integraly taparys.

**Mysallara seredeliň.**

**1-nji mysal.** $\int \frac{x^2+4x-3}{x^4-1}dx$ integraly hasaplalyň.

Geçen bölümde $\frac{x^2+4x-3}{x^4-1}$ funksiýany ýönekeý droblara dargadyp, şeýle deňligi alypdyk:

$$\frac{x^2+4x-3}{x^4-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{2-2x}{x^2+1}.$$

Diýmek,

$$\int \frac{x^2+4x-3}{x^4-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x+1}dx + \int \frac{2-2x}{x^2+1}dx$$

ýa-da

$$\int \frac{x^2+4x-3}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + $$
$$+2\int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

Ahyrda,

$$\int \frac{x^2+4x-3}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + $$
$$+2\operatorname{arctg} x - \ln(x^2+1) + C.$$

**2-nji mysal.** $\int \frac{-3x^6 - x^5 + 29x^4 + 66x^3 + 58x^2 + 16x - 3}{x^7 + 5x^6 + 9x^5 + 7x^4 - x^3 - 9x^2 - 8x - 4} dx$ integraly hasaplalyň. Geçen bölümiň 3-nji mysalyna meňzeşlikde integralyň aşagyndaky dogry rasional funksiýany ýönekeý droblara dargadyp alarys:

$$\frac{-3x^6 - x^5 + 29x^4 + 66x^3 + 58x^2 + 16x - 3}{x^7 + 5x^6 + 9x^5 + 7x^4 - x^3 - 9x^2 - 8x - 4} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} +$$

$$+ \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3-2x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1+3x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}.$$

Gysgalyk üçin hasaplamaly integraly $I$ bilen belgiläp we soňky dargatmany göz öňünde tutup alarys:

$$I = \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{1}{(x+2)^2} dx +$$

$$+ \int \frac{3-2x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx + \int \frac{1+3x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} dx.$$

Integrallary ýeke-ýekeden hasaplalyň:

$$\int \frac{2}{x-1} dx = 2\ln|x-1|;$$

$$\int \frac{3}{x+2} dx = 3\ln|x+2|;$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2};$$

$$\int \frac{3-2x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left[x + \frac{1}{2} = t;\, dx = dt\right] = \int \frac{3 - 2\left(t - \frac{1}{2}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= \int \frac{4}{t^2 + \frac{3}{4}} dt - \int \frac{2tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} - \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \ln\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right);$$

$$\int \frac{(1+3x)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} = \left[k=2, A=3, B=1, \alpha=-\frac{1}{2}, \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \left[\frac{A}{\beta^{2k-2}}\cdot Z_k + \frac{A\alpha+B}{\beta^{2k-1}} I_k\right] = 4\ Z_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} I_2 = -\frac{2}{t^2+1} -$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right] + C = -\frac{6}{(2x+1)^2+3} -$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{(2x+1)^2+3} + \operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right] + C.$$

Integrallaryň tapylan bahalaryny $I$ üçin aňlatmada ýerine goýup, hasaplamany tamamlaýarys.

## 12. Trigonometrik funksiýalary integrirlemek

1. $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x\cdot\sin\beta x dx$ görnüşdäki integrallar trigonometriýanyň

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)x;$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)x - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)x;$$

$$\cos\alpha x\cdot\sin\beta x = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)x$$

toždestwolaryny ulanmak bilen aňsat hasaplanýarlar.

**1-nji mysal.**

$$\int \sin 5x\cdot\cos 7x dx = \int \frac{1}{2}\sin(7+5)x dx - \int \frac{1}{2}\sin(7-5)x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 12x dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{24}\cos 12x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

2. $\int \cos^m x\cdot\sin^k x dx$ görnüşdäki integral $k$, $m$ sanlaryň bahasyna baglylykda çalşyrma girizmek bilen hasaplamasy belli integrala getirilýär.

a) $k$, $m$ sanlaryň biri täk bolan ýagdaýynda jübüt derejeli funksiýany täze üýtgeýän bilen belläp, çalşyrma girizmek bolar.

**2-nji mysal.** $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$; $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ çalşyrma girizip alarys:

$$\int \cos^5 x \sin^4 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \cos x dx =$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int (1 - t^2)^2 \cdot t^4 dt.$$

Soňky integral aňsatlyk bilen hasaplanýar.

b) $k$, $m$ sanlaryň ikisi-de täk bolan ýagdaýynda funksiýalaryň islendigini täze üýtgeýän bilen belläp, çalşyrma girizseň bolar.

**3-nji mysal.** $\int \cos^3 x \sin^7 x dx$; $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$ çalşyrma girizip alarys:

$$\int \cos^3 x \sin^7 x dx = \int \cos^3 x \cdot \sin^6 x \cdot \sin x dx = -\int t^3 (1 - t^2)^3 dt.$$

Görşümiz ýaly, çalşyrmadan soň hasaplamasy belli bolan integrala geldik.

ç) $k$, $m$ – jübüt sanlar. Bu ýagdaýda $\text{tg}x = t$ ýa-da $\text{ctg}x = t$ çalşyrmadan soň hasaplamasy belli integrala geleris.

**4-nji mysal.** $\int \cos^6 x \sin^{-8} x dx$ integraly hasaplalyň. $\text{ctg}x = t$, $-(1/\sin^2 x)dx = dt$ çalşyrma girizip we $\sin^2 x = 1/(1 + \text{ctg}^2 x)$, $\cos^2 x = \text{ctg}^2 x/(1 + \text{ctg}^2 x)$ toždestwolary göz öňünde tutup alarys:

$$\int \cos^6 x \sin^{-8} x dx = \int \cos^6 x \cdot \sin^{-6} x \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \int \left(\frac{\text{ctg}^2 x}{1 + \text{ctg}^2 x}\right)^3 \left(\frac{1}{1 + \text{ctg}^2 x}\right)^{-3} \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= -\int \left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^3 \left(\frac{1}{1 + t^2}\right)^{-3} dt = -\int t^6 dt = -\frac{t^7}{7} + C = -\frac{(\text{ctg}x)^7}{7} + C.$$

Köp ýagdaýlarda berlen integrala bölekleýin integrirleme usulyny ulanyp, ony integralyň aşagyndaky sin$x$ we cos$x$ funksiýalaryň dereјeleri öňküden pes bolan integralyň üsti bilen aňladýarlar. Şu usuly birnäçe gezek ulanaňdan soň, berlen integral integrirlemesi belli bolan integrala getirilýär.

**5-nji mysal.** $\int \cos^4 x \sin^6 x dx$ integraly hasaplalyň. Alarys:

$$\int \cos^4 x \sin^6 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^5 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^4 x \sin^5 x d \cos x =$$

$$= -\int \sin^5 x d\frac{\cos^5 x}{5} = -\sin^5 x \cdot \frac{\cos^5 x}{5} + \int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \cos x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^5 x \cos^5 x + \int \cos^4 x(1 - \sin^2 x) \cdot \sin^4 x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^5 x \cos^5 x + \int \cos^4 \sin^4 x dx - \int \cos^4 x \sin^6 x dx.$$

Deňligiň sag tarapyndaky $\int \cos^4 x \sin^6 x dx$ integraly onuň çep tarapyna geçirip, alarys:

$$2\int \cos^4 x \sin^6 x dx = -1/5 \sin^5 x \cos^5 x + \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x dx.$$

Şeýlelikde, biziň integralymyz $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$ integralyň üsti bilen aňladyldy. Indi $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$ integrala ýene şol usuly ulanalyň:

$$\int \cos^4 x \sin^4 x dx = \int \cos^4 x \sin^3 x \sin x dx = -\int \cos^4 x \sin^3 x d \cos x =$$

$$= -\int \sin^3 x \frac{d \cos^5 x}{5} = -\sin^3 x \cdot \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3}{5}\int \cos^5 x \sin^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= -\sin^3 x \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3}{5}\int \cos^4 x(1 - \sin^2 x) \cdot \sin^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\sin^3 x \cdot \cos^5 x + \frac{3}{5}\int \cos^4 x \sin^2 x dx - \frac{3}{5}\int \cos^4 x \sin^4 x dx.$$

Bu ýerden $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$ integraly tapýarys:

$$\left(1 + \frac{3}{5}\right)\int \cos^4 x \sin^4 x dx = -\frac{1}{5}\sin^3 x \cos^5 x + \frac{3}{5}\int \cos^4 x \sin^2 x dx.$$

Indi $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$ integrala ýene şol usuly ulanalyň:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \cos x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x d \sin x =$$

$$= \int \cos^3 x d\frac{\sin^3 x}{3} = \cos^3 x \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + \int \sin^3 x \cos^2 x \cdot \sin x dx =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x)\cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \cos^2 x \sin^2 x dx - \int \cos^4 x \sin^2 x dx.$$

Bu ýerden $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$ integraly tapalyň:

$$2\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \cos^3 x + \int \cos^2 x \sin^2 x dx,$$

$\int \cos^2 x \sin^2 x dx$ integral bolsa

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

toždestwony ulanmak bilen aňsat hasaplanýar.

Tapylan integrallaryň bahalaryny yzygiderli ýerli-ýerine goýup alarys:

$$\int \cos^4 x \sin^6 x dx = -\frac{1}{10}\sin^5 x \cos^5 x - \frac{1}{16}\sin^3 x \cos^5 x +$$

$$+\frac{1}{32}\sin^3 x \cos^3 x + \frac{3}{256}x - \frac{3}{1024}\sin 4x + C.$$

3. Umumy ýagdaý. Goý, $M(u,\ v)$ we $N(u,\ v)$ iki üýtgeýänli köpagzalar bolsun.

$R(u,v) = \dfrac{M(u,v)}{N(u,v)}$ gatnaşyga rasional funksiýa diýilýär.

Mysal üçin, $R(u,v) = \dfrac{5u^4 + 2u^3v - v^5 + u + v + 5}{3u^2 - 4uv^2 - 2u^2v - v^3 + 3u^2 - 2uv + 1}$ rasional funksiýadyr. $R(u,\ v)$ funksiýada $u = \cos x$, $v = \sin x$ goýup, täze $R(\cos x,\ \sin x)$ funksiýa alarys. Biz aşakda $\int R(\cos x, \sin x)dx$ görnüşdäki integraly bir üýtgeýänli rasional funksiýanyň integralyna getirip boljaklygyny görkezeris. Berlen integralda $\cos x = t, -\sin x dx = dt$ çalşyrma girizeliň.

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R(\cos x, \sin x)\frac{\sin x \cdot dx}{\sin x} =$$

$$= \int R(\cos x, \sqrt{1 - \cos^2 x})\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \sin x dx =$$

$$= -\int R(t, \sqrt{1 - t^2})\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Alnan integralda $\sqrt{1 - t^2} = (1 + t)\sqrt{\dfrac{1 - t}{1 + t}}$ deňligi göz öňünde tutup, $\dfrac{1 - t}{1 + t} = u^2$ ýa-da $t = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $dt = \dfrac{-4udu}{(1 + u^2)^2}$ çalşyrmany girizip alarys:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2}{1 + u^2} \cdot u\right)\frac{2}{1 + u^2}du.$$

Soňky alnan integralyň aşagyndaky funksiýa $u$ görä rasional funksiýadyr. Ony öwrenilen usullar bilen hasaplasa bolar. Biz sonky netijäni almak üçin, ilki bilen $\cos x = t$ we soňra $\dfrac{1 - t}{1 + t} = u^2$ çalşyrmalary girizdik. Olary birleşdirsek $u^2 = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$; $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ çalşyrmany alarys. Diýmek, biz başda hasaplamaly integralda $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ çalşyrmany girizsek we $\cos x = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $\sin x = \dfrac{2u}{1 + u^2}$, $dx = \dfrac{2du}{1 + u^2}$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, onda ýene-de şol netijä geleris.

$\int R(\cos x, \sin x)dx$ integraly rasional funksiýanyň integralyna getirmegiň formal usuly hem bar. Eýleriň

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

formulalaryny ulanyp alarys:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \cdot \frac{de^{ix}}{ie^{ix}}.$$

Indi $t = e^{ix}$ çalşyrma girizsek, biziň integralymyz

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \frac{t - \frac{1}{t}}{2i}\right)\frac{dt}{it}$$

deňlik arkaly rasional funksiýanyň integralyna geler. Ýöne bir üýtgeşik zat, ol hem integral aşagyndaky rasional funksiýanyň koeffisiýentleriniň kompleks sanlar bolmagydyr. Bu ýagdaý rasional funksiýalardan integral alyş usulyny ulanmaga hiç hili päsgel bermeýär.

**Mysallara seredeliň.**

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$. $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ çalşyrmany girizeliň. $\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}$, $dx = \frac{2du}{1 + u^2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\int \frac{\frac{2du}{1 + u^2}}{\frac{2u}{1 + u^2}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}$; $e^{ix} = t$, $ie^{ix}dx = dt$ çalşyrma girizip we Eýleriň $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ formulalaryny göz öňünde tutup alarys:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{1}{\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2} \cdot \frac{ie^{ix}dx}{ie^{ix}} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{dt}{it} = \frac{2}{i}\int \frac{1}{t^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot \frac{dt}{t} = \frac{1}{i}\int \frac{2tdt}{t^4 + 1}.$$

Indi $t^2 = u$, $du = 2tdt$ çalşyrma girizip we

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{i}\int \frac{du}{u^2 + 1}; \quad \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u + i} - \frac{1}{u - i}\right)$$

bolýanyny göz öňunde tutup alarys:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u + i} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u - i} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u + i}{u - i}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{2ix} + i}{e^{2ix} - i}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{ix} + ie^{-ix}}{e^{ix} - ie^{-ix}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + i\sin x + i\cos x + \sin x}{\cos x + i\sin x - i\cos x - \sin x}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\cos x + \sin x)\cdot(1 + i)}{(\cos x - \sin x)\cdot(1 - i)}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right| + C.$$

## 13. Irrasional funksiýalary integrirlemek

Goý, $R(u, v)$ geçen bölümde kesgitlenen rasional funksiýa bolsun. $u = x$, $v = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ belgilemeleri girizip, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ irrasional funksiýa alarys. Şu görnüşli funksiýanyň integralyny çalşyrma üsti bilen rasional funksiýanyň integralyna getirip hasaplaýarlar. Dürli ýagdaýlara seredeliň.

1. $ax^2 + bx + c$ köpagzanyň kökleri hakyky. Eger $x_1$ we $x_2$ onuň kökleri bolsalar, onda köpagzanyň öwrenilen häsiýetine görä, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ bolar.

Indi $a\dfrac{x-x_1}{x-x_2}=t^2$ ýa-da $x=\dfrac{ax_1-x_2t^2}{a-t^2}, dx=\dfrac{2a(x_1-x_2)}{(a-t^2)^2}tdt$ çalşyrma girizip alarys:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(x, \sqrt{(x-x_2)^2 a\frac{x-x_1}{x-x_2}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(x, (x-x_2)\cdot\sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{ax_1-x_2t^2}{a-t^2}, \left(\frac{ax_1-x_2t^2}{a-t^2}-x_2\right)\cdot t\right)\frac{2a(x_1-x_2)t}{(a-t^2)^2}dt.$$

Görşümiz ýaly, soňky integral rasional funksiýanyň integralydyr.

2. $ax^2+bx+c$ köpagzanyň kökleri kompleks sanlar. Eger $a>0$ bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}\,x+t$ ýa-da $x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t}$ çalşyrma ulanýarlar. Eger $c>0$ bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{c}+xt$ ýa-da $x=\dfrac{2\sqrt{c}\,t+b}{t^2-a}$ çalşyrma ulanýarlar. Şol çalşyrmalardan soň, biz ýene-de rasional funksiýanyň integralyna geleris. Rasional funksiýanyň integraly bolsa belli usullar bilen hasaplanýar.

$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ integral ýokarda seredilen integralyň has ýönekeý görnüşidir we ol ýönekeý çalşyrma bilen integrirlenýär. Integrala $\dfrac{(ax^2+bx+c)'}{2}=t$ ýa-da $ax+b/2=t$ çalşyrmany ulanalyň. Bu ýerden $x=(t-b/2)/a$, $dx=(1/a)dt$ tapyp, integralda ýerine goýup alarys:

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{A\frac{1}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right)+B}{\sqrt{a\left[\frac{1}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right)\right]^2+b\frac{1}{a}\left(t-\frac{b}{2}\right)+c}}\cdot\frac{1}{a}dt=$$

$$=\int\frac{\frac{A}{a}t+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{\frac{t^2}{a}-\frac{b^2}{4a}+c}}\cdot\frac{1}{a}dt.$$

Indi $a > 0$ we $a < 0$ bolan ýagdaýlara seredeliň. Eger $a > 0$ bolsa, onda alarys:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\frac{A}{a} t}{\sqrt{t^2 + \frac{4ac - b^2}{4}}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{4ac - b^2}{4}}} dt = \frac{A}{a\sqrt{a}} \sqrt{t^2 + \frac{4ac - b^2}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \ln\left| t + \sqrt{t^2 + \frac{4ac - b^2}{4}} \right| + C =$$

$$= \frac{A}{a\sqrt{a}} \sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \ln\left| ax + \frac{b}{2} + \sqrt{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4}} \right| + C.$$

Eger $a < 0$ bolsa, onda alarys:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{-a}}{a} \int \frac{\frac{A}{a} t + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - t^2}} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{-a}\, A}{a^2} \int \frac{tdt}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - t^2}} dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{-a}}{a}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - t^2}} = -\frac{\sqrt{-a}\, A}{a^2} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - t^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{-a}}{a}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \arcsin \frac{2t}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{-a}\, A}{a^2} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4} - \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{-a}}{a}\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

**Mysallara seredeliň.**

1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}}$ integraly hasaplalyň. $a = 1 > 0$ bolandygy sebäpli, $\sqrt{x^2-x-1} = t - x$ çalşyrmany ulanalyň. Deňligiň iki tarapyny hem kwadrata göterip we gysgalýanlary gysgaldyp taparys:

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \quad dx = 2\frac{t^2-t+2}{(2t-1)^2}dt.$$

Tapylanlary integralda ýerine goýup alarys:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt.$$

Soňky integralyň aşagyndaky rasional funksiýany ýönekeý droblara dargadyp alarys:

$$\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}.$$

Bu aňlatmany integralda ýerine goýup alarys:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = \int\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln(2t-1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + C.$$

Geçirilen çalşyrmadan $t = x + \sqrt{x^2-x-1}$ tapýarys we $t$-niň bahasyny soňky deňlikde ýerine goýýarys:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x-1}\right| - \frac{3}{2}\times$$

$$\times\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x-1}-1} + C.$$

2. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$; $\frac{(x^2-x+1)'}{2} = t$ ýa-da $x - 1/2 = t$, $x = t + 1/2$, $dx = dt$ çalşyrma girizeliň:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int \frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)-1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - t - \frac{1}{2} + 1}}dt =$$

$$= \int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}} dt = 2\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + C = 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + C.$$

Käbir ýagdaýlarda integralyň aşagyndaky funksiýa $\sqrt[p_i]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_i}}$, $i = 1, 2, ..., m$ görnüşdäki funksiýalar bilen rasional baglanyşykda bolýar. Mysal üçin,

$$\int \frac{x^2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} + 4(x+3)\sqrt[5]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} - 2x^3\sqrt[7]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4} + 5x^3 - x + 1}{x^3\sqrt[8]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} - (2x+5)\sqrt[7]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} - 6x^4 - 5x^3 + x^2 + 2} dx$$

Şeýle görnüşdäki integraly rasional funksiýanyň integralyna getirmek üçin $q_1, q_2, ..., q_m$ sanlaryň iň kiçi umumy bölünijisi bolan $s$ sany tapmak we $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$ çalşyrmany girizmek ýeterlikdir. Biziň getiren mysalymyzda $\frac{x+1}{x-1} = t^{280}$ çalşyrmany girizmek ýeterlikdir.

**Mysal.** $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ integraly hasaplalyň.

Bu ýerde iki kök bar, biriniň derejesi 2, beýlekisiniňki 3. Şu sanlaryň iň kiçi umumy bölünijisi 6. Diýmek, $x + 1 = t^6 \Rightarrow x = t^6 - 1$; $dx = 6t^5dt$ çalşyrmadan soň alarys:

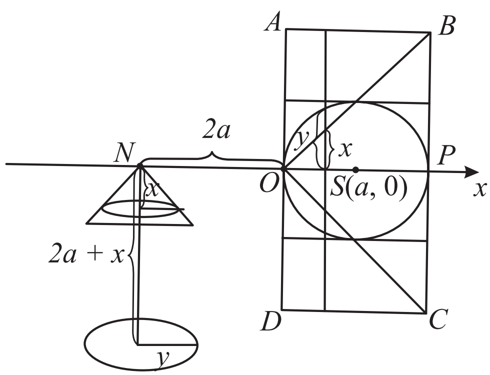
$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{(t^6-1)^2 + t^3}{t^2} 6t^5 dt =$$

$$= 6\int (t^{15} - 2t^9 + t^6 + t^3) dt = 6\left(\frac{t^{16}}{16} - \frac{t^{10}}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[3]{(x+1)^8}}{16} - \frac{\sqrt[3]{(x+1)^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7} + \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{4}\right] + C.$$

## §2. Kesgitli integral

Bu düşünjäniň gözbaşy beýik grek alymy Arhimediň işlerinde ýatyr diýsek ýalňyşmarys. Mundan 2,5 müň ýyl ozal bu beýik dananyň eden açyşlary şu wagt hem haýran galdyrýar. Ol açyşlaryň matematika bilen baglylarynyň bir toparynyň düýbünde böleklere bölmek usuly ýatandyr. Edil şeýle usul hem kesgitli integral düşünjesiniň özenidir. Onuň şol usul bilen çözen birnäçe meselelerini agzap geçeliň: parabolanyň segmentiniň meýdany, silindriň, konusyň gapdal üstüniň meýdany, şaryň üstüniň meýdany, şaryň göwrümi, şaryň segmentiniň göwrümi we gapdal üsti, paraboloidiň we giperboloidiň segmentleriniň göwrümi, üçburçlugyň, parallelogramyň agyrlyk merkezi we ş. m. Bu ajaýyp sanawy ýene-de dowam etdirse boljak. Arhimediň ulanýan usullaryndan integral jemleri düşünjesini çykarmak kyn hem bolsa, onuň işleriniň şeýle jemleriň döremegine sebäp bolanlygy ikuçsuzdyr. Biz şu ýerde mysal hökmünde Arhimediň şaryň göwrümini tapyşy baradaky täsin işini getirmegi makul bildik. Goý, radiusy $a$ deň bolan şaryň göwrümini tapmaly bolsun *(74-nji surat)*.




*74-nji surat*

Merkezi $S(a, 0)$ nokatda, radiusy $a$ deň bolan töwerek çyzylan. $AB$ we $DC$ taraplary $2a$ deň bolan, $AD$ we $BC$ taraplary $4a$ deň bolan $ABCD$ gönüburçluk çyzalyň. $O$ nokady $B$ we $C$ nokatlar bilen birleşdireliň. Indi $ABCD$ gönüburçlugy, merkezi $S(a, 0)$ nokatda, radiusy $a$ bolan tegelegi we $OBC$ üçburçlugy $x$ okuň daşyndan aýlasak, onda birinji şekilimiz aýlanma jisimi bolan silindri, ikinji şekilimiz şary we üçünji şekilimiz konusy emele getirer. Olaryň göwrümlerini degişlilikde $V_S$, $V_Ş$, $V_K$ bilen belgiläliň. Indi Arhimediň pikir ýöredişine seredeliň. Ol $OP$ kesimiň $x$ nokadyndan $x$ okuna perpendikulýar tekizlik geçirip, ýokarda emele gelen jisimleri kesýär. Şol jisimleriň kese kesikleri degişlilikde $2a$, $y$ we $x$ radiusly tegelekler bolarlar. Her kese kesik degişli jisimiň bölejigi hasap edilýär we olaryň her biriniň agramy özüniň meýdanyna deň hasap edilýär.

Konusyň we şaryň kese kesiklerini $N$ nokatdan aşaklygyna degişlilikde $x$ aralykda we $2a + x$ aralykda merkezlerinden asalyň. $(x, y)$ nokat töweregiň üstünde ýatany sebäpli, ol onuň deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ýa-da} \quad x^2 + y^2 = 2ax.$$

Soňky deňligiň iki tarapyny hem $2a\pi$-e köpeldip alarys:

$$2a(\pi x^2) + 2a(\pi y^2) = \pi(2a)^2 \cdot x,$$

bu ýerde $\pi x^2$ – konusyň kese kesiginiň agramy, $\pi y^2$ – şaryň kese kesiginiň agramy, $\pi(2a)^2$ bolsa silindriň kese kesiginiň agramy. Diýmek, $2a(\pi x^2)$ – $N$ nokatda asylan konusyň kese kesiginiň $O$ nokada görä momenti, $2a(\pi y^2)$ – şaryň kese kesiginiň momenti, $\pi(2a)^2 x$ bolsa silindriň kese kesiginiň $O$ nokada görä momenti. Soňky deňlik birinji iki momentiň jeminiň üçünjä deňligini, ýagny konusyň we şaryň kese kesikleriniň jeminiň $O$ nokada görä silindriň kese kesigi bilen deňagramlylykda boljakdygyny aňladýar. Arhimed şu ýerde ajaýyp teklip edýär, ýagny eger islendik $OP$ kesime degişli $x$ üçin birinji iki jisimiň $N$ nokatdan asylan bölejikleri $O$ nokada görä üçünji jisimiň bölejigi bilen deňagramlylykda bolsa, onda $N$ nokatda tutuşlygyna asylan birinji iki jisim hem $O$ nokada görä üçünji jisim (ýagny tutuşlygyna silindr) bilen deňagramlylykda bolar diýýär. Şol sebäpli,

$$2aV_k + 2aV_ş = aV_s$$

deňlik dogry bolmaly. Arhimediň döwründe konusyň $V_k = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a$ göwrümi we silindriň göwrümi belli bolupdyr. Olaryň bahalaryny ýokardaky deňlikde goýup alarys:

$$2a \cdot \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a + 2aV_ş = a\pi(2a)^2 \cdot 2a$$

ýa-da ýönekeýleşdirip taparys:

$$V_ş = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Ine, biziň hemmämiziň mekdepden bäri ulanyp ýören ajaýyp formulamyz şeýle dünýä inýär. Arhimediň ýokarda ady tutulan meseleleri hem bölejiklere bölme usuly bilen çözülendir. Elbetde, bu hili hasaplaýşa integral hasaplaýyş diýilmeginiň dogry däl bolmagy mümkin, ýöne şol meseleleriň integral hasaplaýşyň sakasy bolanlygyna güwä geçse bolar.

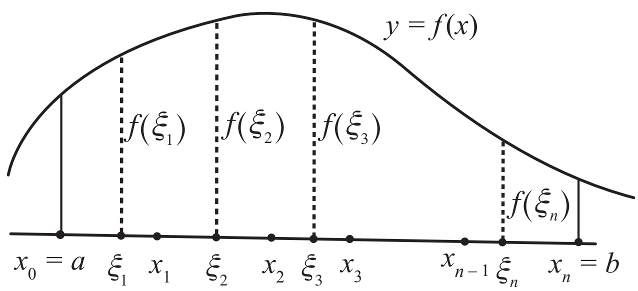
Biziň ýurtdaşlarymyzyň içinde şu ugurda möhüm netijeleri gazanan köne Mary şäherinde X – XI asyrlarda ýaşap geçen Al Haýsamdyr. Ol özüniň «Parabolik jisimi ölçemek» we «Şary ölçemek barada» atly eserlerinde kesgitli integral düşünjesine getirýän ýokarky we aşaky integral jemleri ulanypdyr.

Umuman, Arhimediňem, Al Haýsamyňam we beýleki alymlaryňam eden işi bir esasy pikire birigýär. Ol pikir ylymlary matematikalaşdyrmak pikiri bolup, biz onuň häzirki wagtda has giňden ulanylyşyny görýäris.

Geçmişiň beýik alymlarynyň gazanan üstünliklerini jemläp, şonuň esasynda XVII asyryň ortalarynda iňlis alymy I. Nýutona we nemes alymy G. Leýbnise şu günlerde biziň ulanýan integral we differensial hasaplaýşymyzyň düýbüni tutmak başardypdyr. Bu matematika üçin we beýleki ylymlar üçin hem diýseň uly açyşdyr. Şol sebäpli şu günler hem uly hormat goýmak pikiri bilen matematikanyň şu bölümini şol alymlaryň atlary bilen baglaşdyrýarlar. Taryha gysgajyk göz aýlanymyzdan soň, biz kesgitli integral düşünjesini, onuň häsiýetlerini we ulanylyşyny öwrenmäge geçýäris.

## 1. Kesgitli integralyň kesgitlenilişi

$f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde kesgitlenen. $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nokatlar bilen $[a, b]$ kesimi $n$ bölejiklere böleliň. $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ bölejikleriň uzynlyklarynyň maksimal bahasyny $h$ bilen belgiläliň: $h = \max \Delta x_i$; $h$ sana böleklemäniň ädimi diýilýär. $h$ ädimli bölekleme $Rh$ bilen belgilenýär. $Rh$ böleklemäniň birinji $[x_0, x_1]$ böleginde ýatýan $\xi_1$ nokady, ikinji $[x_1, x_2]$ böleginde ýatýan $\xi_2$ nokady we ş. m., ahyrda, $n$-nji böleginde ýatýan $\xi_n$ nokady saýlap alalyň *(75-nji surat).*




*75-nji surat*

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n \qquad (1)$$

jeme $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesim boýunça integral jemi diýilýär. Integral jemi gysgaça jem belgisini ulanyp, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ görnüşde hem ýazyp bolýar.

**Kesgitleme.** Eger $h$ nola ymtylanda (1) integral jem, $\xi_i$, $i = \overline{1, n}$, nokatlaryň saýlanyp alnyşyna we $Rh$ böleklemä bagly bolmazdan bellibir predele ymtylýan bolsa, onda ol predele $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesim boýunça kesgitli integraly diýilýär we ol $\int_a^b f(x)dx$ belgi bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

$a$ sana integralyň aşaky predeli, $b$ sana ýokarky predeli, olara bilelikde integralyň predelleri diýilýär. $\int_a^b f(x)dx$ integral okalanda $f(x)$ funksiýanyň $a$-dan $b$ çenli kesgitli integraly diýip okalýar. Eger kesgitli integral bar bolsa, ýagny (2) deňligiň sagyndaky predel kesgitlemede getirilen şertlerde bar bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýär diýilýär. Elbetde, kesgitli integral düşünjesi üçin haýsy funksiýanyň berlen kesimde integrirlenýändigi, haýsysynyň integrirlenmeýändigi örän möhümdir. Bu meselä kän bir çuňlaşman, berlen kesimde integrirlenýän funksiýanyň şol kesimde çäkli bolýandygyny subutsyz belläp geçeliň. Bu integrirlenmegiň zerurlyk şertidir. Integrirlenmegiň ýeterlik şerti barada biz aşakda durup geçeris.

Goý, $f(x)$ $[a, b]$ kesimde berlen çäkli funksiýa bolsun. $[a, b]$ kesimi $a = x_0,\ x_1, \ldots, x_n = b$ nokatlar bilen $n$ bölege böleliň. Bölünmäniň $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ bölejiklerine seredeliň. Goý, $M_i$ $f(x)$ funksiýanyň $[x_{i-1}, x_i]$ bölejikdäki bahalarynyň takyk ýokarky çägi, $m_i$ bolsa şol bölejikdäki takyk aşaky çägi bolsun. $\omega_i = M_i - m_i$ tapawuda funksiýanyň $[x_{i-1}, x_i]$ kesimdäki yrgyldysy diýilýär. $\omega_i$ yrgyldyny $i = 1, 2, ..., n$ üçin, ýagny bölejikleriň hemmesi üçin tapalyň. Goý, $h$ böleklemäniň ädimi bolsun. Aşakdaky teoremany subutsyz kabul edeliň.

**Teorema.** $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimde integrirlenmegi üçin

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0 \tag{3}$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur hem ýeterlikdir.

$f(x)$ üznüksiz funksiýa bolan ýagdaýynda ýa-da $[a, b]$ kesimde tükenikli sanly nokatlarda birinji görnüşli üzülýän funksiýa bolan ýagdaýynda (3) deňlik hökmany ýerine ýetýär. Diýmek, $[a, b]$ kesimde üznüksiz funksiýa, hatda $[a, b]$ kesimde tükenikli sandaky nokatlarda birinji görnüşli üzülýän, çäkli funksiýa hem şol kesimde integrirlenýändir.

## 2. Kesgitli integralyň häsiýetleri

Biz aşakdaky häsiýetlerde garalýan kesimlerde integrirlenýän funksiýalara seredýändiris. Şol sebäpli her gezek «Goý, $f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsun» ýaly teklipleri gaýtalap durmarys.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ (subutsyz kabul edilýär).

2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ (subutsyz kabul edilýär).

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, $c$ – hemişelik ululyk.

Söz bilen aýdanyňda üçünji häsiýet hemişelik köpeldijini integral alamatynyň daşyna çykaryp boljakdygyny aňladýar.

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Dördünji häsiýeti söz bilen, gysgaça, iki funksiýanyň jeminiň integraly ol funksiýalaryň integrallarynyň jemine deň diýip aýdyp bolýar.

5. Eger $c \in (a, b)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bu häsiýet integraly bölekläp hasaplap bolýandygyny aňladýar.

6. Eger islendik $x \in [a, b]$ üçin $f(x) \le g(x)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx, \quad a \le b.$$

Bu häsiýeti, gysgaça, uly funksiýanyň integraly uly bolýar diýip aýtsa bolar.

7. Eger $f(x)$ $[a, b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda $|f(x)|$ hem şol kesimde integrirlenýändir we $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$ deňsizlik dogrudyr.

8. Eger käbir $m$ we $M$ sanlar üçin $[a, b]$, $a < b$ kesimiň islendik nokadynda $m \le f(x) \le M$ deňsizlik ýerlikli bolsa, onda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

deňsizlik hem ýerliklidir.

9. $\int_a^b dx = b - a.$

Bu häsiýetleriň hemmesi integralyň kesgitlemesinden, ýagny (2) deňlikden gelip çykýar.

**Üçünji häsiýetiň subudy.** $cf(x)$ funksiýa üçin (2) deňligi ýazalyň: $\int_a^b cf(x)dx = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i$. $c$ hemişeligi jem belgisiniň, soňra predel belgisiniň daşyna çykaryp bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c \int_a^b f(x)dx.$$

Şeýlelikde, $\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ predeliň barlygyndan $\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i$ predeliň barlygy, ýagny $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimde integrirlenýänliginden $cf(x)$-iň hem şol kesim boýunça integrirlenýänligi hem-de (3) häsiýetiň dogrulygy gelip çykýar.

**Dördünji häsiýetiň subudy.** $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar üçin $\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ we $\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ predeller bar. Diýmek, predeliň häsiýetine görä,

$$\lim_{h \to 0} \left[ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \right] = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\Delta x_i$$

predel hem bar. Beýle diýmek, $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň $[a, b]$ kesim boýunça integrallary bar ýagdaýlarynda $f(x) + g(x)$ funksiýanyň hem şol kesim boýunça integraly bar diýmekdir. Indi

$$\lim_{h\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\right] = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

bolýandygyny göz öňünde tutup we (2) kesgitlemäni ulanyp, soňky deňligi

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$$

görnüşde ýazyp bileris. Edil şuny hem subut etmek gerekdi.

**Bäşinji häsiýetiň subudy.** Ol häsiýete şeýle düşünmeli: eger $\int_a^b f(x)dx$ integral bar bolsa, onda $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ integrallar hem bardyrlar we $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ deňlik ýerliklidir.

Goý, $x_0 = a,\ x_1, ...,\ x_n = b$ $Rh$ böleklemäniň nokatlary bolsun. $\omega_1$, $\omega_2$, ..., $\omega_n$ funksiýanyň şol kesimlerdäki yrgyldylary bolsunlar. Indi $c$ nokat $x_i$ nokatlaryň biri bilen gabat gelýär diýip hasap edeliň. Onda $\sum_{i=1}^{n}\omega_i \cdot \Delta x_i = \sum{}'\omega_i \cdot \Delta x_i + \sum{}''\omega_i\Delta x_i$ deňligi ýazyp bileris. Bu ýerde $\sum{}'$ jem diňe $[a, c]$ kesime degişli bölejikler üçin düzülen, $\sum{}''$ jem diňe $[c, b]$ kesime degişli bölejikler üçin düzülen. $\int_a^b f(x)dx$ integralyň barlygy sebäpli, hökmany ýagdaýda, ýokardaky teorema görä, $\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$ bolar. $\sum{}'$ we $\sum{}''$ jemleriň položitel bolýandyklary sebäpli, soňky deňligiň esasynda $\lim_{h\to 0}\sum{}'\omega_i \cdot \Delta x_i = 0,\ \lim_{h\to 0}\sum{}''\omega_i \cdot \Delta x_i = 0$ ýazyp bileris. Bu bolsa, ýokarda agzalan teorema görä, $f(x)$ funksiýa $[a, c]$ we $[c, b]$ kesimlerde integrirlenýän funksiýa diýmekdir. Häsiýetiň tassyklaýan deňligini almak üçin $c$ nokady böleklemäniň nokatlarynyň biri hasap edip we $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ jemi $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum{}'f(\xi_i)\Delta x_i + \sum{}''f(\xi_i)\Delta x_i$ görnüşde ýazyp, $h$ nola ymtylanda predele geçmek ýeterlikdir.

**1-nji bellik.** $c$ nokat $[a, b]$ kesimiň daşynda ýatanda bäşinji häsiýet aşakdaky görnüşde dogrudyr.

Eger $f(x)$ funksiýa $[a, c]$ we $[c, b]$ kesimleriň ulusynda integrirlenýän bolsa, onda ol $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ kesimleriň üçüsinde hem integrirlenýändir we deňlik ýerliklidir.

**2-nji bellik.** Islendik sandaky $a = c_0, c_1, ..., c_k = b$ sanlar üçin hem $[c_i, c_j]$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, ..., k$ kesimleriň iň ulusynda $f(x)$ funksiýa integrirlenýän bolsa, onda ol olaryň hemmesinde hem integrirlenýändir we $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx$ deňlik ýerliklidir. Galan häsiýetleriň hem edil şeýle subut edilýändikleri sebäpli, biz getirilen subutlar bilen çäklenmegi makul bildik.

## 3. Orta baha barada teorema

**Teorema.** $f(x) \in C[a, b]$ üçin $(a, b)$ aralykda şeýle bir $c$ nokat tapylyp,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

deňlik ýerine ýeter.

**Subudy.** $f(x) \in C[a, b]$ bolany üçin, $[a, b]$ kesime degişli käbir $x_1$ nokatda iň uly $M$ baha, käbir $x_2$ nokatda iň kiçi $m$ baha eýe bolar. Diýmek, $\forall x \in [a,b]$ üçin $m \le f(x) \le M$ deňsizlik we şonuň bilen bilelikde, integralyň 8-nji häsiýetine görä, $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ deňsizlik ýerine ýeter. Soňky deňsizligi $b - a$ sana böleliň. Alarys:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M.$$

$f_c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ sana $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesim boýunça orta bahasy diýilýär. Ol san, görşümiz ýaly, $m \le f_c \le M$ deňsizligi kanagatlandyrýar. Üznüksiz funksiýanyň häsiýetine görä, $(a, b)$ aralykda $c$ nokat tapylyp, $f(c) = f_c$ deňlik ýerine ýeter. Şol sebäpli $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ deňligi ýazyp bileris. Bu ýerden aňsatlyk bilen $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ deňlik gelip çykýar.

Umuman, $[a, b]$ kesimde integrirlenýän islendik $f(x)$ funksiýa üçin hem $f_c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ sana funksiýanyň $[a, b]$ kesim boýunça orta bahasy diýilýär. Geliň, mysala seredeliň.

Goý, $[a, b]$ kesim $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ nokatlar bilen $n$ deň böleklere bölünen bolsun. $[a, b]$ kesimde $f(x)$ funksiýa $f(x) = A_i$, $x_{i-1} \le x < x_i$, $i = \overline{1,n}$ ($A_i$ – hemişelikler), deňlikler bilen kesgitlensin. Funksiýanyň orta bahasyny tapalyň. Integralyň häsiýetine görä,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} A_i dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - x_{i-1}).$$

Islendik $i = \overline{1,n}$ üçin $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ bolany sebäpli alarys:

$$f_c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{b-a}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n}.$$

Ýagny $f_c$ orta baha $A_i$, $i = \overline{1,n}$ sanlaryň orta arifmetik bahasyna deňdir.

Orta baha baradaky teoremanyň umumylaşdyrylanyny subutsyz getireliň.

**Teorema.** $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in C[a,b]$, $g(x) \ge 0$ funksiýalar üçin $(a, b)$ aralykda käbir $c$ nokat tapylyp, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$ deňlik ýerlikli bolar.

Biz aşakda matematiki derňewiň ajaýyp formulalarynyň biri bolan Nýuton-Leýbnisiň formulasy barada gürrüň ederis. Ol kesgitli integraly hasaplamagyň formulasydyr.

## 4. Nýuton – Leýbnisiň formulasy

$f(x) \in C[a, b]$ funksiýa. $x \in [a, b]$ nokat alalyň we

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

ýokarky predeli üýtgeýän integrala seredeliň.

**Teorema.** $F(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimiň islendik nokadynda önümi bardyr we ol $f(x)$ funksiýa deňdir, ýagny $\forall x \in [a,b]$ üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerliklidir.

**Subudy.** Kesgitlemä görä,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

$F(x + \Delta x) - F(x)$ tapawudy tapalyň:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx.$$

Integralyň häsiýetine görä,

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

Diýmek,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx.$$

Indi $\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$ integrala orta baha baradaky teoremany ulanalyň. Alarys:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)\Delta x, \quad x < c < x + \Delta x.$$

Şeýlelikde,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c)\Delta x$$

deňligi alarys. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $\Delta x$ sana böleliň we $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçeliň: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x - \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$; $x < c < x + \Delta x$ bolany sebäpli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} c = x$ bolar. Şol sebäpli, subut etmeli deňligi alarys:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

**Netije.** Eger $f(x) \in C[a, b]$ bolsa, onda onuň $[a, b]$ kesimde asyl funksiýasy bardyr. Olaryň biri bolup $F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$ funksiýa hyzmat edýär. Alnan netijäniň esasynda Nýuton-Leýbnisiň formulasy gelip çykýar. $F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$ deňlikde $x$-iň ýerine $b$-ni goýup alarys:

$$F(b) = \int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$x$-iň ýerine $a$-ny goýup, alarys:

$$F(a) = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Diýmek,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) = F(b) - F(a)$$

ýazyp bolar. Goý, indi $\mathcal{F}(x)$ islendik asyl funksiýa bolsun. Onda asyl funksiýalaryň häsiýetine görä

$$F(x) = \mathcal{F}(x) + C$$

deňligi we onuň bilen bilelikde

$$F(b) - F(a) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$$

deňligi alarys. Indi $F(b) - F(a)$ tapawudyň tapylan bahasyny ýokarky deňlikde goýup alarys:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a). \qquad (*)$$

Ine, şu formula Nýuton-Leýbnisiň formulasy diýilýär. Ol formulany

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(x)\Big|_a^b \qquad (**)$$

ýa-da $(\mathcal{F}(x) + C)\big|_a^b = \int_a^b f(x)dx$ bolýandygyny nazarda tutup,

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b \qquad (***)$$

görnüşde ýazsa bolar. Diýmek, kesgitli integraly hasaplamak üçin, ilki bilen kesgitsiz integraly hasaplamaly, soňra kesgitli integraly ýokarda getirilen formulalaryň üçünjisi boýunça tapmaly. Mysallara ýüzleneliň.

**1-nji mysal.** $\int_0^\pi \cos x dx$ integraly hasaplalyň.

$$\int_0^\pi \cos x dx = \int \cos x dx\Big|_0^\pi = (\sin x + C)\Big|_0^\pi =$$
$$= (\sin \pi + C) - (\sin 0 + C) = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Mysaldan görnüşi ýaly, kesgitsiz integraly hasaplanymyzda $C$ hemişelik sany goşmagyň geregi hem ýok, sebäbi ol netijä täsir etmeýär.

**2-nji mysal.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ integraly hasaplalyň.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx\,\Big|_0^1 = \text{arctg}x\,\Big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

## 5. Kesgitli integraly bölekleýin integrirlemek usuly

Goý, $U(x)$, $V(x)$, $U'(x)$, $V'(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsunlar. Onda $U'V$, $V'U$ funksiýalar $[a, b]$ kesim boýunça integrirlenýändirler we

$$\int\limits_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)U'(x)dx$$

deňlik dogrudyr. Dogrudan hem, kesgitsiz integral üçin

$$\int U(x)V'(x)dx = U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)dx$$

deňlik öň subut edilipdi. Indi $\int\limits_a^b UV'dx$ integrala Nýuton-Leýbnisiň formulasynyň üçünji ýazylyşyny ulanyp alarys:

$$\int\limits_a^b UV'dx = \int UV'dx\,\Big|_a^b = \left[UV - \int VU'dx\right]\Big|_a^b = UV\,\Big|_a^b - \int VU'dx\,\Big|_a^b$$

ýa-da

$$\int\limits_a^b UV'dx = UV\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b VU'dx.$$

Bu formula, adatça,

$$\int\limits_a^b UdV = UV\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b VdU$$

görnüşde ýazylýar we oňa kesgitli integraly bölekleýin integrirleme formulasy diýilýär. Görşümiz ýaly, kesgitli integral üçin aýratyn bölekleýin integrirleme formulasyny ulanmagyň geregi hem ýok ýaly. Nýuton-Leýbnisiň formulasynyň üçünji ýazylyşyny ulanyp, ilki kesgitsiz integraly hasaplap, soň integralyň predellerini goýmak ýeterlik. Emma soňky formulany ulanmaklarynyň sebäbi onuň köp ýagdaýlarda integraly hasaplama meselesini ýeňilleşdirmegidir.

**Mysal.** $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ integraly hasaplamaly. Bölekleýin integrirläp alarys:

$$I_m = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x \,\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1)\sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$$

Indi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ toždestwony ulanalyň:

$$I_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)dx = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m$$

ýa-da

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

yzygiderli hasaplaýyş formulasyny alarys.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1; \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup taparys:

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad I_3 = \frac{2}{3}, \quad I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \text{ we ş.m.}$$

## 6. Kesgitli integralda üýtgeýäni çalşyrma usuly

Goý, $f(x) \in C[a, b]$, $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b, \forall t \in [\alpha, \beta]$ üçin $\varphi(t)$ funksiýanyň bahasy $[a, b]$ kesime degişli bolsun, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

formula dogrudyr. Bu formula kesgitli integralda üýtgeýäni çalşyrma formulasy diýilýär. Formulany subut edeliň. $\int f(x)dx$ kesgitsiz integral üçin

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

formulanyň dogrudygyny biz öň görüpdik. Nýuton-Leýbnisiň formulasynyň üçünji ýazylyşyny ulanyp taparys:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**1-nji mysal.** $\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{5}x - 2\right)dx$ integraly hasaplalyň. Üýtgeýäni $\frac{1}{5}x - 2 = t$ ýa-da $x = 5(t + 2)$, $dx = 5dt$ formula bilen çalşyralyň. $t = \frac{1}{5}\pi - 2$ bolanda $x = \pi$, $t = -2$ bolanda $x = 0$ bolýandygy sebäpli, ýazyp bileris:

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{5}x - 2\right)dx = \int_{-2}^{\frac{1}{5}\pi - 2} \sin t5dt = -5\cos t\Big|_{-2}^{\frac{\pi}{5}-2} =$$

$$= -5\cos\left(\frac{\pi}{5} - 2\right) + 5\cos 2.$$

**2-nji mysal.** $\int_0^2 \frac{[x^2 + 1 + (x^2 + 1)^2 + 3]xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ integraly hasaplalyň.

$t = \sqrt{x^2 + 1}$ çalşyrma girizeliň. Onda $dt = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}dx$; $t = 1$ bolanda $x = 0$, $t = \sqrt{5}$ bolanda $x = 2$ bolýandygyny görüp, ýazyp bileris:

$$\int_0^2 \frac{[x^2+1+(x^2+1)^2+3]xdx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \int_0^2 [x^2+1+(x^2+1)^2+3]\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^{\sqrt{5}} (t^2+t^4+3)dt =$$

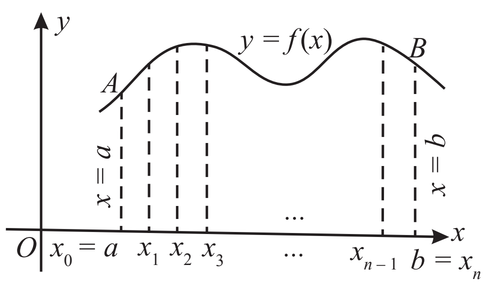
$$= \left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+3t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{25\sqrt{5}}{5}+3\sqrt{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-3 =$$

$$= \frac{29\sqrt{5}}{3}-\frac{53}{15}.$$

## §3. Kesgitli integralyň kömegi bilen çözülýän meseleler

### 1. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany

Iki gapdalyndan $x = a$ we $x = b$ gönüler bilen, aşagyndan $y = 0$ göni bilen, ýokarsyndan $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen figura egriçyzykly trapesiýa diýilýär *(76-njy surat)*.

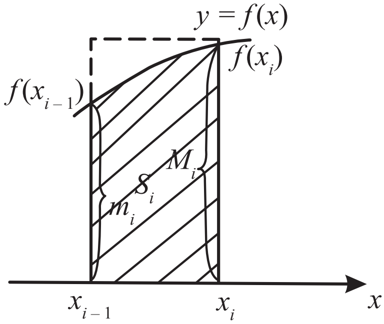



*76-njy surat*

Häzirlikçe $f(x) \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ hasap edeliň. $[a, b]$ kesimi $x_0 = a, x_1, x_2,..., x_n = b$ nokatlar bilen bölekläliň. $x_0, x_1, x_2,..., x_n$ nokatlardan tä $f(x)$ funksiýanyň grafigi bilen kesişýänçä perpendikulýarlar galdyralyň. Ol perpendikulýarlar egriçyzykly trapesiýany $n$ bölege bölerler. Olaryň meýdanlaryny degişlilikde $S_1, S_2, ..., S_n$ bilen belgiläliň. Eger $S$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdany bolsa, onda

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

deňligi alarys. $S_i$ – trapesiýalaryň meýdanlaryny kesgitläliň *(77-nji surat).*



*77-nji surat*

Goý, $m_i$, $M_i$ sanlar $f(x)$ funksiýanyň $[x_{i-1}, x_i]$ kesimdäki iň kiçi we iň uly bahasy bolsun. Suratdan görnüşi ýaly,

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \le S_i \le M_i(x_i - x_{i-1})$$

deňsizlik ýerliklidir. Deňsizligi $(x_i - x_{i-1}) > 0$ sana bölüp alarys:

$$m_i \le \frac{S_i}{x_i - x_{i-1}} \le M_i.$$

$f(x)$ üznüksiz funksiýa. Şoňa görä $[x_{i-1}, x_i]$ kesimde $\xi_i$ nokat tapylyp,

$$\frac{S_i}{x_i - x_{i-1}} = f(\xi_i)$$

ýa-da

$$S_i = f(\xi_i)\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

deňlik ýerine ýeter. Şu meýdanyň tapylan bahasyny $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ aňlatmada ýerine goýup alarys:

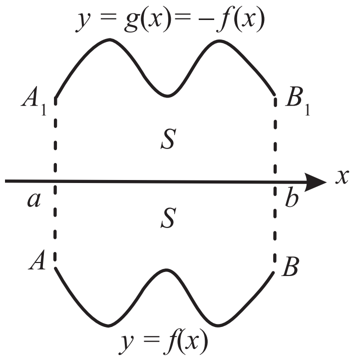
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Diýmek, egriçyzykly trapesiýanyň meýdany integral jeme deň. Indi $\max \Delta x_i = h$ bilen belgiläp, $h$ nola ymtylanda soňky deňlikde predele geçeliň:

$$\lim_{h\to 0} S = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Deňligiň çep tarapyndaky $S$ – hemişelik san. Şol sebäpli, $\lim_{h\to 0} S = S.$ $f(x)$ üznüksiz bolanlygy sebäpli deňligiň sag tarapyndaky predel bardyr we $\int_a^b f(x)dx$ integrala deňdir. Aýdylanlary göz öňünde tutup alarys:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



*78-nji surat*

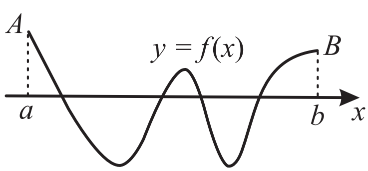
Biz şu formulany getirip çykaranymyzda $f(x)$-iň otrisatel däl funksiýa bolmagyny talap edipdik. Goý, $f(x) \leq 0$ şerti kanagatlandyrsyn. $g(x) = -f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde otrisatel däl funksiýa bolar *(78-nji surat).*

*aABb* – egriçyzykly trapesiýanyň meýdany, suratdan görnüşi ýaly, $aA_1B_1b$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deň. $y = g(x)$ funksiýanyň otrisatel däl bolmagy sebäpli, $aA_1B_1b$ trapesiýanyň meýdany

$$S = \int_a^b g(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

formula bilen tapylar. Diýmek, $f(x) \leq 0$ bolan ýagdaýynda,

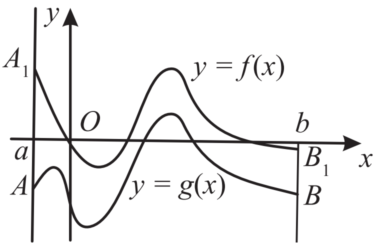
$$S = -\int_a^b f(x)dx,$$



*79-njy surat*

ýagny *aABb* trapesiýanyň meýdany $\int_a^b f(x)dx$ integralyň ters alamaty bilen alnan bahasyna deňdir. Umuman, $f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde alamatyny üýtgedýän funksiýa bolan ýagdaýynda *(79-njy surat) aABb* egriçyzykly trapesiýanyň meýdany hasaplananda, onuň $x$-ler okunyň aşagynda ýatýan böleklerine degişli integrallar ters alamaty bilen alynýar. Trapesiýanyň meýdany şeýle hasaplananda

$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

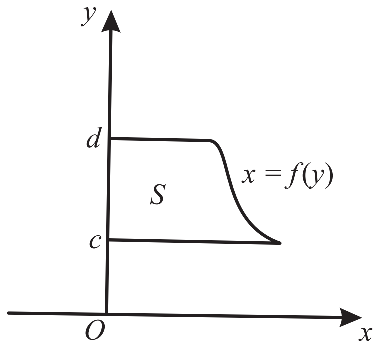



80-nji surat

deňlik ýene-de dogrudyr.

Indi $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ we $y=g(x)$ ($g(x) \le f(x)$, $x \in [a; b]$) funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýa seredeliň *(80-nji surat)*. Ýokarky formulalara esaslanyp, $AA_1B_1B$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdanynyň

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



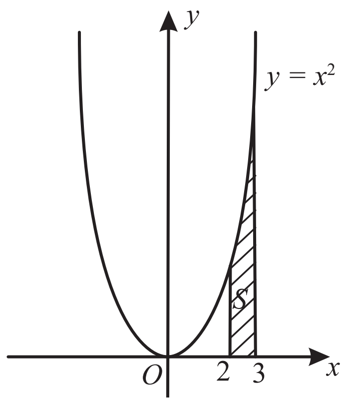

81-nji surat

formula arkaly tapylýandygyny aňsatlyk bilen subut etse bolar.

Eger egriçyzykly trapesiýa $x = f(y)$ funksiýanyň grafigi we $y = c$, $y = d$, $x = 0$ gönüler bilen çäklenen bolsa *(81-nji surat)*, onda onuň $S$ meýdany, ýokarka meňzeşlikde,

$$S = \int_c^d f(y)dy$$

formula arkaly tapylar.




82-nji surat

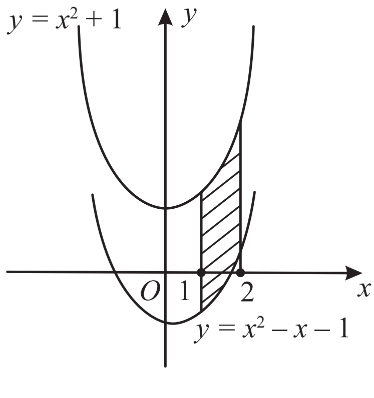
**1-nji mysal.** $y = x^2$ parabolanyň grafigi, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapalyň *(82-nji surat)*.

Bu ýerde $S = \int_a^b f(x)dx$ bolar. $f(x) = x^2$, $a = 2$, $b = 3$. Ýerine goýup alarys:

$$S = \int_2^3 x^2 dx = \int x^2 dx \Big|_2^3 = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

**2-nji mysal.** $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - x - 1$ funksiýalaryň grafikleri we $x = 1$, $x = 2$ gönüler bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapalyň *(83-nji surat).*

Bu ýerde $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ bolar. $a = 1, b = 2$, $f_2(x) = x^2 + 1$, $f_1(x) = x^2 - x - 1$ berlenleri formulada ýerine goýup alarys:




*83-nji surat*

$$S = \int_1^2 [(x^2 + 1) - (x^2 - x - 1)]dx =$$

$$= \int_1^2 (x + 2)dx = \int (x + 2)dx\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

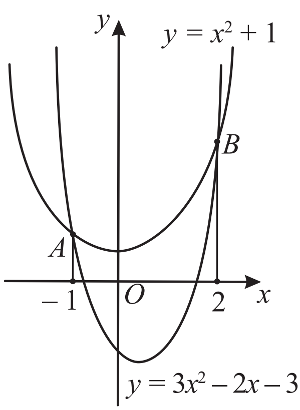
**3-nji mysal.** $y = x^2 + 1$, $y = 3x^2 - 2x - 3$ funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen meýdany tapalyň *(84-nji surat).*

*A, B* nokatlaryň abssissalaryny tapalyň. Onuň üçin funksiýalary bir-birine deňläp, alnan deňlemäni çözmeli. Alarys:

$$x^2 + 1 = 3x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

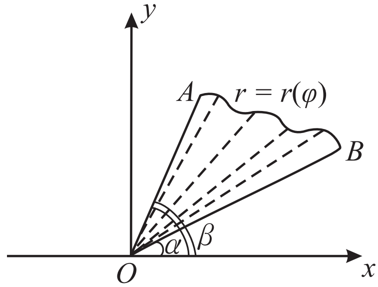
$$S = \int_{-1}^2 [(x^2 + 1) - (3x^2 - 2x - 3)]dx = 9.$$




*84-nji surat*

## 2. Egriçyzykly sektoryň meýdany

$A$ we $B$ nokada ugrukdyrylan radius wektorlar we $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, egri bilen çäklenen figura egriçyzykly sektor diýilýär *(85-nji surat)*.

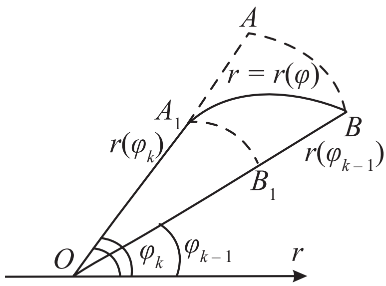


*85-nji surat*

Goý, $r(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$ bolsun. $[\alpha, \beta]$ kesimi $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_n = \beta$ nokatlar bilen böleklere böleliň. $\varphi = \varphi_i$, $i = \overline{1, n-1}$ şöhleleri geçirip, sektory $n$ bölek sektorlara böleliň. $k$-njy bölek sektoryň meýdanyny $S_k$ bilen, tutuş sektoryň meýdanyny bolsa $S$ bilen belgiläp alarys:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Indi, islendik $S_k$ meýdany bahalamaga çalşalyň *(86-njy surat)*.



*86-njy surat*

Goý, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, $h = \max \Delta\varphi_i$ bolsun. $r(\varphi)$ funksiýanyň $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ kesimdäki iň uly bahasy $M_i$, iň kiçi bahasy $m_i$ bolsun. Suratdan görnüşi ýaly, $S_k^{m_k} \le S_k \le S_k^{M_k}$. Bu ýerde: $OB = OA = M_k$, $OB_1 = OA_1 = m_k$, $S_k^{m_k} - OA_1B_1$ sektoryň meýdany, $S_k^{M_k} - OAB$ sektoryň meýdany. Onda tutuş sektoryň $S$ meýdany üçin $\sum_{k=1}^{n} S_k^{m_k} \le S \le \sum_{k=1}^{n} S_k^{M_k}$ deňsizlikleri ýazyp bolar.

$$S_k^{m_k} = \frac{1}{2} r^2(\varphi_k)(\varphi_k - \varphi_{k-1}), \quad S_k^{M_k} = \frac{1}{2} r^2(\varphi_{k-1})(\varphi_k - \varphi_{k-1})$$

bolany sebäpli alarys:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\varphi_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1}) \le S \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\varphi_{k-1})(\varphi_k-\varphi_{k-1}).$$

$r(\varphi)$ üznüksiz bolany sebäpli, soňky deňsizligiň çepinde we sagynda duran integral jemleriň $h \to 0$ bolandaky predelleri

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

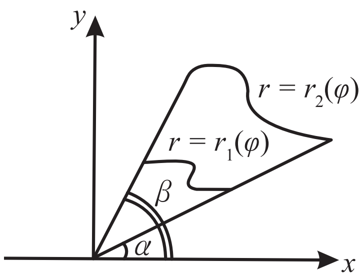
integrala deňdir. Bu ýerden

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \le S \le \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

deňsizlik we onuň esasynda

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

formula gelip çykýar.



*87-nji surat*

Egriçyzykly sektor $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ egriler bilen we $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ şöhleler bilen çäklenen ýagdaýynda *(87-nji surat)* onuň meýdanynyň

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)]d\varphi$$

formula arkaly tapyljakdygyny okyjynyň özi subut edip biler.

**1-nji mysal.** $r = \dfrac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{1+\varphi}}$, $\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$ egri we $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ şöhleler bilen çäklenen egriçyzykly sektoryň meýdanyny tapalyň. $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$ formulany ulanyp alarys:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{1+\varphi}}\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\varphi}{1+\varphi}d\varphi=\frac{1}{2}\int\frac{\varphi}{1+\varphi}d\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi-\ln(1+\varphi))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\ln\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\ln\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\ln\frac{6+\pi}{6+2\pi}.$$

**2-nji mysal.** $r_2=1+\cos\varphi,\ \ r_1=1-\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ egriler bilen we $\varphi=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2}$ şöhleler bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapalyň.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi)]d\varphi$$

formulany ulanyp alarys:

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\varphi)^2-(1-\cos\varphi)^2]d\varphi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\varphi d\varphi=2.$$

## 3. Parametrik görnüşde berlen egriler bilen çäklenen figuralaryň meýdany

$f(x)\in C[a,\ b]$ bolanda, funksiýanyň grafigi we $x=a,\ \ x=b,\ \ y=0$ gönüler bilen çäklenen figuranyň meýdanynyň

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

formula arkaly tapylýandygyny biz görüpdik. Goý, indi $y=f(x)$ baglanyşyk $x=X(t),\ \ y=Y(t),\ \alpha\le t\le\beta$ parametrik görnüşde berilsin hem-de $X(t)\in C[\alpha,\beta],\ \ X'(t)\in C[\alpha,\beta],\ \ X(\alpha)=a,\ \ X(\beta)=b$ bolsun.

Onda $y=Y(t)=f(X(t))$ bolar we

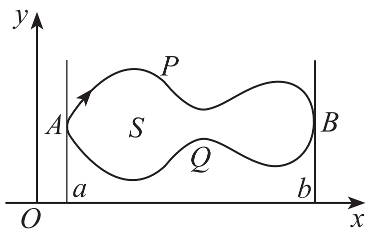
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(X(t))X'(t)dt = \int_\alpha^\beta Y(t)X'(t)dt$$

deňlik ýerine ýeter, ýagny ýokarky egriçyzykly trapesiýanyň $S$ meýdany üçin $S = \int_\alpha^\beta Y(t)X'(t)dt$ formulany alarys.

**1-nji mysal.** $x = t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$ egri bilen we $x = 1$, $x = 9$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny tapalyň. Formulany ulanyp alarys:

$$S = \int_1^3 \sqrt{t^2+1}\,2tdt = \left.\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^3 = \frac{20\sqrt{10}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Goý, indi deňlemesi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ bolan ýapyk egriçyzyk berilsin *(88-nji surat).*




*88-nji surat*

$x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolsun. Goý, egriçyzyk $A$ we $B$ nokatlarda oňa geçirilen dik galtaşýanlaryň arasynda ýatsyn we $[a, b]$ kesimdäki nokatlardan dikligine geçirilen islendik göni egrini diňe iki nokatda kessin.

Şu ýagdaýda egriniň $APB$ böleginiň deňlemesini $y = f_2(x)$ görnüşde ýazyp bolar, $f_2(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolar. Edil şonuň ýaly, $AQB$ bölegiň deňlemesini hem $y = f_1(x)$ görnüşde ýazyp bolar. Onda $APBQ$ figuranyň $S$ meýdanyny, ýokardan belli bolşy ýaly,

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

formula bilen tapyp bileris. Indi $(x(\alpha), y(\alpha))$ $A$ nokadyň koordinatalary hasap etsek, egri ýapyk bolany sebäpli $(x(\beta), y(\beta))$ hem $A$ nokadyň koordinatalary bolar we käbir $\delta \in (\alpha, \beta)$ üçin $(x(\delta), y(\delta))$ $B$ nokadyň koordinatalary bolar. Diýmek, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = a$, $x(\delta) = b$. $t$ üýtgeýän $[\alpha, \delta]$ aralykda üýtgände $(x(t), y(t))$ nokat $A$ nokatdan başlap $B$ nokada çenli $APB$ dugany çyzýar diýeliň, $t$ üýtgeýän $[\delta, \beta]$ aralykda üýtgände $(x(t), y(t))$ nokat $B$ nokatdan başlap $A$ nokada çenli $BQA$ dugany çyzýar diýeliň. Indi, kesgitli integralda $x = x(t)$ çalşyrma girizip alarys:

$$\int_a^b f_2(x)dx = \int_\alpha^\delta f_2(x(t))x'(t)dt = \int_\alpha^\delta y(t)x'(t)dt;$$

$$-\int_a^b f_1(x)dx = \int_b^a f_1(x)dx = \int_\delta^\beta f_1(x(t))x'(t)dt = \int_\delta^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Integrallaryň bahalaryny ýokarky formulada ýerine goýup alarys:

$$S = \int_\alpha^\delta y(t)x'(t)dt + \int_\delta^\beta y(t)x'(t)dt$$

ýa-da $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ egri bilen çäklenen meýdan üçin

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

formulany ýazyp bileris. Edil şeýle hereketler edip, şol meýdan üçin

$$S = -\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt$$

formulany hem ýazyp bolar. Adatça, bu iki formulany birikdirip, meýdan üçin

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [y(t)x'(t) - x(t)y'(t)]dt$$

formulany alýarlar. Biz formulany çykaranymyzda $(x(t), y(t))$ nokat $t$ $\alpha$-dan $\beta$ çenli üýtgände egri çyzygy suratda görkezilişi ýaly (sagat diliniň hereketiniň ugry boýunça) geçýär diýip hasap etdik. Eger $(x(t), y(t))$ nokat sagat diliniň hereketiniň ters ugry boýunça hereket edip egrini çyzsa, onda ýokarky formula

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$$

görnüşe geler.

Ýene-de, biz formulany çykaranymyzda, egri çyzykdan, $[a, b]$ kesimiň nokatlaryndan çykýan gönüler ony iki nokatda kesýär diýen talaby etdik. Emma ol formula şu teklip ýerine ýetmeýän ýagdaýlarda hem dogrudyr. $t$ üýtgeýän $[\alpha, \beta]$ kesimi $\alpha$-dan başlap yzarlap çykanda $(x(t), y(t))$ nokat öz-özüni kesmeýän ýapyk egrini çyzsa we $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda-da ýokarky formulanyň dogry bolýandygyny subutsyz belläp geçeliň. Mysallara seredeliň.

**2-nji mysal.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsiň meýdanyny tapalyň. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ ellipsiň deňlemesiniň parametrik görnüşi bolýar. Özi hem $t$ 0-dan başlap $[0; 2\pi]$ kesimi yzarlap çykanda, $(x(t), y(t))$ nokat ellipsi sagat diliniň hereketiniň tersine çyzyp geçýär. Şol sebäpli

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$$

formulany ulanyp taparys:

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\cdot a\sin t]dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} abdt = \pi ab.$$

**3-nji mysal.** $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ asteroida diýip atlandyrylýan egri bilen çäklenen meýdany tapalyň. $t$ 0-dan başlap $[0; 2\pi]$ kesimi yzarlap çykanda, $(x(t), y(t))$ nokat asteroidany sagat diliniň hereketiniň tersine çyzyp çykýar. Şoňa görä

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(xy' - yx')dt$$

formulany ulanyp alarys:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot \sin t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

## 4. Egri çyzygyň dugasynyň uzynlygy

Goý, islendik egriniň uzynlygyny ölçemek düzgüni girizilen bolsun.

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad \alpha \le t \le \beta$$

parametrik deňlemeli $L$ egrä seredeliň.

$x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ $A$ nokadyň koordinatalary, $x(\beta)$, $y(\beta)$, $z(\beta)$ $B$ nokadyň koordinatalary bolsun, $t$ parametr $\alpha$-dan başlap $[\alpha, \beta]$ kesimi yzarlap çykanda, $M(t) = M(x(t), y(t), z(t))$ nokat $A$-dan başlap $L$ egrini yzarlap çyksyn (Eger $M(t)$ $L$ egriniň käbir dugasyny $k$ gezek gaýtalap geçýän bolsa, onda ol duganyň uzynlygy $L$ egriniň uzynlygy hasaplananda $k$ gezek hasaplanýar).

Goý, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolsunlar. $L$ egriniň üstünde $M(t)$ we $M(t + \Delta t)$ nokatlary alalyň. $L$ egriniň $A\breve{M}(t)$ dugasynyň uzynlygyny $s(t)$ bilen belgiläliň. $M(t)\breve{M}(t + \Delta t)$ duganyň $\Delta s$ uzynlygynyň $M(t)M(t + \Delta t)$ – şol dugany dartýan hordanyň $\Delta h$ uzynlygyna bolan gatnaşygyna seredeliň. Biz başda girizilen uzynlyk ölçeme düzgüninden

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta h} = 1$$

şerti ýerine ýetirmegini talap etjekdiris. Bu talap tebigydyr we ol egriniň uzynlygy oňa döwük çyzyk çyzmak usuly bilen tapylýan ýagdaýynda ýerine ýetýändir.

$$\Delta h = \sqrt{[x(t+\Delta t) - x(t)]^2 + [y(t+\Delta t) - y(t)]^2 + [z(t+\Delta t) - z(t)]^2}$$

deňligiň iki tarapyny hem $\Delta t$ bölüp we predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} = \sqrt{\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta h} = 1$ deňligi özgerdip alarys:

$$1 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta h} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\frac{\Delta h}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}$$

ýa-da

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Soňky deňlemeden

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt + C$$

boljakdygy aýdyňdyr. $s(\alpha) = 0$ bolany üçin, $C = 0$ bolar. $s(\beta) = s$ belgileme girizip, $L$ egriniň uzynlygyny taparys:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Eger $L$ egri $xOy$ tekizlikde ýatsa, ýagny onuň deňlemesi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ bolsa, onda formula

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

görnüşe geler. Eger tekizlikdäki egri $y = f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki grafigi bolsa, onda $x = t$, $y = f(t)$, $a \le t \le b$ deňlikler bilen grafigiň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyp, ol grafigiň uzynlygy üçin

$$s = \int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt = \int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

formulany alarys. Eger egri $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ görnüşde polýar koordinatalar ulgamynda berilse, onuň deňlemesini

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ \alpha \le \varphi \le \beta$$

parametrik görnüşde ýazyp bolar. Ýönekeý amallardan soň, onuň uzynlygy üçin aşakdaky formulany alarys:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

**Mysallara seredeliň.**

**1-nji mysal.** $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $0 \le t \le 4\pi$ görnüşde berlen egriniň uzynlygyny tapalyň.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

formulany ulanyp alarys:

$$s = \int_{0}^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2}\,dt = 2\int_{0}^{4\pi} dt = 8\pi.$$

**2-nji mysal.** $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $0 \le t \le \pi$ egriniň uzynlygyny tapalyň.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

formulany ulanýarys:

$$s = \int_{0}^{\pi} \sqrt{(-\sin t + \sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - \cos t + t\sin t)^2}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{t^2}\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

**3-nji mysal.** $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ egriniň uzynlygyny tapalyň. Egriniň $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ görnüşde parametrik deňlemesini ýazyp we 2-nji mysaldaky formulany ulanyp taparys:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 9\cos^4 t \sin^2 t + b^2 9 \sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,|\sin t \cos t|\,dt =$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t}\,\sin 2t dt =$$

$$= \frac{-6}{a^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t}\, d\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t\right) =$$

$$= \frac{-6\cdot\frac{2}{3}}{a^2-b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{-4}{a^2-b^2}[b^3 - a^3] = 4\frac{b^2+ab+a^2}{b+a}.$$

**4-nji mysal.** $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardioida atly egriniň uzynlygyny tapalyň.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$$

formulany ulanyp taparys:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 8a.$$

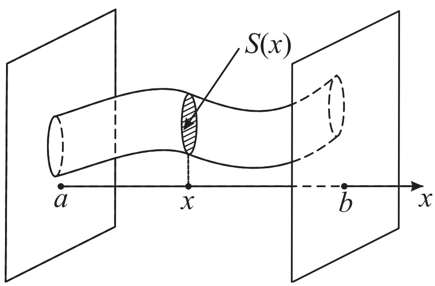
## 5. Jisimiň göwrümi

Ýokarda aýdyşymyza görä, Arhimed köp jisimleriň göwrümini kesgitli integral düşünjesiniň düýbi bolan bölekleme usuly bilen tapypdyr. Ine, şu işine hormat goýmak bilen, biz aşakdaky lemmany görnükli alymyň ady bilen baglaşdyrmagy makul bildik.

**Arhimediň lemmasy.** Goý, jisim $x$ okunyň ugry boýunça $x = a$ we $x = b$ tekizlikleriň arasynda ýatsyn. $[a, b]$ kesimiň islendik $x$ nokadyndan geçýän, $x$-ler okuna perpendikulýar bolan tekizligiň jisimi kesende emele getirýän kese kesiginiň meýdany $S(x)$ bolsun *(89-njy surat).* Eger $S(x) \in C[a, b]$ bolsa, onda jisimiň $V$ göwrümi

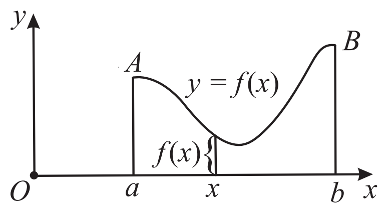
$$V = \int_a^b S(x)dx$$

formula arkaly tapylar.




*89-njy surat*

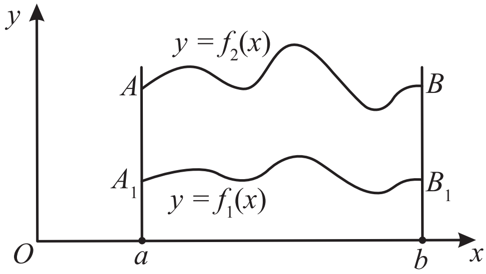
Lemmany ulanyp, aýlanma jisiminiň göwrümini tapalyň. Goý, $aABb$ egriçyzykly trapesiýa *(90-njy surat)* $x$-ler okunyň daşyndan aýlanyp, jisim emele getirsin. Emele gelen aýlanma jisimi $x = a$ we $x = b$ tekizlikleriň arasynda ýatar we onuň $x$ nokatdan geçýän, $x$-ler okuna perpendikulýar tekizlik bilen kesişmesinde emele gelen kese kesiginiň meýdany $S(x) = \pi f^2(x)$ bolar. Diýmek, lemma görä, aýlanma jisiminiň $V$ göwrümi




*90-njy surat*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

formula arkaly tapylar. Eger jisim $A_1ABB_1$ egriçyzykly trapesiýanyň *(91-nji surat)* aýlanmagyndan emele gelse, onda onuň $V$ göwrümini



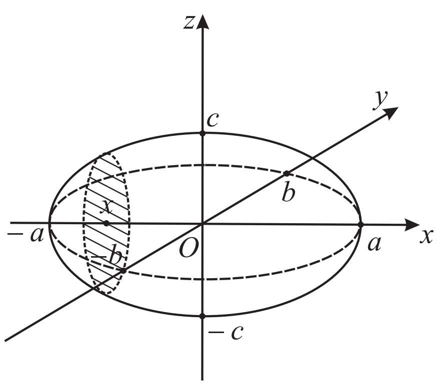

*91-nji surat*

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx$$

formula arkaly tapsa bolar. Mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid atly jisimiň göwrümini tapalyň *(92-nji surat)*.

Ellipsoid $x = -a$ we $x = a$ tekizlikleriň arasynda ýatyr. Onuň $[-a, a]$ kesimde ýatýan islendik $x$ nokatdaky kese kesigi ellips bolýar.




*92-nji surat*

Ellipsoidiň deňlemesinde $\frac{x^2}{a^2}$ agzany deňligiň sag tarapyna geçirip we soňra alnan deňligiň iki tarapyny hem $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ aňlatma bölüp, şol ellipsiň deňlemesini alalyň:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Diýmek, onuň meýdany

$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

formula bilen tapylar. $S(x)$-iň bahasyny $V = \int_{-a}^{a} S(x)dx$ formulada goýup alarys:

$$V = \int_{-a}^{a} \pi cb\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi cb\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Bu ýerden $a = b = c = R$ bolan ýagdaýynda

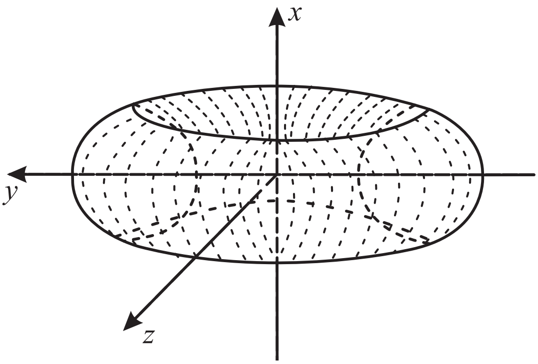
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

radiusy $R$ bolan şaryň göwrüminiň formulasy gelip çykýar.

**2-nji mysal.** $x^2 + (y - 1)^2 \le \frac{1}{4}$ tegelegiň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanyp emele getiren halkasynyň göwrümini tapalyň *(93-nji surat)*. Biz bu tegelege

$$y_2(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad y_1(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$$

egriler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýa hökmünde seredip bileris. Halkanyň göwrümini $V = \pi\int_{a}^{b} (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx$ formulany ulanyp tapalyň:




*93-nji surat*

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)^2\right] dx =$$

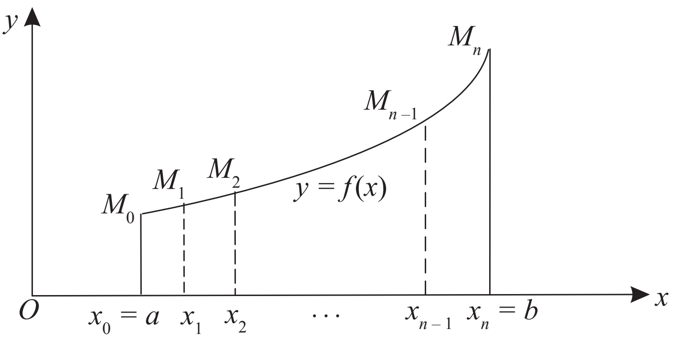
$$= 4\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\, dx.$$

Soňky integralda $x = \frac{1}{2}\sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ çalşyrma girizip alarys:

$$V = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 t} \cdot \frac{1}{2}\cos t dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

## 6. Aýlanma jisiminiň gapdal üstüniň meýdany

$f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde üznüksiz we položitel bolsun. $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanyp emele getiren jisiminiň üstüniň meýdanyny tapalyň *(94-nji surat)*.




*94-nji surat*

Funksiýanyň grafigini $M_0(a, f(a))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, ..., $M_n(b, f(b))$ nokatlar bilen $n$ bölege böleliň we ol nokatlary hordalar bilen birleşdireliň. Hordalaryň emele getiren döwük çyzygynyň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanyp emele getiren üstüniň meýdanyny $\delta_n$ bilen belgiläliň. Adatdaky ýaly, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$, $\max\limits_i \Delta x_i = h$ belgilemeleri girizeliň.

**Kesgitleme.** Eger

$$\lim_{h \to 0} \delta_n = \delta$$

bar bolsa, onda $\delta$ sana aýlanma jisiminiň gapdal üstüniň meýdany diýilýär.

$\delta$ sany tapmaga çalşalyň. Islendik $M_{i-1}M_i$ hordanyň aýlanmagyndan emele gelen üstüň kesik konusyň gapdal üsti boljakdygy aýdyňdyr. Onuň bir esasynyň perimetri $2\pi f(x_{i-1})$, beýleki esasynyň perimetri $2\pi f(x_i)$, apofemasy $M_{i-1}M_i$ bolar. Şoňa görä, ol emele gelen kesik konusyň gapdal üstüniň meýdany $\pi\,(f\,(x_i) + f(x_{i-1}))\cdot M_{i-1}M_i$ bolar. Diýmek, bütin döwük çyzygyň aýlanmagyndan emele gelen üstüň $\delta_n$ meýdany

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \pi[(f(x_i) + f(x_{i-1}))M_{i-1}M_i]$$

formula arkaly tapylar. $M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$ bolýandygyny nazarda tutup alarys:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}\,.$$

Indi $f(x)$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimde önümi bar we $f'(x) \in C[a, b]$ diýip hasap edeliň. Onda Lagranžyň teoremasyna esaslanyp

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

deňligi we şoňa görä,

$$\delta_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} (x_i - x_{i-1})$$

deňligi ýazyp bileris. Predele geçip alarys:

$$\lim_{h \to 0} \delta_n = \pi \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i .$$

$h \to 0$ bolanda, $f(x)$ funksiýanyň üznüksizligi sebäpli, soňky deňlikde $f(x_i) + f(x_{i-1})$ jemi $2f(\xi_i)$ bilen çalşyrmaga haklydyrys. Bu ýagdaýy we $f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimde üznüksizdigini, diýmek, integrirlenýändigini göz öňünde tutup alarys:

$$\lim_{h \to 0} \delta_n = 2\pi \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\, \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ahyrda, aýlanma jisimiň üstüniň $\delta$ meýdany üçin

$$\delta = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

formulany alarys. Goý, $y = f(x)$ baglanyşyk $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$; $x'(t) > 0$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ parametrik görnüşde berilsin.

Ýokarky formulada $x = x(t)$ çalşyrma girizip alarys:

$$\delta = 2\pi \int_\alpha^\beta f(x(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)\, dt.$$

$f(x(t)) = y(t)$ bolýandygyny ýatlap,

$$\delta = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

formulany alarys.

**Bellik.** Mesele diňe aýlanma jisiminiň üstüniň meýdanyny tapmak görnüşinde däl-de, has umumy görnüşde, ýagny islendik egriniň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapmak görnüşinde hem goýlup bilner.

Eger egri $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ deňleme bilen berilse we $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ funksiýalar $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda şol egriniň aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdany

$$\delta = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

formula arkaly tapylýar.

**1-nji mysal.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ kardioidanyň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapalyň.

Kardioida $x$-ler okuna görä simmetrik egri bolany üçin, onuň okuň ýokarsynda ýatýan böleginiň aýlanmagyndan emele gelýän üste seretmek ýeterlikdir. Kardioidanyň ýokarky böleginiň deňlemesini $x = a(1 + \cos t)\cos t$, $y = a(1 + \cos t)\sin t$, $0 \le t \le \pi$ görnüşde ýazalyň we ýokarky formuladan peýdalanalyň. Alarys:

$$\delta = 2\pi \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos t)\sin t \sqrt{(-\sin t - \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\sin t \sqrt{2 + 2\cos t}\, dt =$$

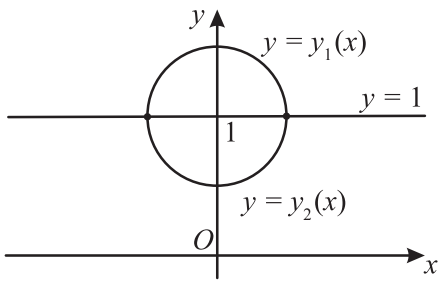
$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)\sin t \cdot \cos\frac{t}{2} dt =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left[\sin t \cdot \cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t \cdot \cos\frac{t}{2}\right] dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}t +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{5}{2}t + \frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}t\right] dt,$$

$$\delta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

**2-nji mysal.** $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ töweregiň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapalyň *(95-nji surat)*.




*95-nji surat*

$y = 1$ göni bilen töweregi iki bölege böleliň. Onuň ýokarky böleginiň deňlemesi

$$y_1(x) = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2},$$

aşaky böleginiň deňlemesi

$$y_2(x) = 1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$$

bolar. Umumy tapylmaly $\delta$ meýdan birinji ýarymtöweregiň aýlanmasyndan emele gelen üstüň $\delta_1$ meýdany bilen ikinji ýarymtöweregiň aýlanmasyndan emele gelen üstüň $\delta_2$ meýdanynyň jemine deňdir.

$$\delta = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

formulany ulanyp taparys:

$$\delta_1 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right] \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)'\right]^2}\, dx,$$

$$\delta_2 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)\sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\right)'\right]^2}\, dx$$

ýa-da

$$\delta_1 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} dx; \quad \delta_2 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} dx.$$

Bu ýerden

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} dx = 2\pi \arcsin 2x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\pi^2.$$

**3-nji mysal.** $y = \frac{r}{H}x, \quad 0 \le x \le H; \quad \sqrt{H^2 + r^2} = l$ göni çyzygyň kesiminiň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üstüň meýdanyny tapalyň.

$\delta = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ formulany ulanyp alarys:

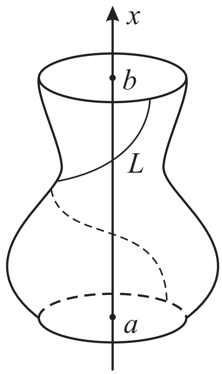
$$\delta = 2\pi \int_0^H \frac{rx}{H}\sqrt{1 + \frac{r^2}{H^2}}\, dx = 2\pi \frac{r}{H^2} l \int_0^H x dx = 2\pi \frac{r}{H^2} l \frac{H^2}{2} = \pi r l.$$

Bu üstüň esasynyň töwereginiň radiusy $r$, apofemasy $l$ bolan konusyň gapdal üsti bolýandygy aýdyňdyr.

**4-nji mysal.** Giňişlikde

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad a \le x \le b$$

deňlemeler bilen berilýän $L$ egri çyzyk $x$-ler okunyň daşyndan aýlanyp üst emele getirýär. Şol üstüň $\delta$ meýdanyny we $x = a, \quad x = b$ tekizlikler bilen çäklenen $V$ göwrümi tapalyň *(96-njy surat)*. Emele gelen üstüň deňlemesini




*96-njy surat*

$$x = x, \quad y = \sqrt{y^2(x) + z^2(x)} \sin\varphi, \quad z = \sqrt{y^2(x) + z^2(x)} \cos\varphi,$$

$$a \le x \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

görnüşde ýazyp bolar. Deňlemede $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ goýup, üstüň $z = 0$ tekizlik bilen kesişme çyzyklarynyň birini alarys:

$$x = x, \quad y = \sqrt{y^2(x) + z^2(x)}, \quad z = 0, \quad a \le x \le b.$$

Diýmek, biziň üstümiz $y = \sqrt{y^2(x) + z^2(x)}$, $a \le x \le b$ egriniň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele geldi diýse bolar. Şoňa görä, onuň meýdany

$$\delta = 2\pi \int_a^b \sqrt{y^2(x) + z^2(x)} \cdot \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{y^2(x) + z^2(x)}\right)'\right]^2}\, dx$$

ýa-da

$$\delta = 2\pi \int_a^b \sqrt{y^2(x) + z^2(x) + (y(x)y'(x) + z'(x)z(x))^2}\, dx$$

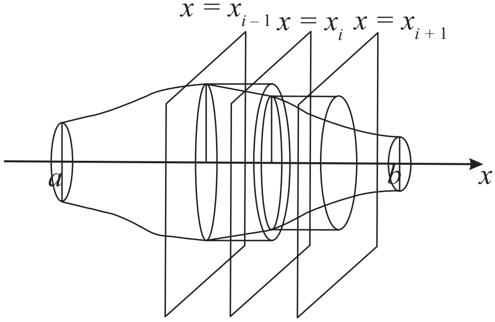
formula arkaly tapylar. $V$ göwrümi bolsa

$$V = \pi \int_a^b [y^2(x) + z^2(x)]dx$$

formula boýunça hasaplasa bolar.

## 7. Aýlanma jisiminiň massasy we agyrlyk merkezi

Goý, jisim $y = f(x)$, $a \le x \le b$, $f(x) \in C[a, b]$ funksiýanyň grafigi, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň aýlanmagyndan emele gelen bolsun. Onuň $\rho = \rho(x)$ dykyzlygy bolsa diňe $x$ argumente bagly üznüksiz funksiýa bolsun. $[a, b]$ kesimi $x_0 = a$, $x_1$, ..., $x_n = b$ nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Adatdaky ýaly, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $\max\limits_i \Delta x_i = h$, $i = \overline{1,n}$ belgilemeleri girizip, $x = x_i$, $i = \overline{1,n-1}$ tekizlikleri geçireliň. Ol tekizlikler jisimi $n$ sany bölejiklere bölerler *(97-nji surat)*.




*97-nji surat*

Biz ol bölejikleri esaslarynyň radiuslary $r_i = f(x_i)$, beýiklikleri $\Delta x_{i+1}$, $i = \overline{0,n-1}$ bolan silindrler diýip hasap ederis. $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0,n-1}$ kesimleriň her birinde $\xi_i$ nokat alalyň we $\rho(x)$ dykyzlyk şol kesimleriň her birinde hemişelik bahasyny saklaýar, ýagny $\rho(x) = \rho(\xi_i)$ bolýar diýip hasap edeliň. $i$-nji silindriň massasyny $m_i$, bütin jisimiň massasyny $m$ bilen belgilesek,

$$m \cong \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

takmyn deňligi alarys. Şu deňlikde $h$ nola ymtylanda predele geçsek, $m = \lim\limits_{h \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i$ takyk deňligi alarys. Biz şu ýerde ýokarky tassyklamanyň dogrulygyny matematiki takyk subut edip hem boljakdygyny belläp geçmek bilen çäklenmegi makul bildik. Islendik $i$-nji silindrde dykyzlyk hemişelik hasap edilensoň, onuň massasy $m_i = \pi f^2(x_i) \cdot \Delta x_{i+1} \rho(\xi_i)$ bolar. $m_i$-leriň tapylan bahalaryny ýokarky deňlikde goýup,

$$m = \lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(x_i) \Delta x_{i+1} \rho(\xi_i)$$

deňligi ýa-da kesgitli integralyň kesgitlemesine görä

$$m = \pi \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$$

formulany alarys. Islendik $i$-nji silindrde dykyzlygy hemişelik hasap edenimiz üçin, onuň agyrlyk merkeziniň $M_i\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ 0,\ 0\right)$ nokatda ýatjakdygy düşnüklidir. Mehanikanyň kanunlaryna laýyklykda, $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary üçin

$$x_c \cong \frac{1}{m} \lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} m_i$$

takmyn deňligi we $y_c = 0$, $z_c = 0$ takyk bahalaryny alarys. Soňky deňlikde $m_k$ massalary olaryň tapylan bahalary bilen çalşyryp we $h$ nola ymtylanda predele geçip, takyk

$$x_c = \frac{1}{m} \lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \pi f^2(x_i) \Delta x_i \cdot \rho(\xi_i)$$

formulany ýa-da kesgitli integralyň kesgitlemesine görä

$$x_c = \frac{\pi}{m} \int_a^b x \rho(x) f^2(x) dx$$

formulany alarys. Diýmek, aýlanma jisiminiň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkezi aýlanma okunda ýatýar we onuň koordinatalary aşakdaky formulalar bilen kesgitlener:

$$x_c = \frac{\pi}{m} \int_a^b x \rho(x) f^2(x) dx, \quad y_c = 0, \quad z_c = 0.$$

**Mysal.** $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$ parabolanyň bölegi, $x = 0, x = 1, y = 0$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň aýlanmagyndan emele gelen jisimiň (paraboloidiň segmentiniň) $\rho = \rho_0$ dykyzlygy hemişelik bolan ýagdaýynda massasyny we agyrlyk merkezini tapalyň.

Ýokarky formulalary ulanyp alarys:

$$m = \int_0^1 \rho_0 \pi x dx = \frac{\pi \rho_0}{2},$$

$$m_c = \frac{1}{m}\int_0^1 x\rho_0 \pi x dx = \frac{\rho_0 \pi}{3m} = \frac{2}{3}; \quad y_c = 0, \quad z_c = 0.$$

## 8. Agramly egriniň massasy we agyrlyk merkezi

Goý, $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta$ deňlemeli $Z$ egri berilsin we onuň $(x(t), y(t), z(t)), \alpha \le t \le \beta$ nokadyndaky dykyzlygy $\rho(t)$ bolsun. Onda onuň massasy

$$m = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

formula arkaly, $M(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary bolsa

$$x_c = \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta z(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

formulalar arkaly tapylýarlar.

**Mysal.** Dykyzlygy $\rho(t) = t^2 + 1$, deňlemesi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3} \cdot t$, $0 \le t \le 2\pi$ bolan egriniň massasyny we agyrlyk merkezini tapalyň.

Formulalary ulanyp alarys:

$$m = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2}\, dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (1+t^2)dt = \frac{12\pi + 16\pi^3}{3};$$

$$x_c = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \cos t(1+t^2)\cdot 2dt = \frac{2}{m}\int_0^{2\pi} \cos t \cdot t^2 dt = \frac{8\pi}{m};$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \sin t(1+t^2)\cdot 2dt = \frac{2}{m}\int_0^{2\pi} \sin t \cdot t^2 dt = -\frac{8\pi^2}{m};$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \sqrt{3}\, t(1+t^2)\cdot 2dt = \frac{2\sqrt{3}}{m}\int_0^{2\pi} t(1+t^2)dt = \frac{4\sqrt{3}\,\pi^2}{m}(1+2\pi^2).$$

## 9. Aýlanma jisiminiň aýlanma oka görä inersiýa momenti

Goý, aýlanma jisimi

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad a \le x \le b$$

egriniň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen üst bilen çäklenen bolsun *(96-njy surata seret)*. $[a, b]$ kesimi $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Adatdaky ýaly, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$, $\max \Delta x_i = h$ belgilemeleri girizeliň. $x = x_i$, $i = 0, 1, ..., n$ tekizlikleri geçireliň *(97-nji surat)*.

Ol tekizlikler jisimi $n$ sany bölejiklere bölerler. Biz ol bölejikleri esaslary $r_i = \sqrt{y^2(x_i) + z^2(x_i)}$, $i = \overline{0, n-1}$ radiusly tegelekler, beýiklikleri $\Delta x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$ bolan silindrler diýip hasap ederis. Goý, jisimiň dykyzlygy $\rho = \rho(x)$ we diňe $x$ argumente bagly bolsun. $\Delta x_i$-ler ýeterlik kiçi ýagdaýynda, $\rho(x)$ üznüksiz funksiýa ýagdaýynda $\rho(x)$ her bir $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ kesimde hemişelik bahasyny saklaýar, ýagny $\rho(x) = \rho(x_i)$, $i = \overline{0, n-1}$ diýse bolar. Goý, $I_i$ $i$-nji silindriň $x$ oka görä inersiýa momenti, $I_x$ – bütin jisimiň $x$ oka görä inersiýa momenti bolsun. Onda

$$I_x \cong \sum_{i=0}^{n-1} I_i$$

takmyn deňligi ýazyp bileris. Bu deňlikde $h$ nola ymtylanda predele geçsek,

$$I_x = \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} I_i$$

takyk deňligi alarys. Esasynyň radiusy $r_i = \sqrt{y^2(x_i) + z^2(x_i)}$ we beýikligi $\Delta x_{i+1}$ bolan, oky $x$-ler oky bilen gabat gelýän silindriň $x$-ler okuna görä $I_i$ inersiýa momenti, belli bolşy ýaly, $I_i = \frac{1}{2}\pi\rho(x_i)r_i^4\Delta x_{i+1}$ formula arkaly tapylýar. Diýmek, $I_x = \lim\limits_{h\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\pi\rho(x_i)r_i^4\Delta x_{i+1}$. Bu ýerden kesgitli integralyň kesgitlemesine görä,

$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b \rho(x)[y^2(x) + z^2(x)]^2 dx$$

formulany alarys. Eger $y = f(x)$, $z = 0$, $a \le x \le b$ bolsa, ýagny jisim $y = f(x)$, $a \le x \le b$ funksiýanyň grafigi, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň aýlanmagyndan emele gelen bolsa, onda onuň aýlanma okuna görä inersiýa momenti

$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b \rho(x)f^4(x)dx$$

formula arkaly tapylýar.

**Mysal.** Beýikligi $H$, esasynyň radiusy $R$ bolan birjynsly $(\rho = \rho_0)$ konusyň simmetriýa okuna görä inersiýa momentini tapalyň. Konus $y = \frac{R}{H}x$, $x = 0$, $x = H$, $y = 0$ gönüler bilen çäklenen trapesiýanyň $x$-ler okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelipdir diýilse bolar. Diýmek, onuň inersiýa momenti $I_x = \frac{\pi}{2}\int_a^b \rho(x)f^4(x)dx$ formula arkaly hasaplanýar:

$$I_x = \frac{\pi}{2}\int_0^H \rho_0\left(\frac{R}{H}x\right)^4 dx = \frac{\pi\rho_0 R^4 H}{10}.$$

## 10. Göni boýunça hereket edýän jisimiň geçen ýolunyň uzynlygy

Goý, jisim $x$-ler oky boýunça $v = v(t)$ tizlik bilen $x = a$ nokatdan başlap $[t_0, T]$ wagt aralygynda hereket etsin. Jisimiň geçen ýoluny tapalyň. Belli bolşy ýaly, $v = v_0$ hemişelik bolan ýagdaýynda geçilen ýoluň uzynlygy

$$s = v_0(T - t_0)$$

formula bilen kesgitlenýär. $v(t)$ hemişelik bolmadyk ýagdaýynda ol ýoluň uzynlygy şeýle kesgitlenýär: $[t_0, T]$ kesimi $t_0, t_1, ..., t_n = T$ nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Adatdaky ýaly, $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$, $\max\limits_i \Delta t_i = h$ belgilemeleri girizeliň. $v(t) \in C[t_0, T]$ hasap edip, $[t_{i-1}, t_i], i = \overline{1,n}$ kesimde $t_i, i = \overline{1,n}$ nokatlary alalyň. $h$ ýeterlik kiçi bolsa, bölejiklerde tizlik $v(t_i)$ hemişelik sana deň diýse bolar. Onda jisimiň $[t_{i-1}, t_i]$ wagt aralygynda geçen ýolunyň uzynlygy $\Delta s_i = v(t_i)(t_i - t_{i-1})$ bolar. Jisimiň $[t_0, T]$ wagt aralygynda geçen $s$ ýolunyň uzynlygy bolsa takmynan $s \cong \sum\limits_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i$ formula bilen kesgitlener. Bu deňlikde $h$ nola ymtylanda predele geçip, takyk deňlik alarys:

$$s = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i.$$

Ahyrda, kesgitli integralyň kesgitlemesini ulanyp, $s = \int\limits_{t_0}^{T} v(t)dt$ formulany alarys.

**Mysal.** Jisim $v(t) = gt$ tizlik bilen $[0, T]$ wagt aralygynda hereket edipdir. Geçen ýolunyň uzynlygyny tapalyň. $s = \int\limits_{t_0}^{T} v(t)dt$ formulany ulanyp taparys:

$$s = \int_0^T gtdt = g\frac{T^2}{2}.$$

Jisimiň $t = T$ wagtdaky tizligi $v = gT$ bolar. $s = \dfrac{gT^2}{2}$ deňlikden $T$-ni tapyp, $v = gT$ formulada ýerine goýsak,

$$v = \sqrt{2gs}$$

– tizlik bilen geçilen ýoluň uzynlygynyň arasyndaky giňden belli bolan gatnaşygy alarys.

## 11. Güýjüň bitiren işini hasaplamak

Jisim $x$-ler oky boýunça $x = a$ nokatdan $x = b$ nokada çenli $F = f(x)$ güýjüň täsiri bilen hereket edipdir. $F$ güýjüň bitiren $A$ işini hasaplalyň. Eger $F = F_0$ hemişelik san bolsa, onda belli bolşy ýaly, iş güýjüň geçilen ýoluň uzynlygyna köpeldilmegine deň:

$$A = F_0(b - a).$$

Eger güýç hemişelik bolmasa, iş edil geçen bölümde geçilen ýoluň uzynlygynyň hasaplanyşy ýaly tapylýar. Ýagny hemişelik däl $F = f(x)$ güýjüň bitiren işi

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

formula arkaly tapylýar.

**Mysal.** $h$ beýiklikdäki jisim ýeriň dartyş güýjüniň täsiri astynda ýere gaçýar. Güýjüň bitiren işini hasaplamaly.

Ýerden $x$ beýiklikdäki jisime ýeriň merkezine tarap ugrukdyrylan $F \equiv \gamma \frac{mm_1}{(R + x)^2}$ güýç täsir edýär. Bu ýerde $m$ jisimiň massasy, $m_1$ ýeriň massasy, $R$ – ýeriň radiusy. Diýmek, güýjüň bitiren işi

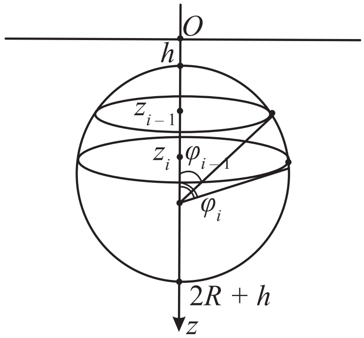
$$A = \int_0^h \gamma \frac{mm_1}{(R + x)^2} dx = \frac{\gamma mm_1 h}{(R + h)R} \approx \frac{\gamma mm_1 h}{R^2}$$

bolar. $\frac{\gamma m_1}{R^2}$ – ýeriň üstünde ýatan, massasy bire deň jisime täsir edýän ýeriň dartyş güýjüdir. Ol güýjüň ululygy $g$ bilen belgilenýär. Diýmek, bitirilen iş

$$A = mgh$$

bolar. $mgh$ ululyga ýerden $h$ beýiklikdäki $m$ massaly jisimiň potensial energiýasy hem diýilýär.

## 12. Suwuklyga çümdürilen jisimiň agramy barada




*98-nji surat*

Goý, $mg$ agramly $R$ radiusly şar suwuklyga çümdürilen bolsun. Şaryň depesi suwuklygyň derejesinden $h$ *sm* pesde bolsun. Şaryň suwuklykdaky agramyny tapalyň *(98-nji surat)*. Suwuklygyň dykyzlygy $\rho$ bolsun. Suwuklyk öz içine çümdürilen jisimiň üstüniň her bir nokadyna şol nokatdaky üste geçirilen normal boýunça täsir edýär. Täsir edýän güýjüň ululygy şol nokadyň suwuklygyň derejesinden näçe çuňlukda ýatanyna bagly. Ýagny ol nokat $z$ çuňlukda ýatsa, onda şol nokadyň jisimiň üstündäki meýdany $\delta$ bolan örän kiçi etrabyna täsir edýän basyş güýji, takmynan, $\delta z\rho g$ bolar. Ol güýç şol meýdança suwuklykda $z$ çuňlukda gorizontal ýatanda onuň göni üstündäki suwuklyk mukdarynyň agramyna deňdir *(98-nji surata seret)*.

Şary $z_0 = h$, $z_1$, ..., $z_n = 2R + h$ nokatlardan geçýän gorizontal tekizlikler bilen guşaklyklara böleliň. Şol guşaklyklaryň her birine täsir edýän basyş güýjüni kesgitläliň. $z = z_{i-1}$, $z = z_i$ tekizlikler bilen çäklenen guşaklyga seredeliň. Ol guşaklygyň $S_i$ meýdany, çen bilen, $S_i \approx 2\pi R \sin\varphi_i \cdot R\Delta\varphi_i$ bolar we guşaklyk suwuklygyň derejesinden $z_i$ çuňlukda ýatýar diýse bolar. Guşaklygyň meýdany $\delta$ bolan bölejigine radius boýunça merkeze ugrukdyrylan $\delta z_i \rho g$ güýç täsir edýär. Guşaklygyň $z$ oka görä simmetrik bolandygy sebäpli, ol güýçleriň gorizontal düzüjileri agrama täsir etmeýärler. Olaryň wertikal düzüjileriniň jemi bolsa, çen bilen, $S_i \rho g z_i \cos\varphi_i$ bolar we ol $z$ oky boýunça täsir eder. Hemme guşaklyklar üçin şu güýçleri goşup, jisime $z$ oky boýunça täsir edýän $F_n$ basyş güýjüniň takmyn bahasyny alarys:

$$F_n \cong \sum_{i=1}^{n} S_i \rho g z_i \cos\varphi_i.$$

$z_i = h + R - R\cos\varphi_i$ bolýandygyny nazarda tutup,

$$F_n \cong 2\pi\rho g R^2 \sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i [h + R(1 - \cos\varphi_i)] \cos\varphi_i \Delta\varphi_i$$

takmyn deňlikde $\max \Delta\varphi_i$ nola ymtylanda predele geçip, kesgitli integralyň kesgitlemesini ulanyp, takyk deňlik alarys:

$$F = 2\pi\rho g R^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi [h + R - R\cos\varphi] \cos\varphi d\varphi$$

ýa-da

$$F = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g.$$

Diýmek, $F$ güýç $z$ oky boýunça ýokarlygyna ugrukdyrylan, özi hem ululygy boýunça $R$ radiusly şary dolduran suwuklygyň agramyna deňdir. Şoňa görä suwda çekilen şaryň agramy onuň howadaky agramyndan $F$ mukdar az bolar. Ýagny jisim suwuklykda çekilende öz howadaky agramyndan gysyp çykaran suwuklygynyň agramyça ýeňleýär. Bu meşhur kanun diňe şar üçin hem däl, eýsem, islendik jisim üçin mundan 2500 ýyl ozal beýik grek alymy Arhimed tarapyndan açylandyr.

## 13. Kesgitli integraly takmyn hasaplamak

**1. Kesgitli integraly takmyn hasaplamagyň gönüburçluklar formulasy.**

Goý, $f(x) \in C[a,b]$, $f'(x) \in C[a,b]$ bolsun. $[a, b]$ kesimi $a = x_0$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,n}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ nokatlar bilen $n$ deň bölege böleliň. $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n-1}$ bilen belgilemeleri girizeliň.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$$

takmyn formula gönüburçluklar formulasy diýilýär. Integral gönüburçluklar formulasy bilen takmyn hasaplananda goýberilýän ýalňyşlyklar, ýagny

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \right|$$

tapawut $\frac{M_1(b-a)^2}{n}$ sandan kiçidir. Bu ýerde $M_1$ san $|f'(x)|$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki iň uly bahasydyr.

**2. Trapesiýalar formulasy.**

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + .. + y_{n-1}\right)$$

takmyn formula trapesiýalar formulasy diýilýär. Integral trapesiýalar formulasy bilen takmyn hasaplananda goýberilýän ýalňyşlyk, ýagny

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + .. + y_{n-1}\right) \right|$$

tapawut $f''(x) \in C[a,b]$ bolanda, $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$ sandan kiçidir. Bu ýerde $M_2$ san $|f''(x)|$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki iň uly bahasyna deňdir.

**3. Parabolalar formulasy.**

Goý, $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x) \in C[a,b]$ bolsun. $[a, b]$ kesimi $x_0 = a,\ x_k = x_{k-1} + h,\ h = \frac{b-a}{2n},\ k = 1, 2, ..., 2n$ nokatlaryň kömegi bilen $2n$ deň böleklere böleliň. $f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, 2n}$ belgilemeleri girizeliň.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{2n-2}) +$$

$$+4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})]$$

takmyn formula parabolalar formulasy diýilýär. Integral parabolalar formulasy arkaly takmyn hasaplananda goýberilýän ýalňyşlyk, ýagny

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})] \right|$$

tapawut $\frac{M_3(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4}$ sandan kiçidir. Bu ýerde $M_3$ san $|f^{(4)}(x)|$ funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki iň uly bahasydyr. Getirilen formulalar bilen integral hasaplananda köp ýagdaýlarda formula girýän sanlary tegeleklemeli bolýar. Şonuň üçin formulanyň takyklygy hasaplananda tegeleklemede goýberilýän ýalňyşlyklar hem göz öňünde tutulmalydyr.

**Mysallar.**

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = 0,785398....$$

Indi bu integraly trapesiýalar we parabolalar formulalary bilen takmyn hasaplalyň. [0, 1] kesimi $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, ..., $x_{10} = 1$ nokatlar bilen 10 deň bölege böleliň. Hasaplap taparys:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| $y_i$ | 1 | 0,9901 | 0,9615 | 0,9174 | 0,8621 | 0,8 | 0,7353 | 0,6711 | 0,6098 | 0,5525 | 0,5 |

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong \frac{1}{10}\left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_9\right] = 0,78498.$$

Integralyň belli bahasyndan onuň takmyn bahasyny aýryp, goýberilen ýalňyşlygyň 0,0005 sandan kiçidigini görmek kyn däldir. Indi integraly parabolalar formulasy arkaly takmyn hasaplalyň. [0, 1] kesimi $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ nokatlar bilen bary-ýogy dört deň bölege böleliň. Hasaplap taparys:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| $y_i$ | 1 | 0,94118 | 0,8 | 0,64 | 0,5 |

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \cong \frac{1}{12}[(y_0+y_4)+2y_2+4(y_1+y_3)] =$$

$$= \frac{1}{12}[(1+0,5)+1,6+4(0,94118+0,64)],$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 0,78539...$$

Görşümiz ýaly, bölekleriň sany az hem bolsa, parabolalar formulasynyň takyklygy örän ýokarydyr.

## § 4 Mahsus däl integrallar

### 1. Birinji görnüşli mahsus däl integrallar

$f(x)$ funksiýanyň kesgitli integralyň barlygy baradaky şertleri kanagatlandyrmaýan ýagdaýlarynda täze mahsus däl integral düşünjesi girizilýär. Bu düşünje $[a;\ \infty)$ interwal boýunça integrirlemek bilen hem-de üzülme nokadyna golaýlaşanda bahalary tükeniksizlige ymtylýan funksiýany şol nokat integrirleme interwalyna degişli bolandaky ýagdaý bilen baglanyşyklydyr.

Goý, $f(x)$ $[a;\ \infty)$ interwalda üznüksiz bolsun. Islendik $b\in[a;\ \infty)$ üçin $\int_a^b f(x)dx$ integralyň barlygy düşnüklidir.

**Kesgitleme.** $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ predele birinji görnüşli mahsus däl integral diýilýär we ol $\int_a^\infty f(x)dx$ belgi bilen belgilenýär.

Kesgitlemä görä

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Eger (1) deňligiň sag tarapyndaky predel bar bolsa, onda $\int_a^\infty f(x)dx$ mahsus däl integral ýygnanýar diýilýär, şol predel ýok bolsa, onda mahsus däl integral dargaýar diýilýär. Mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Deňligiň sagyndaky predeli tapalyň:

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Diýmek, garalýan integral ýygnanýar we $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ bolýar.

**2-nji mysal.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Deňligiň sag tarapyndaky predeli tapalyň:

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty} 2(\sqrt{b}-1) = \infty.$$

Diýmek, garalýan integral dargaýar.

Goý, $f(x)$ $(-\infty;\ a]$ interwalda üznüksiz bolsun. Islendik $b\in(-\infty, a)$ üçin $\int\limits_b^{a} f(x)dx$ integralyň barlygy düşnüklidir.

**Kesgitleme.** $\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^{a} f(x)dx$ predele birinji görnüşli mahsus däl integral diýilýär we ol $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ belgi bilen belgilenýär.

Kesgitlemä görä

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Eger (2) deňligiň sag tarapyndaky predel bar bolsa, onda $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ integral ýygnanýar diýilýär; şol predel ýok bolsa, onda mahsus däl integral dargaýar diýilýär. Mysallara seredeliň.

**3-nji mysal.** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{-1} \frac{1}{x^2}dx.$$

Deňligiň sag tarapyndaky predeli tapalyň:

$$\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{-1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Diýmek, garalýan integral ýygnanýar we $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx = 1$ bolýar.

Eger $f(x)$ $[-\infty;\ \infty)$ interwalda üznüksiz bolsa, onda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mahsus däl integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$ formula arkaly kesgitlenýär. Eger sag tarapdaky integrallaryň ikisi-de ýygnanýan bolsa, onda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ mahsus däl integral ýygnanýar diýilýär. Eger-de şol integrallaryň iň bolmanda biri dargaýan bolsa, onda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integral dargaýar diýilýär.

**4-nji mysal.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ integraly derňäliň. Kesgitlemä görä

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

Sag tarapdaky predeli derňäliň. $\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ funksiýanyň $b$ görä monoton ösýänligi sebäpli, gözlenýän predeliň barlygy üçin $\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ funksiýanyň ýokardan çäkli bolmagy ýeterlikdir. $b > 1$ hasap edip alarys:

$$\int_{0}^{b} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1+x^4} + \int_{1}^{b} \frac{x^2dx}{1+x^4} \le \int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1+x^4} + \int_{1}^{b} \frac{x^2}{x^4}dx$$

ýa-da

$$\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx \le \int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \left(1-\frac{1}{b}\right) \le \int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^4}dx + 1.$$

$\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ funksiýa ýokardan çäkli boldy we şoňa görä $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ predel bar. Diýmek, $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ ýygnanýan integral.

$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ integraly derňäliň. Kesgitlemä görä

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

Bu ýerde $x = -t$ çalşyrma girizip,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{t^2}{1+t^4}dt$$

deňlige geleris. Soňky predeliň barlygy ýokarda görkezildi. Diýmek, $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ mahsus däl integral hem ýgnanýar. Onda, kesgitlemä laýyklykda, $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ mahsus däl integral ýygnanýar. Köp halda mahsus däl integralyň anyk bahasy däl-de, diňe onuň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny bilmek ýeterlik bolýar.

**5-nji mysal.** Tekizlikde $x = 1$, $y = 0$ gönüler we $y = \frac{1}{x^{\alpha}}$ egri bilen çäklenen figuranyň meýdany çäklimi diýen meselä garalyň. $b > 1$ bolanda ol figuranyň $S$ meýdanynyň $\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ predel bilen kesgitlenjekdigi düşnüklidir. Kesgitlemä görä

$$\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx.$$

Diýmek, $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ integral ýygnanýan bolsa, onda ol figuranyň $S$ meýdany çäkli bolýar; dargaýan bolsa $S$ meýdan çäksiz bolýar. $\alpha > 1$ bolanda $S$ meýdanyň çäkli boljakdygy, $\alpha \le 1$ bolanda $S$ meýdanyň çäksiz boljakdygyny okyjynyň özi aňsatlyk bilen subut edip biler.

Birinji görnüşli mahsus däl integraly derňemek üçin amatly bolan iki nyşany getireliň.

**Ýygnanma nyşany.** Eger $f(x), g(x) \in C[a;\infty)$ we $a_1 \in [a;\infty)$ san tapylyp, $[a_1;\infty)$ interwalda $|f(x)| \le g(x)$ deňsizlik ýerine ýetse we $\int_{a_1}^{\infty} g(x)dx$ integral ýygnanýan bolsa, onda $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ integral hem ýygnanýandyr.

**6-njy mysal.** $\int_{1}^{\infty} \frac{x^3}{1+2x^5}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** $x \geq 1$ bolanda $\left|\frac{x^3}{1+2x^5}\right| \leq \left|\frac{x^3}{2x^5}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ deňsizlik dogrudyr. Ýokarky mysala görä, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ integral $a=2$ bolanda ýygnanýar. Onda, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ integralyň ýygnanýandygy sebäpli, ýygnanma nyşanyna laýyklykda, $\int_1^{\infty} \frac{x^3}{1+2x^5} dx$ integral hem ýygnanar.

**Dargama nyşany.** Eger $f(x) \in C[a, \infty)$ bolsa we käbir $a_1$ san tapylyp $[a_1; \infty)$ interwalda $f(x) \geq g(x) \geq 0$ deňsizlikler ýerine ýetse hem-de $\int_{a_1}^{\infty} g(x) dx$ integral dargaýan bolsa, onda $\int_a^{\infty} f(x) dx$ integral hem dargaýandyr.

**7-nji mysal.** $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** $x \geq 2$ bolanda $\ln x \leq x$ bolýar. Şoňa görä $x \geq 2$ üçin $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x}$ deňsizlik dogrudyr. 5-nji mysala görä $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ dargaýar. Diýmek, dargama nyşanyna görä $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ hem dargaýandyr.

## 2. Ikinji görnüşli mahsus däl integrallar

Goý, $f(x)$ funksiýa $[a;b)$ ýarym interwalda üznüksiz bolsun. Onda, belli bolşy ýaly, islendik $\varepsilon > 0,\ b-\varepsilon > a$ üçin $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ integral bardyr.

**Kesgitleme.** $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ predele ikinji görnüşli mahsus däl integral diýilýär we ol $\int_a^b f(x) dx$ bilen belgilenýär. Kesgitlemä laýyklykda

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Eger sag tarapdaky predel bar bolsa, onda $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral ýygnanýar diýilýär, ýok bolsa $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral dargaýar diýilýär.

**8-nji mysal.** $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ $(\varepsilon > 0)$. Deňligiň sag tarapyndaky predeli tapalyň:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{1-x}\,|_0^{1-\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) = 2.$$

Diýmek, $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2$, ýagny berlen integral ýygnanýar. Indi ikinji görnüşli mahsus däl integraly derňemek üçin amatly bolan iki nyşany getireliň.

**Ýygnanma nyşany.** $f(x)\in C[a,b)$ bolsa, käbir $a < a_1 < b$ san tapylyp, $[a_1;b)$ ýarym interwalda $|f(x)|\le g(x)$ bolsa we $\int\limits_{a_1}^b g(x)dx$ ýygnanýan bolsa, onda $\int\limits_a^b f(x)dx$ hem ýygnanýandyr.

**Dargama nyşany.** $f(x)\in C[a,b)$ bolsa, käbir $a < a_1 < b$ san tapylyp, $[a_1;b)$ ýarym interwalda $0\le g(x)\le f(x)$ deňsizlikler dogry bolsa we $\int\limits_{a_1}^b g(x)dx$ dargaýan bolsa, onda $\int\limits_a^b f(x)dx$ integral hem dargaýandyr.

**9-njy mysal.** $\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** Kesgitlemä görä

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx.$$

Deňligiň sag tarapyndaky predeli tapalyň ($\alpha \neq 1$):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{-\alpha+1}\cdot\frac{-1}{(b-x)^{\alpha-1}}\Big|_a^{b-\varepsilon}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right].$$

Görnüşi ýaly, $\alpha < 1$ bolanda predel bar. $\alpha > 1$ bolanda predel ýok. $\alpha = 1$ ýagdaýa seredeliň.

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{1}{b-x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}[-\ln(b-x)|_a^{b-\varepsilon}] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon + \ln(b-a)) = \infty.$$

Şeýlelikde, $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ integral $\alpha < 1$ bolanda ýygnanýar, $\alpha \geq 1$ bolanda dargaýar.

**10-njy mysal.** $\int_0^1 \ln(1-x)dx$ integraly derňemeli.

**Çözülişi.** $\lim_{u\to\infty}\frac{\ln u}{\sqrt{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{2\sqrt{u}}} = 0$ bolýandygy belli. Diýmek, käbir $u = u_0$-dan başlap $\frac{\ln u}{\sqrt{u}} \leq 1$ deňsizlik dogry bolar. Bu ýerden $1-x$ ýeterlik kiçi bolanda $-\ln(1-x) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ deňsizlik gelip çykýar.

$-\int_0^1 \ln(1-x)dx = \int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx,\quad \ln\frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ we $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralyň ýygnanýan integral bolany üçin, ýygnanma nyşanyna görä, $-\int_0^1 \ln(1-x)dx$ integral ýygnanýar. Diýmek, $\int_0^1 \ln(1-x)dx$ integral hem ýygnanýar.

$f(x)$ funksiýa $(a,b]$ ýarym interwalda üznüksiz we $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\varepsilon > 0$ bolsun.

**Kesgitleme.** $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ predele ikinji görnüşli mahsus däl integral diýilýär we ol $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ bilen belgilenýär.

Kesgitlemä görä, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Deňligiň sag tarapynda $t = b + a - x$ çalşyrma geçirip, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(a + b - t)dt$ deňligi alarys. Bu ýagdaýda ýene-de ýokarda seredilen $[a;b)$ interwalyň sag çägine golaýlaşylanda tükeniksizlige ymtylýan funksiýanyň mahsus däl integralyna geleris.

Umumy ýagdaý hem ýokarda agzalan mahsus däl integrallaryň jemine getirilýär. Mysal üçin, $[a; b]$ kesime degişli $x_1$ we $x_2$ nokatlara golaýlaşanyňda $f(x)$ funksiýa tükeniksizlige ymtylýan bolsun. $[a; b]$ kesime $[a; x_1)$, $\left(x_1; \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, $\left[\frac{x_1+x_2}{2}; x_2\right)$, $(x_2; b]$ ýarym interwallaryň jemi hökmünde seredeliň. Bu ýagdaýda $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ mahsus däl integral

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{b} f(x)dx$$

formula arkaly ikinji görnüşli mahsus däl integrallaryň jemine dargadylýar. Mysal üçin, $\int\limits_{2}^{6}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-3|}} + \ln|x-5|\right)dx$ integraly jem görnüşde ýazyp bolar:

$$\int\limits_{2}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-3|}} + \ln|x-5|\right)dx + \int\limits_{3}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-3|}} + \ln|x-5|\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{4}^{5}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-3|}} + \ln|x-5|\right)dx + \int\limits_{5}^{6}\left(\frac{1}{\sqrt{|x-3|}} + \ln|x-5|\right)dx.$$

# VIII. KÖP ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR

Durmuşda ýüze çykýan köp meseleleriň öwrenilmegi köp sandaky üýtgeýän ululyklar bilen baglanyşykly bolýar. Ol meseleler üçin ululyklaryň özlerini alyp barşyny, esasan hem, olaryň arasyndaky baglanyşyklary bilmek we derňemek örän wajyp bolýar. Ine, şeýle meseleler köp üýtgeýänli baglanyşyklary, ýagny funksiýalary öwrenmekligiň esasy sebäpleridir. Ol meseleleriň durmuşyň haýsy pudaklaryna degişlidigine garamazdan, ýüze çykýan ululyklaryň özara baglanyşyklarynyň hemmesine mahsus bolan häsiýetleri bar. Biz aşakda meseläniň haýsy ugra degişlidigine garaman, ýüze çykan baglanyşyklaryň umumy häsiýetlerine seretjekdiris. Elbetde, garalýan häsiýetleri aýdyňlaşdyrmak üçin mysallar hem getiriler. Käbir meselelere ýüzleneliň.

Haryt bazarynda günde 10 dürli haryt satylýar diýeliň. Goý, $x_1, x_2, ..., x_{10}$ olaryň bir günde satylýan mukdary, $u_1, u_2, ..., u_{10}$ harytlaryň şol gündäki ölçeg birlikleriniň bahasy bolsun. Bazarda satylan harytlaryň bahasyny $I$ bilen belgilesek, onda $I = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_{10}u_{10}$ baglanyşygy alarys. Satylýan harytlaryň mukdarlarynyňam, olaryň bahalarynyňam günde üýtgäp durandygy belli. Diýmek, $I$ baha 20 sany üýtgeýän ululyklara bagly bolýar.

Bu ýerde kän sowallar ýüze çykýar. $x_1, x_2, ..., x_{10}, u_1, u_2, ..., u_{10}$ ululyklar üýtgände $I$ nähili üýtgeýär? Nähili tizlik bilen üýtgeýär, harytlaryň satylýan bahalaryny üýtgedeňde $I$ nähili üýtgeýär, haýsy halda satylan harytlaryň $I$ bahasyny maksimal edip bolýar we ş.m. Elbetde, bahany galdyrsaň, harytlaryň satylýan mukdary azalýar, şoňa görä soňky goýlan sorag öz-özünden düşnükli däldir.

Indi oba hojalygyna ýüzleneliň. Goý, käbir hojalyk bäş görnüşli gök önüm ýetişdirmek bilen meşgullanýan bolsun. Şol önümleriň mukdaryny $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ bilen belgiläliň. Her bir önümiň ölçeg birligindäki mukdaryny öndürmek üçin köp çykdajy etmeli bolýar.

Meselem, suw, dökün, defolýasiýa, sakçy, suwçy gerek we ş.m. Olaryň hemmesine çykýan çykdajyny $i$-nji önüm üçin $p_i$, $i = \overline{1,5}$ bilen belgilesek, hojalygyň hemme eden $U$ çykdajysy

$$U = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + m_4 p_4 + m_5 p_5$$

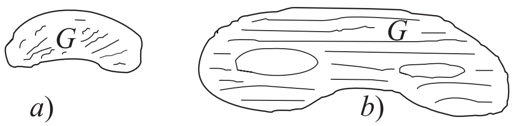
bolar. Bu ýerde hem edil ýokardaky mysaldaky ýaly sowallaryň ýüze çykjakdygy görnüp dur. Ýene bir mysal. Goý, teplowoz $s$ aralygy $v$ hemişelik tizlik bilen geçen bolsun. Onuň şol aralygy geçen wagty $t = s/v$ bolar. Görşümiz ýaly, wagt iki üýtgeýäne bagly bolýar. Bu ýerde hem $s$ we $v$-niň üýtgemegi bilen $t$ nähili üýtgeýär, nähili tizlik bilen üýtgeýär we ş.m. sowallar ýüze çykýar.

Getirilen mysallarda we ýene köp ýagdaýlarda gabat gelýän baglanyşyklary derňemekde ýüze çykýan umumy sowallara jogap bermek üçin köp üýtgeýänli funksiýa düşünjesi girizilýär. Düşnükli bolar ýaly, başda iki üýtgeýänli funksiýa seredeliň.

$xOy$ tekizlikde ýatýan, koordinatalary $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x, y)$ nokatlaryň köplügine merkezi $M_0(x_0, y_0)$ nokatda ýerleşen, radiusy $\varepsilon$ bolan tegelek diýilýär we ol $S_{M_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ töwerege tegelegiň çägi diýilýär. Töweregiň nokatlaryny öz içine alýan $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le \varepsilon^2$ tegelege ýapyk tegelek diýilýär. Ýapyk tegelek $\overline{S}_{M_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär. $\overline{S}_{M_0}^{\varepsilon}$ tegelege $M_0$ nokadyň $\varepsilon$ etraby diýilýär. $S_{M_0}^{\varepsilon} \setminus \{M_0\}$ nokatlaryň köplügine, ýagny $M_0$ nokat aýrylan $S_{M_0}^{\varepsilon}$ etraba $M_0$ nokadyň ýörite etraby diýilýär we ol $\Pi_{M_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär.

Goý, $G$ tekizligiň nokatlarynyň käbir köplügi bolsun. Eger $G$ her bir $M(x_0, y_0)$ nokady bilen şol nokadyň käbir $\varepsilon$ – etrabyny hem öz içinde saklasa, oňa açyk köplük diýilýär. $S_{M_0}^{\varepsilon}$ tegelegiň nokatlary açyk köplük emele getirýärler. $G$ köplüge degişli däl $M_1(x_1, y_1)$ nokadyň islendik $\varepsilon$ etrabynda $G$ köplügiň nokatlary bar bolsa, onda $M_1$ nokada $G$ köplügiň predel nokady diýilýär. Eger $G$ köplük hemme predel nokatlaryny öz içinde saklasa, onda $G$ köplüge ýapyk köplük diýilýär. Mysal üçin, koordinatalary $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le \varepsilon^2$ deňsizligi kanagatlandyrýan tekizligiň nokatlarynyň köplügi ýapyk köplükdir.

Eger köplügiň islendik iki nokadyny şol köplügiň nokatlaryndan durýan egri bilen birleşdirip bolýan bolsa, onda şeýle köplüge bagly köplük diýilýär. Bagly, açyk köplüge ýaýla diýilýär. Meselem, öz-özüni kesmeýän islendik ýapyk egri bilen çäklenen nokatlaryň köplügi ýaýladyr. Tükenikli sandaky öz-özüni kesmeýän we bir-birini kesmeýän ýapyk egriler bilen çäklenen bagly köplük ýaýladyr *(99-njy surat)*.




*99-njy surat*

**Kesgitleme.** Eger $D$ ýaýlanyň her bir $M$ nokadyna $z$ ululygyň bellibir bahasy degişli edilse, $D$ ýaýlada funksiýa kesgitlenen diýilýär. $z$ bilen $M$ nokadyň arasyndaky degişlilik $z = f(M)$, $M \in D$ görnüşde belgilenýär. $z$ ululyga baglanyşykly üýtgeýän ýa-da funksiýa diýilýär. $D$ ýaýla funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy diýilýär.

Adatça, $M$ nokat iki $x, y$ koordinatalary bilen kesgitlenýändigi sebäpli, $z = f(M)$ degişliligi $z = f(x, y)$, $M(x, y) \in D$ görnüşde ýazýarlar. $x, y$ ululyklara baglanyşyksyz üýtgeýänler ýa-da argumentler diýilýär, $z = f(x, y)$ funksiýa iki üýtgeýänli funksiýa diýilýär. $z$ bilen $M(x, y)$ nokadyň arasyndaky baglanyşyk, esasan, iki görnüşde berilýär: formula görnüşinde we tablisa görnüşinde. Meselem, $z = x^2 + y^2$, $z = \sin(x + y) - \cos(x - y)$, $z = \ln(x^2 - y)$ baglanyşyklar funksiýanyň formula bilen berlişine mysal bolup biler. Aşakdaky

| $M(x, y)$ | 1, 2 | 3, 4 | 5, – 1 | – 1, 0 | – 2, 2 | –3, 1 | 6, 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 3 | –2 | 1 | –4 | 2 | 5 | 7 |

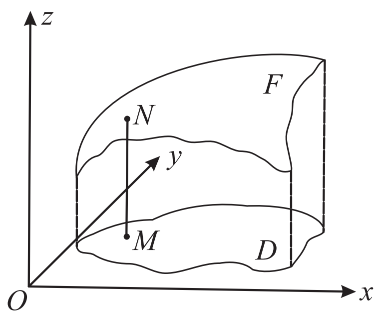
degişlilik funksiýanyň tablisa görnüşinde berlişine mysal bolup biler.

Funksiýa tablisa ýa-da formula görnüşinde berilse-de, onuň kesgitleniş ýaýlasy barada aýdylmalydyr. Eger funksiýa formula arkaly kesgitlenip, kesgitleniş ýaýlasy barada hiç zat aýdylmasa, onda kesgitleniş ýaýlasy hökmünde onuň iň uly kesgitlenip biljek ýaýlasyna düşünilýär.

**Mysal.** $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapalyň. Funksiýanyň bahasynyň kesgitlenmegi üçin $M(x, y)$ nokadyň koordinatalarynyň $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ deňsizligi kanagatlandyrmagy zerurdyr. Diýmek, berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy koordinatalary $x^2 + y^2 \leq 4$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlardan durýar. Bu ýaýla merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan, radiusy 2-ä deň ýapyk tegelekdir. Ol $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiýanyň iň uly kesgitlenip biljek ýaýlasydyr. Elbetde, ol funksiýa bu tegelegiň içinde ýatýan islendik ýaýlada hem kesgitlenen bolýar.

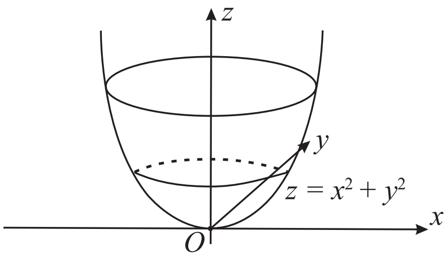
## §1. $z = f(x, y)$ funksiýanyň grafigi

Goý, $f(x, y)$ funksiýa $D$ ýaýlada kesgitlenen bolsun. $Oxyz$ giňişlikde koordinatalar ulgamyny guralyň. $D$ ýaýla $xOy$ tekizlikde ýatar. $M(x, y) \in D$ bolan islendik nokat üçin $N(x, y, f(x, y))$ nokat guralyň *(100-nji surat)*.



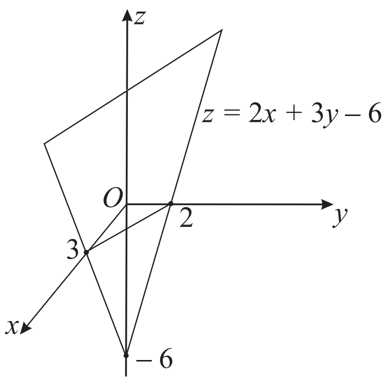

*100-nji surat*

$M$ nokat $D$ ýaýlanyň nokatlaryny yzarlap çykanda $N$ nokat $D$ ýaýlanyň ýokarsynda ýatan käbir $F$ üsti çyzar. Şol üste $f(x, y)$ funksiýanyň $D$ ýaýladaky grafigi diýilýär. $z = f(x, y)$ deňlemä bolsa üstüň deňlemesi diýilýär. Mysala ýüzleneliň. $z = x^2 + y^2$ funksiýanyň grafigi bolup paraboloid diýlip atlandyrylýan üst hyzmat edýär *(101-nji*



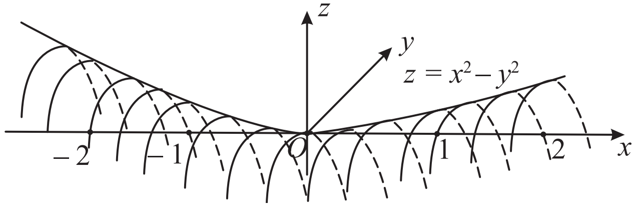

*101-nji surat*

*surat)*. $z = 2x + 3y - 6$ funksiýanyň grafigi bolup tekizlik hyzmat edýär *(102-nji surat)*. $z = x^2 - y^2$ funksiýanyň grafigi bolup paraboliki-giperboloid hyzmat edýär *(103-nji surat)*.




*102-nji surat*

Iki üýtgeýänli funksiýanyň grafigini gurmakda ulanylýan usullaryň biri kesikleme usulydyr. Ol şundan ybarat, ýagny üsti haýsy hem bolsa bir oka perpendikulýar tekizlikler bilen kesýärler. Kesikde emele gelen egrileri çyzmak bilen üstüň gurluşy barada maglumat alýarlar.

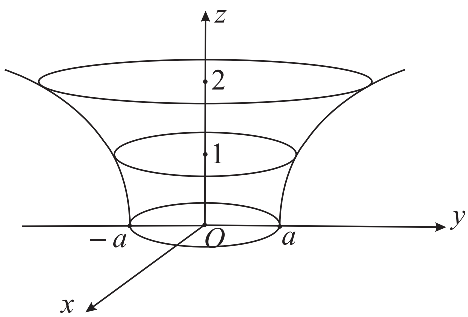



*103-nji surat*

Eger ol kesikler üsti çyzmaga ýeterlik bolmasa, onda ýene bir oky perperdikulýar tekizlikler bilen kesip, täze kesikler alýarlar we üst barada goşmaça maglumat toplaýarlar we ş.m. Üsti, mysal üçin, $z$ oka perpendikulýar $z = z_0$ tekizlik bilen keseniňde emele gelýän egriniň deňlemesini üstüň deňlemesinde $z$-iň ýerine hemişelik $z_0$ sany goýmak bilen alyp bolar.

**1-nji mysal.** $z = x^2 - y^2$ üsti guralyň. Onuň $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$, $x = -2$ tekizlikdäki kesikleri deňlemeleri degişlilikde $z = -y^2$, $z = 1 - y^2$, $z = 4 - y^2$, $z = 1 - y^2$, $z = 4 - y^2$ bolan parabolalar bolarlar. Üsti $y = 0$ tekizlik bilen kessek, kesikde deňlemesi $z = x^2$ bolan parabola alarys. Üstüň görnüşi 103-nji suratda getirilen.

**2-nji mysal.** $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$ üsti guralyň. $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ tekizlikler bilen kesip, kesiklerde degişlilikde, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 5$ ellipsleri alarys. Eger $y = 0$ tekizlik bilen kessek, kesikde $z^2 - \frac{x^2}{a^2} = -1$ giperbolany alarys. Üst 104-nji suratda görkezilen.




*104-nji surat*

## §2. Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli

Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli edil bir üýtgeýänli funksiýanyň predeli ýaly kesgitlenýär. Düşnükli bolar ýaly, bir üýtgeýänli funksiýanyň predeliniň kesgitlenişini ýene bir gezek görkezeliň. Goý, $\alpha(x)$ funksiýa $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrapda kesgitlenen bolsun.

**Kesgitleme.** Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $\Pi_{x_0}^{\delta(\varepsilon)}$ etrap tapylyp, şol etrabyň islendik nokady üçin $|\alpha(x)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\alpha(x)$ funksiýa $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär we bu ýagdaý $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ bilen belgilenýär.

**Kesgitleme.** Goý, $f(x)$ käbir $\Pi_{x_0}^{\delta_1}$ etrapda kesgitlenen bolsun we käbir $a$ san üçin $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t.k.f.$ deňlik ýerine ýetsin. Onda $a$ sana $f(x)$ funksiýanyň $x$ nokat $x_0$ nokada ymtylandaky predeli diýilýär we ol şeýle belgilenýär: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a.$

Eger indi ýokarky kesgitlemelerde $x$ harpy $M$ harpy bilen çalşyrsak, biz köp üýtgeýänli $f(M)$ funksiýanyň predeliniň kesgitlenişini alarys. Goý, $\alpha(M)$ funksiýa $\Pi_{M_0}^{\delta_1}$ etrapda kesgitlenen bolsun.

**Kesgitleme.** Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $\Pi_{M_0}^{\delta(\varepsilon)}$ etrap tapylyp, şol etrabyň islendik nokady üçin $|\alpha(M)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\alpha(M)$ funksiýa $M$ nokat $M_0$ nokada ymtylanda tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär we bu ýagdaý $\alpha(M) \underset{M\to M_0}{\sim} t.k.f.$ bilen belgilenýär.

**Kesgitleme.** Goý, $f(M)$ käbir $\Pi_{M_0}^{\delta_1}$ etrapda kesgitlenen bolsun we käbir $a$ san üçin $f(M) = a + \alpha(M)$, $\alpha(M) \underset{M\to M_0}{\sim} t.k.f.$ deňlik ýerine ýetsin. Onda $a$ sana $f(M)$ funksiýanyň $M$ nokat $M_0$ nokada ymtylandaky predeli diýilýär we ol şeýle belgilenýär: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = a.$

Bu kesgitlemeleriň biri-birinden diňe harpy üýtgetmek bilen alnanlygy sebäpli, bir üýtgeýänli funksiýalar üçin subut edilen häsiýetler we teoremalar gös-göni köp üýtgeýänli funksiýalar üçin hem dogry bolýar. Şol sebäpli, biz olary bu ýerde gaýtalap oturmarys. Biz funksiýanyň predelini kesgitlänimizde «$M$ nokat $M_0$ nokada ymtylanda» diýen aňlatmany ulansak hem, oňa aýratyn bir many berip durmadyk. Şeýle-de bolsa, bu aňlatmany her bir adam «$M(x, y)$ nokat $M_0(x_0,y_0)$ nokada islendikçe golaýlaşanda» manysynda düşünýär. Bu pikir dogrudyr. Ýagny $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y) = a$ diýmek, $M(x, y)$ nokat $M_0(x_0,y_0)$ nokada islendik kanun boýunça ýakynlaşanda, funksiýanyň degişli bahalary hem $a$

sana islendikçe ýakynlaşýar diýmekdir. Şol sebäpli $M \to M_0$ ýazmagyň ýerine, deňgüýçli bolan $x \to x_0$, $y \to y_0$ belgileri ýazsaň hem bolar.

Predel tapmakda kömek edýän iki ýagdaýy belläp geçeliň.

1. Eger $f(M) = f(x, y)$ funksiýa ýönekeý funksiýalaryň üsti bilen aňladylýan we $M_0(x_0, y_0)$ nokat onuň kesgitleniş ýaýlasyna girýän bolsa, onda $f(x, y)$ funksiýanyň $M$ nokat $M_0$ nokada ymtylandaky predeli onuň $M_0$ nokatdaky bahasyna deňdir, ýagny

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Goý, $f(x,y) = \dfrac{\sin(\cos y\pi + \sin x\pi) - \cos(x - y) - x^3}{\ln(x + y - x^2) - \mathrm{tg}(x^2 + y^2)}$ funksiýanyň $x \to 2$, $y \to 5$ bolandaky predelini tapmaly bolsun. Ýokarky belligimize görä alarys:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 5}} f(x,y) = \frac{\sin(\cos 5\pi + \sin 2\pi) - \cos(2 - 5) - 2^3}{\ln(2 + 5 - 4) - \mathrm{tg}(2^2 + 5^2)} =$$

$$= \frac{-\sin 1 - \cos 3 - 8}{\ln 3 - \mathrm{tg}29}.$$

2. Predel tapmagyň ýene bir usuly. Goý, $f(x, y)$ funksiýanyň $M(x, y)$ nokat $M_0(x_0, y_0)$ nokada ymtylandaky predelini tapmaly bolsun. $\varphi(x, k) = f(x, y_0 + k(x - x_0))$ funksiýa seredeliň. Köp ýagdaýlarda $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x,k)$ bar bolsa we predel $k$ sana bagly bolmasa,

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x,k)$$

deňlik ýerine ýetýär. Eger $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x,k)$ predel ýok ýa-da $k$ sana bagly bolsa, onda $\lim\limits_{M \to M_0} f(x,y)$ predel ýokdur.

**1-nji mysal.** $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2xy^2 - 3y^3 + 3x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$ funksiýanyň $x \to 0$, $y \to 0$ bolanda predelini tapalyň. Bu ýerde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Şol sebäpli $\varphi(x, k) = f(x, kx)$ funksiýa seredeliň:

$$\varphi(x,k) = f(x,kx) = \frac{x^3 - 2xk^2x^2 - 3k^3x^3 + 3x^2 + 3k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} =$$

$$= \frac{(1 - 2k^2 - 3k^3)x^3 + (3 + 3k^2)x^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{(1 - 2k^2 - 3k^3)x + 3 + 3k^2}{1 + k^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x,k) = \lim_{x\to 0}\frac{(1-2k^2-3k^3)x+3(1+k^2)}{1+k^2} = 3.$$

Predel $k$ sana bagly däl. Diýmek, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 3$ diýip ýazyp bileris.

**2-nji mysal.** $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+4y^2}$ funksiýanyň $x \to 0$, $y \to 0$ bolandaky predelini tapmaly. Bu ýerde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ bolany sebäpli, $\varphi(x, k) = f(x, kx)$ funksiýanyň predelini tapmaly bolýar:

$$\varphi(x,k) = f(x,kx) = \frac{\sin(x^2+k^2x^2)}{3x^2+4k^2x^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x,k) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin[x^2(1+k^2)]}{x^2(3+4k^2)} =$$

$$= \frac{1+k^2}{3+4k^2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin[x^2(1+k^2)]}{[x^2(1+k^2)]} = \frac{1+k^2}{3+k^2}.$$

Predel bar, ýöne $k$ sana bagly. Diýmek,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{3x^2+4y^2}$$

predel ýok. Emma bu usulyň netije bermeýän wagtlary hem bar. Goý, $f(x, y)$ funksiýa $O(0, 0)$ nokadyň etrabynda polýar koordinatalarynda

$$f(x,y) = \begin{cases} r\cdot\dfrac{1}{\varphi}, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ 0, & \varphi = 0 \end{cases}$$

formula arkaly kesgitlensin. Funksiýanyň $x \to 0$, $y \to 0$ bolandaky predelini tapalyň. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ bolany üçin, $f(x, kx) = \varphi(x;k)$ funksiýanyň $x$ nola ymtylandaky predelini tapmaly bolýar. Bu bolsa, $f(x, y)$ funksiýanyň $\varphi = \varphi_0 = \text{const} \neq 0$ bolup, $r$ nola ymtylandaky predelini tapmak bilen deňgüýçlüdir. Görşümiz ýaly,

$$\lim_{x\to 0}\underset{(k\neq 0)}{f(x,kx)} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{\varphi} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{\varphi_0} = 0, \ \lim_{x\to 0}\varphi(x,0) = \lim_{r\to 0} 0 = 0.$$

Diýmek, $\lim_{x\to 0} f(x, kx) = 0$ predel bar, özi hem $k$ sana bagly däl. Emma $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ predel bu funksiýa üçin ýokdur. Dogrudan hem, $M_n\left(r = \frac{1}{n}, \varphi = \frac{1}{n}\right)$ nokatlaryň yzygiderligi $n \to \infty$ bolanda $O(0, 0)$ nokada ymtylýar. Biziň funksiýamyzyň şol nokatlardaky bahasy 1-e deň we nola ymtylmaýar. Şol sebäpli, beýle usul bilen predel tapylanda, ätiýaçlygy elden bermeli däldir.

## §3. Üznüksiz funksiýalar

Goý, $f(x, y)$ funksiýa $G$ ýaýlada kesgitlenen, $M_0(x_0, y_0) \in G$ bolsun.

**Kesgitleme.** $\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$ deňlik ýerine ýetse, onda $f(x, y)$ funksiýa $M_0$ nokatda üznüksiz diýilýär. Eger ýokarky deňlik $G$ ýaýlanyň islendik nokady üçin hem dogry bolsa, onda $f(x, y)$ funksiýa $G$ ýaýlada üznüksiz diýilýär we bu düşünje $f(M) \in C(G)$ bilen belgilenýär. Soňky degişlilik $f(M)$ funksiýa $G$ ýaýlada üznüksiz diýip okalýar. Köp üýtgeýänli funksiýanyň üznüksizliginiň kesgitlemesi bir üýtgeýänli funksiýanyň üznüksizliginiň kesgitlemesinden $x$ harpy $M$ harpa çalşyrmak bilen alynýar. Bir bellemeli zat, bir üýtgeýänli funksiýalar üçin teoremalar kesimde subut edilse, köp üýtgeýänli funksiýalar üçin ýapyk, çäkli ýaýlada subut edilmelidir.

Üznüksiz funksiýanyň noly baradaky teorema «$G$ ýaýlanyň islendik iki nokadynda dürli alamatly bahalara eýe bolýan üznüksiz funksiýa, şol ýaýlanyň iň bolmanda bir nokadynda nola öwrüler» diýip okalmalydyr. Düşnükli bolşy ýaly, biz bu ýerde ol teoremalary we häsiýetleri gaýtalap oturmarys. $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokatlardan durýan $n$ ölçegli giňişlikde hem funksiýa düşünjesi ýokardaky kesgitleme bilen girizilýär. Ýöne $z = f(M)$ degişliligi $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ görnüşde ýazyp, oňa $n$ üýtgeýänli funksiýa diýilýär. Funksiýanyň predeli, üznüksizligi we olar bilen baglanyşykly häsiýetler-de iki üýtgeýänli funksiýa meňzeşlikde berilýär.

## §4. Köp üýtgeýänli funksiýalaryň hususy önümleri

Goý, $G$ üç ölçegli $(x, y, z)$ giňişlikdäki bir ýaýla bolsun. Düşnükli bolar ýaly, $G$ ýaýla giňişligiň öz-özüni kesmeýän ýapyk üst bilen çäklenen bölegi hökmünde garasa bolar. $f(x, y, z)$ şol ýaýlada kesgitlenen funksiýa, $M(x, y, z) \in G$, $M(x_1, y_1, z_1) \in G$ bolsun.

$\Delta f = f(x_1, y_1, z_1) - f(x, y, z)$ tapawuda $f$ funksiýanyň $M$ nokatdaky doly artdyrmasy diýilýär. $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$, $z_1 - z = \Delta z$ belgilemeler girizilip, $\Delta f$ artdyrma $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$ görnüşde ýazylýar. Eger $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ bolsa, onda $f(x, y, z)$ funksiýanyň $M$ nokatdaky $x$-e görä hususy artdyrmasyny alarys: $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - - f(x, y, z)$. Edil şuňa meňzeşlikde,

$$\Delta_y f = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z), \quad \Delta_z f = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z),$$

degişlilikde, $f$ funksiýanyň $M$ nokatdaky $y$-e we $z$-e görä hususy artdyrmalary bolar.

**Kesgitleme.** Eger $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$ bar bolsa, onda ol predele $f$ funksiýanyň $M(x, y, z)$ nokatdaky $x$-e görä hususy önümi diýilýär we ol

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x$$

görnüşdäki belgileriň biri bilen belgilenýär. Eger $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}$ predel bar bolsa, onda ol predele $f$ funksiýanyň $M(x, y, z)$ nokatdaky $y$-e görä hususy önümi diýilýär we ol $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$, $f'_y(x,y,z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f'_y$ belgileriň biri bilen belgilenýär. Eger $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta_z f}{\Delta z}$ predel bar bolsa, onda ol predele $f$ funksiýanyň $M(x, y, z)$ nokatdaky $z$-e görä hususy önümi diýilýär we ol $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$, $f'_z(x,y,z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $f'_z$ belgileriň biri bilen belgilenýär.

Şeýlelikde, kesgitlemä görä

$$f'_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}, \quad f'_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}, \quad f'_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z f}{\Delta z}$$

ýazyp bileris.

Kesgitlemelerden görnüşi ýaly, hususy önüm tapmak meselesinde üýtgeşik bir täzelik ýokdur. Mysal üçin, $f(x, y, z)$ funksiýanyň $x$-e görä hususy önümini tapmak üçin, $y$ we $z$ üýtgeýänleri hemişelik hasap edip, $x$-e görä adatdaky $x$ üýtgeýänli funksiýanyň önümini almak ýeterlikdir.

**1-nji mysal.** $U = 3x^3 - 6xy^3 - 2y^2x - 4xy + 5x - 6z^3 - xz^2 + z + 1$ funksiýanyň $x, y, z$ üýtgeýänlere görä hususy önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 9x^2 - 6y^3 - 2y^2 - 4y + 5 - z^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\ 18xy^2 - 4yx - 4x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\ 18z^2 - 2xz + 1.$$

Hususy önüm tapmak meselesi bir üýtgeýänli funksiýanyň önümini tapmak meselesine barabar bolany sebäpli, bir üýtgeýänli funksiýanyň önümini tapmak düzgünleriniň hemmesini hususy önüm tapmakda ulanyp bolar. Mysal üçin, $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ funksiýalar üçin

$$(cf)_x' = cf_x',$$

$$(f + g)_x' = f_x' + g_x',$$

$$(f \cdot g)_x' = f_x' g + g_x' f,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x' = \frac{f_x' g - g_x' f}{g^2}$$

formulalar $y, z$ üçin hem dogrudyr.

**2-nji mysal.**

$$\left(\frac{x^2 - xy + y^2 + z^3}{x + y + z}\right)_y' =$$

$$= \frac{(x^2 - xy + y^2 + z^3)_y'(x + y + z) - (x + y + z)_y'(x^2 - xy + y^2 + z^3)}{(x + y + z)^2} =$$

$$= \frac{(-x+2y)(x+y+z)-(x^2-xy+y^2+z^3)}{(x+y+z)^2}.$$

Biz mysal hökmünde üç üýtgeýänli funksiýa seretdik. Hususy önümi tapmak düzgünleri islendik sandaky üýtgeýänli funksiýalar üçin edil şeýledir. Mysallardan görnüşi ýaly, $M(x, y, z)$ nokatda $f(x, y, z)$ funksiýanyň birinji tertipli atlandyrylýan $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$ önümlerini tapanymyzda, ýene-de $x, y, z$ üýtgeýänlere bagly funksiýa alýarys. Diýmek, ol alnan funksiýalaryň hem hususy önümleriniň bolmagy mümkin. Eger $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$ önümleriň her birinden $x, y, z$ üýtgeýänlere görä hususy önüm alsak, biz ikinji tertipli önümleri alarys:

$$(f'_x)'_x,\ (f'_x)'_y,\ (f'_x)'_z,\ (f'_y)'_x,\ (f'_y)'_y,\ (f'_y)'_z,\ (f'_z)'_x,\ (f'_z)'_y,\ (f'_z)'_z.$$

Şeýlelikde, 9 sany ikinji tertipli önüm aldyk. Olary degişlilikde,

$$f''_{xx},\ f''_{xy},\ f''_{xz},\ f''_{yx},\ f''_{yy},\ f''_{yz},\ f''_{zx},\ f''_{zy},\ f''_{zz}$$

bilen ýa-da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

bilen belgileýärler. Ikinji tertipli önümler hem öz gezeginde $x, y, z$ üýtgeýänleriň funksiýalary bolýarlar. Olardan alnan hususy önümlere üçünji tertipli hususy önümler diýilýär we olar $f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xxz}$ we ş.m. ýa-da $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z}$ we ş.m. bilen belgilenýär. Dördünji we ondan ýokary tertipli önümler hem şuňa meňzeşlikde kesgitlenýärler. Eger funksiýanyň ýokary tertipli önümi birden köp üýtgeýän boýunça alynýan bolsa, meselem, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial z}$ we ş.m. onda şeýle önümlere garyşyk önüm diýilýär. Funksiýanyň $k$-njy ($k = 2, 3, ...$) tertipli hemme önümleri bar bolsa we üznüksiz bolsa, onda onuň $k$-njy tertipli garyşyk önümleri yzygiderli differensirlemegiň tertibine bagly däldir. Mysal üçin, $k = 2$ bolanda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}.$$

Şonuň üçin ýokary tertipli hususy önümleri $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}$, $m_1 + m_2 + m_3 = k$ görnüşde belgileýärler. Önümiň şeýle ýazylyşyna garamazdan, ýokarky teklibe görä, biz önümi *x, y, z* boýunça islendik tertipde alyp bileris.

**3-nji mysal.** $u = x^3y^5z^2$ funksiýanyň $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial z^2}$ önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^5z^2;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 5x^3y^4z^2;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2x^3y^5z;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = 6x^2y^5z;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = 6x^2y^5z. \text{ Görşümiz ýaly, } \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}.$$

Dowam etdireliň. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^5z^2;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2x^3y^5;$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z} = 12xy^5z;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial x} = 6x^2y^5;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial x} = 12xy^5z;$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial z^2} = 12xy^5;\quad \frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial x^2} = 12xy^5;\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\partial z\partial x\partial z} = 12xy^5.$$

Görşümiz ýaly, garyşyk önüm haýsy tertipde önüm hasaplanyşyna bagly däl.

## §5. Köp üýtgeýänli funksiýanyň doly differensialy

$f(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada kesgitlenen we $M(x, y, z)$, $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ bu ýaýlanyň nokatlary bolsun. $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$ tapawuda funksiýanyň $M$ nokatdaky doly artdyrmasy diýilýändigini bilýäris. Eger $\rho$ nola ymtylanda ($\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$) käbir $\alpha, \beta, \gamma$ tükeniksiz kiçi funksiýalar we $A, B, C$ sanlar üçin

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z \qquad (*)$$

deňlik ýerine ýetse, onda $f$ funksiýa $M(x, y, z)$ nokatda differensirlenýär diýilýär we $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ aňlatma funksiýanyň $M$ nokatdaky doly differensialy diýilýär. Doly differensial $df$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitlemä görä $df = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$.

Goý, $f$ funksiýa $M$ nokatda differensirlenýän bolsun. Onda (*) deňlik ýerlikli bolar. Deňlikde $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ goýup alarys:

$$\Delta_x f = A\Delta x + \alpha\Delta x \text{ ýa-da } \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Bu ýerde $\Delta x$ nola ymtylanda predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha) = \lim_{\rho\to 0}(A+\alpha) = A \text{ ýa-da } A = f'_x(x,y,z).$$

Edil şonuň ýaly hem alarys: $B = f'_y(x,y,z)$, $C = f'_z(x,y,z)$. Şeýlelikde, eger $f$ funksiýa $M$ nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň şol nokatda birinji tertipli hususy önümleri bardyr we $A = f'_x(x,y,z)$, $B = f'_y(x,y,z)$, $C = f'_z(x,y,z)$ bolar. Şonuň esasynda, biz doly differensialy

$$df = f'_x(x,y,z)\Delta x + f'_y(x,y,z)\Delta y + f'_z(x,y,z)\Delta z$$

görnüşde ýazmaga haklydyrys. Ondan başga-da $f=x$, $f=y$, $f=z$ funksiýalaryň doly differensiallarynyň degişlilikde, $df=\Delta x$, $df=\Delta y$, $df=\Delta z$ ýa-da $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, $dz=\Delta z$ bolýandygyny göz öňünde tutup, doly differensial üçin formulany $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ görnüşde ýazyp bileris. (*) formulada $\rho$ kiçi bolan ýagdaýlarda $\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$ aňlatmanyň $\rho$ görä ýokary tertipli kiçi bolany üçin, ony taşlap, formulany $\Delta f \approx f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ takmyn görnüşde ýazýarlar we ony funksiýanyň bahasyny takmyn hasaplamakda ulanýarlar. Iki üýtgeýänli funksiýa üçin doly differensial $df \approx f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, soňky takmyn formula bolsa $\Delta f \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$ görnüşde bolar.

**1-nji mysal.** $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýanyň $x_1 = 2{,}99$, $y_1 = 4{,}02$ nokatdaky takmyn bahasyny tapalyň. $x = 3$, $y = 4$ goýup, takmyn formulany ýazalyň:

$$f(x_1,y_1) - f(x,y) \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y;$$

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \Delta x = x_1 - x,\ \Delta y = y_1 - y$$

bolany üçin,

$$f(x_1,y_1) \approx \sqrt{3^2+4^2} - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot 0{,}01 + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot 0{,}02 =$$

$$= 5 - \frac{0{,}03}{5} + \frac{0{,}08}{5} = 5{,}01$$

alarys.

$f(x, y, z)$ funksiýanyň doly differensialy $x, y, z$ argumentler öz gezeginde başga birnäçe üýtgeýänleriň differensirlenýän funksiýalary bolan ýagdaýynda hem öz görnüşini üýtgedýän däldir. Ýagny $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ bolsa, biz $f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t))$ çylşyrymly funksiýa alarys. Onuň differensialy bolsa ýene-de $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ bolar. Bu ýerde $dx, dy, dz$ degişlilikde, $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$, $z(u, v, t)$ funksiýalaryň differensiallary, $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$ önümlerde $x, y, z$ argumentler degişlilikde, $x(u, v, t)$, $y(u, v, t)$, $z(u, v, t)$ funksiýalar bilen çalşyrylan.

**2-nji mysal.** $f = x^2y + y^2z + xz$; $x = t^2 + u^2$, $y = t^2 - u^2$, $z = tu$ çylşyrymly funksiýanyň doly differensialyny tapmaly.

$$f'_x = 2xy + z,\ f'_y = x^2 + 2yz,\ f'_z = y^2 + x,$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial u}du = 2tdt + 2udu,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial u}du = 2tdt - 2udu,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial u}du = udt + tdu \text{ bolany üçin,}$$

$$d\left[(t^2+u^2)^2(t^2-u^2) + (t^2-u^2)^2 tu + (t^2+u^2)tu\right] =$$

$$= f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \left[2(t^2+u^2)(t^2-u^2) + tu\right](2tdt + 2udu) +$$

$$+\left[(t^2+u^2)^2+2(t^2-u^2)\cdot tu\right][2tdt-2udu]+\left[(t^2-u^2)^2+t^2+u^2\right]\times$$

$$\times(udt+tdu)=\left[4(t^2+u^2)(t^2-u^2)t+2t^2u+2(t^2-u^2)^2t+\right.$$

$$+4(t^2-u^2)t^2u+(t^2-u^2)^2u+t^2u+u^3]dt+$$

$$+[4(t^2+u^2)(t^2-u^2)u+2tu^2-2(t^2+u^2)^2u-4(t^2-u^2)tu^2+$$

$$+(t^2-u^2)^2t+t^3+u^2t]du$$

alarys.

## §6. Çylşyrymly funksiýanyň hususy önümleri

Goý, $f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ funksiýalar differensirlenýän funksiýalar bolsun. $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ çylşyrymly funksiýanyň $u, v$ argumentlere görä hususy önümlerini tapalyň. Doly differensialyň formulasyny ulanyp alarys:

$$df(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

ýa-da

$$df(x(u,v), y(u,v), z(u,v) = f'_x\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+f'_y\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)+$$

$$+f'_z\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)=\left(f'_x\frac{\partial x}{\partial u}+f'_y\frac{\partial y}{\partial u}+f'_z\frac{\partial z}{\partial u}\right)du+$$

$$+\left(f'_x\frac{\partial x}{\partial v}+f'_y\frac{\partial y}{\partial v}+f'_z\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv.$$

Differensialyň kesgitlemesine görä,

$$df(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) = (f)'_u du + (f)'_v dv.$$

Deň aňlatmalary deňeşdirip alarys:

$$[f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))]'_u = f'_x\frac{\partial x}{\partial u}+f'_y\frac{\partial y}{\partial u}+f'_z\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$f'_v = f'_x\frac{\partial x}{\partial v}+f'_y\frac{\partial y}{\partial v}+f'_z\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Şeýlelikde, çylşyrymly funksiýanyň önümlerini hasaplamagyň formulalary alyndy. Eger $x$, $y$, $z$ argumentler diňe bir $t$ üýtgeýäniň funksiýalary bolsalar, onda formula has ýönekeý görnüşe geler:

$$f'_t = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + f'_z \frac{dz}{dt}.$$

Bu ýerde $f'_x, f'_y, f'_z$ önümlerde $x$, $y$, $z$ olaryň $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ bahalary bilen çalşyrylan diýip düşünmeli.

**1-nji mysal.** $u = x^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ çylşyrymly funksiýanyň $t$ görä önümini tapalyň:

$$\left[(\cos t)^{\sin t}\right]'_t = (x^y)'_x \frac{dx}{dt} + (x^y)'_y \frac{dy}{dt} = yx^{y-1}\frac{dx}{dt} + x^y \ln x \frac{dy}{dt} =$$

$$= -\sin^2 t \cdot (\cos t)^{\sin t - 1} + (\cos t)^{\sin t} \ln(\cos t)\cos t.$$

Çylşyrymly funksiýanyň önümini ulanyp, anyk däl funksiýanyň önümini tapalyň.

Goý, $y = y(x)$ funksiýa $f(x, y) = 0$ deňlemäniň çözüwi hökmünde kesgitlenen bolsun. Şeýle funksiýa anyk däl funksiýa diýilýär. $x = t$, $y = y(t)$ bahalary $f(x, y) = 0$ deňlemede ýerine goýup, $f(t, y(t)) \equiv 0$ toždestwony alarys. Deňligiň çep tarapyndan, çylşyrymly funksiýa hökmünde, $t$ görä önüm alalyň:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \text{ ýa-da } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = -\frac{f'_x(t, y(t))}{f'_y(t, y(t))}.$$

Bu ýerde ýene $t = x$ çalşyrma girizip alarys:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Eger $y(x_0) = y_0$ belli bolsa, onda alarys:

$$y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

**2-nji mysal.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsiň $(x_0,\ y_0)$ nokadyndan geçýän galtaşýanyň deňlemesini ýazalyň. Eger $y = y(x)$ ellipsiň deňlemesinden tapylan we $y(x_0) = y_0$ şerti kanagatlandyrýan funksiýa bolsa, onda galtaşýanyň deňlemesi $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ bolar. Indi $y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$ bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$y-y_0=-\frac{\frac{2x_0}{a^2}}{\frac{2y_0}{b^2}}(x-x_0)$$

ýa-da ýönekeýleşdirip ýazyp bileris:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

**3-nji mysal.** $f(x,\ y) = 0$ egriniň $M_0(x_0,\ y_0)$ nokadyndan geçýän galtaşýanyň deňlemesini ýazalyň. Goý, $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$ şol egriniň $M_0$ nokadynyň töweregindäki deňlemesi bolsun. Beýle diýmek

$$f(x,\ y(x)) \equiv 0$$

diýmekdir. $y(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatdaky önümini anyk däl funksiýanyň önümi hökmünde tapsa bolar:

$$y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}.$$

Galtaşýanyň deňlemesini $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ görnüşde ýa-da $y'(x_0)$ bahasyny goýup, $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ görnüşde ýazyp bileris.

**4-nji mysal.** $F(x,\ y,\ z) = 0$ üste $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nokatda galtaşýan tekizligiň deňlemesini ýazalyň. Biz $F(x,\ y,\ z)$ funksiýa $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nokatda differensirlenýän diýip hasap edýäris.

Goý, $x = x(t), y = y(t),\ z = z(t)$ berlen üstde ýatýan we $M_0$ nokatdan $t = t_0$ bolanda geçýän islendik egri bolsun. Biziň öňden bilşimiz ýaly, $\vec{V}(t)=\{x'(t_0),\, y'(t_0),\, z'(t_0)\}$ wektor berlen egrä $t = t_0$ bolanda, ýagny

$M_0$ nokatda galtaşýan wektor bolýar. Beýleki tarapdan, berlen egriniň koordinatalary üstüň deňlemesini islendik $t$ üçin kanagatlandyrýandyrlar, ýagny $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$ toždestwo ýerlikli bolýar. Toždestwonyň çep böleginden çylşyrymly funksiýanyň önümini alalyň:

$$F_x'(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_y'(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+F_z'(x(t), y(t), z(t))z'(t) \equiv 0.$$

Bu deňlemede $t = t_0$ goýup taparys:

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)x'(t_0) + F_y'(x_0,y_0,z_0)y'(t_0) + F_z'(x_0,y_0,z_0)z'(t_0) = 0.$$

Soňky deňlik $\vec{V}(t_0)$ wektoryň $\vec{N} = \{F_x'(x_0,y_0,z_0),\ F_y'(x_0,y_0,z_0),$ $F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$ wektora perpendikulýar bolýandygyny aňladýar. Diýmek, $M_0$ nokatdan geçýän, berlen üstde ýatýan islendik egriniň $M_0$ nokatdaky galtaşýan wektory $\vec{N}$ wektora perpendikulýar bolar. Ýagny ol galtaşýanlaryň hemmesi $\vec{N}$ wektora perpendikulýar bolan we $M_0$ nokatdan geçýän

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$$

tekizlikde ýatýarlar. Şol tekizlige galtaşýan tekizlik diýilýär.

## §7. Teýloryň formulasy

Formulany tygşytlylyk üçin operatoryň üsti bilen aňladalyň:

$$f_x'(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + f_y'(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + f_z'(x_0,y_0,z_0)(z - z_0)$$

aňlatmany

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial z}(z - z_0)\right] f(x_0,y_0,z_0)$$

ýa-da

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial z}(z - z_0) = d$$

bilen belgiläp, $df(x_0, y_0, z_0)$ görnüşde ýazalyň. Diýmek,

$$df(x_0,y_0,z_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial}{\partial z}(z - z_0)\right] f(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= f_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

Edil şuňa meňzeşlikde, $d^2f(x_0, y_0, z_0)$, $d^3f(x_0, y_0, z_0)$, ... aňlatmalar girizilýär. Mysal üçin,

$$d^2f(x_0,y_0,z_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)\right]^2 \cdot f(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= f_{xx}''(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}''(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+ 2f_{xz}''(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + 2f_{zy}''(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)(y-y_0) +$$

$$+ f_{yy}''(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 + f_{zz}''(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2.$$

Indi biz Teýloryň formulasyny ýazmaga taýýar. Goý, $f(x, y, z)$ funksiýanyň $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň käbir etrabynda $1, 2, ..., n+1$ tertipli hususy önümleriniň hemmesi bar bolsun we üznüksiz bolsun. Onda şol etrapda Teýloryň aşakdaky formulasy ýerlikli bolar:

$$f(x,y,z) = d^0f(x_0,y_0,z_0) + \frac{df(x_0,y_0,z_0)}{1!} +$$

$$+ \frac{d^2f(x_0,y_0,z_0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(x_0,y_0,z_0)}{n!} + R_{n+1}.$$

Bu ýerde $R_{n+1}$ – formulanyň galyndy agzasy we ol

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1}f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0), z_0 + \theta(z-z_0))}{(n+1)!},$$

$0 < \theta < 1$ formula bilen kesgitlenýär. Mysal üçin, iki argumentli $f(x, y)$ funksiýa üçin $n = 2$ bolanda, formula şeýle görnüşde bolar:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{f_x'(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)}{1!} +$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}''(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}''(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+ f_{yy}''(x_0,y_0)(y-y_0)^2] + R_3,$$

$$R_3 = \frac{1}{3!}\Big[f_{xxx}'''(x_1,y_1)(x-x_0)^3 + 3f_{xxy}'''(x_1,y_1)(x-x_0)^2(y-y_0) +$$

$$+3f'''_{xyy}(x_1,y_1)(x-x_0)(y-y_0)^2+f'''_{yyy}(x_1,y_1)(y-y_0)^3\Big],$$

$$x_1=x_0+\theta(x-x_0);\ \ y_1=y_0+\theta(y-y_0);\ \ 0<\theta<1.$$

Islendik $m$ derejeli köpagza üçin Teýloryň formulasy $n = m$ bolanda absolýut takykdyr, ýagny $R_{m+1}$ toždestwolaýyn nola deňdir. $F(x_1, x_2, x_3, ..., x_m)$ funksiýa üçin, ýokardaky şertlerde, Teýloryň formulasy edil ýokardaky ýaly görnüşde bolýar:

$$F(x_1,x_2,...,x_m)=d^0F(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)+\frac{dF(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{1!}+...+$$

$$+\frac{d^nF(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{n!}+R_{n+1},$$

$$R_{n+1}=\frac{d^{n+1}F(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0),...,x_m^0+\theta(x_m-x_m^0))}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1.$$

Bu ýerde

$$d=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0).$$

## §8. Funksiýanyň ekstremumy

Arifmetik giňişlik düşünjesini girizeliň. $x_1, x_2, ..., x_n$ – tertipleşdirilen $n$ sana nokat diýilýär we ol $M(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ bilen belgilenýär. $M(x_1, x_2,..., x_n)$ nokatlaryň köplügine $n$ ölçegli arifmetik giňişlik diýilýär we ol $R_n$ bilen belgilenýär. Mysal üçin, tekizlikde koordinatalar ulgamyny girizip, onuň islendik nokadyny $M(x,\ y)$ görnüşde ýazyp bileris. Diýmek, tekizligiň $M(x,\ y)$ nokatlaryň köplügine $R_2$ – iki ölçegli arifmetik giňişlik hökmünde garap bolar. $R_n$ giňişlikde iki $M_1(x_1^1, x_2^1,...,x_n^1)$, $M_2(x_1^2, x_2^2,...,x_n^2)$ nokadyň arasyndaky uzaklyk

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1^1-x_1^2)^2+(x_2^1-x_2^2)^2+...+(x_n^1-x_n^2)^2}$$

formula arkaly kesgitlenýär. $M_0(x_1^0, x_2^0,...,x_n^0)$ nokat alalyň. Islendik $\varepsilon$ üçin

$$\rho(M_0,M)<\varepsilon$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokatlaryň köplügine merkezi $M_0$ nokatda, radiusy $\varepsilon$ bolan şar diýilýär we ol $S^{\varepsilon}_{M_0}$ bilen belgilenýär. $S^{\varepsilon}_{M_0}$ şara $M_0$ nokadyň $\varepsilon$ etraby hem diýilýär. $S^{\varepsilon}_{M_0} \backslash \{M_0\}$ köplük $\Pi^{\varepsilon}_{M_0}$ bilen belgilenýär we oňa ýörite etrap diýilýär.

Goý, $D$ $R_n$ giňişligiň nokatlaryndan durýan islendik ýaýla bolsun. $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nokat özüniň käbir etraby bilen bilelikde $D$ ýaýla degişli bolsun. $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýa $D$ ýaýlada kesgitlenen bolsun.

**Kesgitleme.** Eger $D$ ýaýlada ýatýan käbir $\Pi^{\varepsilon}_{M_0}$ etrabyň hemme $M$ nokatlary üçin $f(M_0) < f(M)$ $\quad (f(M_0) > f(M))$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $f(M)$ funksiýa $M_0$ nokatda minimuma (maksimuma) eýe diýilýär. $M_0$ nokada minimum (maksimum) nokady, funksiýanyň $M_0$ nokatdaky bahasyna funksiýanyň minimal (maksimal) bahasy diýilýär.

Minimum we maksimum nokatlaryna ekstremum nokatlary, funksiýanyň şol nokatlardaky bahalaryna ekstremal bahalar diýilýär. Goý, $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nokat ekstremum nokady bolsun. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýa $M_0$ nokatda differensirlenýän bolsun. Onda $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$ bir üýtgeýänli funksiýa üçin $x_1^0$ nokadyň ekstremum nokady boljakdygy düşnüklidir. Onda $\varphi'(x_1^0) = 0$ bolar ýa-da $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0$ bolar. Edil şuňa meňzeşlikde, islendik $i$ üçin $f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0,\ i = \overline{1, n}$ boljagyny görkezse bolar. Diýmek, $M_0$ nokadyň ekstremum nokady bolmagy üçin

$$f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0,\ i = \overline{1, n},$$

şertler ýerine ýetmelidir. Bu şertlere ekstremumyň zerurlyk şertleri diýilýär. Bu şertleriň bir üýtgeýänli funksiýa üçin ekstremumyň ýeterlik şerti bolmaýandygyny görkezipdik. Eger hususy ýagdaýda ýeterlik bolmasa, umumy ýagdaýda ýeterlik bolmajakdygy aýdyňdyr. Goý, $M_0$ nokadyň käbir etrabynda $f(M)$ funksiýanyň birinji, ikinji tertipli hususy önümleriniň hemmesi bar we üznüksiz bolsunlar.

**Teorema.** Eger

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^2 f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

forma $h_1, h_2, ..., h_n$ üýtgeýänleriň hemmesi birden nola deň bolmadyk islendik bahalarynda, şol bir položitel (otrisatel) alamatyny saklasa we $M_0$ nokatda ekstremumyň zerurlyk şertleri ýerine ýetse, onda $M_0$ nokatda funksiýa minimuma (maksimuma) eýedir.

Bu ekstremumyň ýeterlik şerti baradaky teoremadyr. Teoremanyň subudynyň Teýloryň formulasyndan aňsatlyk bilen gelip çykýandygyny bellemek bilen çäklenýäris. $n = 2$ bolan ýagdaýda $x_1 = x$, $x_2 = y$ belgilemeleri girizsek, ekstremumyň ýeterlik şertindäki forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2\right)^2 f(x_0,y_0)$$

ýa-da

$$f''_{xx}(x_0,y_0)h_1^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)h_1h_2 + f''_{yy}(x_0,y_0)h_2^2$$

ýaýbaň görnüşde ýazylýar. Bu formanyň alamatyny saklamagy üçin

$$f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. Şol sebäbe görä iki üýtgeýänli funksiýa üçin ekstremumyň ýeterlik şerti aşakdaky görnüşde bolar.

**Teorema.** Eger $M_0(x_0, y_0)$ nokatda ekstremumyň zerurlyk şertleri

$$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$$

ýerine ýetseler we

$$f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - f''^2_{xy}(x_0,y_0) > 0$$

bolsa, onda $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ bolsa $M_0$ minimum nokady, $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ bolsa $M_0$ maksimum nokady bolar. Eger

$$f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) - f''^2_{xy}(x_0,y_0) < 0$$

bolsa, onda $M_0$ nokatda ekstremum ýokdur.

Bu teoremalardan ekstremum nokatlaryny tapmagyň düzgüni gelip çykýar. Ilki bilen zerurlyk şertleri ulgam hökmünde çözüp, koordinatalary ulgamy kanagatlandyrýan $M_i(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i)$ nokatlary tapýarlar. Ol nokatlara funksiýanyň durum nokatlary diýilýär. Soňra her durum nokady üçin ýeterlik şertdäki kwadratik formany düzüp, onuň alamatyny barlaýarlar we şoňa görä netije çykarýarlar. $n = 2$ bolan halda, durum nokatlary tapylandan soň, olaryň her biri üçin

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - f''^{2}_{xy}(x_0, y_0), \ \ f''_{xx}(x_0, y_0)$$

aňlatmalaryň alamatlary derňelýär we şoňa görä netije çykarýarlar.

**Mysal.** $z = x^2 + 2y^2 - 2x + y - 6$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapalyň. Durum nokatlaryny tapýarys:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2 = 0, \\ z'_y = 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

ulgamy çözüp, $M_1\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ durum nokadyny taparys. $M_1$ nokady derňäliň. Onuň üçin ikinji tertipli hususy önümleri tapalyň:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = 0; \quad z''_{yy} = 4;$$

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - z''^{2}_{xy} = 2 \cdot 4 - 0^2 > 0; \ \ z''_{xx} > 0$$

bolany üçin, teorema görä $M_1\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ nokat minimum nokadydyr.

## §9. Funksiýanyň ýaýladaky iň uly we iň kiçi bahalary

Ýönekeýlik üçin $f$ funksiýanyň berlen $D$ ýaýlada birinji tertipli önümleri bar hasap edeliň. Eger funksiýa $D$ ýaýlanyň içki nokadynda iň uly ýa-da iň kiçi baha eýe bolýan bolsa, onda ol nokadyň ekstremum nokady, ýagny durum nokady boljakdygy aýdyňdyr. Diýmek, funksiýanyň ýapyk $D$ ýaýlada iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin aşakdaky tertipde hereket etmeli:

1) funksiýanyň $P_1, P_2, ..., P_k$ durum nokatlaryny tapmaly;

2) funksiýanyň durum nokatlaryndaky $f(P_1), f(P_2), ..., f(P_k)$ bahalaryny tapmaly;

3) funksiýanyň $D$ ýaýlanyň çäk nokatlaryndaky iň uly $M_1$ we iň kiçi $m_1$ bahalaryny tapmaly. $M_1, m_1, f(P_1), f(P_2), ..., f(P_k)$ sanlaryň içinde iň ulusy funksiýanyň $D$ ýaýladaky iň uly bahasy, iň kiçisi iň kiçi bahasy bolar.

**1-nji mysal.** $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $A_m(x_m, y_m, z_m)$ nokatlar berlen. $xOy$ tekizliginde ýatan we berlen nokatlardan uzaklyklarynyň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly edip $M(x, y)$ nokady tapmaly.

**Çözülişi.** Uzaklyklaryň kwadratlarynyň jemi

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{m}[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2]$$

formula arkaly tapylar. Funksiýa bütin $xOy$ tekizlikde kesgitlenen. $M(x, y)$ tükeniksizlige ymtylanda $\rho^2$ tükeniksizlige ymtylýar. Şoňa görä onuň iň uly bahasy ýok. Iň kiçi bahasyny tapmak üçin durum nokatlaryny tapalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho^2}{\partial x} = 2\sum\limits_{i=1}^{m}(x - x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho^2}{\partial y} = 2\sum\limits_{i=1}^{m}(y - y_i) = 0 \end{cases}$$

ulgamy çözüp, diňe bir $M_1\left(\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} x_i,\ \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right)$ durum nokadyny taparys. Diýmek, $M_1$ nokatda $\rho^2$ iň kiçi baha eýe bolýar.

**2-nji mysal.** $R$ radiusly tegelegiň içinden çyzylan üçburçluklaryň iň uly meýdanlysyny tapalyň. Üçburçlugyň taraplaryna daýanýan merkezi burçlary $x, y, z$ bilen belgiläp, üçburçlugyň meýdany üçin

$$S = \frac{1}{2}R^2\sin x + \frac{1}{2}R^2\sin y + \frac{1}{2}R^2\sin z = \frac{R^2}{2}\left[\sin x + \sin y + \sin z\right]$$

formulany alarys. $x + y + z = 2\pi$ bolany sebäpli alarys:

$$S(x, y) = \frac{R^2}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x + y)].$$

Biz $0 < x \le \pi$, $0 < y \le \pi$ şertlerde $S$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly. Funksiýanyň ýaýlada ýatýan durum nokatlaryny tapalyň:

$$S_x' = \frac{R^2}{2}[\cos x - \cos(x + y)] = 0,$$

$$S_y' = \frac{R^2}{2}[\cos y - \cos(x + y)] = 0$$

ulgamy çözüp, diňe bir $M_1\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ durum nokadyny taparys. Funksiýanyň $M_1$ nokatdaky bahasy $S(M_1) = \frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4}$. Funksiýanyň ýaýlanyň çäk nokatlaryndaky bahalaryna seredeliň.

$$S(0, y) \equiv 0;\ S(x, 0) \equiv 0;\ S(\pi, y) = R^2 \sin y,\ 0 \le y \le \pi,$$

$$S(x, \pi) = R^2 \sin x,\ 0 \le x \le \pi.$$

Diýmek, funksiýanyň çäk nokatlarda alyp biljek bahalarynyň iň ulusy $R^2$-a deň. $1 < \frac{3\sqrt{3}}{4}$ bolany üçin, iň uly meýdanly üçburçluk $x = y = z = 120°$ bolanda alynýar. Ol meýdany $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ bolan deňtaraply üçburçlukdyr.

## §10. Şertli ekstremum

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýa $D$ ýapyk ýaýlada kesgitlenen. $D$ ýaýlanyň

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

$m < n$ şertleri kanagatlandyrýan nokatlarynda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak meselesine şertli ekstremum diýip at berýärler.

Bu meseläniň çözüliş ýoly şeýle. Ilki bilen $f(M)$ funksiýanyň $D$ ýaýlada ýatýan şertli durum nokatlaryny tapýarlar. Funksiýanyň tapylan durum nokatlaryndaky bahalaryny kesgitleýärler. Soňra $f(M)$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň çäginiň berlen $m$ şerti kanagatlandyrýan nokatlarynda iň uly $M_1$ we iň kiçi $m_1$ bahalaryny tapýarlar. Funksiýanyň şertli durum nokatlaryndaky bahalarynyň we $M_1$, $m_1$ sanlaryň arasyndan iň ulusyny saýlap alýarlar. Ol $f$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň $m$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryndaky iň uly bahasy bolar. Edil şoňa meňzeşlikde, seredilýän sanlaryň iň kiçisi funksiýanyň $D$ ýaýlanyň berlen $m$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryndaky iň kiçi bahasy bolar. Şertli durum nokatlaryny tapmagyň bir usulyna näbelli köpeldijiler usuly diýilýär.

Ol usul beýik fransuz alymy Lagranžyň ady bilen baglanyşyklydyr. Bu usulda täze

$$F = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - ... - \lambda_m g_m$$

funksiýa girizilýär we onuň $D$ ýaýladaky durum nokatlary tapylýar. Belli bolşy ýaly, durum nokatlaryny tapmak üçin

$$F'_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

ulgamy $x_1, x_2, ..., x_n$ üýtgeýänlere görä çözmeli. Ulgamyň $n$ deňlemesi bar. Emma näbellileriň sany $n + m$ ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – näbelli köpeldijiler). Şol sebäpli bu ulgamyň deňlemeleriniň üstüne $m$ sany ýokarda agzalan şertleri goşup, ulgam alarys:

$$\begin{aligned} &F'_{x_i} = 0, \ i = 1, 2, ..., n, \\ &g_k = 0, \ k = 1, 2, ..., m. \end{aligned} \tag{1}$$

Eger $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0$ (1) ulgamyň çözüwi bolsa, onda $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nokada $f(M)$ funksiýanyň şertli durum nokady diýilýär. Durum nokatlarynyň hemmesini tapýarlar. Olaryň arasynda $D$ ýaýlada ýatýanlaryny saýlap alýarlar we şol nokatlarda $f(M)$ funksiýanyň bahalaryny tapýarlar. $f(M)$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň çäginiň berlen $g_k = 0, k = \overline{1, m}$, şertleri kanagatlandyrýan nokatlaryndaky iň uly we iň kiçi bahalary adatdaky ýaly tapylýar.

**1-nji mysal.** $z = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ funksiýanyň $x^2 + y^2 \leq 4$ ýaýlanyň $x - 2y = 0$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryndaky iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaly.

Täze $F = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - \lambda(x - 2y)$ funksiýa girizip, (1) ulgamy düzeliň:

$$\begin{cases} 2(x - 1) - \lambda = 0, \\ 2(y - 1) + 2\lambda = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Ulgamyň diňe bir $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ çözüwi bar. Diýmek, diňe bir $M_1\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$ durum nokady bar. $z$ funksiýanyň durum nokadyndaky bahasy $z\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$. $z$ funksiýanyň ýaýlanyň çäginiň $x - 2y = 0$ şerti kanagatlandyrýan $M_2\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ we $M_3\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ nokatlardaky bahalaryny tapýarys:

$$z\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{30 - 12\sqrt{5}}{5}, \quad z\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{30 + 12\sqrt{5}}{5}.$$

$\frac{1}{5} < \frac{30 - 12\sqrt{5}}{5} < \frac{30 + 12\sqrt{5}}{5}$ bolany sebäpli, $z$ funksiýanyň $x^2 + y^2 \le 4$ ýaýladaky iň kiçi bahasy $\frac{1}{5}$, iň uly bahasy $\frac{30 + 12\sqrt{5}}{5}$ bolar.

**2-nji mysal.** $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \ge (1 + q)^n$ deňsizligiň $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \dots,\ x_n \ge 0,\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = q^n$ bolanda ýerine ýetýändigini subut edeliň. Subut etmek üçin $f = (1 + x_1) \cdot \dots \cdot (1 + x_n)$ funksiýanyň seredilýän şertlerde iň kiçi bahasynyň $(1 + q)^n$ bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir. $f$ funksiýanyň $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = q^n$ şertde şertli ekstremumyny tapalyň. Täze $F = f - \lambda(x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_n - q^n)$ funksiýa girizip, onuň $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ ýaýlada durum nokatlaryny tapalyň:

$$\begin{cases} F_{x_1} = \dfrac{f}{1 + x_1} - \lambda \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_1} = 0, \\ F_{x_2} = \dfrac{f}{1 + x_2} - \lambda \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_{x_n} = \dfrac{f}{1 + x_n} - \lambda \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_n} = 0, \\ \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = q^n. \end{cases}$$

Ulgamy çözüp, diňe bir $M(q, q, \dots, q)$ durum nokadyny tapýarys, $f$ funksiýanyň şol nokatdaky bahasy $(1 + q)^n$ deň. $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nokat ýaýlanyň çäk nokatlaryna ymtylanda $f$ tükeniksizlige ymtylýar, $M$ nokat tükeniksizlige ymtylanda $f$ ýene-de tükeniksizlige ymtylýar. Diýmek, $(1 + q)^n$ baha $f$ funksiýanyň ýaýladaky iň kiçi bahasy bolýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

# IX. DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

Goý, biziň öwrenýän meselämiz bellibir $y(x)$ funksiýany tapmaklyga syrygan bolsun. Berlen elektrik ulgamynda elektrik akymynyň güýjüni, garşylygy wagta baglylykda kesgitlemek, tekizlige bellibir burç bilen zyňlan jisimiň traýektoriýasyny tapmak, deňölçegli däl hereketde geçilen ýoluň uzynlygyny kesgitlemek we ş.m. muňa mysal bolup biler. Köp ýagdaýlarda göni $y(x)$ funksiýany kesgitlemek başartmaýar. Emma onuň deregine $y(x)$ funksiýanyň we onuň $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(m)}(x)$ önümleriniň arasyndaky funksional baglanyşygy, ýagny

$$F(x, y, y', ..., y^{(m)}) = 0 \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemäni tapmak bolýar. Ine, $x$ baglanyşyksyz üýtgeýäni, $y(x)$ gözlenýän funksiýany we onuň önümlerini baglanyşdyrýan (1) görnüşdäki deňlemä differensial deňleme diýilýär. Differensial deňlemä girýän önümleriň tertipleriniň iň ulusyna deňlemäniň tertibi diýilýär.

$$y'' + \sin x + y^3 + 1 = 0, \quad y' + P(x)y = Q(x)$$

deňlemeler, degişlilikde, ikinji we birinji tertipli differensial deňlemelere mysal bolup biler. Eger $y = y(x)$ funksiýany we onuň önümlerini differensial deňlemede orunlaryna goýanyňda deňleme toždestwo öwrülse, onda $y = y(x)$ funksiýa differensial deňlemäniň çözüwi diýilýär. Meselem, $y = e^x$ funksiýa $y' - y = 0$ differensial deňlemäniň çözüwidir. Dogrudan hem, $y = e^x$ funksiýany we $y' = e^x$ önümi deňlemede orunlaryna goýsak, $e^x - e^x \equiv 0$ toždestwony alarys. $y = \sin x$ funksiýa $y'' + y = 0$ differensial deňlemäniň çözüwidir. Dogrudan hem, $y = \sin x$ we $y'' = -\sin x$ funksiýalary deňlemede orunlaryna goýsak, $-\sin x + \sin x \equiv 0$ toždestwony alarys.

Goý, differensial deňleme $m$-nji tertipli bolsun. Eger $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýa, bu ýerde $C_1, C_2, ..., C_m$ erkin hemişelikler, aşakdaky iki şerti kanagatlandyrsa:

1) $y(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýa $C_1, C_2, ..., C_m$ hemişelikleriň islendik bahalarynda berlen deňlemäniň çözüwi bolmaly;

2) berlen deňlemäniň islendik $y_0(x)$ çözüwi $y(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýada $C_1, C_2, ..., C_m$ hemişelikleriň ýerine käbir $C_1^0, C_2^0, ..., C_m^0$ bahalary goýmak bilen alynmaly, ýagny $y_0(x) \equiv y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_m^0)$ bolmaly, onda $y(x, C_1, ..., C_m)$ funksiýa berlen differensial deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär. Erkin hemişelikleriň sanynyň denlemäniň tertibine deňdigini şu ýerde bellemek ýerlikli bolsa gerek. Eger çözüw $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_m) = 0$ anyk däl funksiýa görnüşde berilse, onda oňa umumy integral diýilýär. $F(x, y, C_1, ..., C_m) = 0$ egri çyzyga bolsa umumy integral egri diýilýär. Umumy çözüwi tapmak meselesine differensial deňlemäni çözmek diýilýär. Mysal üçin, $y = C_1e^x$ funksiýa $y' - y = 0$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidir. Dogrudan hem:

1. $y = C_1e^x$ funksiýany we onuň $y' = C_1e^x$ önümini deňlemede orunlaryna goýsak, $C_1e^x - C_1e^x \equiv 0$ toždestwony alarys. Diýmek, $y = C_1e^x$ funksiýa $C_1$-iň islendik bahasynda deňlemäniň çözüwi bolýar.

2. Goý, $y_0(x)$ berlen deňlemäniň käbir çözüwi bolsun. Çözüwiň kesgitlemesine görä, $y_0'(x) - y_0(x) \equiv 0$ toždestwo ýerine ýetmelidir. Toždestwony $\dfrac{y_0'(x)}{y_0(x)} \equiv 1$ görnüşde ýa-da, has gowusy, $(\ln|y_0(x)|)' = 1$ görnüşde ýazyp, iki tarapyndan hem integral alsak, $\ln|y_0(x)| \equiv x + C$ deňligi alarys ýa-da potensirläp, $|y_0(x)| \equiv e^{x+C}$ görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde $C_1 = e^C$ belgileme girizsek, $y_0(x) = C_1e^x$ deňligi alarys. Diýmek, umumy çözüw bolmagyň ikinji şerti hem ýerine ýetyär.

$y = C_1\cos x + C_2\sin x$ funksiýa $y'' + y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwidir. Dogrudan hem:

1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ funksiýany we onuň ikinji tertipli $y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x$ önümini deňlemede orunlaryna goýsak, $-C_1\cos x - C_2\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x \equiv 0$ toždestwony alarys. Diýmek, $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ funksiýa $C_1, C_2$ hemişelikleriň islendik bahalarynda deňlemäniň çözüwi bolýar.

2. Goý, $y_0(x)$ berlen deňlemäniň käbir çözüwi bolsun. Onda $y_0''(x) + y_0(x) \equiv 0$ toždestwo ýerine ýetmeli bolar. Deňligiň iki tara-

pyny hem $y_0'(x)$ önüme köpeldip, ony

$$\left(\frac{y_0'(x)^2}{2}\right)' + \left(\frac{y_0^2(x)}{2}\right)' \equiv 0$$

görnüşde ýazsa bolar. Şoňky toždestwo diňe

$$y_0'(x)^2 + y_0^2(x) \equiv C^2$$

ýagdaýda bolup biler. Bu ýerde $C$ – hemişelik san. Soňky deňlemäni

$$y_0'(x) = \pm\sqrt{C^2 - y_0^2(x)}$$

ýa-da

$$\frac{y_0'(x)}{\sqrt{C^2 - y_0^2(x)}} = \pm 1;$$

ýa-da

$$\left[\arcsin\frac{y_0(x)}{C}\right]' = \pm 1$$

görnüşde ýazyp we iki tarapyndan hem integral alyp taparys:

$$\arcsin\frac{y_0(x)}{C} = \pm x + C_0$$

ýa-da

$$y_0(x) = \pm C\cos C_0 \sin x + C\sin C_0 \cos x.$$

$C\sin C_0 = C_1^0,\ \pm C\cos C_0 = C_2^0$ belgilemeleri girizip alarys:

$$y_0(x) = C_1^0\cos x + C_2^0 \sin x.$$

Diýmek, umumy çözüw bolmaklygyň ikinji şerti hem ýerine ýetýär.

Differensial deňlemeleriň möhüm görnüşleriniň biri çyzykly differensial deňlemedir.

$$a_0(x)y^{(m)} + a_1(x)y^{(m-1)} + ... + a_{m-1}(x)y' + a_m(x)y = f(x)$$

görnüşdäki deňlemä $m$ tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär. Bu ýerde, $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_m(x)$, $f(x)$ berlen ýaýlada kesgitlenen funksiýalar. $a_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, funksiýalara deňlemäniň koeffisiýentleri diýilýär, $f(x)$ funksiýa azat agza diýilýär. Çyzykly bolmadyk differensial deňlemelere çyzykly däl differensial deňlemeler diýilýär.

Adatça, biziň sereden deňlemelerimize ady differensial deňlemeler diýilýär. Biziň dersimizde diňe şeýle deňlemeler barada gürrüň gider. Şol sebäpli biz ol deňlemelere gysgalyk üçin «ady» sözüni taşlap, differensial deňlemeler diýjekdiris.

Matematikanyň dürli ugurlarynyň arasynda differensial deňlemeler örän möhüm orun tutýar. Onuň sebäbi durmuşda, esasan hem, ylymda we tehnikada ýüze çykýan köp meseleleri öwrenmekde matematiki modelirlemek usulynyň giňden ulanylmagydyr we esasy matematiki model bolup differensial deňlemeleriň hyzmat etmegidir. Differensial deňlemeleriň ulanma ýaýlasy diýseň giňdir. Her bir derňelýän ulgam, hadysa onuň mehanika, fizika, ykdysadyýete we beýleki ylmy we tehniki ugurlara degişlidigine garamazdan, adatça, öz durkuny daşardan edilýän uçursyz köp täsirlere we wagta görä saklasa gowy bolýar. Ýagny durnukly bolsa gowy bolýar. Differensial deňlemeleriň giňden ulanylýan ugurlarynyň biri-de durnuklylyk nazaryýetidir. Mehaniki, fiziki we başga ulgamlaryň matematiki modellerini düzüp, gymmat bahaly tejribeleri geçirmezden, olaryň özlerini wagt dowamynda we giňişlikde nähili alyp barjakdyklaryny kagyz üstünde differensial deňlemeleriň üsti bilen çözüp bolýar.

Bu bolsa döwlet ykdysadyýeti üçin örän möhümdir. Soňky ýyllarda giňden ulanylýan optimal dolandyryş atly ylmyň ähmiýetli bölümleriniň birinde hem differensial deňlemeleriň ähmiýeti diýseň wajypdyr. Biz ýokarda aýdylanlary ýönekeý mysallar bilen delillendireliň.

1. Goý, agramy $mg$ bolan jisim $H$ beýiklikden aşaklygyna gaçýan bolsun. Jisimiň hereket ediş kanunyny anyklalyň. Jisime ýeriň dartyş güýji $F_1 = mg$ we howanyň garşylyk berýän güýji $F_2 = -kv$ täsir edýär diýeliň. Bu ýerde $k$ položitel koeffisiýent, $v(t)$ jisimiň tizligi. Nýutonyň ikinji kanuny boýunça alarys:

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

ýa-da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Eger jisimiň $t$ wagtda geçen aralygyny $h(t)$ bilen bellesek, onda $v = \frac{dh}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2}$ alarys we deňleme $m\frac{d^2h}{dt^2} = mg - k\frac{dh}{dt}$ görnüşi alar.

Biz $h$ üçin ikinji tertipli çyzykly differensial deňleme aldyk. Jisimiň $h(t)$ hereket kanuny soňky deňlemäniň çözüwleriniň biridir. Ony beýleki çözüwlerden tapawutlandyrýan zat, $t = 0$ bolanda, onuň bahasynyň we önüminiň bahasynyň nol bolmagydyr, ýagny $h(0) = h'(0) = 0$ bolmagydyr. Beýle diýmek $t = 0$ başlangyç wagtda jisimiň geçen aralygy we tizligi nola deň diýmekdir. Soňky deňlemäni $\left(m\frac{dh}{dt} - mgt + kh\right)' = 0$ görnüşde ýazyp bolýandygy sebäpli, $m\frac{dh}{dt} - mgt + kh = C$ boljagy aýdyňdyr. Bu deňlemede $t = 0$ goýup, $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ bolany üçin, $C = 0$ alarys. Diýmek, deňleme $m\frac{dh}{dt} - mgt + kh = 0$ görnüşe geler. Alnan deňlemäni $\left(e^{\frac{k}{m}t}h\right)' = gte^{\frac{k}{m}t}$ görnüşde ýazyp bolar. Şoňa görä $e^{\frac{k}{m}t}h = \int_0^t gte^{\frac{k}{m}t}dt + C$ boljakdygy aýdyňdyr. Bu ýerde $t = 0$ goýup, $h\ (0) = 0$ bolany üçin, $C = 0$ alarys. Deňlemäniň sag tarapyndaky integraly $k \neq 0$ bolanda hasaplap taparys:

$$e^{\frac{kt}{m}}h = \frac{mg}{k}te^{\frac{k}{m}t} - \frac{m^2}{k^2}ge^{\frac{k}{m}t} + \frac{m^2}{k^2}g$$

ýa-da

$$h = \frac{m^2}{k^2}ge^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2}{k^2}g.$$

Ine, bu tapylan $h(t)$ jisimiň $k \neq 0$ bolandaky hereket kanunydyr. Eger $k = 0$, ýagny howanyň garşylygy ýok bolsa, onda çözüw $h = \frac{gt^2}{2}$ görnüşi alar. Goý, $t = T$ wagtda jisim ýere ýeten bolsun, onda $h(T) = H$ bolar we soňky deňlemeden $H = \frac{gT^2}{2}$ alarys ýa-da $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Diýmek, howanyň täsiri ýok hasap edilende, jisimiň ýere ýetýän wagty onuň massasyna bagly däldir. Bu kanun köp asyrlar mundan öň ýaşap geçen beýik italýan alymy G.Galileý tarapyndan açylandyr. $h = \frac{gt^2}{2}$ kanuny ulanyp, $v = \frac{dh}{dt} = gt$ ýa-da $t = \frac{v}{g}$ taparys. $t = \frac{v}{g}$ bahany $h = \frac{gt^2}{2}$ deňlikde ýerine goýup alarys:

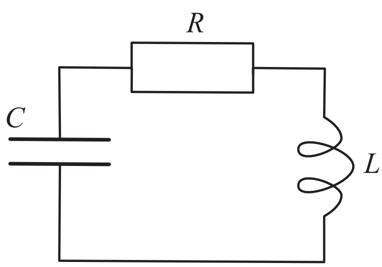
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tizlik bilen geçilen aralygyň arasyndaky bu baglanyşyk G. Galileýiň okuwçysy Torriçelli tarapyndan ir döwürlerde açylandyr.

2. Bakteriýalaryň köpelmek tizligi islendik wagtda olaryň massasyna göni proporsional we položitel. Bakteriýalaryň köpeliş kanunyny tapalyň.

Eger bakteriýalaryň $t$ wagtdaky massasy $m(t)$ bolsa, onda olaryň köpeliş tizligi $\frac{dm}{dt}$ bolar. Şerte görä, $\frac{dm}{dt} = km$, $k$ – položitel san. Bu deňligi $(e^{-kt}m)' = 0$ görnüşde ýazyp alarys: $e^{-kt}m = C$ ýa-da $m = Ce^{kt}$. Bakteriýalaryň $t = 0$ wagtdaky massasy $m_0$ bolsa, onda köpeliş kanuny $m = m_0e^{kt}$ görnüşi alar.

3. Ýönekeý elektrik zynjyryň düzümindäki ýüze çykýan elektrik yrgyldyny öwreneliň *(105-nji surat).*



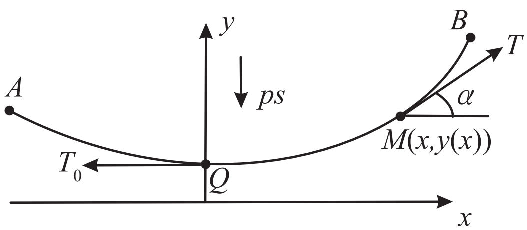
*105-nji surat*

Bellibir wagtda ($t = 0$) kondensatorda potensiallaryň tapawudy döredilýär we soňra hiç zat berilmeýär. Şeýle ýagdaýda düzümde elektrik yrgyldysy ýüze çykýar. Kondensatordaky $t$ wagtdaky potensiallaryň tapawudy $V(t)$, düzümdäki elektrik akymynyň güýji $I(t)$, $R$ – garşylyk, $L$ – induksiýa koeffisiýenti bolsun. Fizikadan belli bolşy ýaly, islendik wagtda $I \cdot R = -V - L\frac{dI}{dt}$, $I = C\frac{dV}{dt}$ deňlikler ýerlikli bolýarlar. Birinji deňlikde $I$-niň ýerine $I = C\frac{dV}{dt}$ bahasyny goýup alarys:

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = 0.$$

Bu ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemedir. Eger deňlemäni çözüp bilsek, ýagny onuň çözüwlerini tapyp bilsek, biz $V(t)$ potensialyň wagta görä üýtgeýiş kanunyny we $I = C\dfrac{dV}{dt}$ boýunça elektrik akymynyň üýtgeýiş kanunyny tapyp bileris. Biz aşakda bu hili differensial deňlemeleriň aňsat çözüliş usulyny getireris. Bu ýerde ony çözüp oturman, belli maglumatlary ýatlap geçeliň. Eger-de $(RC)^2 - 4LC < 0$ bolsa, onda $V(t)$ üçin $V(t) = e^{-ht}(A\cos wt + B\sin wt)$, $h > 0$ görnüşdäki üýtgeýiş kanunyny alarys. Eger-de $(RC)^2 - 4LC > 0$ bolsa, onda $V(t) = Ae^{-h_1 t} + Be^{-h_2 t}$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ kanuny alarys. Iki kanuna laýyklykda $V(t)$ wagtyň geçmegi bilen, nola ymtylýar. Emma bularyň birinjisine görä $V(t)$-niň amplitudasynyň nola ymtylýan garmoniki yrgyldy görnüşde üýtgeýändigini belläliň.

4. Zynjyr $A$ we $B$ nokatlardan asylan *(106-njy surat)*.




*106-njy surat*

Ol $A$ we $B$ nokatlardan geçýän haýsy hem bolsa bir egriniň görnüşini alar. Şol egriniň deňlemesini tapalyň. Goý, egriniň deňlemesi $y = y(x)$ bolsun. Egriniň iň aşaky nokadyny $Q$ bilen belgiläliň. Egriniň üstünde $M$ nokat alalyň we zynjyryň $QM$ bölegine täsir edýän güýçleri tapalyň. $QM$ duganyň uzynlygy $s$ bolsun, $MQ$ duga täsir edýän güýçleriň birinjisi agyrlyk güýjüdir. Eger zynjyryň bir santimetr uzynlygynyň agramy $p$ bolsa, onda $QM$ duga täsir edýän agyrlyk güýji $ps$ bolar we ol güýç $y$ okuna parallel aşaklygyna gönükdirilendir. Ikinji täsir edýän güýç $Q$ nokatdaky $T_0$ dartma güýjüdir. Ol $x$ okuna parallel güýçdür. Üçünji güýç $M$ nokatdaky $T$ dartma güýjüdir. Ol $M$ nokatda $y = y(x)$ egriniň galtaşýany boýunça gönükdirilendir. Zynjyr deňagramlylyk ýagdaýda bolany üçin, $QM$ duga täsir edýän güýçler hem deňagramlylykda bolmalydyr, ýagny olaryň $x$-ler okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi we $y$-ler okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmalydyr: $-T_0+T\cos\alpha=0, -ps+T\sin\alpha=0$ ýa-da $T_0=T\cos\alpha, ps=T\sin\alpha$.

Ikinji deňligi birinjä bolüp we $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$ bolýanyny nazarda tutup, alarys: $\frac{ps}{T_0}=y'(x)$. Deňligiň iki tarapyndan önüm alyp we $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'(x)^2}$ bolýandygyny nazarda tutup alarys: $\frac{p}{T_0}\sqrt{1+y'^2}=y''$. Bu bolsa ikinji tertipli çyzykly däl differensial deňlemedir. Oňa zynjyryň differensial deňlemesi hem diýilýär. Ol deňlemäni

$$\frac{p}{T_0}=\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ýa-da

$$\frac{p}{T_0}=\left[\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)\right]'$$

görnüşde ýazyp, kesgitsiz integralyň kesgitlemesine görä alarys:

$$\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)=\int\frac{p}{T_0}dx=\frac{p}{T_0}x+C.$$

$Q$ nokatda, ýagny $x=0$ bolanda $y'(0)=0$ bolýandygyny ýatlap alarys:

$$\ln\left(y'+\sqrt{1+y'^2}\right)=\frac{p}{T_0}x$$

ýa-da

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=e^{\frac{p}{T_0}x}.$$

Deňligiň iki tarapyny hem $y'-\sqrt{1+y'^2}$ aňlatma köpeldip alarys:

$$-1=e^{\frac{p}{T_0}x}\left(y'-\sqrt{1+y'^2}\right)$$

ýa-da

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=-e^{-\frac{p}{T_0}x}.$$

Bu ýerden $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{T_0}x}-e^{-\frac{p}{T_0}x}\right)$ bolýandygyny görmek kyn däldir. Ýene-de kesgitsiz integralyň kesgitlemesine görä alarys:

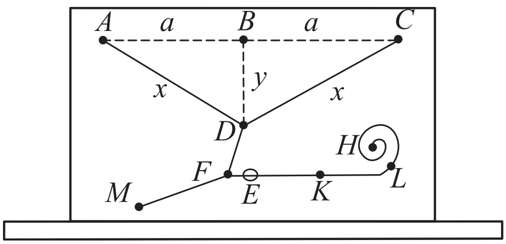
$$y(x) = \int \frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{T_0}x} - e^{-\frac{p}{T_0}x}\right)dx$$

ýa-da

$$y(x) = \frac{T_0}{2p}\left(e^{\frac{p}{T_0}x} + e^{-\frac{p}{T_0}x}\right) + C.$$

Eger $x$-ler okuny $Q$ nokadyň ordinatasy $T_0/p$ bolar ýaly edip alsak, onda $C = 0$ bolar we zynjyryň deňlemesi $y = \frac{T_0}{2p}\left(e^{-\frac{p}{T_0}x} + e^{\frac{p}{T_0}x}\right)$ görnüşde bolar.

5. Ýylylyga esaslanan ampermetriň işleýşini derňäliň *(107-nji surat)*.




*107-nji surat*

$C$ we $A$ nokatlarda berkidilen $ADC$ simden elektrik akymy goýberilýär. $M$ nokatda berkidilen $MFD$ sim ýokarky simi $D$ nokatda aşaklygyna çekýär. Ampermetriň elektrik akymynyň güýjüni görkeziji dili berkidilen $E$ çarhdan aşyrylan we maýyşgak $KLH$ towly sim bilen birleşdirilen $FK$ sim $F$ nokatda $DFM$ simi çekýär. Elektrik akymy $ADC$ simden geçende ol uzalýar, $D$ nokat aşaklygyna gidýär, $F$ nokat saga tarap süýşýär, çarh özüne berkidilen dil bilen bilelikde saga tarap aýlanýar, $KLH$ towly sim bolsa ýygrylýar. Elektrik akymy kiçelende hemme zat tersine bolýar. Ampermetriň takyklygy gowy bolar ýaly, $ADC$ simiň uzynlygy berlen ýagdaýynda, $A$ we $C$ nokatlary golaý goýan ýagşymy ýa-da tersine diýen sowala jogap berjek bolalyň. $y$ we $x$-iň arasyndaky baglanyşyk, suratdan görnüşi ýaly, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ formula bilen berilýär. Ondan önüm alsak, birinji tertipli $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ differensial deňleme alarys.

Goý, $AD$ sim $\Delta x$ uzanda $D$ nokat $\Delta y$ uzaklyga aşak süýşen bolsun. Adatça, $\Delta x$, $\Delta y$ ululyklar örän kiçi bolýarlar. Şoňa görä ýokardaky differensial deňlemede $dx$ ululygy $\Delta x$ ululyga, $dy$ ululygy $\Delta y$ ululyga çalşyp alarys: $\Delta y = \dfrac{x\Delta x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Ampermetriň takyklygy $\Delta y$-iň ululygyna bagly. Soňky deňlikden görnüşi ýaly, $x$-iň we $\Delta x$-iň şol bir bahalarynda $\Delta y$-iň ululygy $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ köpeldijä bagly. Ol köpeldiji bolsa $a$-nyň ulalmagy bilen ulalýar. Diýmek, ampermetriň takyk işlemegi üçin $a$ näçe uly bolsa şonça gowy. Şoňa görä-de $A$ we $C$ nokatlary $ADC$ sim berk çekilip durar ýaly edip ýerlesdirmeli. Ýylylyga esaslanýan ampermetrleriň gurluşlary hem edil şeýledir.

Ýokarda differensial deňlemeleriň dürli meseleleri çözmekde ulanylyşyna mysallar getirildi. Elbetde, beýle mysallaryň sanawy örän uly. Emma seredilen mysallardan hem görnüşi ýaly, differensial deňlemeleriň köp meseleleri çözmekde mümkinçiligi örän uludyr. Köp meseleleri differensial deňlemeler bilen modelirläp çözmegiň ykdysady bähbidiniň hem bardygyny belläp geçeliň.

## §1. Koşiniň meselesi we teoremasy

Ýokarda getirilen mysallardan görnüşi ýaly, köp ýagdaýlarda differensial deňlemäniň hemme çözüwleri gerek bolman, olaryň içinden bellibir şertleri kanagatlandyrýanlaryny saýlap almaly bolýar. Ine, şu meseleler köp deňlemeler üçin Koşiniň meselesine syrygýar. Koşiniň meselesiniň goýluşy deňlemäniň tertibine baglydyr.

**I. Birinji tertipli differensial deňleme üçin Koşiniň meselesi we teoremasy.**

Goý, deňleme $y' = f(x, y)$ görnüşde ýazylan bolsun.

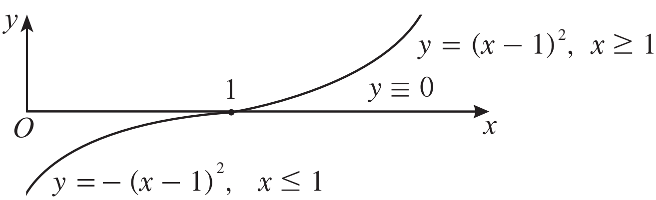
**Koşiniň meselesi.** $y' = f(x, y)$ deňlemäniň $y(x_0) = y_0$ şerti kanagatlandyrýan $y(x)$ çözüwini tapmaly.

$(x_0, y_0)$ sanlara Koşiniň başlangyç berlenleri, $y(x_0) = y_0$ şerte bolsa Koşiniň başlangyç şerti diýilýär. Bu ýerde köp sowallar ýüze çykýar. Olaryň birinjisi – berlen deňlemäniň çözüwleri barmyka diýen sowal, ikinjisi – deňlemäniň çözüwleri bar ýagdaýynda olaryň içinde Koşiniň başlangyç şertini kanagatlandyrýan çözüw barmyka diýen sowal, üçünjisi – şol şerti kanagatlandyrýan çözüwler bar ýagdaýynda, olaryň sany näçekä diýen sowal, dördünjisi – başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüw $x_0$ nokadyň haýsy etrabynda kesgitlenen diýen sowal. Agzalan sowallara jogap hökmünde Koşiniň teoremasyny getireliň.

**Koşiniň teoremasy.** Goý, $f(x, y)$ we $f'_y(x,y)$ funksiýalar $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz bolsunlar. Goý, seredilýän ýaýlanyň islendik nokadynda $|f(x,y)| \leq M$, $M$ – položitel san, deňsizlik ýerine ýetýän bolsun. Onda $y' = f(x, y)$ deňlemäniň $y(x_0) = y_0$ şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk çözüwi bardyr we ol $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min(M/b, a)$ kesimde kesgitlenendir.

Teoremanyň şertleriniň möhümdigini görkezýän iki mysala seredeliň.

1. $y' = 2\sqrt{|y|}$ deňlemäniň $y(1) = 0$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Bu ýerde $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$. Ol $M(1, 0)$ nokadyň islendik etrabynda üznüksiz, emma $f'_y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|y|}}$ funksiýa $M(1, 0)$ nokatda üzülýän funksiýadyr. Diýmek, Koşiniň teoremasynyň şertleri ýerine ýetmeýär. $y = (x - x_0)^2$ funksiýanyň $x - x_0 \geq 0$ bolanda berlen denlemäniň çözüwi boljakdygyny, $y = -(x - x_0)^2$ funksiýanyň $x - x_0 \leq 0$ bolanda şol deňlemäniň çözüwi bolýandygyny görmek kyn däldir. Bulardan başga, $y \equiv 0$ funksiýa hem çözüwdir. Şeýlelikde, $y' = 2\sqrt{|y|}$ deňlemäniň $y(1) = 0$ şerti kanagatlandyrýan iki çözüwi bar. Olar $y \equiv 0$; $y = (x - 1)^2$, $x \geq 1$, $y = -(x - 1)^2$, $x \leq 1$ *(108-nji surat).*




*108-nji surat*

2. $y' = \dfrac{1}{2y}$ deňlemäniň $y(2) = 0$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini

tapalyň. Bu ýerde $f(x,y)=\frac{1}{2y}$, $f'_y(x,y)=-\frac{1}{2y^2}$ funksiýalar $M(2, 0)$ nokatda üzülýärler. Koşiniň teoremasynyň şertleri ýerine ýetmeýär. $y=\sqrt{x-x_0}$, $x\geq x_0$ we $y=-\sqrt{x-x_0}$, $x\geq x_0$ funksiýalar çözüw bolýarlar. Diýmek, $y(2) = 0$ şerti kanagatlandyrýan iki çözüw bar. Olar $y=\sqrt{x-2}$, $x\geq 2$, $y=-\sqrt{x-2}$, $x\geq 2$.

Mysallardan görnüşi ýaly, olaryň ikisinde hem berlen şerti kanagatlandyrýan çözüwiň ýeke-täkligi bozulýandyr.

**II. Ikinji tertipli** $y''=f(x, y, y')$ deňleme üçin Koşiniň meselesi we teoremasy.

**Koşiniň meselesi.** $y''=f(x, y, y')$ deňlemäniň $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=\overline{y_0'}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

$(x_0, y_0, \overline{y_0'})$ sanlara Koşiniň başlangyç berlenleri, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0)=\overline{y_0'}$ şertlere Koşiniň başlangyç şertleri diýilýär. Bu ýerde hem edil birinji tertipli deňlemedäki ýaly sowallar ýüze çykýar. Beýle sowallara jogap hökmünde Koşiniň ikinji teoremasyny getireliň.

**Koşiniň teoremasy.** Goý, $f(x, y, z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ funksiýalar $|x-x_0|\leq a$, $|y-y_0|\leq b$, $|z-\overline{y_0'}|\leq c$ ýaýlada üznüksiz bolsunlar. Onda $y''=f(x, y, y')$ deňlemäniň $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=\overline{y_0'}$ şertleri kanagatlandyrýan we $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen ýeke-täk $y=y(x)$ çözüwi bardyr.

**III. Islendik *n* tertipli** $y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ görnüşde ýazylan differensial deňleme üçin Koşiniň meselesi we teoremasy.

**Koşiniň meselesi.** $y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ deňlemäniň $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0^1$, $y''(x_0)=y_0^2, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

$x_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}$ – sanlara Koşiniň başlangyç berlenleri, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0^1$, $y''(x_0)=y_0^2, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}$ şertlere Koşiniň başlangyç şertleri diýilýär.

**Koşiniň teoremasy**. $f(x, y, y_1, ..., y_{n-1})$, $f'_y(x,y,y_1,...,y_{n-1})$, $f'_{y_i}(x,y,y_1,...,y_{n-1})$, $i=\overline{1,n-1}$, funksiýalar $|x-x_0|\leq a$, $|y-y_0|\leq b$, $|y_i-y_0^i|\leq c_i$, $i=\overline{1,n-1}$, ýaýlada üznüksiz bolsunlar. Onda $y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ deňlemäniň Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan we $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen ýeke-täk $y=y(x)$ çözüwi bardyr.

Elbetde, soňky iki teoremanyň şertlerini çylşyrymlaşdyryp, biz edil birinji teoremadaky ýaly, $y = y(x)$ çözüwiň kesgitlenen ýaýlasyny takyklap bilerdik. Sadalyk üçin biz beýle çylşyrymlaşdyrma gitmedik.

**IV. Islendik *n* tertipli**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

çyzykly deňleme üçin Koşiniň meselesi we teoreması.

**Koşiniň meselesi.** $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ deňlemäniň $y'(x_0) = y_0^1,\ y''(x_0) = y_0^2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

**Koşiniň teoreması.** Goý, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ funksiýalar $(a, b)$ aralykda üznüksiz we $x_0 \in (a, b)$ bolsun. Onda $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x)$ deňlemäniň Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan we $(a, b)$ aralykda kesgitlenen ýeke-täk $y = y(x)$ çözüwi bardyr.

Görşümiz ýaly, $y = y(x)$ çözüwiň kesgitlenen ýaýlasy deňlemäniň koeffisiýentleriniň we azat agzanyň üznüksiz bolan $(a, b)$ aralygy bilen gabat gelýär. Hususy ýagdaýda, ýagny koeffisiýentler we azat agza bütin $x$-ler okunda üznüksiz bolsalar, onda $y = y(x)$ çözüw bütin $x$-ler okunda kesgitlenen bolar. Mysal üçin, $y''' + \sin xy'' + \cos xy' + (x + 1)y = x^3 + 3x^2$ deňlemäniň islendik çözüwi bütin $x$-ler okunda kesgitlenendir.

**Netije.** Biziň sereden differensial deňlemelerimiziň islendiginiň $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ çözüwleri Koşiniň teoremasynyň şertleriniň ýerine ýetýän ýaýlasyndaky haýsy hem bolsa bir $x_0$ nokatda

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0), ..., y_1^{(n-1)}(x_0) = y_2^{(n-1)}(x_0)$$

şertleri kanagatlandyrsalar, onda olar özleriniň kesgitlenen ýaýlalarynda (has takygy, ýaýlalaryň gabat gelýän böleklerinde) toždestwolaýyn gabat gelýändirler, ýagny $y_1(x) \equiv y_2(x)$ bolar. Bu ýagdaýdan, deňlemäniň umumy çözüwi belli bolup, onuň üsti bilen deňlemäniň Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan çözüwini tapanlarynda peýdalanýarlar.

Biz Koşiniň meselesini we teoremasyny gözlenýän funksiýanyň ýokary tertipli önümi tarapyndan çözülen deňlemeler üçin getirdik. Has çylşyrymly deňlemeler üçin Koşiniň meselesi we teoremasy baradaky maglumatlar gerek bolsa, differensial deňlemelere bagyşlanan ýörite edebiýatlara ýüzlenmegi teklip edýäris.

## §2. Umumy çözüw bar ýagdaýynda Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan çözüwi tapmak usuly

$y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ deňlemäniň $y=y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ umumy çözüwi belli diýeliň. Deňlemäniň $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{\,1}, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{\,n-1}$ Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan $y = y(x)$ çözüwini tapmak gerek bolsun. Umumy çözüwden berlen başlangyç şertleri kanagatlandyrmagy talap edip, ulgam düzýärler: $y(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0$, $y'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0^{\,1}$, ..., $y^{(n-1)}(x_0\; C_1, C_2, ..., C_n) = y_0^{\,n-1}$. Goý, $C_1 = C_1^{\,0}$, $C_2 = C_2^{\,0}$, ..., $C_n = C_n^{\,0}$ ulgamyň çözüwi bolsun. Umumy çözüwiň häsiýetlerine görä, $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ funksiýa berlen deňlemäniň çözüwi bolar we $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ sanlaryň tapylyşyna görä Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrar. Goý, $f(x, y, y_1, ..., y_{n-1})$ funksiýa $(y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1})$ nokadyň käbir etrabynda Koşiniň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýan bolsun. Onda, ýokarda getirilen netijä görä, $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ gözlenýän çözüw bolar.

**Mysal.** $y'' + y = 0$ deňlemäniň $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Deňlemäniň umumy çözüwiniň $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ görnüşde boljakdygyny biz soň subut ederis. Umumy çözüwden başlangyç şertleri kanagatlandyrmagy talap edip, ulgamy düzeliň:

$$C_1\cos\frac{\pi}{4} + C_2\sin\frac{\pi}{4} = 1,\quad -C_1\sin\frac{\pi}{4} + C_2\cos\frac{\pi}{4} = -1.$$

Ulgamy çözüp taparys: $C_1 = \sqrt{2},\ C_2 = 0$. $y'' + y = 0$ deňleme çyzykly deňleme. Onuň koeffisiýentleri bolsa bütin $x$-ler okunda üznüksiz funksiýalar. Diýmek, Koşiniň teoremasynyň şertleri $x$-iň we $y$-iň islendik bahalarynda ýerine ýetýändir. Şoňa görä $C_1 = \sqrt{2},\ C_2 = 0$ goýlup, umumy çözüwden alnan $y = \sqrt{2}\cos x$ funksiýa gözlenýän çözüwdir. Islendik differensial deňlemäniň umumy çözüwini tapmak aňsat däl. Käbir deňlemeler üçin umumy integraly tapmak meselesi çözülen. Şeýle deňlemelere kwadraturada integrirlenýän deňlemeler diýilýär. Biz aşakda olaryň käbirlerine serederis.

## §3. Üýtgeýänleri bölünýän deňlemeler

$y' = f(x)g(y)$ görnüşdäki differensial deňlemä üýtgeýänleri bölünýän deňleme diýilýär. Onuň umumy integraly şeýle tapylýar. Deňlemäni $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ ýa-da $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ görnüşde ýazyp, üýtgeýänleri bölünen deňlemä getirýärler. Soňra deňligiň iki tarapynda integral belgisini goýup, $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ görnüşde differensial deňlemäniň umumy integralyny tapýarlar.

**Mysal.** $y' = (1 + y^2)(1 + x^2)$ deňlemäniň umumy integralyny tapalyň. Deňlemede üýtgeýänleri böleliň: $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)(1 + x^2)$ ýa-da $\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2)dx$.

Indi umumy integraly $\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x^2)dx$ görnüşde ýazýarys. Integrallar aňsatlyk bilen hasaplanýarlar: $\mathrm{arctg}\, y = x + \frac{x^3}{3} + C$. Bu biziň deňlemämiziň umumy integralydyr. Ony $y$-e görä çözüp, umumy çözüwi tapýarys: $y = tg\left(x + \frac{x^3}{3} + C\right)$.

**Bellik.** Umumy integralyň $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ görnüşinde integrallaryň birini ýa-da ikisini hem ýönekeý funksiýalarda aňladyp bolmaýan wagtlary bolýar, integrallar ýönekeý funksiýalarda aňladylan ýagdaýynda hem ony $y$-e görä çözüp, umumy çözüwi tapyp bolmazlygy mümkin.

## §4. Birinji tertipli birjynsly deňlemeler

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ görnüşdäki deňlemä birinji tertipli birjynsly deňleme diýilýär. Ony çözmek üçin $y = xu$ çalşyrma girizýärler. $y = xu$, $y' = u + xu'$ bahalary deňlemede goýup alarys: $u + xu' = f(u)$ ýa-da $u' = [f(u) - u]\frac{1}{x}$.

Bu üýtgeýänleri bölünýän deňlemedir we ol ýokarda görkezilişi ýaly çözülýändir. Alnan çözüwde $u$-nyň ýerine $u = y/x$ bahasyny goýup, gözlenýän umumy integraly taparys.

**Mysal.** $y' = \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x}$ deňlemäni çözmeli. Ol birjynsly bolany üçin $y = xu$ çalşyrma girizip alarys: $u + xu' = u + \cos^2 u$ ýa-da $u' = \frac{1}{x}\cos^2 u$.

Üýtgeýänleri bölüp we integrirläp alarys: $\int\frac{du}{\cos^2 u} = \int\frac{dx}{x}$ ýa-da $\mathrm{tg}u = \ln x + C$. $u$-nyň ýerine $u = y/x$ bahasyny goýup, $tg\frac{y}{x} = \ln x + C$ umumy integraly taparys. Ony $y$-e görä çözüp, $y = x\ \mathrm{arctg}(\ln x + C)$ umumy çözüwi hem tapsa bolar.

## §5. Birinji tertipli çyzykly deňlemeler

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Bu deňlemäniň umumy çözüwini tapmagyň bir usuly şeýle. Deňlemäniň iki tarapyny-da $e^{\int P(x)dx}$ funksiýa köpeldip, ony $\left(ye^{\int P(x)dx}\right)' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ görnüşde ýazýarys. Kesgitsiz integralyň kesgitlemesini ulanyp alarys:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

ýa-da

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right].$$

Soňky deňlik deňlemäniň umumy çözüwini kesgitleýär.

**1-nji mysal.** $y' + x^2y = (x+5)e^{-\frac{x^3}{3}}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Deňlemäniň iki tarapyny hem $e^{\int x^2dx} = e^{\frac{x^3}{3}}$ funksiýa köpeldip,

$$(e^{x^3/3}y)' = x + 5$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$e^{x^3/3}y = \int (x+5)dx + C$$

ýa-da

$$y = e^{-\frac{x^3}{3}}\left(\frac{x^2}{2} + 5x + C\right)$$

umumy çözüwi taparys.

**1-nji bellik.** $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 1$, görnüşdäki deňlemä Bernulliniň deňlemesi diýilýär. Deňlemede $y^{1-\alpha} = u$ çalşyrma girizilse, ol $u$ boýunça birinji tertipli çyzykly deňlemä getiriler.

**2-nji mysal.** Bernulliniň $y' + 2xy = 2x^3y^3$ deňlemesini çözeliň. $y^{1-\alpha} = u$ çalşyrma girizeliň. Bu ýerde $\alpha = 3$. Şoňa görä, $u = y^{-2}$ çalşyrmany alarys.

$$u' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3}(2x^3y^3 - 2xy) = -4x^3 + 4xy^{-2}$$

bolany sebäpli, $u$ üçin $u' = 4xu - 4x^3$ deňleme alarys. Onuň iki tarapyny hem $e^{-2x^2}$ funksiýa köpeldip alarys: $\left(e^{-2x^2}u\right)' = -4x^3e^{-2x^2}$ ýa-da

$$e^{-2x^2}u = \int (-4)x^3e^{-2x^2}dx + C = x^2e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2} + C,$$

ýa-da $u = x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}$. $u = y^{-2}$ bolanlygy sebäpli, Bernulliniň deňlemesiniň $y = 1\Big/\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + Ce^{2x^2}}$ umumy çözüwini taparys.

**2-nji bellik.** $f(x, y', y'') = 0$ görnüşdäki ikinji tertipli deňlemede $y' = P(x)$ çalşyrma girizsek we $y'' = \frac{dP}{dx}$ bolýandygyny göz öňünde tutsak, ol $f\left(x, P, \frac{dP}{dx}\right) = 0$ görnüşdäki birinji tertipli deňlemä getiriler. Eger $P = P(x, C_1)$ soňky deňlemäniň umumy çözüwi bolsa, $P = y'$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $y$-e görä $y' = P(x, C_1)$ deňleme alarys. Onuň umumy çözüwiniň $y = \int P(x, C_1)dx + C_2$ boljakdygy aýdyňdyr.

**3-nji mysal.** $x^3y'' + x^2y' = 1$ deňlemäni çözmeli. $y' = P$ çalşyrma girizip, $y'' = \frac{dP}{dx}$ bolany üçin,

$$x^3\frac{dP}{dx}+x^2P=1 \quad \text{ýa-da} \quad P'+\frac{1}{x}P=\frac{1}{x^3}$$

çyzykly deňlemä geleris. Onuň iki tarapyny hem $x$ funksiýa köpeldip, $(Px)'=x^{-2}$ ýazyp bileris. Bu ýerden alarys:

$$Px=\int x^{-2}dx+C_1=-\frac{1}{x}+C_1 \text{ ýa-da } P=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}.$$

$P=y'$ bahasyny goýup, $y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{C_1}{x}$ deňlemä geleris. Onuň umumy çözüwiniň $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$ boljakdygy aýdyňdyr.

**3-nji bellik.** $f(y, y', y'')=0$ görnüşdäki ikinji tertipli deňlemede $y'=P(y)$ çalşyrma girizsek we $y''=\frac{dP}{dy}P$ bolýandygyny nazarda tutsak, $f\left(y,P,P\frac{dP}{dy}\right)=0$ görnüşdäki birinji tertipli deňleme alarys. Eger $P=P(y, C_1)$ soňky deňlemäniň umumy çözüwi bolsa, $P=y'$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $y$-e görä $y'=P(y, C_1)$ deňleme alarys. Onuň umumy integralynyň $\int\frac{dy}{P(y,C_1)}=x+C_2$ boljakdygy düşnüklidir.

**4-nji mysal.** $3yy''+y'^2=0$ deňlemäni çözeliň. $y'=P(y)$ çalşyrma girizeliň. $y''=\frac{dP}{dy}P$ bolany üçin, $3yP\frac{dP}{dy}+P^2=0$ deňlemä geleris. Bu ýerden iki deňleme alarys: $P=0$ we $\frac{dP}{dy}+\frac{P}{3y}=0$. Olaryň birinjisinde $P=y'$ goýup we çözüp $y\equiv C$ çözüwleri taparys. Ikinji deňlemede üýtgeýänleri bölüp alarys: $\frac{dP}{P}+\frac{dy}{3y}=0$. Bu ýerden integrirläp taparys: $\ln P+\frac{1}{3}\ln y+\frac{1}{3}\ln C_1=0$ ýa-da $P^3=\frac{1}{C_1y}$. $P=y'$ bolýandygyny ýatlap, $(y')^3=\frac{1}{C_1y}$ deňlemä geleris. Ol üýtgeýänleri bölünýän deňlemedir. Ony çözüp, $y^{4/3}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{C_1}}+C_2$ umumy integraly taparys.

## §6. Çyzykly differensial deňlemeler nazaryýeti

Çyzykly deňlemeler differensial deňlemeler nazaryýetinde has çuňňur we giňden öwrenilen ugurlaryň biridir. Onuň birnäçe sebäpleri bolup, esasylary aşakdakylardan durýandyr.

Birinjiden, çyzykly deňlemeleriň umumy çözüwleriniň ýönekeý görnüşde bolmagydyr. Ikinjiden, çyzykly deňlemeleriň çözüwlerini öwrenmek üçin matematikanyň köp usullarynyň ulanmaga amatlydygydyr. Üçünjiden, durmuşda ýüze çykýan köp meseleler matematiki usullar bilen derňelende ýüze çykýan deňlemeleriň çyzykly deňlemeler bolmagy ýa-da biraz üýtgedilende çyzykly deňlemelere gelmegidir. Dördünjiden, tebigy ylymlarda ulgamlar öwrenilende olaryň iň gerek häsiýetleriniň biri olaryň durnukly bolmagydyr. Ulgamyň durnuklylygy matematiki usullar bilen öwrenilende esasy gurallaryň biri ýene-de çyzykly differensial deňlemelerdir.

Sanawy ýene-de dowam etdirse bolardy. Emma getirilen delilleriň hem çyzykly deňlemeleriň ähmiýetiniň uludygyny görkezýänligi düşnüklidir.

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0 \qquad (A)$$

deňlemä $n$-nji tertipli, çyzykly, birjynsly differensial deňleme diýilýär. Biz deňlemäniň koeffisiýentlerini öwrenilýän ýaýlada üznüksiz hasap etjekdiris. Şoňa görä şol ýaýla degişli islendik $x_0$ üçin $(A)$ deňlemäniň Koşiniň başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan we bütin ýaýlada kesgitlenen ýeke-täk çözüwi bardyr. Goý, $y_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, $k \geq 2$ islendik bitin san, $(A)$ deňlemäniň dürli çözüwleri bolsunlar.

**Kesgitleme.** Eger käbir, hemmesi birden nola deň bolmadyk, $C_1$, $C_2$, ..., $C_k$ hemişelikler üçin, bütin ýaýlada $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x) \equiv 0$ toždestwo ýerine ýetse, onda $y_1$, $y_2$, ..., $y_k$ çözüwlere çyzykly baglanyşykly çözüwler diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x) \equiv 0$ toždestwo diňe $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, ..., $C_k = 0$ bolanda ýerine ýetýän bolsa, onda $y_1$, $y_2$, ..., $y_k$ çözüwlere çyzykly baglanyşyksyz çözüwler diýilýär.

Mysal üçin, $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ funksiýalar islendik ýaýlada çyzykly baglanyşykly funksiýalardyr. Olar üçin $C_1 \sin^2 x + C_2 \cos^2 x + C_3 \cdot 1 \equiv 0$ toždestwo $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$ bolanda ýerine ýetýändir. Tersine, $y_0 = 1$, $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, ..., $y_k = x^k$ funksiýalar islendik kesimde çyzykly baglanyşykly däl funksiýalardyr. Diýmek, islendik kesimde $C_0 \cdot 1 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_k x^k \equiv 0$ toždestwo diňe $C_0 = C_1 = ... = C_k = 0$ bolanda ýerine ýeter (subut ediň).

Goý, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ $(A)$ deňlemäniň çözüwleri bolsun.

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ . & . & . & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjä Wronskiniň kesgitleýjisi diýilýär. $y_1$, $y_2$, ... $y_n$ çözüwleriň köp häsiýetleri şu kesgitleýji bilen baglanyşyklydyr. Beýle häsiýetlere geçmezden öň $(A)$ deňlemäniň çözüwleriniň iki sany örän möhüm häsiýetine seredeliň.

**1-nji häsiýet.** Eger $y(x)$ $(A)$ deňlemäniň çözüwi bolsa, onda islendik $C$ hemişelik üçin $Cy(x)$ hem $(A)$ deňlemäniň çözüwidir.

Dogrudan hem, $y(x)$ çözüw bolany sebäpli,

$$[y(x)]^{(n)} + P_1[y(x)]^{(n-1)} + ... + P_n[y(x)] \equiv 0$$

toždestwo ýerine ýeter. Onuň iki tarapyny hem $C$ sana köpeldip we önümiň häsiýetini ulanyp alarys:

$$[Cy(x)]^{(n)} + P_1[Cy(x)]^{(n-1)} + ... + P_n[Cy(x)] \equiv 0.$$

Bu bolsa $Cy(x)$ $(A)$ deňlemäniň çözüwi diýmekdir.

**2-nji häsiýet.** Eger $y_1(x)$ we $y_2(x)$ $(A)$ deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda islendik $C_1$ we $C_2$ hemişelikler üçin $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ funksiýa hem çözüwdir.

Dogrudan hem, $y_1(x)$, $y_2(x)$ çözüw bolanlary üçin, birinji häsiýete görä, $C_1 y_1(x)$ we $C_2 y_2(x)$ hem çözüw bolar. Ýagny

$$[C_1 y_1(x)]^{(n)} + P_1[C_1 y_1(x)]^{(n-1)} + ... + P_n[C_1 y_1(x)] \equiv 0,$$

$$[C_2 y_2(x)]^{(n)} + P_1[C_2 y_2(x)]^{(n-1)} + ... + P_n[C_2 y_2(x)] \equiv 0$$

toždestwolar ýerliklidir. Olary agzama-agza goşup we önümiň häsiýetini ulanyp alarys:

$$[C_1 y_1 + C_2 y_2]^{(n)} + P_1[C_1 y_1 + C_2 y_2]^{(n-1)} + ... + P_n[C_1 y_1 + C_2 y_2] \equiv 0.$$

Bu bolsa $C_1 y_1 + C_2 y_2$ çözüw diýmekdir. Getirilen iki häsiýetden şeýle netije çykarsa bolar.

**1-nji netije.** Eger $y_1, y_2, ..., y_k$, $k$ islendik položitel bitin san, çözüwler bolsa, $C_1, C_2, ..., C_k$ – hemişelikler bolsa, onda olaryň çyzykly kombinasiýasy $C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_k y_k$ hem çözüwdir.

Indi çözüwleriň Wronskiniň kesgitleýjisi bilen baglanyşykly häsiýetlerine geçeliň. Goý, $y_1, y_2, ..., y_n$ $(A)$ deňlemäniň islendik çözüwleri, $x$, $x_0$ nokatlar garalýan ýaýla degişli bolsun. Onda Luiwilliň adyny göterýän

$$W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx}$$

deňlik dogrudyr. Bu ýerden üçünji häsiýet gelip çykýar.

**3-nji häsiýet.** Wronskiniň kesgitleýjisi ýa toždestwolaýyn nola deňdir, ýa-da garalýan ýaýlada hiç ýerde nola deň däldir.

Subudy ýokarky formulanyň netijesidir.

**4-nji häsiýet.** Eger $y_1, y_2, ..., y_n$ çözüwler çyzykly baglanyşykly bolsa, onda olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi toždestwolaýyn nola deňdir. Düşnükli bolar ýaly, häsiýeti deňlemäniň tertibi $n = 2$ bolanda subut edeliň.

Goý, $y_1$ we $y_2$ çözüwler çyzykly baglanyşykly bolsun. Onda ikisi birden nola deň bolmadyk $C_1$, $C_2$ san üçin $C_1 y_1 + C_2 y_2 \equiv 0$ toždestwo ýerine ýeter. Toždestwonyň iki tarapyndan hem önüm alsak, $C_1 y'_1 + C_2 y'_2 \equiv 0$ toždestwo alarys. Iki toždestwoda hem $x$-iň ýerine $x_0$ baha goýup, aşakdaky ulgama geleris: $C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0$, $C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) = 0$. Ulgamyň kesgitleýjisi

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

garalýan $y_1(x)$, $y_2(x)$ çözüwlerden düzülen

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Wronskiniň kesgitleýjisiniň $x_0$ nokatdaky bahasydyr, ýagny

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

$W(x_0)$ hökmany nola deňdir. Sebäbi ol nola deň bolmasa, onda ulgamyň diňe bir $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ çözüwi bolardy. Bu bolsa $C_1$, $C_2$ sanlaryň iň bolmanda biri nola deň däl diýen teklibimize garşy gelerdi. Diýmek, $W(x_0) = 0$. Onda, üçünji häsiýete görä, $W(x) \equiv 0$. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**5-nji häsiýet.** Eger $y_1, y_2, ..., y_n$ çözüwler çyzykly baglanyşykly däl bolsa, onda olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi hiç nokatda nola öwrülýän däldir.

Ýene-de $n = 2$ bolandaky ýagdaýa seredeliň. Goý, $y_1, y_2$ çyzykly baglanyşykly däl çözüwler,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi bolsun. Goý, $W(x) \equiv 0$ bolsun. Ýagny

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ ýa-da } y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0, \text{ ýa-da } \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' \equiv 0, \text{ ýa-da}$$

$\dfrac{y_1}{y_2} \equiv C$ ($C$ – hemişelik san). Bu ýerden alarys: $y_1 - Cy_2 \equiv 0$.

Ýagny $y_1$ we $y_2$ çözüwler çyzykly baglanyşykly bolýar. Bu bolsa $y_1$ we $y_2$ çyzykly baglanyşykly däl çözüwler diýen teklibimize garşy gelýär. Diýmek, $W(x)$ hiç ýerde nola deň däldir. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**2-nji netije.** Eger $y_1, y_2, ..., y_n$ çözüwlerden düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi nola deň bolsa, onda olar çyzykly baglanyşykly çözüwler bolar. Eger Wronskiniň kesgitleýjisi nola deň bolmasa, onda çyzykly baglanyşykly däl çözüwler bolar.

**6-njy häsiýet** (esasy häsiýet). Eger $y_1, y_2, ..., y_n$ çözüwler çyzykly baglanyşyksyz bolsa, $C_1, C_2, ... C_n$ erkin hemişelikler bolsa, onda

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \qquad (B)$$

funksiýa ($A$) deňlemäniň umumy çözüwi bolar.

**Subudy.** ($B$) funksiýanyň ($A$) deňlemäniň çözüwi boljagy 1-nji netijeden gelip çykýar. Goý, $y_0(x)$ ($A$) deňlemäniň islendik bir çözüwi bolsun. ($B$) deňlik bilen kesgitlenen $y$ funksiýanyň $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ hemişelikleriň käbir bahalarynda $y_0(x)$ çözüwe öwrülýändigini subut edeliň.

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0'(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

ulgama seredeliň. Onuň kesgitleýjisi bolup $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ funksiýalardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisiniň $x_0$ nokatdaky bahasy hyzmat edýär. Ikinji netijä görä ol nola deň däl. Diýmek, ulgamyň $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$ ýeke-täk çözüwi bar. Hemişelikleriň tapylan bahalaryny ($B$) funksiýada ýerine goýup, $\tilde{y} = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + ... + C_n^0 y_n$ täze bir çözüw alarys. Ulgamdan görnüşi ýaly, $\tilde{y}(x)$ we $y_0(x)$ çözüwler $x_0$ nokatda Koşiniň şol bir başlangyç şertlerini kanagatlandyrýarlar. Çyzykly deňlemeleriň koeffisiýentleri üznüksiz bolanda, onuň üçin Koşiniň teoremasy ýerlikli bolýar. Şol sebäpli hem hökmany suratda $\tilde{y}(x) \equiv y_0(x)$ ýa-da $y_0(x) \equiv C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + ... + C_n^0 y_n$ toždestwo ýerine ýeter. Diýmek, ($B$) funksiýa umumy çözüw bolmagyň iki şertini hem kanagatlandyrýar. Şuny hem subut etmek gerekdi.

**Mysal.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ funksiýalaryň çözüw boljaklaryny gös-göni deňlemä goýmak bilen aňsat barlap bolýar. Olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6x}$$

nola deň däl. Diýmek, olar çyzykly baglanyşykly däl çözüwler. Onda 6-njy häsiýete görä, $u = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ umumy çözüw bolar.

## §7. Birjynsly däl çyzykly deňlemeleriň umumy çözüwini tapmak

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x) \qquad (C)$$

görnüşdäki deňlemä birjynsly däl, $n$-nji tertipli çyzykly deňleme diýilýär. Goý, $\tilde{y}(x)$ deňlemäniň belli çözüwi, $y(x)$ – başga bir çözüwi bolsun we $y(x) - \tilde{y}(x) = u$ bilen belgiläliň, onda $u$ funksiýanyň ($A$) deňlemäniň çözüwi boljakdygyny görmek kyn däl. Diýmek, ($C$) deňlemäniň islendik iki çözüwiniň tapawudy ($A$) deňlemäniň çözüwi bolýar we tersine, $u$ ($A$) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda $y = \tilde{y}(x) + u$ funksiýa ($C$) deňlemäniň çözüwi bolýar. Eger indi, $u$ funksiýa ($A$) deňlemäniň umumy çözüwi diýsek, onda ($C$) deňlemäniň islendik çözüwi $y = \tilde{y}(x) + u$ formuladan tapylar, ýagny $y = \tilde{y} + u$ funksiýa ($C$) deňlemäniň umumy çözüwi bolar.

**Mysal.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Ilki bilen $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ birjynsly deňlemäniň umumy çözüwini tapýarys. Bu mesele ýokarda çözüldi. Biz $u = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ funksiýanyň birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi bolýandygyny görüpdik. $\tilde{y}(x) = -2$ funksiýa berlen deňlemäniň hususy çözüwi bolýar. Diýmek, $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - 2$ funksiýa gözlenýän umumy çözüwdir. Görşümiz ýaly, birjynsly ($A$) deňlemäniň ($B$) umumy çözüwi bar ýagdaýynda, ($C$) deňlemäniň umumy çözüwini tapmak meselesi onuň haýsy-da bolsa bir çözüwini tapmak meselesine syrygýar. ($A$) deňlemäniň umumy çözüwi belli bolsa, gözlenýän hususy çözüwi Lagranžyň kesgitlenmedik koeffisiýentler usuly bilen tapyp bolýar. Ol usul şundan ybarat:

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

($A$) deňlemäniň umumy çözüwi bolsa, onda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şol deňlemäniň çyzykly baglanyşyksyz çözüwleri bolýar. Şol sebäpli $y_1$, ..., $y_n$ çözüwlerden düzülen Wronskiniň $W(x)$ kesgitleýjisi hiç ýerde nola öwrülýän däldir. Lagranž ($C$) deňlemäniň $\tilde{y}(x)$ hususy çözüwini $\tilde{y}(x) = A_1(x)y_1 + A_2(x)y_2 + \ldots + A_n(x)y_n$ görnüşde gözlemegi teklip edýär. Bu ýerde $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_n(x)$ – kesgitlenmedik koeffisiýentlerdir. Biz olary $\tilde{y}(x)$ ($C$) deňlemäniň çözüwi bolar ýaly edip kesgitlemelidiris. Onuň üçin $\tilde{y}(x)$ funksiýanyň $1, 2, \ldots, n-1, n$ tertipli önümlerini tapýarlar we deňlemä goýup, toždestwo bolmagyny talap edýärler. Bu $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ koeffisiýentleri tapmak üçin bir deňleme berýär. Galan ($n$ – 1) deňlemäni özümiz saýlap alýarys. $\tilde{y}(x)$ funksiýanyň birinji önümini tapýarys:

$$\tilde{y}' = A_1 y_1' + A_2 y_2' + \ldots + A_n y_n' + A_1' y_1 + A_2' y_2 + \ldots + A_n' y_n.$$

Saýlanýan deňlemeleriň birinjisi hökmünde

$$A_1' y_1 + A_2' y_2 + \ldots + A_n' y_n = 0 \qquad (S_1)$$

deňleme alynýar. Bu ýagdaýda alarys:

$$\tilde{y}' = A_1 y_1' + A_2 y_2' + \ldots + A_n y_n'.$$

Indi ikinji önümi tapýarys:

$$\tilde{y}_n'' = A_1 y_1'' + A_2 y_2'' + \ldots + A_n y_n'' + A_1' y_1' + A_2' y_2' + \ldots + A_n' y_n'.$$

Saýlanýan deňlemeleriň ikinjisi hökmünde

$$A_1' y_1' + A_2' y_2' + \ldots + A_n' y_n' = 0 \qquad (S_2)$$

deňleme alynýar we ş.m. Islendik $2 < i \le n-1$ üçin

$$\tilde{y}^{(i)} = A_1 y_1^{(i)} + A_2 y_2^{(i)} + \ldots + A_n y_n^{(i)},$$

$$A_1' y_1^{(i-1)} + A_2' y_2^{(i-1)} + \ldots + A_n' y_n^{(i-1)} = 0 \qquad (S_i)$$

deňlemeleri alarys. Saýlanan deňlemeleriň sany $(n - 1)$-e deňdir. Indi $\tilde{y}^{(n)}(x)$ önümi tapýarys, $\tilde{y}(x)$ funksiýany we onuň önümlerini $(C)$ deňlemä goýýarys hem-de toždestwo bolmagyny talap edýäris. Alarys:

$$A_1(y_1^{(n)} + P_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + P_n y_1) + A_2(y_2^{(n)} + P_1 y_2^{(n-1)} +$$
$$+ \ldots + P_n y_2) + \ldots + A_n(y_n^{(n)} + P_1 y_n^{(n-1)} + \ldots + P_n y_n) +$$
$$+ A_1' y_1^{(n-1)} + A_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + A_n' y_n^{(n-1)} \equiv f(x).$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiýalaryň $(A)$ deňlemäniň çözüwleri bolanlygy sebäpli, ýaýlaryň içindäki aňlatmalar toždestwolaýyn nola deňdirler. Diýmek, soňky toždestwo

$$A_1' y_1^{(n-1)} + A_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + A_n' y_n^{(n-1)} \equiv f(x) \qquad (S_n)$$

görnüşe geler. Indi $(S_1)$, $(S_2)$, ..., $(S_n)$ deňlemeleri ulgam görnüşinde ýazalyň:

$$\begin{cases} A_1' y_1 + A_2' y_2 + \ldots + A_n' y_n = 0, \\ A_1' y_1' + A_2' y_2' + \ldots + A_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1' y_1^{(n-2)} + A_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + A_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ A_1' y_1^{(n-1)} + A_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + A_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (S)$$

$(S)$ ulgamyň kesgitleýjisi bolup, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiýalardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi hyzmat edýär. Ol hiç ýerde nola deň däldir. Şoňa görä $(S)$ ulgamyň ýeke-täk

$$A_1' = \varphi_1(x),\ A_2' = \varphi_2(x),\ \ldots, A_n' = \varphi_n(x)$$

çözüwi bardyr. Integrirläp tapýarys:

$$A_1 = \int \varphi_1(x)dx,\ A_2 = \int \varphi_2(x)dx,\ \ldots, A_n = \int \varphi_n(x)dx.$$

(Bu ýerde $\int \varphi_i(x)dx,\ i = \overline{1,n},$ integralyň diňe bir kesgitli bahasy). Kesgitlenen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ koeffisiýentleri $\tilde{y}(x)$ funksiýa üçin bolan

$$\tilde{y} = A_1 y_1 + ... + A_n y_n$$

aňlatmada ýerine goýsak,

$$\tilde{y} = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + ... + y_n \int \varphi_n(x)dx$$

görnüşde ($C$) deňlemäniň gözlenýän bir çözüwini taparys. Diýmek, ($C$) deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky görnüşde tapylar:

$$y = u + \tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n +$$

$$+ y_1 \int \varphi_1(x)dx + .... + y_n \int \varphi_n(x)dx.$$

**Mysal.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12$ deňlemäniň umumy çözüwini Lagranžyň usuly bilen tapalyň. $u = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ birjynsly $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwi. Şoňa görä $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ çyzykly baglanyşyksyz çözüwler. $\tilde{y}$ çözüwi $\tilde{y} = A_1e^x + A_2e^{2x} + A_3e^{3x}$ görnüşde gözleýäris. ($S$) ulgamy düzeliň:

$$\begin{cases} A_1'e^x + A_2'e^{2x} + A_3'e^{3x} = 0, \\ A_1'e^x + A_2'2e^{2x} + A_3'3e^{3x} = 0, \\ A_1'e^x + A_2'4e^{2x} + A_3'9e^{3x} = 12. \end{cases}$$

Ulgamy çözüp taparys:

$$A_1' = \frac{6}{e^x},\ A_2' = -\frac{12}{e^{2x}},\ A_3' = \frac{6}{e^{3x}};$$

$$A_1 = -\frac{6}{e^x},\ A_2 = \frac{6}{e^{2x}},\ A_3 = -\frac{2}{e^{3x}}.$$

$A_1$, $A_2$, $A_3$ koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny $\tilde{y}$ çözüw üçin aňlatmada goýup alarys:

$$\tilde{y} = -\frac{6}{e^x}e^x + \frac{6}{e^{2x}}e^{2x} - \frac{2}{e^{3x}}e^{3x} = -2.$$

Diýmek, $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - 2$ berlen deňlemäniň umumy çözüwi bolar.

**Bellik.** Biz $A_1$, $A_2$, $A_3$ funksiýalary $\int \frac{6}{e^x}dx, \int \frac{-12}{e^{2x}}dx, \int \frac{6}{e^{3x}}dx$ integrallaryň bellibir bahalary hökmünde aldyk. Bilşimiz ýaly, kesgitsiz integralyň tükeniksiz köp bahalary bar. Şol sebäpli, $A_1$, $A_2$, $A_3$ koeffisiýentler hökmünde

$$A_1 = -\frac{6}{e^x} + C_1^0, \ A_2 = \frac{6}{e^{2x}} + C_2^0, \ A_3 = -\frac{2}{e^{3x}} + C_3^0$$

alsa bolar. Bu ýerde $C_1^0, C_2^0, C_3^0$ – islendik hemişelikler. Bu ýagdaýda hem gözlenýän $y(x)$ çözüw $y(x) = -2 + C_1^0 e^x + C_2^0 e^{2x} + C_3^0 e^{3x}$ görnüşde bolar.

Şeýlelikde, ($A$) deňlemäniň umumy çözüwi bar bolan halda ($C$) deňlemäniň hem umumy çözüwini tapyp bolýar. Diýmek, çyzykly deňlemeleri çözmek meselesi ($A$) – birjynsly deňlemäniň umumy çözüwini tapmak meselesine syrygýar.

Bu soňky mesele örän kyn meseledir. Eýýäm $y'' + P(x)y = 0$ görnüşdäki ýönekeýje deňlemeleriň çözüwini $P$-niň köp bahalarynda elementar funksiýalaryň integrallarynyň üsti bilen aňlatmak başartmaýar. Şeýle-de bolsa käbir görnüşdäki deňlemeler üçin umumy çözüwi tapmak başardýan hallary hem bar. Aşakda şeýle deňlemeleriň bir görnüşine serederis.

## §8. Hemişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly differensial deňlemeler

Beýan etmegiň sada bolmagy üçin başda

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

görnüşdäki ikinji tertipli, hemişelik koeffisiýentli deňlemä seredeliň. Bu ýerde $a_0$, $a_1$, $a_2$ – hemişelik sanlar. Eýleriň teklibi boýunça onuň çözüwini $e^{kx}$ görnüşde gözleýärler. Onuň özüni we $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ önümlerini deňlemede ýerine goýup we toždestwo bolmagyny talap edip alarys:

$$a_0 k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} \equiv 0 \text{ ýa-da } (a_0 k^2 + a_1 k + a_2) e^{kx} \equiv 0.$$

Diýmek, soňky toždestwonyň ýerine ýetmegi üçin ýaýyň içindäki aňlatma nola deň bolmalydyr, ýagny

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0 \qquad (H)$$

bolmaly. Soňky deňlemä berlen deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär. Şeýlelikde, $y = e^{kx}$ funksiýanyň çözüw bolmagy üçin $k$ sanyň häsiýetlendiriji deňlemäniň köki bolmagy ýeterlikdir. Bolup biljek ýagdaýlara seredeliň.

**I.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň $k_1$ we $k_2$ kökleri hakyky we dürli. $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$ funksiýalar çözüwler, özleri hem çyzykly baglanyşyksyz. Ony barlamak üçin ol iki funksiýadan Wronskiniň kesgitleýjisini düzmek we onuň noldan üýtgeşikdigini görmek ýeterlikdir. Alarys:

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0.$$

Diýmek, $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$ çyzykly baglanyşyksyz bolýarlar we ($A$) görnüşli deňlemeleriň 6-njy häsiýetine görä, $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ onuň umumy çözüwi bolýar.

**II.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $k_1 = k_2$ – deň we hakyky. $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}$ funksiýalar çözüw bolýarlar. Olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ k_1e^{k_1x} & e^{k_1x} + xk_1e^{k_1x} \end{vmatrix} = e^{2k_1x} \neq 0.$$

Diýmek, $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = xe^{k_1x}$ çözüwler çyzykly baglanyşyksyz bolýarlar we şoňa görä $y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$ umumy çözüw bolar.

**III.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$, kompleks sanlar.

$$\tilde{y}_1 = e^{k_1x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$\tilde{y}_2 = e^{k_2x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

çözüw bolýarlar. Birjynsly deňlemeleriň 1-nji we 2-nji häsiýetlerinden çykýan 1-nji netijä görä

$$y_1 = \frac{1}{2}\tilde{y}_1 + \frac{1}{2}\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}\tilde{y}_1 - \frac{1}{2i}\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

çözüwlerdir. Olardan düzülen Wronskiniň kesgitleýjisi

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Şol sebäpli $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ umumy çözüw bolar. Biz ikinji tertipli, hemişelik koeffisiýentli, birjynsly, çyzykly deňlemäniň umumy çözüwini tapmagy başardyk. Diýmek, Lagranžyň usulyny ulanyp, islendik $f(x)$ üçin $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ deňlemäniň umumy çözüwini tapyp bileris.

Emma deňlemäniň tertibi ikiden ýokary bolan hallarda umumy çözüwi tapmak meselesi kynlaşýar. Esasy sebäp hem häsiýetlendiriji deňlemäniň derejesi ikiden uly bolanda onuň köklerini tapmak meselesiniň kynçylygyndadyr. Indi $a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$ üçünji tertipli, birjynsly, çyzykly, hemişelik koeffisiýentli deňlemä garalyň. Onuň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$a_0k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0 \qquad (H)$$

bolar. Deňleme çözülende gerek bolýan maglumatlary getireliň.

**I.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $k_1$, $k_2$, $k_3$ hakyky we dürli sanlar. Onda umumy çözüw $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x}$ bolar.

**II.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $k_1 = k_2 \neq k_3$ hakyky sanlar. Onda umumy çözüw $y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x} + C_3e^{k_3x}$ bolar.

**III.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri $k_1 = k_2 = k_3$ hakyky sanlar. Onda umumy çözüw $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{k_1x}$ bolar.

**IV.** Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň biri – $k_1$ hakyky, $k_2 = \alpha + \beta i$, $k_3 = \alpha - \beta i$ çatyrymly kompleks sanlar. Onda umumy çözüw $y = C_1e^{k_1x} + e^{\alpha x}(C_2\cos\beta x + C_3\sin\beta x)$ bolar.

Umuman,

$$a_0\, y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0 \qquad (A)$$

çyzykly, birjynsly, hemişelik koeffisiýentli $n$-nji tertipli deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad (H)$$

görnüşde bolýar. ($A$) deňlemäniň hökmany $n$ çyzykly baglanyşyksyz çözüwleri bar. ($H$) deňlemäniň kökleri belli bolanda ol çözüwler şeýle kanunlara boýundyr:

**I.** Eger $k_1$ ($H$) deňlemäniň ýönekeý hakyky köki bolsa, onda oňa bir $y_1 = e^{k_1x}$ çözüw degişli bolýar.

**II.** Eger $k_1$ ($H$) deňlemäniň $m$ sepli hakyky köki bolsa, onda oňa $e^{k_1x}, xe^{k_1x}, ..., x^{m-1}e^{k_1x}$ $m$ çözüw degişli bolýar. Olary $C_1$, $C_2$, ..., $C_m$ erkin hemişeliklere köpeldip we goşup, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + ... + C_mx^{m-1})e^{k_1x}$ görnüşde ýazyp bolar.

**III.** Eger $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ çatyrymly ýönekeý kompleks kökler bolsa, onda olara iki $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ çözüw degişli bolýar.

**IV.** Eger $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ çatyrymly, $m$ sepli kompleks kökler bolsa, onda olara

$$y_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{12} = xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., y_{1m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{21} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{22} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$2m$ çözüwler degişli bolar. Olary erkin $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$ hemişeliklere köpeldip we goşup,

$$y = (A_1 + A_2x + ... + A_mx^{m-1})e^{\alpha x}\cos\beta x +$$

$$+(B_1 + B_2x + ... + B_mx^{m-1})e^{\alpha x}\sin\beta x$$

bir çözüw hökmünde hem ýazsa bolar.

Indi I, II, III, IV toparlara degişli çözüwleri erkin hemişeliklere köpeldip goşsak, ($A$) deňlemäniň umumy çözüwini alarys.

**Mysal.** $a_0y^{(9)} + a_1y^{(8)} + ... + a_9y = 0$ deňlemäniň $a_0k^9 + a_1k^8 + ... + a_9 = 0$ häsiýetlendiriji deňlemesiniň şeýle kökleri bar diýeliň: $k_1 = 3$ ýönekeý kök, $k_2 = -5$ – iki sepli kök, $k_3 = 2 + 6i$, $k_4 = 2 - 6i$, ýönekeý, çatyrymly kompleks kökler, $k_5 = -3 + 4i$, $k_6 = -3 - 4i$, çatyrymly, 2 sepli kompleks kökler. Onuň umumy çözüwi aşakdaky görnüşde bolar:

$$y = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x)e^{-5x} + e^{2x}(C_4 \cos 6x + C_5 \sin 6x) +$$

$$+(C_6 + C_7 x)e^{-3x} \cos 4x + (C_8 + C_9 x)e^{-3x} \sin 4x.$$

Goý, biz çyzykly, hemişelik koeffisiýentli, birjynsly, $n$-nji tertipli deňlemäniň $n$ çyzykly baglanyşyksyz çözüwlerini we şonuň bilen bilelikde umumy çözüwini tapdyk diýeliň. Onda Lagranžyň kesgitlenmedik köpeldijiler usulyny ulanyp, berlen differensial deňlemäniň sag böleginde islendik $f(x)$ funksiýa goýup alnan birjynsly däl deňlemäniň hem umumy çözüwini tapyp bileris. Emma Lagranžyň usuly ulanylanda, ýokardan belli bolşy ýaly, ilki çyzykly algebraik deňlemeler ulgamyny çözmeli bolýar. Soňra bolsa, has kyny, $\varphi_i(x)$ funksiýalardan integrallary hasaplamaly bolýar. Käbir hallarda, ýagny $f(x)$ ýörite görnüşli funksiýa bolanda, $\tilde{y}(x)$ çözüwi integrallary hasaplaman tapmak usullary hem bardyr.

## §9. Hemişelik koeffisiýentli, birjynsly däl, çyzykly differensial deňlemäniň hususy çözüwini tapmagyň usuly

Ýönekeýlik üçin biz ikinji tertipli differensial deňlemä seretjekdiris. Ýokary tertipli deňlemeler üçin hem usul edil şeýledir.

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x} P(x)$$

deňlemäniň $\tilde{y}(x)$ hususy çözüwini tapalyň. Bu ýerde $\alpha$ – islendik hakyky san, $P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m$ – $m$ derejeli köpagza.

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

deňlemäniň

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň.

a) $\alpha$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. Bu ýagdaýda $\tilde{y}(x)$

$$\tilde{y}(x) = (C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + ... + C_m)e^{\alpha x}$$

görnüşde gözlenýär. $C_0$, $C_1$, ..., $C_m$ – kesgitlenmeli hemişelikler. $\tilde{y}(x)$ funksiýanyň deňlemä girýän birinji we ikinji tertipli önümlerini tapýarlar we $\tilde{y}(x),\ \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ funksiýalary deňlemede ýerine goýýarlar hem-de toždestwo bolmagyny talap edýärler. Soňra deňlemäniň iki tarapyny hem $e^{\alpha x}$ funksiýa gysgaldyp,

$$N(x, C_0, C_1, ..., C_m) \equiv P(x)$$

toždestwo alýarlar. Bu ýerde $N(x, C_0, C_1, ..., C_m)$ $m$ derejeli köpagzadyr. Soňky deňlikde $x$-iň ornuna $m + 1$ sany islendik $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ sanlary goýup,

$$\begin{cases} N(x_0, C_0, C_1, ..., C_m) = P(x_0), \\ N(x_1, C_0, C_1, ..., C_m) = P(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N(x_m, C_0, C_1, ..., C_m) = P(x_m) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny alýarlar. $C_0, C_1, ..., C_m$ hemişelikler bu ulgamy çözmek bilen tapylýar. $C_0, C_1, ..., C_m$ – hemişelikleri tapmak üçin ulgam düzmegiň ýene bir usuly bar.

$N(x, C_0, C_1, ..., C_m) \equiv P(x)$ toždestwonyň iki tarapyndaky $x$-iň deň derejeleriniň öňündäki koeffisiýentleri bir-birine deňläp ýazyp, $m + 1$ deňlemeli, $C_0, C_1, ..., C_m$ hemişelikler tapylýan ulgamy alýarlar. Hemişelikleriň ulgamy çözüp tapylan $C_0 = C_0^0,\ C_1 = C_1^0, ..., C_m = C_m^0$ bahalaryny $\tilde{y}(x)$ üçin ýazan aňlatmamyzda ýerine goýup,

$$\tilde{y}(x) = (C_0^0 x^m + C_1^0 x^{m-1} + ... + C_m^0)e^{\alpha x}$$

gözlenýän çözüwi alarys.

**Mysal.** $y'' - y = (2x + 1)e^{3x}$ deňlemäniň $\tilde{y}(x)$ hususy çözüwini tapalyň. Bu ýerde $\alpha = 3$, $m = 1$. Bize gerek häsiýetlendiriji deňleme $k^2 - 1 = 0$ bolar. Görşümiz ýaly, $\alpha = 3$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. Şol sebäpli hususy çözüw $\tilde{y}(x) = (C_0 x + C_1)e^{3x}$ görnüşde gözlenýär. Önümleri tapalyň:

$$\tilde{y}'(x) = (3C_0 x + 3C_1 + C_0)e^{3x},$$

$$\tilde{y}''(x) = (9C_0 x + 9C_1 + 6C_0)e^{3x}.$$

$\tilde{y}(x),\ \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ funksiýalaryň tapylan bahalaryny deňlemede goýalyň we toždestwo bolmagyny talap edeliň:

$$(9C_0x + 9C_1 + 6C_0)e^{3x} - (C_0x + C_1)e^{3x} = (2x + 1)e^{3x}$$

ýa-da $e^{3x}$ funksiýa gysgaldyp alarys:

$$(9C_0x + 9C_1 + 6C_0) - (C_0x + C_1) = 2x + 1.$$

Toždestwonyň iki tarapynda $x$-iň deň derejeleriniň öňündäki koeffisiýentleri deňläp alnan

$$\begin{cases} 8C_0 = 2, \\ 8C_1 + 6C_0 = 1 \end{cases}$$

ulgamy çözüp taparys: $C_0 = \frac{1}{4}, C_1 = -\frac{1}{16}$. Hemişelikleriň tapylan bahalaryny $\tilde{y}(x)$ üçin ýazan aňlatmamyzda ýerine goýup,

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\right)e^{3x}$$

hususy çözüwi tapýarys.

b) $\alpha$ häsiýetlendiriji deňlemäniň $k$ sepli köki. Bu ýagdaýda $\tilde{y}(x)$ $\tilde{y}(x) = x^k(C_0x^m + C_1x^{m-1} + ... + C_m)e^{\alpha x}$ görnüşde gözlenýär. $C_0, C_1, ..., C_m$ hemişelikler ýokardaky ýaly tapylýar.

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = (P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

deňlemäniň $\tilde{y}(x)$ hususy çözüwini tapalyň. Bu ýerde $\alpha, \beta$ – hakyky sanlar, $P(x)$ $m$ derejeli, $Q(x)$ $n$ derejeli köpagzadyrlar. $s$ bilen $m$ we $n$ sanlaryň ulusyny belgiläliň.

ç) $\alpha + i\beta$ häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl. Bu ýagdaýda $\tilde{y}(x)$

$$\tilde{y}_1(x) = [(C_0x^s + C_1x^{s-1} + ... + C_s)\cos\beta x +$$
$$+(B_0x^s + B_1x^{s-1} + ... + B_s)\sin\beta x]\cdot e^{\alpha x}$$

görnüşde gözlenýär. $\tilde{y}_1(x)$ funksiýanyň gerek önümleri tapylýar we berlen deňlemede ýerine goýlup, toždestwo bolmagy talap edilýär. Soňra deňlemäniň iki tarapyny hem $e^{\alpha x}$ funksiýa gysgaldyp,

$$N_1(x, C_0, C_1, ..., C_s, B_0, B_1, ..., B_s)\cos\beta x +$$
$$+ N_2(x, C_0, C_1, ..., C_s, B_0, B_1, ..., B_s)\sin\beta x \equiv P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x$$

toždestwo alarys. Bu ýerden

$$N_1 \equiv P(x), \quad N_2 \equiv Q(x)$$

toždestwolar alynýar. Bu toždestwolardan, ýokarda görkezilişine meňzeşlikde, $C_0$, ..., $C_s$, $B_0$, $B_1$, ..., $B_s$ – näbelli koeffisiýentler tapylýar. Näbelli koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny $\tilde{y}_1(x)$ üçin ýazylan aňlatmada ýerine goýup, gözlenýän hususy çözüwi taparys.

d) $\alpha + i\beta$ san häsiýetlendiriji deňlemäniň $m$ sepli köki. Bu halda $\tilde{y}(x) = x^m \tilde{y}_1(x)$ görnüşde gözlenýär. Näbelli koeffisiýentler bolsa ýokardaky ýaly tapylýar.

## §10. Birinji tertipli differensial deňlemeler ulgamy

$$\begin{cases} Y_1' = f_1(x, Y_1, ..., Y_n), \\ Y_2' = f_2(x, Y_1, ..., Y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n' = f_n(x, Y_1, ..., Y_n) \end{cases} \qquad (D)$$

görnüşdäki differensial deňlemeler ulgamyna birinji tertipli deňlemeler ulgamynyň esasy görnüşi diýilýär. Görşümiz ýaly, ol $n$ deňlemeden durýar we $n$ sany $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_n$ gözlenýän funksiýalary we olaryň önümlerini baglanyşdyrýar.

Eger $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ funksiýalary we olaryň birinji tertipli önümlerini ulgamda $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_n$-iň we olaryň önümleriniň ýerine goýanymyzda ulgamyň her bir deňlemesi toždestwo öwrülse, onda $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – tertipleşdirilen $n$ funksiýa $(D)$ ulgamyň çözüwi diýilýär.

Mysal üçin, $y_1 = e^x\cos x + 3$, $y_2 = e^x\sin x + 2$ funksiýalaryň

$$\begin{cases} Y_1' = Y_1 - Y_2 - 1, \\ Y_2' = Y_1 + Y_2 - 5 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwi boljakdygy aňsatlyk bilen barlanýar.

$$\begin{array}{c} y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{array}$$

tertipleşdirilen $n$ funksiýanyň ($D$) ulgamyň umumy çözüwi bolmagy üçin aşakdaky iki şert ýerine ýetmeli:

1. Bu funksiýalar $C_1, C_2, ..., C_n$ hemişelikleriň islendik bahalarynda ($D$) ulgamyň çözüwi bolmaly;

2. ($D$) ulgamyň islendik bir çözüwi umumy çözüwde $C_1, C_2, ..., C_n$ hemişelikleriň ýerine käbir $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ bahalary goýmak bilen alynmaly.

Differensial deňlemeleriň ($D$) ulgamyny çözmek diýmek, onuň umumy çözüwini tapmak diýmekdir. Köp ýagdaýlarda ulgamyň umumy çözüwi däl-de, onuň bellibir şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly bolýar. Ol şertleriň iň bellisi Koşiniň başlangyç şertleridir. Ol şertleri kanagatlandyrýan çözüwi tapmak meselesine Koşiniň meselesi diýilýär.

**Koşiniň meselesi.** ($D$) ulgamyň

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, ...,\ y_n(x_0) = y_n^0$$

şertleri kanagatlandyrýan $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ çözüwini tapmaly. $x_0, y_1^0, ..., y_n^0$ sanlara Koşiniň başlangyç berlenleri, $y_i(x_0) = y_i^0,\ i = \overline{1,n}$ deňliklere Koşiniň başlangyç şertleri diýilýär.

Koşiniň meselesiniň çözüwi barmy ýa ýokmy diýen sowala Koşiniň aşakdaky teoremasy jogap berýär.

**Koşiniň teoremasy.** Eger $f_i(x, Y_1, ..., Y_n)$, $i = \overline{1,n}$, funksiýalar we olaryň $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ argumentlere görä birinji tertipli önümleri

$$|x - x_0| \le a,\ |Y_i - y_i^0| \le a_i,\quad i = \overline{1,n},$$

ýaýlada üznüksiz bolsalar, onda ($D$) ulgamyň Koşiniň $y_i(x_0) = y_i^0,\ i = \overline{1,n}$ başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan we $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen ýeke-täk çözüwi bardyr.

Birinji tertipli deňlemeleriň esasy görnüşdäki ulgamlarynyň içinde iň ýönekeýi we ähmiýetlisi çyzykly deňlemeler ulgamydyr. Ol şeýle görnüşde bolýar:

$$\begin{cases} Y_1' = a_{11}(x)Y_1 + a_{12}(x)Y_2 + ... + a_{1n}(x)Y_n + f_1(x), \\ Y_2' = a_{21}(x)Y_1 + a_{22}(x)Y_2 + ... + a_{2n}(x)Y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_n' = a_{n1}(x)Y_1 + a_{n2}(x)Y_2 + ... + a_{nn}(x)Y_n + f_n(x). \end{cases} \qquad (D_1)$$

Bu ýerde $a_{ij}(x),\ i, j = \overline{1,n},$ – koeffisiýentler, $f_i(x),\ i = \overline{1,n}$ – deňlemeleriň azat agzalary. Koşiniň teoremasy çyzykly deňlemeleriň ulgamy üçin aşakdaky ýaly bolýar.

**Koşiniň teoremasy.** Eger $a_{ij}(x),\ i, j = \overline{1,n},\ f_i(x),\ i = \overline{1,n}$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda $(D_1)$ ulgamyň $\forall x_0 \in (a,b)$ üçin Koşiniň $y_i(x_0) = y_i^0, i = \overline{1,n}$ başlangyç şertlerini kanagatlandyrýan we $[a,b]$ kesimde kesgitlenen ýeke-täk çözüwi bardyr.

$(D_1)$ ulgamy

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix},\quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

matrisalary girizip,

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

matrisalardaky deňlemä getirip bolýar. $n$-nji tertipli çyzykly deňlemede bolşy ýaly, bu ýerde hem $F(x) \equiv 0$ bolanda, ýagny

$$Y' = A(x)Y$$

deňleme uly ähmiýete eýedir. Biz aşakda soňky deňlemä diňe $A(x) \equiv A$ hemişelik matrisa bolan ýagdaýynda seretjekdiris.

$$Y' = AY \qquad (D_2)$$

hemişelik koeffisiýentli, birjynsly deňlemeler ulgamynyň çözüwlerini tapalyň. Onuň çözüwini

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx},\quad y_2 = \gamma_2 e^{kx}, \dots,\quad y_n = \gamma_n e^{kx}$$

görnüşde gözleýärler. Bu ýerde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – näbelli hemişelikler, $k$ – näbelli hemişelik. $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiýalaryň we olaryň önümleriniň bahalaryny $(D_2)$ ulgamda ýerine goýup alarys:

$$k\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \dots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \dots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$$

ýa-da

$$(A - kE)\gamma = 0.$$

Bu ýerde $E$ birlik matrisa, $\gamma$ elementleri $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ bolan bir sütünli matrisa. Soňky deňleme $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ näbellilere görä birjynsly deňlemeler ulgamydyr. Onuň noldan tapawutly çözüwiniň bolmagy üçin onuň kesgitleýjisi

$$|A - kE| = 0 \qquad (H)$$

bolmalydyr. ($H$) deňlemä häsiýetlendiriji deňleme diýilýär. Ol $k$ görä $n$ derejeli algebraik deňlemedir. Eger $k_1$ şol deňlemäniň köki bolsa,

$$(A - k_1E)\gamma = 0$$

ulgamyň iň bolmanda bir $\gamma = \gamma^1$, ýagny

$$\gamma_1 = \gamma_1^1, \quad \gamma_2 = \gamma_2^1, ..., \gamma_n = \gamma_n^1,$$

hemme komponentleri nola deň bolmadyk çözüwi bardyr. Oňa ($D_2$) ulgamyň

$$y_{11} = \gamma_1^1 e^{k_1x}, \quad y_{21} = \gamma_2^1 e^{k_1x}, ..., \quad y_{n1} = \gamma_n^1 e^{k_1x}$$

çözüwi degişli bolýandyr. Diýmek, $k_1, k_2, ..., k_n$ ($H$) deňlemäniň dürli kökleri bolsa, onda olara ($D_2$) ulgamyň $n$ sany

$$y_{1i} = \gamma_1^i e^{k_ix}, \quad y_{2i} = \gamma_2^i e^{k_ix}, ..., \quad y_{ni} = \gamma_n^i e^{k_ix}, \quad i = \overline{1,n},$$

çözüwi degişli bolar. Goý, $C_1, C_2, ..., C_n$ erkin hemişelikler bolsun, onda

$$Y_1 = C_1\gamma_1^1 e^{k_1x} + C_2\gamma_1^2 e^{k_2x} + \dots + C_n\gamma_1^n e^{k_nx},$$
$$Y_2 = C_1\gamma_2^1 e^{k_1x} + C_2\gamma_2^2 e^{k_2x} + \dots + C_n\gamma_2^n e^{k_nx},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_n = C_1\gamma_n^1 e^{k_1x} + C_2\gamma_n^2 e^{k_2x} + \dots + C_n\gamma_n^n e^{k_nx}$$

funksiýalar ($D_2$) deňlemeler ulgamynyň umumy çözüwi bolar.

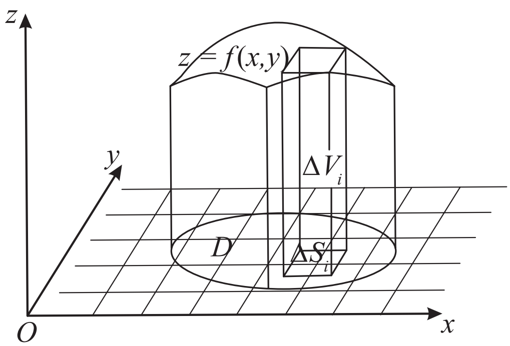
Häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň içinde sepli kökler bar ýagdaýynda ($D_2$) ulgamyň çözüwini tapmak üçin okyja ýörite edebiýatlara ýüzlenmek hödürlenýär.

Köp hallarda differensial deňlemäniň gözlenýän çözüwini ýönekeý funksiýalaryň integrallarynyň üsti bilen aňlatmagyň başartmaýandygyny biz öň hem belläp geçipdik. Bu sebäbe görä, differensial deňlemeleriň takmyn çözüwini tapmak usullary giňden ýaýrandyr. Soňky döwürde EHM-leriň köpelmegi we olaryň mümkinçilik kuwwatlarynyň ösmegi differensial deňlemeleri takmyn çözmek usullaryny has hem öňe sürdi.

# X. IKIGAT WE ÜÇGAT INTEGRALLAR

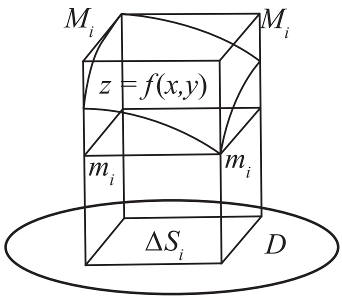
## §1. Ikigat integrallar

Tekizlikde çäkli $D$ ýaýla we şol ýaýlada kesgitlenen üznüksiz $f(x, y)$ funksiýa berlen bolsun. Düşnükli bolar ýaly, $D$ ýaýlanyň nokatlarynda $f(x, y) \geq 0$ diýeliň. $D$ ýaýlanyň çägi $L$ egri bolsun. Üç ölçegli $(x, y, z)$ giňişlikde, aşakdan $D$ ýaýla bilen, ýokarsyndan $f(x, y)$ funksiýanyň grafigi bilen, gapdal üsti $L$ egriniň nokatlaryndan çykýan we $z$ oka parallel gönülerden durýan silindrik jisimiň $V$ göwrümini tapmaly bolsun *(109-njy surat).*




*109-njy surat*

Giňişlikde $xOz$ tekizligine parallel we biri-birinden $h$ uzaklykda bolan tekizlikleri geçireliň. Ýene-de $yOz$ tekizligine parallel we biri-birinden $h$ uzaklykda bolan tekizlikleri geçireliň. Ol tekizlikler silindrik jisimi we şol sanda $D$ ýaýlany bölejiklere bölerler. $D$ ýaýlanyň bölejikleri tarapy $h$-a deň kwadrat ýa-da şeýle kwadratyň içinde ýatýan bir meýdança bolar. Silindrik jisimiň bölejikleri bolsa, esasy $D$ ýaýlanyň bölejigi, ýokarsyndan $f(x, y)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen kiçijik silindrik jisim bolar. $D$ ýaýlanyň bölejikleriniň sany $n$ bolsun.




*110-njy surat*

Olary 1-den $n$-e çenli belgiläp çykalyň. $i$ bilen belgilenen bölejigiň meýdanyny $\Delta S_i$ bilen, şol bölejik esasy bolan jisimiň bölejiginiň göwrümini bolsa $\Delta V_i$ bilen belgiläliň. Onda jisimiň $V$ göwrümi

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

bolar. Indi $\Delta V_i$ göwrümjikleri aýratynlykda kesgitläliň *(110-njy surat).*

Eger $m_i$, $M_i$ degişlilikde, $f(x, y)$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň $i$-nji bölegindäki iň uly we iň kiçi bahalary bolsa, onda 110-njy suratdan görnüşi ýaly,

$$m_i \Delta S_i \le \Delta V_i \le M_i \Delta S_i$$

deňsizlikler ýerine ýeter. Olaryň esasynda

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \le \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \le V \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

deňsizlikler hem ýerlikli bolar. $f(x, y)$ funksiýa $D$ ýaýlada üznüksiz bolany sebäpli, garaljak $i$-nji bölejigiň käbir $P_i(x_i, y_i)$ nokadynda $m_i = f(x_i, y_i)$ bolar. Onda ýokarky deňsizligi

$$0 \le V - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta S_i$$

ýa-da

$$0 \le V - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta S_i$$

görnüşde ýazyp bolar. Bu deňsizlikde $h$ nola ymtylanda predele geçip alarys:

$$0 \le \lim_{h \to 0} \left[ V - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i \right] \le \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta S_i .$$

$f(x, y)$ funksiýa $D$ ýaýlada üznüksiz bolany sebäpli,

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta S_i = 0$$

bolar we şonuň üçin

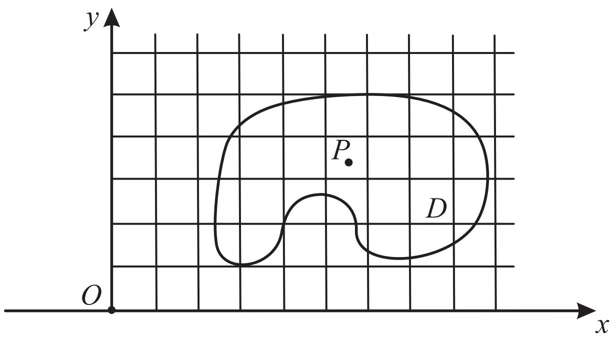
$$\lim_{h\to 0}\left[V - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i\right] = 0$$

bolar. Bu bolsa

$$V = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

diýmekdir. Ýene bir mysala seredeliň.

Tekizlikde ýatan plastina $D$ ýaýlany tutýar diýeliň. Plastinanyň galyňlygy $\delta$, onuň dykyzlygy $\rho(x, y)$ plastinanyň galyňlygy boýunça üýtgemeýär. Plastinanyň $m$ massasyny tapalyň. $D$ ýaýlany $x$ okuna parallel we aralyklary $h$-a deň bolan hem-de $y$ okuna parallel we aralyklary $h$ bolan gönüleri geçirip, bölejiklere böleliň *(111-nji surat)*.



*111-nji surat*

Goý, bölejikleriň sany $n$ bolsun. Olary 1-den $n$-e çenli belgiläliň we $i$-nji bölegiň meýdanyny $\Delta S_i$ bilen belgiläliň. Plastinanyň $D$ ýaýlanyň islendik $i$-nji böleginde ýerleşýän böleginiň massasyny $\Delta m_i$ bilen belgiläliň. Olaryň göwrümleriniň $\Delta V_i = \Delta S_i\delta$ boljakdygy düşnüklidir. $D$ ýaýlanyň $i$-nji, $i = \overline{1, n}$ bölejiginde $P_i(x_i, y_i)$ nokat alalyň. $h$ ýeterlik kiçi bolan halatynda, bölejikleriň her birinde $\rho(x, y)$ dykyzlyk $\rho = \rho(x_i, y_i)$ hemişelik bahasyny saklaýar diýsek, uly ýalňyşlyk goýbermeris. Bu ýagdaýda $i$-nji bölejigiň $\Delta m_i$ massasynyň takmyn bahasy $\Delta m_i \cong \delta\rho(x_i, y_i)\Delta S_i$ bolar. Onda plastinanyň $m$ massasynyň takmyn bahasy üçin

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \delta\rho(x_i, y_i)\Delta S_i$$

deňligi alarys. Bu deňlik $h$ näçe kiçi bolsa, şonça-da dogry bolýar. $h$ nola ymtylanda predele geçip,

$$m = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta\rho(x_i, y_i)\Delta S_i$$

takyk deňligi alarys. Bu mysallaryň sanawyny dowam etdirse hem bolardy. Ýöne seredilen iki mysalyň çözüwi

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

görnüşdäki predeli tapmak meselesine syrykdy. Ine, şeýle predelleri tapmak meselesini tertipleşdirmek maksady bilen ikigat integral düşünjesi girizilipdir. Ol şeýle kesgitlenýär. Goý, $xOy$ tekizlikde $D$ ýaýla we şol ýaýlada kesgitlenen $f(x, y)$ funksiýa berilsin. $D$ ýaýlany, edil ýokarky mysaldaky ýaly edip, bölejiklere böleliň, olary belgiläp çykalyň we $i$-nji, $i = \overline{1, n}$ bölejigiň meýdanyny $\Delta S_i$ bilen belgiläliň. Her bölejigiň içinden islendik bir nokat saýlap alalyň. Goý, olar degişlilikde, $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$, nokatlar bolsun. Aşakdaky

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

jeme $f(x, y)$ funksiýa üçin $D$ ýaýla boýunça integral jem diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $h$ nola ymtylanda $D$ ýaýlany nähili bölekleýändigimize we $P_i(x_i, y_i)$ nokatlary nähili saýlanymyza baglanyşyksyzlykda $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ integral jem bellibir predele ymtylýan bolsa, onda şol predele $f(x, y)$ funksiýanyň $D$ ýaýla boýunça ikigat integraly diýilýär, $f(x, y)$ funksiýa bolsa $D$ ýaýla boýunça integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Ikigat integral

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

görnüşde belgilenýär. Kesgitlemeden

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

deňlik gelip çykýar. Indi, seredilen mysallara gaýdyp gelsek, onda agzalan silindrik jisimiň $V$ göwrüminiň

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

plastinanyň $m$ agramynyň

$$m = \iint_D \delta\rho(x,y)dxdy$$

boljakdygyny görýäris. Diýmek, biz ikigat integrallary hasaplamany başarsak, göwrüm tapmak, massa tapmak we ş.m. meseleleriň hötdesinden geleris. Elbetde, onuň üçin mysallarda gabat gelýän $f(x, y)$, $\delta\rho(x, y)$ funksiýalar integrirlenýän funksiýalar bolmalydyr. Edil kesgitli integralda bolşy ýaly, islendik çäkli ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz bolan $f(x, y)$ funksiýanyň şol ýaýlada integrirlenýändigini subutsyz belläp geçeliň.

Ikigat integralyň kesgitlemesiniň kesgitli integralyň kesgitlemesine meňzeşligi sebäpli, kesgitli integralyň köp häsiýetleri ikigat integrallara hem geçýär we meňzeş subut edilýär. Şol sebäpli subutlary gaýtalap durman, olaryň esasylaryny gaýtalap geçeliň.

Häsiýetler sanalanda gabat gelýän funksiýalaryň hemmesi degişli ýaýlada integrirlenýän hasap edilýär.

1. Hemişelik köpeldijini integral alamatynyň daşyna çykaryp bolýar:

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy.$$

2. Iki funksiýanyň jeminiň integraly olaryň integrallarynyň jemine deňdir:

$$\iint\limits_D (f_1 + f_2) dxdy = \iint\limits_D f_1 dxdy + \iint\limits_D f_2 dxdy.$$

3. $D$ ýaýlada $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ deňsizlik dogry bolsa, onda

$$\iint\limits_D f_1(x,y) dxdy \leq \iint\limits_D f_2(x,y) dxdy$$

deňsizlik hem dogrudyr, ýagny deňsizligi integrirläp bolýar.

4. Eger $f(x, y) \equiv 1$ bolsa, onda integral $D$ ýaýlanyň meýdanyna deňdir:

$$\iint\limits_D dxdy = me\acute{y}d.D.$$

5. Eger $D$ ýaýla $D_1$ we $D_2$ böleklerden durýan bolsa, onda

$$\iint\limits_D f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy$$

deňlik dogrudyr. Bu deňlik bölekleriň sany ikiden köp bolan ýagdaýynda hem dogrudyr.

6. Goý, $m$, $M$ sanlar degişlilikde $f(x, y)$ funksiýanyň $D$ ýaýladaky iň kiçi we iň uly bahalary bolsun. $S$ san $D$ ýaýlanyň meýdany bolsun, onda

$$m \cdot S < \iint\limits_D f(x,y) dxdy \leq M \cdot S$$

deňlik dogrudyr.

$$\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y) dxdy$$

sana funksiýanyň $D$ ýaýladaky orta bahasy diýilýär.

7. Eger $f(x, y)$ $D$ ýaýlada üznüksiz bolsa, onda $D$ ýaýlada ýatýan käbir $M_0(x_0, y_0)$ nokatda

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

deňlik ýerine ýeter, ýagny üznüksiz funksiýa $D$ ýaýlanyň käbir nokadynda şol ýaýladaky orta bahasyny kabul edýändir.

8. Aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x, y)|dxdy.$$

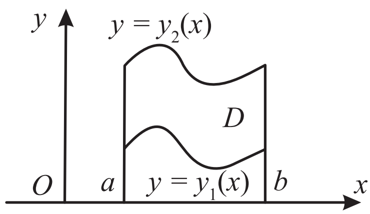
## §2. Ikigat integraly hasaplamak

Goý, $D$ $xOy$ tekizlikde ýatan egriçyzykly trapesiýa bolsun *(112-nji surat)*.

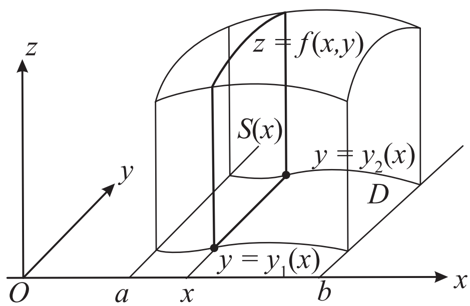
$f(x, y)$ $D$ ýaýlada kesgitlenen, integrirlenýän, otrisatel däl funksiýa. Onda, öňden bilşimiz ýaly,

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

integral $Oxyz$ giňişlikde ýerleşen, esasy $D$ ýaýla, ýokarsyndan $f(x, y)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen, gapdal üsti $D$ ýaýlanyň çäk nokatlaryndan geçýän we $z$ okuna parallel gönülerden durýan silindrik jisimiň $V$ göwrümine deň bolar *(113-nji surat)*.




*112-nji surat*




*113-nji surat*

Silindrik jisim $x$ oky boýunça $x = a$ we $x = b$ tekizlikleriň arasynda ýerleşen. Goý, $S(x)$ onuň $[a,b]$ kesimiň $x$ nokadyndan geçýän, $x$ okuna perpendikulýar bolan tekizlik bilen kesişmesinden emele gelen kesigininň meýdany bolsun. Onda Arhimediň lemmasyna laýyklykda, alarys:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

ýa-da

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b S(x)dx.$$

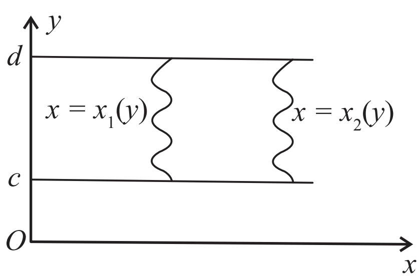
113-nji suratdan görnüşi ýaly $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ bolar. Diýmek, ikigat integraly hasaplamak üçin

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

ýa-da

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

formulany alarys. Eger $D$ ýaýla 114-nji suratda görkezilen görnüşdäki egriçyzykly trapesiýa bolsa, onda formula



*114-nji surat*

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_c^d \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

görnüşde bolar.

Goý, indi, $f(x, y)$ islendik alamatly bahalary kabul edýän funksiýa bolsun. $D$ ýaýlada $f(x, y) + M \geq 0$ bolar ýaly položitel $M$ sany saýlap alalyň. $f(x, y) + M \geq 0$, $M \geq 0$ bolany sebäpli alarys:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D [M + f(x,y) - M]dxdy =$$

$$= \iint_D [f(x,y) + M]dxdy - \iint_D Mdxdy = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x,y) + M)dy \right) dx -$$

$$- \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} Mdy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

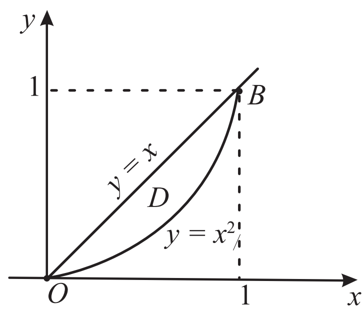
ýagny islendik $f(x, y) \in C(D)$ funksiýa üçin hem hasaplaýyş formulalary dogry bolýar.

**1-nji mysal.** Esasy $y = x^2$ parabola we $y = x$ göni çyzyk bilen çäklenen $D$ ýaýla bolan, ýokarsyndan $z = x^2 + y^2 + 1$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen silindrik jisimiň $V$ göwrümini tapalyň. Ýokardan belli bolşy ýaly, göwrüm

$$V = \iint_D zdxdy$$

integrala deň. $D$ ýaýlany anyklalyň *(115-nji surat).*

$O$ we $B$ nokatlar $y = x^2$ parabola bilen $y = x$ göni çyzygyň kesişme nokatlary. $y = x$, $y = x^2$ ulgamy bilelikde çözüp, $O$, $B$ nokatlaryň koordinatalaryny taparys. $O(0, 0)$, $B(1, 1)$ boljakdygy görnüp dur. Diýmek, biziň $D$ ýaýlamyz $x = 0$, $x = 1$ gönüler bilen we $y = x$, $y = x^2$ çyzyklar çäklenen egriçyzykly trapesiýadyr. Şoňa görä-de (1) formulany ulanyp taparys:



*115-nji surat*

$$V = \iint_D zdxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2 + 1)dy.$$

Ilki bilen ikinji integraly $y$-e görä integrirleýäris ($x$ hemişelik hasaplanýar):

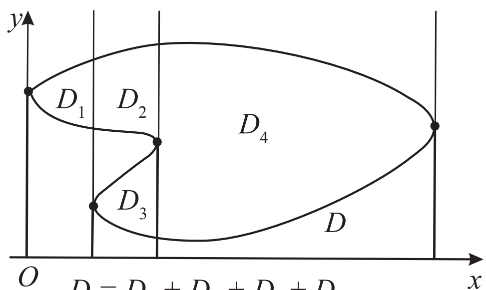
$$\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2+1)dy=\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_{x^2}^{x}=x^3+\frac{x^3}{3}+x-x^4-\frac{x^6}{3}-x^2.$$

Integralyň tapylan bahasyny birinji integralda ýerine goýup, alarys:

$$V=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}+x-x^4-\frac{x^6}{3}-x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{53}{210}.$$

$D$ ýaýlanyň göni özi egriçyzykly trapesiýa bolman, birnäçe $D_1, D_2, ..., D_k$ egriçyzykly trapesiýalardan durýan bolmagy mümkin. Beýle ýagdaýda $\iint_D f(x,y)dxdy$ integraly




$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$

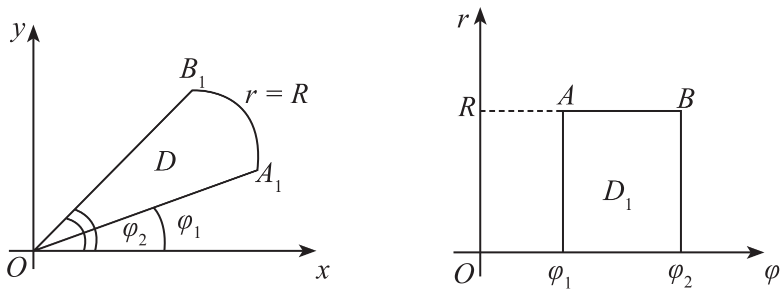
*116-njy surat*

$$\iint_D fdxdy=\iint_{D_1} fdxdy+\iint_{D_2} fdxdy+...+\iint_{D_k} fdxdy$$

formulany ulanyp we her bir $\iint_{D_i} f(x,y)dxdy, \quad i=\overline{1,k}$ integraly aýratyn hasaplap tapmak bolar. Mysal üçin, $D$ ýaýlanyň çäginiň $y$-ler okuna parallel galtaşýanlarynyň sany çäkli bolan halda, şol galtaşýanlary geçirip, $D$ ýaýlany egriçyzykly trapesiýalara bölüp bolar *(116-njy surat)*. Ikigat integraly hasaplamagyň ýene bir usulyna seredeliň.

## §3. Ikigat integralda üýtgeýänleri çalşyrma usuly

Bu usul, esasan, $D$ ýaýla boýunça alynýan integraly, has ýönekeý $D_1$ ýaýla boýunça alynýan integrala getirmek maksady bilen ulanylýar. $xOy$ tekizlikde, 117-nji suratda görkezilen töweregiň sektoryna seredeliň.




*117-nji surat*

Tekizlikdäki islendik $M(x, y)$ nokadyň dekart koordinatalary bilen onuň $(r; \varphi)$ polýar koordinatalary

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

baglanyşykda bolýarlar. Biz bu baglanyşyga başgaça-da garap bileris. Eger $(r; \varphi)$ sanlara $rO\varphi$ tekizligiň nokadynyň dekart koordinatalary hökmünde garasak, onda bu baglanyşyklara $rO\varphi$ tekizlikden $xOy$ tekizlige bolan özgertme hökmünde garap bileris. 117-nji suratdan görnüşi ýaly, bu özgertmede $rO\varphi$ tekizligiň $\varphi_1 AB\varphi_2$ gönüburçlugy $xOy$ tekizligiň $OA_1B_1$ sektoryna geçýär we tersine. Özi hem bu geçiş özara birbelgilidir. Şeýle ýagdaýda biz

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

çalşyrmada $D$ ýaýla $D_1$ ýaýla geçýär diýeris. Indi $\iint\limits_{D_1} r\,dr\,d\varphi$ integraly hasaplalyň. $D_1$ ýaýla egriçyzykly trapesiýa bolany üçin, (1) hasaplaýyş formulasyny ulanyp, ýazyp bileris:

$$\iint_{D_1} rdrd\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^R rdr = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{R^2}{2} d\varphi = \frac{R^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = me\acute{y}d.D.$$

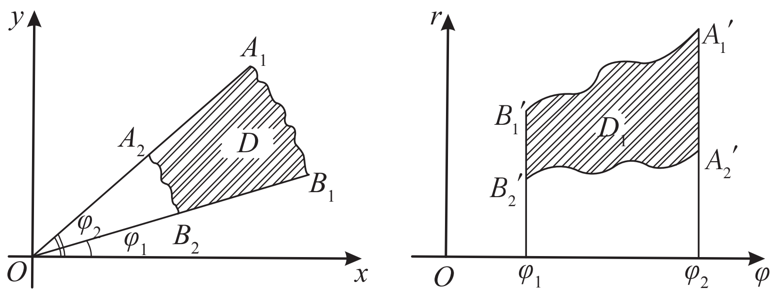
Emma ikigat integralyň häsiýetine görä,

$$me\acute{y}d.D = \iint_D dxdy.$$

Diýmek,

$$\iint_D dxdy = \iint_{D_1} rdrd\varphi,$$

ýagny $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ çalşyrmadan soň $D$ ýaýla boýunça alnan $\iint_D dxdy$ integral $D_1$ ýaýla boýunça alnan $\iint_{D_1} rdrd\varphi$ integrala geçdi. Eger seredilen sektoryň ornuna *(118-nji surat)* $A_2A_1B_1B_2$ egriçyzykly sektor alsak, onda ol




*118-nji surat*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

çalşyrmadan soň $A_2'A_1'B_1'B_2'$ egriçyzykly trapesiýa geçer we

$$\iint_D dxdy = \iint_{D_1} rdrd\varphi$$

deňlik dogry bolar. Umumy ýagdaýa seredeliň. Goý, $\iint_D f(x,y)dxdy$ integraly hasaplamaly bolsun.

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

çalşyrma $D$ ýaýlany $uOv$ tekizlikdäki $D_1$ ýaýla geçirsin. Onda

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x(u,v),\, y(u,v))|\, I\,|dudv \qquad (T)$$

formula dogrudyr. Bu ýerde $I$ – ýakobian diýlip atlandyrylýan we

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

formula boýunça hasaplanýan ululykdyr.

Mysal üçin, çalşyrma

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

deňlikler bilen berilse,

$$I = \begin{vmatrix} x_r' & x_\varphi' \\ y_r' & y_\varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

bolar we ($T$) formula

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(r\cos\varphi,\; r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

görnüşi alar. $f(x, y) \equiv 1$ bolan halynda, ýokarda getirilen

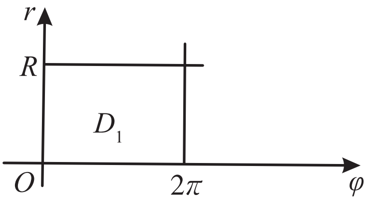
$$\iint_D dxdy = \iint_{D_1} rdrd\varphi$$

formulany alarys.

**1-nji mysal.** $\iint_D (x^2 + y^2 - 1)dxdy$ integraly hasaplalyň. Bu ýerde $D$ merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy $R$ bolan tegelek.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

çalşyrma girizeliň. Onda, ýokarda görkezilişi ýaly,



*119-njy surat*

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-1)dxdy =$$

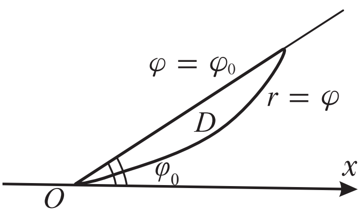
$$= \iint\limits_{D_1} (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 1)rdrd\varphi$$

deňligi alarys. Bu ýerde $D_1$ $rO\varphi$ tekizlikde ýerleşýän *(119-njy surat)* gönüburçlukdyr.

Integraly hasaplamagyň (1) formulasyny ulanyp alarys:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-1)dxdy = \iint\limits_{D_1} (r^2-1)rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (r^3-r)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^2}{2}\right)d\varphi = \pi R^2\left(\frac{R^2}{2} - 1\right).$$



*120-nji surat*

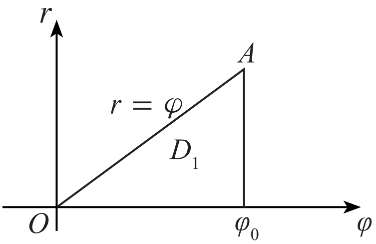
**2-nji mysal.** $r = \varphi$ Arhimediň spiralynyň $0 \le \varphi \le \varphi_0$ bolandaky bölegi we $\varphi = \varphi_0$ şöhle bilen çäklenen *(120-nji surat)* figuranyň meýdanyny tapalyň. Ikigat integralyň häsiýetine görä,

$$mey\acute{d}.D = \iint\limits_D dxdy$$

bolar. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ çalşyrma girizsek, $D$ ýaýla $rO\varphi$ tekizlikde *(121-nji surat)* $OA\varphi_0$ üçburçluga geçer. Şoňa görä alarys:

$$mey\acute{d}.D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} rdrd\varphi = \int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi \int\limits_0^{\varphi} rdr = \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{\varphi^2}{2}d\varphi = \frac{\varphi_0^3}{6}.$$

**3-nji mysal.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid bilen çäklenen jisimiň $V$ göwrümini tapalyň. Jisimiň $z=0$ tekizlikden ýokarda ýatan bölegine seredeliň. Ol esasy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bilen çäklenen $D$ ýaýla we ýokardan $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ üst bilen örtülen silindrik jisimdir. Diýmek, onuň $V_1$ göwrümi




*121-nji surat*

$$V_1=\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

formula arkaly kesgitlener. Bu integraly hasaplamak üçin,

$$x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi$$

çalşyrma girizeliň.

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=ab\rho$$

bolany sebäpli alarys:

$$V_1=\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy=\iint_{D_1} c\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho d\varphi.$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsiň deňlemesi $\rho,\varphi$ koordinatalarda $\rho=1$ görnüşde bolýandygy sebäpli, $D_1$ ýaýla $rO\varphi$ tekizlikde $\rho=0$, $\rho=1$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ gönüler bilen çäklenen gönüburçluk bolar. Şoňa görä-de alarys:

$$V_1=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{2\pi}{3}abc.$$

Indi $V_1 = \dfrac{V}{2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup, jisimiň $V$ göwrümi üçin

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

formulany alarys. $a = b = c = R$ bolan halynda biziň jisimimiz $R$ radiusly şara öwrülýär. Diýmek, radiusy $R$-e deň şaryň $V_ş$ göwrümini

$$V_ş = \frac{4}{3}\pi R^3$$

formula bilen taparys. Indi ikigat integralyň kömegi bilen çözülýän geometriýanyň we mehanikanyň käbir meselelerine seredeliň.

## §4. Üstüň meýdany

Islendik $D$ ýaýla göni proýektirlenýän $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizligiň böleginiň $\delta$ meýdanynyň

$$\delta = \frac{S}{\cos\gamma}$$

formula arkaly tapyljakdygy aýdyňdyr. Bu ýerde $S$ – $D$ ýaýlanyň meýdany, $\gamma$ bolsa $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizligiň $D$ ýaýlany saklaýan $xOy$ tekizlik bilen emele getirýän burçy. Tekizligiň normal wektory $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ bolany sebäpli

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2}}$$

boljakdygy düşnüklidir. Şoňa görä-de $\delta$ üçin formulany

$$\delta = S\sqrt{1 + \left(-\frac{A}{C}\right)^2 + \left(-\frac{B}{C}\right)^2}$$

görnüşde hem ýazyp bolar. Tekizligiň deňlemesinden $z$-i tapalyň we onuň $x$-e we $y$-e görä önümlerini alalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}.$$

Indi $\delta$ üçin formulany

$$\delta = S\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

görnüşde hem ýazyp bileris. Goý, $f(x, y)$ funksiýa $D$ ýaýlada kesgitlenen, özi hem onuň birinji tertipli hususy önümleri şol ýaýlada üznüksiz bolsunlar. $z = f(x, y)$ üste garalyň we onuň meýdanyny kesgitlejek bolalyň. $D$ ýaýlany aralyklary $h$ bolan $x$ okuna parallel gönüleriň topary we $y$ okuna parallel gönüleriň topary bilen bölekläliň. Bölekleri 1-den $n$-e çenli belgiläliň, $i$-nji, $i = \overline{1,n}$ bölejigiň meýdanyny $\Delta S_i$ bilen belgiläliň. $i$-nji bölekde bir $P(x_i, y_i)$ nokat alalyň we $z$ üste onuň $M_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ nokadynda galtaşýan tekizlik geçireliň. Şol galtaşýanyň $i$-nji bölegiň üstünde ýatan böleginiň meýdanyny $\Delta\delta_i$ bilen belgiläliň.

**Kesgitleme.** Eger $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\delta_i$ jem $h$ nola ymtylanda bellibir $\delta$ predele ymtylsa, şol predele $z = f(x, y)$ üstüň meýdany diýilýär.

Kesgitlemä görä alarys:

$$\delta = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\delta_i.$$

Ýokarda sereden ýagdaýymyzdan peýdalanyp alarys:

$$\Delta\delta_i = \Delta S_i \sqrt{1 + f_x'(x_i, y_i)^2 + f_y'(x_i, y_i)^2}, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\delta = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'(x_i, y_i)^2 + f_y'(x_i, y_i)^2}\, \Delta S_i.$$

Ikigat integralyň kesgitlemesine görä,

$$\delta = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x'(x, y)^2 + f_y'(x, y)^2}\, dxdy$$

üstüň meýdanyny tapmak üçin formulany alarys.

**Mysal.** Radiusy $R$-e deň sferanyň üstüniň δ meýdanyny tapalyň. Sferanyň deňlemesi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ diýip hasap edeliň we onuň $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ýokarky ýarysyna seredeliň. Oňa $x^2 + y^2 \le R^2$ ýaýlada kesgitlenen $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ funksiýanyň grafigi hökmünde garap bolar. Onda ýokarky formulany ulanyp alarys:

$$\delta_1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= R\iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy;$$

bu ýerde $D$ ýaýla $x^2 + y^2 \le R^2$ tegelekdir.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

çalşyrma girizip alarys:

$$\delta_1 = R\iint_{D_1} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, rdrd\varphi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{rdr}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = 2\pi R^2.$$

$\delta = 2\delta_1$ bolany sebäpli, sferanyň üstüniň meýdany $\delta = 4\pi R^2$ formula arkaly tapylýar. Eger üst $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$ parametrik görnüşde berilse we $x, y, z$ funksiýalaryň özleri hem olaryň birinji tertipli önümleri $D$ ýaýlada üznüksiz bolsalar, onda ol üstüň meýdanynyň

$$\delta = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}^2}\, dudv$$

formula arkaly tapylýandygyny belläp geçeliň.

**Mysal.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ koniki üstüň $z = 0$, $z = h$ tekizlikler bilen çäklenen böleginiň meýdanyny tapalyň. Şol bölegiň parametrik deňlemesini ýazalyň: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$; $0 \le u \le h$, $0 \le v \le 2\pi$. Ýokarky formulany ulanyp alarys:

$$\delta = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} \sin v & 1 \\ u\cos v & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos v & 1 \\ -u\sin v & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix}^2}\, dudv =$$

$$= \iint_D \sqrt{2u^2}\, dudv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^h \sqrt{2}\, udu = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\frac{h^2}{2} dv = \sqrt{2}\,\pi h^2.$$

## §5. Plastinanyň agyrlyk merkezi, statiki we inersiýa momentleri

Tekizlikde $D$ ýaýlany tutýan, galyňlygy $\delta$, dykyzlygy $\rho_1(x, y)$ bolan plastinanyň $m$ massasynyň

$$m = \delta \iint_D \rho_1(x,y)dxdy$$

formula arkaly tapylýandygyny biz öň görüpdik. Bu ýerde plastinanyň dykyzlygy onuň galyňlygy boýunça üýtgemeýär diýip hasap edilýär. Adatça, beýle bolanda plastinany onuň orta tekizligi bilen çalşyrýarlar we orta tekizlik $xOy$ tekizlik bilen gabat gelýär diýip hasap edýärler. Ýagny plastina $D$ ýaýla bilen gabat gelýän, dykyzlygy $\rho(x, y) = \delta\rho_1(x, y)$ bolan tekiz figura öwrülýär. $\rho(x, y)$ dykyzlygyň üsti bilen onuň $m$ massasy

$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

formula arkaly, onuň $C(x_c, y_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary bolsa

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

formulalar arkaly tapylar. Onuň $x$ we $y$ oka, koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri degişlilikde

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy$$

bolar. $K_x$, $K_y$ – statiki momentleri bolsa

$$K_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy,$$

$$K_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy$$

formulalar bilen aňladylar.

**Mysal.** $x^2 + y^2 \leq 1$ tegelek görnüşdäki, dykyzlygy $\rho(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ bolan plastinanyň massasyny, agyrlyk merkezini, inersiýa we statiki momentlerini tapalyň.

$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

formulany ulanyp, massasyny tapýarys:

$$m = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy.$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

çalşyrma girizip alarys:

$$m = \iint_{D_1} (r^2 + 1)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1)rdr = \frac{3}{2}\pi.$$

Statiki momentleri

$$K_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy, \quad K_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy$$

formulalardan tapýarys. Tegelegiň $x$ we $y$ oklara görä simmetrik bolany üçin, $\rho(x, y)$ funksiýanyň bolsa diňe $r$-e bagly bolany üçin, $K_x = 0$, $K_y = 0$ bolar.

$$x_c = \frac{K_y}{m},\ y_c = \frac{K_x}{m}$$

bolany üçin, $x_c = 0$, $y_c = 0$ alarys. $I_x$, $I_y$, $I_0$ – inersiýa momentlerini tapalyň:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3(r^2+1)\sin^2\varphi dr = \frac{5\pi}{12},$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3(r^2+1)\cos^2\varphi dr = \frac{5\pi}{12},$$

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho dxdy = I_x + I_y = \frac{5\pi}{6}.$$

## §6. Üçgat integrallar

Giňişlikde $D$ ýaýla we şol ýaýlada kesgitlenen $f(x, y, z)$ funksiýa berilsin. Bellibir $Oxyz$ koordinatalar ulgamyny saýlap alalyň. Aralyklary $h$ bolan $x$ okuna perpendikulýar tekizlikleri geçireliň. Edil şuňa meňzeşlikde, aralyklary $h$ bolan, $y$ okuna perpendikulýar we $z$ okuna perpendikulýar tekizlikleri geçireliň. Ol tekizlikler bütin giňişligi we şonuň bilen bilelikde $D$ ýaýlany bölejiklere bölerler ($D$ ýaýla çäkli hasap edilýär). $D$ ýaýlanyň bölejiklerini 1-den $n$-e çenli belgiläliň. Olaryň göwrümlerini degişlilikde $\Delta V_i$, $i = \overline{1,n}$ bilen belgiläliň. Her bir $i$-nji, $i = \overline{1,n}$ bölejigiň içinde bir $P_i(x_i, y_i, z_i)$ nokat alalyň we

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f$ funksiýa üçin $D$ ýaýla boýunça integral jem diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $h$ nola ymtylanda integral jem, nähili edip $D$ ýaýlany bölejiklere bölendigimize we nähili edip $P_i$ nokatlary saýlap alandygymyza garamazdan, bellibir predele ymtylsa, onda şol predele $f(x, y, z)$ funksiýanyň $D$ ýaýla boýunça **üçgat integraly** diýilýär, $f(x, y, z)$ funksiýa bolsa $D$ ýaýla boýunça integrirlenýän diýilýär.

Üçgat integral $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV$ ýa-da $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitlemä görä alarys:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i.$$

Ikigat integralda bolşy ýaly, çäkli ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz $f(x, y, z)$ funksiýa şol ýaýla boýunça integrirlenýändir. Üçgat integral ikigat integralyň hemme häsiýetlerine eýedir. Ýagny ikigat integralyň sanalyp geçilen 8 häsiýetlerinde meýdan sözüni göwrüm sözi bilen, $\iint\limits_D$ belgini $\iiint\limits_D$ belgi bilen çalşyrsak, olar öz manysyny saklarlar. Biz olary bu ýerde gaýtalap oturmarys. Üçgat integrala getirýän bir mysala seredeliň.

$D$ ýaýlany tutýan, dykyzlygy $\rho(x, y, z)$ üznüksiz funksiýa bolan jisimiň $m$ massasyny tapalyň. Edil üçgat integraly kesgitleýşimizdäki ýaly tekizlikleri geçirip, jisimi bölejiklere böleliň. Onuň $i$-nji bölejiginiň göwrümini $\Delta V_i$, massasyny $\Delta m_i$ bilen belgiläliň. Onda

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$$

boljakdygy aýdyňdyr. Eger $i$-nji bölejikde, $i = \overline{1,n}$, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ nokady alyp, şol bölejikde jisimiň dykyzlygy hemişelik we $\rho(x_i, y_i, z_i)$ baha deň hasap etsek, onda bölejigiň $\Delta m_i$ massasy takmynan

$$\Delta m_i \cong \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

formula bilen kesgitlener we $m$ üçin

$$m \cong \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i$$

takmyn formulany alarys. Bu soňky formula $h$ näçe kiçi bolsa, şonça-da takyk bolar. Şol sebäpli soňky deňlikde $h$ nola ymtylanda predele geçip, üçgat integralyň kesgitlemesine görä

$$m = \iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,dV$$

takyk deňligi alarys. Edil şuňa meňzeşlikde, jisimiň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary üçin aşakdaky formulalary alarys:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_D x\rho(x,y,z)dV,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint_D y\rho(x,y,z)dV,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_D z\,\rho(x,y,z)dV.$$

$I_x, I_y, I_z$ – inersiýa momentleri üçin

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho dV,$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho dV,$$

$$I_z = \iiint_D (y^2 + x^2)\rho dV;$$

$K_x, K_y, K_z$ – statiki momentler üçin

$$K_x = \iiint_D x\rho dxdydz,$$

$$K_y = \iiint_D y\rho dxdydz,$$

$$K_z = \iiint_D z\rho dxdydz$$

formulalary almak kyn däldir.

## §7. Üçgat integraly hasaplamak

Goý, $xOy$ tekizlikde $D$ ýaýla berilsin we $L$ onuň çäk nokatlaryndan duryan egri, ýagny çägi bolsun. $Oxyz$ giňişlikde ugrukdyryjysy $L$ egri bolan, emele getirijileri $z$ okuna parallel gönüler bolan $S$ silindre seredeliň. Goý, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ funksiýalar $D$ ýaýlada üznüksiz bolsun. $S$ silindri $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ üstler bilen kessek, onda $Q$ silindrik jisim emele geler. $f(x, y, z) \in C(Q)$ bolan ýagdaýynda

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV$$

integral aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \iint_D \left( \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Bu ýerde içki integral hasaplananda $x, y$ üýtgeýänler hemişelik hasap edilýär. Eger berlen $R$ ýaýla birnäçe $Q_1, Q_2, ..., Q_k$ silindrik jisimlerden durýan bolsa, onda $\iiint_R fdV$ integral

$$\iiint_R fdV = \iiint_{Q_1} fdV + \iiint_{Q_2} fdV + ... + \iiint_{Q_k} fdV$$

formulany ulanmak bilen tapylýar. Eger $Q$ ýaýla emele getirijileri $x$ okuna ýa-da $y$ okuna parallel bolan silindrik üsti kesmek bilen alnan bolsa, onda hasaplama formulalary degişlilikde

$$\iiint_Q fdV = \iint_D \left( \int_{f_1(y,z)}^{f_2(y,z)} fdx \right) dydz,$$

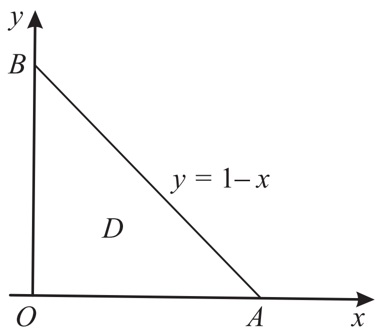
$$\iiint_Q fdV = \iint_D \left( \int_{f_1(x,z)}^{f_2(x,z)} fdy \right) dxdz$$

görnüşde bolar.

**1-nji mysal.** $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ tekizlikler bilen çäklenen we dykyzlygy $\rho = 1 + x + y$ bolan jisimiň massasyny tapalyň. Jisimiň tutýan ýaýlasyny $Q$ bilen belgilesek, $m$ üçin

$$m = \iiint_Q \rho dV$$

formulany alarys. $Q$ ýaýla, emele getirijileri $z$ okuna parallel, ugrukdyryjysy $\Delta AOB$-niň perimetri bolan silindrik üsti $z = 0$, $z = 1 - x - y$ üstler bilen kesip alynýar *(122-nji surat)*.




*122-nji surat*

Diýmek, birinji formula görä alarys:

$$m = \iiint_Q \rho dV =$$

$$= \iint_D \left( \int_0^{1-x-y} (1 + x + y) dz \right) dxdy$$

ýa-da

$$m = \iiint_Q \rho dV = \iint_D (1 + x + y)(1 - x - y) dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [1 - (x + y)^2] dy = \int_0^1 \left[ y - \frac{(x + y)^3}{3} \right]\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{4}.$$

Edil ikigat integraldaky ýaly, kä ýagdaýlarda üçgat integraly hem üýtgeýänleri çalşyrma usulyny ulanyp tapmak amatly bolýar. Mysal üçin, integral alynýan ýaýla şar, şaryň sektory ýa-da segmenti bolan ýagdaýlarynda sferiki koordinatalara geçmek, ýagny

$$x = r\sin\theta \cos\varphi, \quad y = r\sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

çalşyrmany girizmek amatly bolýar. Bu ýagdaýda geçiş formulasy

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \iiint_{D_1} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

görnüşde bolar. Bu ýerde $D_1$ ýaýla $Or\varphi\theta$ dekart koordinatalar ulgamynda silindrik jisim bolar. Hususy halda, $D$ şar bolan ýagdaýynda $D_1$ gönüburçly prizma bolýar.

Eger $D$ ýaýla esasy egriçyzykly sektor bolan silindrik jisim bolsa, onda silindrik koordinatalara geçmek, ýagny

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

çalşyrma girizmek amatly bolýar. Bu ýagdaýda geçiş formulasy

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$$

görnüşde bolar. Bu ýerde $D_1$ ýaýla esasy egriçyzykly trapesiýa bolan silindrik jisim bolar.

**2-nji mysal.** $x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0$, birjynsly ýarym şaryň agyrlyk merkezini tapalyň. Ýarym şar $z$ okuna görä simmetrik bolany sebäpli, onuň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkezi $z$ okunda ýatar, ýagny $x_c = y_c = 0$ bolar we ýokardan belli bolşy ýaly,

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_D z\rho dV, \quad m = \iiint_D \rho dV$$

formula arkaly kesgitlener. Jisim birjynsly bolany sebäpli, $\rho = \rho_0$ – hemişelik bolar. Alarys:

$$m = \rho_0 \iiint_D dV = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_0,$$

$$z_c = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\pi R^3}\iiint_D zdV.$$

Indi

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

çalşyrmany girizeliň, ýagny sferiki koordinatalara geçeliň. Onda ýokarda getirilen formula görä,

$$z_c = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\pi R^3}\iiint_{D_1} r\cos\theta r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

$D_1$ ýaýla $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ gönüburçly prizma bolany üçin,

$$z_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi R^3} \iint_{D_2} \left( \int_0^R r^3 \sin\theta \cos\theta dr \right) d\varphi d\theta$$

bolar. Bu ýerde, $D_2 - \left(0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ gönüburçluk.

Alarys:

$$z_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi R^3} \iint_{D_2} \frac{R^4}{4} \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{3}{8} R.$$

Ýagny $C\left(0, 0, \frac{3}{8} R\right)$ – agyrlyk merkezi.

**Bellik.** $\iiint_D dxdydz$ integralyň bahasynyň $D$ ýaýlanyň göwrümine deň bolany üçin, üçgat integraly göwrüm tapmakda hem ulansa bolar.

Umumy halda

$$\begin{cases} x = x(u, v, t), \\ y = y(u, v, t), \\ z = z(u, v, t) \end{cases}$$

çalşyrma girizilende, ikigat integralda getirilen manysynda $D$ ýaýla $D_1$ ýaýla geçse,

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{D_1} f(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t) | I | dudvdt$$

geçiş formulasyny alarys. Bu ýerde $I$ – ýakobian diýlip atlandyrylýan kesgitleýji, ýagny

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

# XI. EGRIÇYZYKLY WE ÜST INTEGRALLARY BARADA DÜŞÜNJE

## §1. Egriçyzykly integrallar

Giňişlikde $Z$ egri çyzyk berlen. $A$ – egriniň başlangyç, $B$ – ahyrky nokady bolsun. Egrini $M_0(x_0, y_0, z_0) = A, M_1(x_1, y_1, z_1), ..., M_n(x_n, y_n, z_n) = B$ nokatlar bilen bölejiklere böleliň. $\breve{M_0 M_1}$ duganyň uzynlygyny $S_1$, $\breve{M_0 M_2}$ duganyň uzynlygyny $S_2$, ..., $\breve{M_0 M_n}$ duganyň uzynlygyny $S_n$ bilen belgiläliň.

$$\Delta S_k = S_k - S_{k-1},\ k = \overline{1,n},\ S_0 = 0,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = \overline{1,n},$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ k = \overline{1,n},$$

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1},\ k = \overline{1,n},$$

$$\lambda = \max_k \Delta S_k$$

belgilemeleri girizeliň. Goý, $Z$ endigan egri bolsun, $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ $Z$ egriniň nokatlarynda ýa-da $Z$ egrini saklaýan ýaýlada kesgitlenen we $Z$ egriniň nokatlarynda üznüksiz funksiýalar bolsun. Her bir $\breve{M_{k-1} M_k}$, $k = \overline{1,n}$, dugada bir $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nokady saýlap alalyň we aşakdaky jemleri düzeliň:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k. \tag{4}$$

Eger (1) jem $\lambda$ nola ymtylanda ($P_k$ nokatlaryň saýlanyp alnyşyna we $Z$ egrini bölejiklere bölüşimize baglanyşyksyzlykda) bellibir predele ymtylýan bolsa, onda şol predele $f(x, y, z)$ funksiýanyň $Z$ egri boýunça birinji görnüşli egriçyzykly integraly diýilýär we ol

$$\int_Z fds \text{ ýa-da } \int_A^B fds$$

görnüşde belgilenýär. Ýagny kesgitlemä görä,

$$\int_Z fds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k.$$

Eger (2) jem $\lambda$ nola ymtylanda ýokardaky şertlerde bellibir predele ymtylsa, onda şol predele $P(x, y, z)$ funksiýanyň $Z$ egri boýunça ikinji görnüşli egriçyzykly integraly diýilýär we ol

$$\int_Z Pdx \text{ ýa-da } \int_A^B Pdx$$

bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä alarys:

$$\int_Z Pdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k.$$

$\int_Z Qdy, \int_Z Rdz$ integrallar hem şuňa meňzeşlikde

$$\int_Z Qdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k,$$

$$\int_Z Rdz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k$$

deňlikler arkaly kesgitlenýärler. Adatça, $\int_Z Pdx, \int_Z Qdy, \int_Z Rdz$ integrallaryň jemi

$$\int_Z Pdx + Qdy + Rdz \text{ ýa-da } \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$$

görnüşde ýazylýar we bu jeme ikinji görnüşli egriçyzykly integral diýilýär.

Goý, $Z$ egri $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta, x(\alpha) = x_A, y(\alpha) = y_A, z(\alpha) = z_A, x(\beta) = x_B, y(\beta) = y_B, z(\beta) = z_B$ parametrik görnüşde berlen bolsun we $x(t), y(t), z(t)$ funksiýalaryň özleri hem-de olaryň birinji tertipli önümleri $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolsun. Onda birinji we ikinji görnüşli egriçyzykly integrallary hasaplamak üçin ulanylýan aşakdaky formulalary alarys:

$$\int_A^B fds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt,$$

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_A^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Eger indi $Z$ egriniň $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadyndaky galtaşýanynyň ortuny, ýagny $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}}$$

wektory $\vec{\tau}$ bilen belgilesek, onda birinji we ikinji görnüşli egriçyzykly integrallary baglanyşdyrýan

$$\int_Z Pdx + Qdy + Rdz = \int_Z (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

formulany alarys. Adatça, $\overrightarrow{ds} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ wektorlary girizip, soňky deňligi

$$\int_Z \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_Z \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds$$

görnüşde ýazýarlar. Biz egriçyzykly integrallaryň häsiýetleriniň üstünde durup hem geçmedik. Emma olaryň kesgitlemelerinden we olary hasaplaýyş formulalaryndan görnüşi ýaly, olar kesgitli integrala degişli häsiýetleriň köpüsine eýedirler.

Eger material nokat $\vec{F}$ güýjüň täsiri astynda $Z$ egri boýunça $A$ nokatdan $B$ nokada süýşen bolsa, onda $\vec{F}$ güýjüň şu geçişde bitiren $I$ işi

$$I = \int_Z \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_Z \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_Z Pdx + Qdy + Rdz$$

formula bilen kesgitlener. Eger $Z$ material egri bolup, onuň dykyzlygy $\rho(x, y, z)$ bolsa, onda onuň $m$ massasy $m = \int_Z \rho(x,y,z) ds$ formula bilen tapylar. Bu formulalaryň ikisi hem egriçyzykly integralyň kesgitlemesine meňzeşlikde çykarylýar. Biz olary gaýtalap durmarys. Ýöne bir zady belläliň. Tekizlikde ýatýan $Z$ egri üçin egriçyzykly integrallar

$$\int_Z f(x,y) ds, \int_Z Pdx + Qdy$$

görnüşde bolarlar. Olara giňişlikdäki integrallaryň hususy ýagdaýy hökmünde garamak bolar.

**1-nji mysal.** $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $1 \le t \le \sqrt{3}$ egriçyzygyň dugasy berlen, $\rho = (1 + 2y)^{-\frac{3}{2}}$ onuň dykyzlygy. Duganyň $m$ massasyny tapalyň.

Ýokarda getirilen formula görä, $m = \int_Z \rho(x,y) ds$. Birinji görnüşli egriçyzykly integraly hasaplaýyş formulasy boýunça alarys:

$$m = \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 + 2 \cdot \frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1^2 + t^2}\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

**2-nji mysal.** Material nokat $\vec{F} = \{1,\ x+y,\ y+z\}$ güýjüň täsiri astynda $x = t,\ y = \frac{t^2}{2}$, $z = t + 1$, $0 \le t \le 3$ egri boýunça $A(0;\ 0;\ 1)$ nokatdan $B(3;\ 4{,}5;\ 4)$ nokada süýşüpdir. Güýjüň şu geçişde bitiren $I$ işini tapalyň. Ýokarda getirilen formula görä,

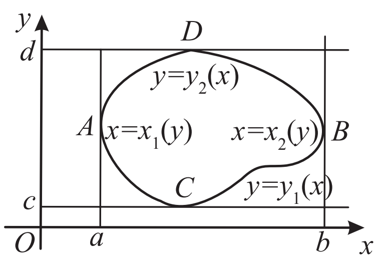
$$I = \int_Z Pdx + Qdy + Rdz.$$

Ikinji görnüşli integraly hasaplamak formulasy boýunça alarys:

$$I = \int_0^3 \left[1 \cdot 1 + \left(t + \frac{t^2}{2}\right)t + \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) \cdot 1\right]dt =$$

$$= \int_0^3 \left(2 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{2}\right)dt = 34\frac{1}{8}.$$

## §2. Griniň formulasy




*123-nji surat*

Tekizlikde ýapyk $Z$ egri bilen çäklenen ýapyk $D$ ýaýla berlen. $D$ ýaýlada özleri we birinji tertipli hususy önümleri üznüksiz bolan $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ funksiýalar berlen.

$$\int_Z Pdx + Qdy$$

integraly hasaplalyň. $D$ ýaýla 123-nji suratdaky ýaly bolsun. Onda alarys:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]dx =$$

$$= -\int_a^b P(x, y_1(x))dx - \int_b^a P(x, y_2(x))dx = -\int_Z P(x, y)dx,$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y) dy + \int_d^c Q(x_1(y), y) dy = \int_Z Q(x, y) dy.$$

Bu ikigat integrallaryň ikinjisinden birinjisini aýryp taparys:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_Z Pdx + Qdy.$$

Bu ýerde egriçyzykly integral $A \to C \to B \to D \to A$ ugur boýunça alynýar. Soňky formula Griniň formulasy ady bilen bellidir. Ol formula ikigat integraly egriçyzykly integralyň üsti bilen aňladýar. Biz Griniň formulasyny getirip çykaranymyzda $D$ ýaýlanyň çäginiň 123-nji suratdaky ýaly bolmagyny talap etdik. Emma bu talap artykmaçdyr. Griniň formulasy $Z$ öz-özüni kesmeýän islendik ýapyk, endigan egri bolanda hem dogrudyr.

Goý, $D$ çäkli, öz-özüni kesmeýän, endigan $Z$ egri bilen çäklenen ýaýla bolsun. $P(x, y) \equiv -y$, $Q(x, y) \equiv x$ funksiýalar üçin Griniň formulasyny ýazalyň:

$$\iint_D (1 + 1) dxdy = \int_Z xdy - ydx.$$

Bu ýerden, $\iint_D dxdy = meýd.D$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $D$ ýaýlanyň meýdany üçin

$$meýd.D = \frac{1}{2} \int_Z xdy - ydx$$

formulany alarys. $\int_Z xdy - ydx$ integral haýsy ugur boýunça alnanda hem formula dogry bolar ýaly meýdan üçin formulany

$$meýd.D = \frac{1}{2} \left| \int_Z xdy - ydx \right|$$

görnüşde ýazsa hem bolar.

**Mysal.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapalyň. Ellipsiň deňlemesini $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ parametrik görnüşde ýazalyň we formulany ulanalyň. Alarys:

$$meýd.D=\frac{1}{2}\left|\int_Z xdy-ydx\right|,$$

$$meýd.D=\frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)dt\right|=\pi ab.$$

## §3. Üst integrallary

$\sum$ üst $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $M(u,v) \in D$ parametrik görnüşde berlen. $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ funksiýalar $D$ ýaýlada üznüksiz we olaryň birinji tertipli hususy önümleri hem şol ýaýlada üznüksiz bolsunlar. $\sum$ üstüň nokatlarynda üznüksiz $F(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar berlen. $uOv$ tekizlikde ýatan $D$ ýaýlany $u$ oka parallel we aralyklary $h$ bolan gönüler bilen hem-de $v$ oka parallel we aralyklary $h$ bolan gönüler bilen bölejiklere böleliň. Olary 1-den $n$-e çenli belgiläp çykalyň. Ol bölejikleriň meýdanlaryny $\Delta S_i$, $i=\overline{1,n}$, bilen belgiläliň. $M(u,v)$ nokat $D$ ýaýlanyň $i$-nji bölegini yzarlap çykanda, $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ nokat $\sum$ üstüň bir bölejigini yzarlap çykar. Bu bölejigi hem $i$-nji belgi bilen, onuň meýdanyny bolsa $\Delta\sigma^i$ bilen belgiläliň.

Diýmek, $\sum$ üst meýdanlary $\Delta\sigma^1, \Delta\sigma^2, ..., \Delta\sigma^n$ bolan $n$ bölege bölüner. $\sum$ üstüň $i$-nji bölejiginiň $xOy$ tekizlige bolan proýeksiýasynyň meýdanyny $\Delta\sigma^i_{xy}$, $xOz$ tekizlige bolan proýeksiýasyny $\Delta\sigma^i_{xz}$, $yOz$ tekizlige bolan proýeksiýasyny $\Delta\sigma^i_{yz}$ bilen belgiläliň. $D$ ýaýlanyň $i$-nji bölejiginiň içinde $R_i(u_i, v_i)$ nokady we $\sum$ üstüň $i$-nji bölejiginde bolsa degişli $N_i(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i), z(u_i,v_i))$ nokady alyp, aşakdaky jemleri düzeliň:

$$\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma^i,\quad \sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma^i_{yz};$$

$$\sum_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma^i_{xz},\quad \sum_{i=1}^{n}R(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma^i_{xy};$$

bu ýerde $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$. Jemlere $\sum$ üst boýunça integral jemler diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma^i$ integral jem $h$ nola ymtylanda, $\sum$ üsti nähili edip böleklere bölenimize we $N(x_i, y_i, z_i)$ nokatlary nähili edip saýlap alandygymyza baglanyşyksyzlykda, bellibir predele ymtylýan bolsa, onda şol predele $F(x, y, z)$ funksiýadan $\sum$ üst boýunça alnan birinji kysymly üst integraly diýilýär, $F(x, y, z)$ funksiýa bolsa $\sum$ üst boýunça integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Birinji kysymly üst integraly $\iint\limits_{\Sigma} Fd\sigma$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitlemä görä birinji kysymly üst integraly

$$\iint\limits_{\Sigma} Fd\sigma = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma^i$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

**Kesgitleme.** Eger $\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_{yz}^i$ integral jem $h$ nola ymtylanda, $\sum$ üsti nähili edip böleklere bölendigimize we $N(x_i, y_i, z_i)$ nokatlary nähili edip saýlap alandygymyza baglanyşyksyzlykda, bellibir predele ymtylýan bolsa, onda şol predele $P(x, y, z)$ funksiýadan $\sum$ üst boýunça alnan ikinji kysymly üst integraly diýilýär, $P(x, y, z)$ funksiýa bolsa $\sum$ üst boýunça integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Ikinji kysymly üst integraly $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitlemä görä, ikinji kysymly üst integraly

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_{yz}^i$$

deňlik bilen kesgitlenýär. Edil şuňa meňzeşlikde, $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz$, $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$ ikinji kysymly üst integrallary aşakdaky deňlikler bilen kesgitlenýär:

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(x_i,y_i,z_i)\,\Delta\sigma_{xz}^{i},$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(x_i,y_i,z_i)\,\Delta\sigma_{xy}^{i}.$$

$\sum$ üsti kesgitleýän funksiýalar barada edilen teklipler ýerine ýetende, *F, P, Q, R* funksiýalar $\sum$ üstüň nokatlarynda üznüksiz hem çäkli bolanlarynda ol funksiýalaryň $\sum$ üst boýunça integrirlenýän funksiýalar boljakdygyny, ýagny getirilen dört üst integrallarynyň barlygyny belläp geçeliň.

Adatça, şoňky ikinji kysymly üst integrallaryň jemini

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

görnüşde ýazýarlar we şol jeme ikinji kysymly üst integraly diýýärler.

## §4. Üst integrallaryny hasaplama formulalary

Biz üst integrallaryny kesgitlänimizde ilki bilen $D$ ýaýlany $D_1$, $D_2$, ..., $D_n$ bölejiklere bölüpdik, ol bölejikleriň meýdanlaryny $\Delta S_i$ bilen, $\sum$ üstüň $D_i$ bölejige degişli $i$-nji böleginiň meýdanyny $\Delta\sigma^i$ bilen belgiläpdik. Parametrik görnüşde berlen üstüň meýdanyny hasaplamak formulasyny ulanyp, ýazyp bileris:

$$\Delta\sigma^{i} = \iint_{D_i} \sqrt{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}^2}\, dudv.$$

Ýazmagy ýeňilleşdirmek üçin $\sum$ üstüň $M(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ nokadynda üste bolan $\vec{N}$ perpendikulýary girizeliň. Ol

$$\vec{N}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}$$

formula arkaly tapylýar. Onuň uzynlygy

$$|\vec{N}(u,v)| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}^2}$$

bolar. Indi $\Delta\sigma^i$ üçin integraly

$$\Delta\sigma^i = \iint_{D_i} |\vec{N}(u,v)| dudv$$

görnüşde ýazyp bileris. Soňky integrala orta baha baradaky formulany ulanyp alarys:

$$\Delta\sigma^i = |\vec{N}(u_i, v_i)| \Delta S_i.$$

Bu ýerde $(u_i, v_i) \in D_i$. Şeýlelikde, birinji kysymly integraly kesgitlemegiň formulasyny

$$\iint_{\Sigma} F d\sigma = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) |\vec{N}(u_i, v_i)| \Delta S_i$$

görnüşde ýazyp bileris. Ikigat integralyň kesgitlemesine görä,

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) |\vec{N}(u_i, v_i)| \Delta S_i =$$

$$= \iint_{D} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\vec{N}(u,v)| dudv.$$

Diýmek, $\iint_{\Sigma} F d\sigma$ integraly hasaplamak üçin aşakdaky formulany alarys:

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z) d\sigma = \iint_{D} F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\vec{N}(u,v)| dudv.$$

Ikinji kysymly integraly hasaplamak formulasyny getirip çykarmak üçin $\vec{N}$ wektoryň ugrukdyryjy

$$\cos\alpha(u,v)=\frac{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}}{|\vec{N}(u,v)|},\ \cos\beta(u,v)=-\frac{\begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}}{|\vec{N}(u,v)|},\ \cos\gamma(u,v)=\frac{\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}}{|\vec{N}(u,v)|}$$

kosinuslaryny girizip, aşakdaky takmyn formulalary ýazyp bileris:

$$\Delta\sigma_{yz}^i=\Delta\sigma^i\cos\alpha(u_i,v_i),\ \ \Delta\sigma_{xz}^i=\Delta\sigma^i\cos\beta(u_i,v_i),$$

$$\Delta\sigma_{xy}^i=\Delta\sigma^i\cos\gamma(u_i,v_i),$$

bu ýerde $(u_i, v_i)\in D_i$ käbir nokat. Bu deňlikler $h$ näçe kiçi boldugyça, şonça-da takykdyr. $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz$, $\iint\limits_{\Sigma} Qdxdz$, $\iint\limits_{\Sigma} Rdxdy$ integrallary kesgitleýän formulalarda $\Delta\sigma_{yz}^i, \Delta\sigma_{xz}^i, \Delta\sigma_{xy}^i$ ululyklary olaryň ýokarky formulalar boýunça tapylan bahalary bilen çalşyryp we integralyň kesgitlemesini ulanyp, ýazyp bileris:

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz=\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz=\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy=\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma.$$

Ýa-da birinji kysymly integraly hasaplama formulasyny ulanyp alarys:

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz=\iint\limits_{D} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}dudv,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Qdxdz=-\iint\limits_{D} Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix}dudv,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Rdxdy=\iint\limits_{D} R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}dudv.$$

$P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = P(u,v)$, $Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = Q(u,v)$, $R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = R(u,v)$ belgilemeleri girizip, ýokarky formulalary, adatça, aşakdaky ýaly umumy görnüşde ýazýarlar:

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma,$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_{D} \left[ P(u,v) \begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix} - Q(u,v) \begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix} + R(u,v) \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix} \right] dudv.$$

Bu formulalaryň ýokarkysy birinji kysymly üst integraly bilen ikinji kysymly üst integralynyň arasyndaky baglanyşygy berýär.

Eger $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ we $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektory girizsek, onda bu baglanyşygy

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (\vec{V}\cdot\vec{n})d\sigma$$

görnüşde hem ýazyp bileris. Formulalaryň ikinjisi ikinji kysymly üst integrallarynyň hasaplaýyş formulasydyr. Ony hem gysgaldyp,

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{D} (\vec{V}\cdot\vec{N})dudv$$

görnüşde ýazyp bolar.

Hususy ýagdaýlara seredeliň. Goý, $\sum$ üst $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ formula bilen berilsin. $f(x, y)$, $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ funksiýalar $D$ ýaýlada çäkli hem üznüksiz bolsunlar. Onda biz $\sum$ üst $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$, $(u,v) \in D$ parametrik görnüşde berlen hasap edip bileris. Bu ýagdaýda

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u' \\ 0 & 1 & f_v' \end{vmatrix} = -f_u' i - f_v' j + k$$

bolar we birinji kysymly $\iint_{\Sigma} Fd\sigma$ üst integralyny hasaplama formulasyny

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} F(u,v,f(u,v))\sqrt{1+f_u'^2+f_v'^2}\,dudv$$

ýa-da $u = x,\ v = y$ bolýandygyny ýatlap,

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy$$

görnüşde ýazyp bileris.

Eger $\sum$ üst $x = f(y, z)$, $(y, z) \in D$, görnüşde berilse we $f(y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada ýokarda $f(x, y)$ funksiýa goýlan şertleri ýerine ýetirse, onda birinji kysymly üst integraly

$$\iint_{\Sigma} Fd\sigma = \iint_{D} F(f(y,z),y,z)\sqrt{1+f_y'^2+f_z'^2}\,dydz$$

formula arkaly hasaplanar. $\sum$ üst $y = f(x, z)$, $(x, z) \in D$, formula bilen berilse, onda ýokarky şertlerde integral

$$\iint_{\Sigma} Fd\sigma = \iint_{D} F(x,\ f(x,z),z)\sqrt{1+f_x'^2+f_z'^2}\,dxdz$$

formula arkaly hasaplanar. $\sum$ üst $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, formula bilen berilse, onda ikinji kysymly $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$ üst integraly

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

formula boýunça hasaplanar. $\sum$ üst $x = f(y, z)$, $(y, z) \in D$, formula bilen berilse, onda ikinji kysymly $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz$ üst integraly

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dydz = \iint_{D} P(f(y,z),y,z)\,dydz$$

formula boýunça hasaplanar. $\sum$ üst $y = f(x, z)$, $(x, z) \in D$, formula bilen berilse, onda ikinji kysymly $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz$ üst integraly

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,dxdz = \iint_{D} Q(x,f(x,z),z)\,dxdz$$

formula boýunça hasaplanar.

**Bellik.** Üst integrallary ýokardaky ýaly ikigat integrala getirilende $\sum$ üstüň normal wektorynyň içki ýa-da daşky normaldygy möhümdir.

**1-nji mysal.** $\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$ integraly $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ tekizlikler bilen çäklenen kubuň üstüniň daşky tarapy boýunça hasaplamaly.

**Çözülişi.** Kubuň üstüniň daşky tarapy boýunça diýmek, kuba geçirilen normal onuň hemme granlarynda daşyna seretmelidir, ýagny daşky normal bolmalydyr diýmekdir. Goý, $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ kubuň üstüniň daşky normaly bolsun. Onda, ikinji kysymly üst integralyny birinji kysymly üst integraly bilen baglanyşdyrýan formula görä alarys:

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma.$$

Bu ýerde $\sum$ − kubuň üsti. Kubuň $x = 0$ tekizlikdäki granyny $\sum_1$, $x = 1$ tekizlikdäkisini $\sum_2$, $y = 0$ tekizlikdäkisini $\sum_3$, $y = 1$ tekizlikdäkisini $\sum_4$, $z = 0$ tekizlikdäkisini $\sum_5$, $z = 1$ tekizlikdäkisini $\sum_6$ bilen belgiläliň. Integralyň häsiýetine görä alarys:

$$\iint_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \iint_{\Sigma_i} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma.$$

$\sum_1$ üstde $\vec{n} = \{-1, 0, 0\}$ we $x = 0$ bolýandygy üçin alarys:

$$\iint_{\Sigma_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = -\iint_{\Sigma_1} xdydz = -\iint_{\Sigma_1} 0dydz = 0.$$

$\sum_2$ üstde $\vec{n} = \{1, 0, 0\}$ we $x = 1$ bolýandygy üçin,

$$\iint_{\Sigma_2} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = \iint_{\Sigma_2} xd\sigma = \iint_{\Sigma_2} d\sigma = mey\acute{d}.\sum\nolimits_2 = 1.$$

$\sum_3$ üstde $\vec{n} = \{0, -1, 0\}$ we $y = 0$ bolýandygy üçin,

$$\iint_{\Sigma_3} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = -\iint_{\Sigma_3} yd\sigma = -\iint_{\Sigma_3} 0d\sigma = 0.$$

$\sum_4$ üstde $\vec{n} = \{0, 1, 0\}$ we $y = 1$ bolýandygy üçin,

$$\iint_{\Sigma_4} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = \iint_{\Sigma_4} yd\sigma = \iint_{\Sigma_4} d\sigma = mey\acute{d}.\Sigma_4 = 1.$$

$\sum_5$ üstde $\vec{n} = \{0, 0, -1\}$ we $z = 0$ bolýandygy üçin,

$$\iint_{\Sigma_5} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = -\iint_{\Sigma_5} zd\sigma = -\iint_{\Sigma_5} 0d\sigma = 0.$$

$\sum_6$ üstde $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$ we $z = 1$ bolýandygy üçin,

$$\iint_{\Sigma_6} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)d\sigma = \iint_{\Sigma_6} zd\sigma = \iint_{\Sigma_6} d\sigma = 1.$$

Hasaplanan integrallary goşup alarys:

$$\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = 3.$$

**2-nji mysal.** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sferanyň birinji oktantda ýatýan $S$ bölegi boýunça $\iint_S xd\sigma$ integraly hasaplalyň. Sferanyň deňlemesini $x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ parametrik görnüşde ýazalyň we

$$\iint_S xd\sigma = \iint_D R\sin\theta\cos\varphi |\vec{N}| d\varphi d\theta$$

formulany ulanalyň. Bu ýerde $D - 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ gönüburçluk. Normal wektory tapalyň:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

ýa-da

$$\vec{N} = i \cdot \begin{vmatrix} R\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta \end{vmatrix} +$$

$$+ k \cdot \begin{vmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi \cdot i - R^2\sin^2\theta\sin\varphi \cdot j - R^2\sin\theta\cos\theta \cdot k.$$

$\vec{N}$-iň bahasyny formulada ýerine goýalyň:

$$\iint_S x d\sigma = \iint_D R\sin\theta\cos\varphi \times$$

$$\times \sqrt{R^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + R^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + R^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\, d\varphi d\theta =$$

$$= \iint_D R^3\sin^2\theta\cos\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^2\theta\cos\varphi d\theta = \frac{\pi R^3}{4}.$$

## §5. Ostrogradskiniň formulasy

Griniň formulasy ýapyk egriçyzykly integral bilen şol egriniň çäkleýän $D$ ýaýlasy boýunça alnan ikigat integraly baglanyşdyrýar. Edil şuňa meňzeşlikde, Ostrogradskiniň formulasy ýapyk $\sum$ üst boýunça alnan üst integralyny şol üst bilen çäklenen $D$ ýaýla boýunça alnan üçgat integral bilen baglanyşdyrýar.

Goý, öz-özüni kesmeýän ýapyk, endigan $\sum$ üst berilsin. $D$ şol üst bilen çäklenen ýaýla bolsun. $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar ýapyk $D$ ýaýlada kesgitlenen we özleriniň birinji tertipli hususy önümleri bilen ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz bolsunlar. Onda beýik rus alymy Ostrogradskiniň adyny göterýän aşakdaky formula ýerliklidir:

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Bu formula $\sum$ üst tutuş endigan bolman, endigan böleklerden durýan bolanda hem dogrudyr. Eger $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ $\sum$ üste $M(x, y, z)$ nokatda geçirilen normal wektor bolsa, onda Ostrogradskiniň formulasyny, ikinji we birinji kysymly üst integrallarynyň arasyndaky baglanyşygy ulanyp,

$$\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma = \iiint_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

görnüşde hem ýazmak bolar. Adatça, $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektory girizip we

$$div\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

belgilemäni ulanyp, soňky formula

$$\iint_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_{D} div\vec{V}\, dxdydz$$

ýa-da $V_n = \vec{V} \cdot \vec{n}$ belgileme girizilip,

$$\iint_{\Sigma} V_n d\sigma = \iiint_{D} div\vec{V}\, dxdydz$$

görnüşde ýazylýar.

## §6. Stoksyň formulasy

$\sum$ endigan böleklerden durýan üst, $L$ egri onuň çägi bolsun. $L$ egriniň hem endigan böleklerden durmagyny talap edeliň. Goý, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar $\sum$ üstde kesgitlenen we özleriniň birinji tertipli önümleri bilen üznüksiz bolsunlar. Onda

Stoksyň adyny göterýän aşakdaky formula ýerliklidir:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

$\sum$ üste onuň islendik $M(x, y, z)$ nokadynda geçirilen normal wektory $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ bilen, $L$ egrä onuň islendik nokadynda geçirilen galtaşýan wektory $\vec{\tau} = \{\cos w_1, \cos w_2, \cos w_3\}$ bilen belgiläliň. Onda birinji we ikinji görnüşli egriçyzykly integrallaryň we üst integrallaryň aralaryndaky baglanyşygy ulanyp, Stoksyň formulasyny

$$\int_L (P\cos w_1 + Q\cos w_2 + R\cos w_3)ds =$$

$$= \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma$$

görnüşde ýa-da tow wektory diýlip atlandyrylýan

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) +$$

$$+ j\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + k\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

wektory girizip,

$$\int_L \vec{V}\cdot\vec{\tau}ds = \iint_\Sigma rot\vec{V}\cdot\vec{n}d\sigma$$

görnüşde ýazyp bolar. $\vec{V}\cdot\vec{\tau} = V_\tau$, $rot\vec{V}\cdot\vec{n} = rot\vec{V}_n$ görnüşde belgilemeleri girizip, Stoksyň formulasyny has ýönekeý

$$\int_L V_\tau ds = \iint_\Sigma rot\vec{V}_n d\sigma$$

görnüşde hem ýazyp bolar.

## §7. Skalýar we wektor meýdanlar

Eger $D$ ýaýlada $U(x, y, z)$ funksiýa berlen bolsa, onda $D$ ýaýlada skalýar meýdan berlipdir diýilýär. Mysal üçin, jisimiň islendik nokadyndaky $T(x, y, z)$ temperaturasy, $P(x, y, z)$ dykyzlygy skalýar meýdana mysal bolup bilerler. Elbetde, köp ýagdaýlarda skalýar meýdan wagta hem bagly bolýar. Ýönekeýlik üçin, nokadyň koordinatalaryna bagly skalýar meýdanlara serederis.

Köp üýtgeýänli funksiýalar geçilende biz $U(x, y, z)$ funksiýanyň gradiýenti diýen düşünje girizipdik. $U(x, y, z)$ funksiýanyň $(x, y, z)$ nokatdaky gradiýent wektory diýip $gradU$ bilen belgilenýän we

$$gradU = \{U_x'(x,y,z), \quad U_y'(x,y,z), \quad U_z'(x,y,z)\}$$

formula bilen kesgitlenýän wektora aýdypdyk. Öňden belli bolşy ýaly, $gradU$ wektor $U(x, y, z)$ funksiýanyň $(x, y, z)$ nokatda iň basym artýan ugruny görkezýär. $gradU$ wektora $U(x, y, z)$ skalýar meýdanyň gradiýent wektory hem diýilýär.

$U(x, y, z)$ funksiýanyň $U(x, y, z) = c$ dereje üstüniň islendik $M$ nokadynda hasaplanan gradiýent wektoryň şol üste $M$ nokatda normal wektor bolýandygyny biz üste onuň berlen nokadynda geçirilen galtaşýan tekizlik barada düşündirenimizde ýatladypdyk. Adatça, Gamiltonyň $\nabla$ – «nabla» atly operatoryny girizip, gradiýent wektory $\nabla U$ görnüşde ýazýarlar. Ýagny

$$\nabla U = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z} = gradU.$$

Eger $D$ ýaýlanyň her bir $M(x, y, z)$ nokadynda $\vec{V} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ wektor berlen bolsa, onda $D$ ýaýlada $\vec{V}$ wektor meýdany berlen diýilýär.

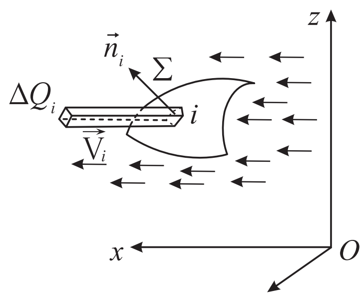
Mysal üçin, akýan suwuklygyň ýa-da gazyň berlen pursatda islendik nokadynyň bellibir $\vec{V}$ tizligi bar. Ine, şol tizlikler (wektorlar) suwuklygyň ýa-da gazyň şol pursatda tutýan $D$ ýaýlasynda wektor meýdanyny emele getirýärler. Eger $U(x, y, z)$ $D$ ýaýlada berlen endigan skalýar meýdan (funksiýa) bolsa, onda $D$ ýaýlanyň islendik nokadynda $\nabla U$ – gradiýent wektor kesgitlenen bolýar. Ine, $\nabla U$ – gradiýent wektorlar hem $D$ ýaýlada wektor meýdanyny emele getirýärler. $U(x,y,z) = \frac{a}{r}$; $a > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, funksiýanyň *gradU* wektoryny tapalyň. $U_x' = -\frac{a}{r^3}x$, $U_y' = -\frac{a}{r^3}y$, $U_z' = -\frac{a}{r^3}z$ bolýandygy sebäpli alarys:

$$grad\frac{a}{r} = -\frac{a}{r^3}xi - \frac{a}{r^3}yj - \frac{a}{r^3}zk.$$

Eger $xi + yj + zk = \vec{r}$ belgilemäni ulansak, onda

$$grad\frac{a}{r} = -\frac{a}{r^3}\vec{r}$$

bolar. Diýmek, islendik $M(x, y, z)$ nokatda *gradU* koordinatalar başlangyjyna ugrukdyrylan wektor bolýar. Onuň ululygy bolsa $\frac{a}{r^2}$ deň bolýar. Bu emele gelen wektor meýdanynyň örän täsin manysy bar. Goý, koordinatalar başlangyjynda $m$ massaly $O$ nokat ýerleşen bolsun. $M(x, y, z)$ nokatda ýerleşen $m_1$ massaly nokady $O$ nokat ululygy $\frac{a}{r^2}$,




*124-nji surat*

$a = \gamma m m_1$, bolan $\vec{F}$ güýç bilen özüne dartar we $\vec{F}$ güýç $O$ nokada tarap ugrukdyrylan bolar. Diýmek, $\vec{F} = -\lambda\vec{r}; \lambda > 0$ we $|\vec{F}| = \lambda|\vec{r}| = \lambda r$ bolar. Beýleki tarapdan, $|\vec{F}| = \frac{a}{r^2}$. $|\vec{F}|$-iň iki bahasyny deňläp alarys: $\frac{a}{r^2} = \lambda r$ ýa-da $\lambda = \frac{a}{r^3}$; $\lambda$-nyň tapylan bahasyny ýerinde goýup alarys:

$$\vec{F} = -\frac{a}{r^3}\vec{r} \quad \text{ýa-da} \quad \vec{F} = grad\frac{a}{r}.$$

Ýagny $O$ nokadyň dartyş güýçleriniň meýdany $grad\frac{a}{r}$ wektor meýdany bilen gabat gelýär.

$D$ ýaýlada $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektor meýdany kesgitlenen diýeliň. $D$ ýaýlada ýatýan $L$ egrä seredeliň. Eger $L$ egriniň islendik nokadyndaky $\vec{V}$ meýdanyň wektory şol egrä şol nokatda galtaşýan bolsa, onda $L$

egrä wektor egrisi diýilýär. Goý, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ egriniň parametrik deňlemesi bolsun. Onda $\vec{\tau} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}$ wektor $L$ egrä $M(x(t), y(t), z(t))$ nokatda galtaşýan wektor bolar. Diýmek, $\vec{\tau}$ wektor we $M$ nokatdaky $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektor proporsional bolarlar. Ýagny $\vec{\tau} = \lambda\vec{V}$ ýa-da

$$\frac{dx}{dt} = \lambda P, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda Q, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda R.$$

Bu ýerden wektor egrisiniň differensial deňlemesini

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

görnüşde ýazyp boljakdygy aýdyňdyr. $P$, $Q$, $R$ funksiýalar we olaryň birinji tertipli hususy önümleri $D$ ýaýlada üznüksiz bolanlarynda, $D$ ýaýlanyň islendik $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyndan geçýän we bütin $D$ ýaýlada kesgitlenen ýeke-täk wektor egrisiniň barlygy ýokarda getirilen differensial deňlemelere degişli Koşiniň barlyk we ýeke-täklik teoremalaryndan gelip çykýar.

$\vec{V}$ wektor meýdanyny haýsy hem bolsa bir (mysal üçin, suwuklyk ýa-da gaz) akymynyň nokatlarynyň tizlikleri emele getiripdir diýeliň. Şol akymyň ugrunda göz öňüne getirilýän endigan $\sum$ üst dur diýeliň. Wagt birliginde $\sum$ üstden geçýän suwuklygyň mukdaryny kesgitläliň.

$\sum$ üsti her bölejigi taraplary $h$-a deň bolan kubuň içinde ýatar ýaly edip, $n$ bölege böleliň. Olary 1-den $n$-e çenli belgiläliň we olaryň meýdanlaryny degişlilikde $\Delta\sigma_i$ bilen belgiläliň. $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektoryň koordinatalary $\sum$ üstde üznüksiz we çäkli hasap edeliň. Onda $h$-yň ýeterlik kiçi ýagdaýynda $\sum$ üstüň bölejikleri tekiz meýdança, her bir bölejigiň nokatlarynda $\vec{V}$ meýdanyň wektorlarynyň ugurlary birmeňzeş, ululyklary hem deň diýip hasap etse bolar. Ýagny $i$-nji bölejikdäki meýdanyň wektorlary meýdanyň şol bölejiginiň haýsy hem bolsa bir $N_i$ nokadyndaky $\vec{V}_i$ wektoryna deň diýse bolar. Onda $\sum$ üstüň $i$-nji bölejiginden wagt birliginde geçýän suwuklygyň $\Delta Q_i$ mukdary esasy $i$ bölejik, gapdal gapyrgalary $\vec{V}_i$ wektora parallel, uzynlyklary $\vec{V}_i$ wektoryň uzynlygyna deň prizmanyň göwrümine deň bolar *(124-nji surat)*. Eger $\vec{n}_i$ $i$-nji bölejige $N_i$ nokatda geçirilen normal bolsa, onda prizmanyň beýikligi $\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i$ bolar we $\Delta Q_i$ göwrüm üçin $\Delta Q_i = \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i\right) \cdot \Delta\sigma_i$ aňlatmany alarys. Diýmek, bütin $\sum$ üstden geçýän suwuklygyň $Q$ mukdary takmynan

$$Q \cong \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i) \Delta\sigma_i$$

formula arkaly kesgitlener. Bu formula $h$ näçe kiçi bolsa, şonça-da takykdyr. Onda $h$ nola ymtylanda formulada predele geçip,

$$Q = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i) \Delta\sigma_i$$

takyk deňligi alarys. Birinji kysymly üst integralynyň kesgitlemesini ulanyp, soňky deňligi

$$Q = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma \quad \text{ýa-da} \quad Q = \iint_{\Sigma} V_n d\sigma$$

görnüşde ýazyp bolar. Şeýlelikde,

$$\iint_{\Sigma} V_n d\sigma = \iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma$$

integral wagt birliginde $\sum$ üstden geçýän suwuklygyň mukdaryny aňladýar. Şol sebäpli, oňa wektor meýdanynyň $\sum$ üstden geçýän akymy hem diýilýär. $\sum$ üst ýapyk bolsa, onda, bilşimiz ýaly,

$$\iint_{\Sigma} V_n d\sigma = \iiint_{D_\Sigma} div\vec{V} dxdydz$$

Ostrogradskiniň formulasy dogrudyr. Ýagny ýapyk üstden wagt birliginde geçýän suwuklygyň möçberi soňky deňligiň sag tarapyndaky üçgat integrala deňdir. Bu ýerde $D_\Sigma$ $\sum$ üst bilen çäklenen ýaýla.

Eger $div\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ululyk wektor meýdany kesgitlenen $D$ ýaýlada toždestwolaýyn nola deň bolsa, onda soňky deňlikdäki üçgat integral we onuň bilen bilelikde $\iint_{\Sigma} V_n d\sigma$ integral hem nola deň bolar. Ýagny $D$ ýaýlada ýerleşýän islendik $\sum$ ýapyk üstden geçýän meýdan akymy nola deň bolar. Tersine hem dogrudyr. Eger $D$ ýaýlada ýerleşýän islendik ýapyk üstden geçýän meýdan akymy nola deň bolsa, onda şol ýaýlada

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$$

toždestwo ýerine ýeter.

Indi ýene bir zat barada aýdalyň. Material nokat $\vec{V} = \{P,Q,R\}$ güýjüň täsiri astynda $A$ nokatdan $B$ nokada $L$ egri boýunça geçende,

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

integralyň $\vec{V}$ güýjüň şu geçişde bitiren işine deňdigini biz ozal görüpdik. Eger $\vec{V}$ wektor meýdanyna degişli bolsa, onda ýokarky integrala $\vec{V}$ wektor meýdanynyň bitiren işi hem diýilýär.

Eger $U(x, y, z)$ funksiýa tapylyp, bütin $D$ ýaýlada $gradU = \vec{V}$ bolsa, onda $\vec{V}$ wektor meýdanyna potensial wektor meýdany, $U(x, y, z)$ funksiýa bolsa potensial diýip at berýärler. Potensial meýdanyň material nokat $A$ nokatdan $B$ nokada geçende bitirýän işi diňe $A$ we $B$ nokatlara baglydyr hem-de haýsy ýol bilen $A$-dan $B$ nokada barylanyna bagly däldir. Has takygy, ol iş potensial funksiýanyň $A$ we $B$ nokatlardaky bahalarynyň tapawudyna, ýagny $U(B) – U(A)$ tapawuda deňdir. $\vec{V} = \{P,Q,R\}$ – potensial wektor meýdany bolsa, onda $P = U_x'$, $Q = U_y'$, $R = U_z'$ bolar we bu meýdanyň tow wektory – $rot\vec{V}$ $D$ ýaýlanyň islendik nokadynda nola deň bolar. Dogrudan hem,

$$rot\vec{V} = i\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= i(U_{zy}'' - U_{yz}'') + j(U_{xz}'' - U_{zx}'') + k(U_{yx}'' - U_{xy}'') = \vec{0}.$$

Potensial meýdanyň bitiren işiniň geçilen ýola bagly däldigi hakyndaky tassyklama Stoksyň formulasyny we $rot\vec{V} = \vec{0}$ bolýandygyny ulanyp, aňsatlyk bilen subut edilýär. Tersine, $D$ ýaýlada $\vec{V}$ wektor meýdanynyň potensial wektor meýdany bolmagy üçin bütin $D$ ýaýlada $rot\vec{V} = \vec{0}$ bolmagy ýeterlikdir. Diýmek, bütin $D$ ýaýlada

$rot\vec{V} = \vec{0}$ bolmagy $\vec{V}$ wektor meýdanynyň potensial wektor meýdany bolmaklygynyň zerurlyk we ýeterlik şertidir.

Biz diňe üç ölçegli giňişlikdäki wektor meýdanlaryna seretdik. Iki ölçegli giňişlikdäki $\vec{V} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ wektor meýdanyna üç ölçegli wektor meýdanynyň hususy ýagdaýy hökmünde garamak bolar. Ýagny $\sum$ üst tekizlikdäki $D$ ýaýla bilen gabat gelýär, $R \equiv 0$ we $z = 0$ diýlip hasap edilse, giňişlikdäki wektor meýdany tekizlikdäki wektor meýdanyna geçer we giňişlikdäki wektor meýdany üçin alnan netijeler bolsa tekizlikdäki wektor meýdany üçin hem dogry bolar. Mysal üçin, Stoksyň formulasy Griniň formulasyna geçer, $rot\vec{V}$ – tow wektory

$$rot\vec{V} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

görnüşe geler, $rot\vec{V} = \vec{0}$ bolsa, ýagny $D$ ýaýlada

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$$

bolsa, onda tekizlikdäki wektor meýdany hem potensial wektor meýdany bolar we tekizlikdäki wektor meýdanynyň bitirýän işi ýola bagly bolmaz.

**Mysal.** Material nokat ýeriň töweregindе hereket edip, $A(x_0, y_0, z_0)$ nokatdan $B(x_1, y_1, z_1)$ nokada geçipdir. Ýeriň dartyş güýjüniň şu geçişde bitiren işini kesgitläliň. Biz koordinatalar başlangyjy ýeriň merkezinde ýerleşen diýip hasap edýäris. Şonda ýeriň $m$ massaly $M(x, y, z)$ nokada täsir edýän $\vec{F}$ güýji ululygy boýunça $\frac{a}{r^2}$ deň, ugry boýunça koordinatalar başlangyjyna gönükdirilen bolýar. Bu ýerde $a$ – ýeriň massasyna we $m$ massa bagly käbir hemişelik san. Ýokarda sereden mysalymyzdan görnüşi ýaly, $\vec{F} = grad\frac{a}{r}$ bolar. Onda seredilýän meýdanyň bitiren $A$ işi

$$A = U(B) - U(A) = \frac{a}{r_B} - \frac{a}{r_A} = \frac{a}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{a}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

formula arkaly kesgitlener.

# XII. HATARLAR

## §1. San hatarlary

Matematikanyň durmuşda ýüze çykýan meseleleri çözmek üçin döredilen gurallarynyň içinde hatarlar möhüm orun tutýanlarynyň biridir. Olary, esasan hem, takmyn çözüwde giňden ulanýarlar. Funksiýanyň tablisasyny düzmek, integrallary we differensial deňlemeleri takmyn hasaplamak meseleleri, esasan, hatarlaryň üsti bilen amala aşyrylýandyr.

Hatarlaryň içinde iň ýönekeýi san hatarlarydyr. Ol tükeniksiz sandaky goşulyjylaryň jemi barada düşünjedir.

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

tükeniksiz jeme san hatary diýilýär, $a_0$, $a_1$, ... sanlara hataryň agzalary, $a_n$ sana bolsa hataryň umumy agzasy diýilýär. Hatary gysgaça

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

görnüşde ýazýarlar. Hataryň berilmegi üçin onuň islendik agzasyny, ýagny umumy agzasyny hasaplap bolýan kanun berilmelidir. Ol kanun, adatça, $a_n = f(n)$ formula görnüşinde berilýär. Mysal üçin, $a_n = aq^n$, $n \geq 0$, formula boýunça $n$-iň ýerine 0, 1, .... sanlary goýup, san hatarynyň hemme agzalaryny tapyp bolar. Ol hatar, düşnükli bolşy ýaly,

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...$$

ýa-da gysgaça

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

görnüşdäki hatar bolar. Ol tükeniksiz geometrik progressiýanyň agzalaryndan düzülendir. Eger $a_n = \dfrac{1}{n+2}$, $n \geq 3$, formula bilen kesgitlense, onda hatar

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

ýa-da ýaýbaň görnüşde

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{n+2} + ....$$

hatar bolar. Umumy agzasy $u_n = f(n)$, $n \geq 0$, formula bilen kesgitlenen hatar, adatça,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

görnüşde ýazylýar. Mysal üçin,

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}.$$

Hataryň umumy agzasyny $a_n = f(n)$, $n \geq k$ formula bilen kesgitlemeden başga-da berliş usullary bardyr. Kä ýagdaýlarda hataryň agzalaryny yzygiderli hasaplaýyş formulasynyň (rekurrent formulalar) üsti bilen hem tapýarlar. Mysal üçin, $a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-2}}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $n \geq 2$, yzygiderli hasaplaýyş formulasy bilen berlen hataryň birnäçe başlangyç agzalaryny kesgitläliň.

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_0} = 2,\ a_3 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2},$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6},\ a_5 = \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} = \frac{6}{7} + \frac{2}{3} = \frac{32}{21}, ....$$

Indi hataryň jemi barada söhbet açalyň.

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

hataryň agzalaryndan düzülen

$$S_0 = a_0, \quad S_1 = a_0 + a_1, ..., \quad S_n = a_0 + ... + a_n$$

sanlara hataryň bölek jemleri diýilýär.

**Kesgitleme.** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hataryň bölek jemlerinden düzülen $\{S_n\}_0^{\infty}$ san yzygiderliginiň $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ predeli bar bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar ýygnanýar diýilýär, $S$ sana şol hataryň jemi diýilýär. Eger $\lim_{n\to\infty} S_n$ ýok bolsa, onda san hatary dargaýar diýilýär.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

görnüşdäki ýazgy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hataryň ýygnanýandygyny we onuň jeminiň $S$ sana deňdigini aňladýar. Geometrik progressiýanyň agzalaryndan düzülen

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

hatary derňäliň. Onuň bölek jemlerini tapalyň: $S_0 = a$, $S_1 = a + aq$, $S_2 = a + aq + aq^2$, ..., $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n$.

$$S_n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

bolýandygy bize öňden belli. $\{S_n\}_0^{\infty}$ yzygiderligiň predelini kesgitläliň, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

predeliň haçan bar, haçan ýokdugyny anyklalyň. Eger $|q| < 1$ bolsa, onda $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ bolar. Diýmek, $|q| < 1$ bolanda $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ hatar ýygnanýar we onuň jemi $\frac{a}{1 - q}$ bolar, ýagny

$$\frac{a}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n; \ |q| < 1.$$

Eger $|q| > 1$ bolsa, onda $\lim_{n\to\infty} S_n$ – ýok. Diýmek, $|q| > 1$ bolanda hatar dargaýar. Eger $q = 1$ bolsa, onda $S_n = a(n + 1)$ bolýar we $\lim_{n\to\infty} S_n$ ýok, hatar dargaýar; $q = -1$ bolsa $S_{2k} = a$, $k = 0, 1, ...$; $S_{2k+1} = 0$,

$k = 0, 1, \ldots$ bolýar we $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ýok, hatar dargaýar. Ahyrda, şeýle netijä gelýäris: $|q| < 1$ bolanda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ hatar ýygnanýar, onuň jemi $\dfrac{a}{1-q}$ deň, $|q| \geq 1$ bolanda bu hatar dargaýar.

**1-nji mysal.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3}{2^n}$ hatar ýygnanýar. Sebäbi bu hatar maýdalawjysy $q = \dfrac{1}{2}$, $a = 3$ bolan tükeniksiz geometrik progressiýanyň agzalarynyň jemidir we $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$ deňsizlik ýerine ýetýär.

**2-nji mysal.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2}(-3)^n$ hatar dargaýandyr. Sebäbi ol maýdalawjysy $q = -3$, $a = \dfrac{1}{2}$ bolan tükeniksiz geometrik progressiýanyň jemidir we $|q| = |-3| > 1$ deňsizlik ýerine ýetýär.

**3-nji mysal.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ garmoniki hatary derňäliň.

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ldots, \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \ldots;$$

$$1 \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}, \ldots,$$

ýagny islendik $k$ üçin

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \ldots + \frac{1}{2^k + 2^k} \geq \frac{1}{2}$$

bolany sebäpli, islendik $k$ üçin $S_{2^k} \geq \dfrac{1}{2}(k+1)$ deňlik ýerine ýeter we $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ ýok bolar. Diýmek, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ hatar dargaýan hatardyr.

**4-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hatary derňäliň. $S_n$ bölek jemi tapalyň.

$$S_1 = \frac{1}{2},\quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}, ...,$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\{S_n\}_1^{\infty}$ yzygiderligiň predelini tapalyň.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Diýmek, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hatar ýygnanýar, onuň jemi hem 1-e deň, ýagny

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$S_n$, $n = 1, 2, ...$ bölek jemler monoton artýan yzygiderlik bolany sebäpli, $S_n \le 1$, $n = 1, 2, ...$ deňsizlikler ýerliklidir.

**5-nji mysal.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ...$ hatary derňäliň. Hataryň jübüt belgili bölek jemlerine seredeliň.

$$\bar{S}_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(2k-1)2k}.$$

$\{\bar{S}_{2k}\}_1^{\infty}$ yzygiderlik monoton artýar we ýokarky mysalda $S_n \le 1$ bolany sebäpli, $S_{2k} \le 1$ bolar. $\{\bar{S}_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ yzygiderligiň monoton artýan we çäkli yzygiderlik hökmünde $\bar{S}$ predeli bardyr. $\bar{S}_{2k+1} = \bar{S}_{2k} + \frac{1}{2k+1}$ bolany üçin, $\lim_{k\to\infty} \bar{S}_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \bar{S}_{2k} = \bar{S}$ bolar. Şoňa görä $\lim_{n\to\infty} \bar{S}_n = \bar{S}$ alarys. Diýmek, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ hatar ýygnanýan hatardyr.

Köp halatlarda hataryň ýygnanýanyny bilmek üçin, onuň agzalarynyň modullaryndan düzülen hatary derňemek peýdaly bolýar. Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hataryň agzalarynyň modullaryndan düzülen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ hatar ýygnanýan bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar moduly boýunça ýygnanýar diýilýär. Moduly boýunça ýygnanýan hataryň özüniň hem ýygnanýandygyny subutsyz belläp geçeliň. Emma tersine, islendik ýygnanýan hatar moduly boýunça hem ýygnanýandyr diýmek dogry däldir. Mysal üçin, ýokarda getirilen mysallardan görnüşi ýaly, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$ hatar ýygnanýan hatardyr, emma onuň agzalarynyň modullaryndan düzülen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ hatar dargaýan hatardyr.

## §2. Hatarlaryň häsiýetleri

Bölümde hatarlar barlanylanda ulanylýan birnäçe häsiýet subutsyz getirilýär. Aşakdaky

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ýazgynyň $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hataryň ýygnanýandygyny we onuň jeminiň $A$ bolýandygyny aňladýanyny ýene bir gezek ýatladalyň.

**1-nji häsiýet.** Eger $A=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $c$ hemişelik san bolsa, onda $cA=\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ bolar.

**1-nji mysal.** $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Onda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2^n}=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}=10$ bolar.

**2-nji häsiýet.** Ýygnanýan hatarda islendik tükenikli sandaky agzalary islendik başga sanlar bilen çalşyryp alnan hatar ýygnanýandyr.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ýygnanýan hatar. Onda $\sum_{n=1}^{105} a_n + \sum_{n=106}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hatar hem ýygnanýan hatardyr. Bu ýerde $a_n$, $n = \overline{1,105}$ – islendik sanlar.

**3-nji häsiýet.** Dargaýan hatarda islendik tükenikli sandaky agzalary islendik başga sanlar bilen çalşyryp alnan hatar dargaýandyr.

**3-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dargaýan hatar. Onda $\sum_{n=1}^{1000} a_n + \sum_{n=1001}^{\infty} \frac{1}{n}$ hatar hem dargaýan hatardyr. Bu ýerde $a_n$, $n = \overline{1,1000}$ – islendik sanlar.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ we $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatarlar berilsin. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ hatara berlen hatarlaryň jemi, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)$ hatara olaryň tapawudy diýilýär.

**4-nji häsiýet.** Eger $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ we $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ bolsa, onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B \quad \text{we} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B \text{ bolar.}$$

**4-nji mysal.** $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hatarlar berlen. Onda

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

hatar ýygnanýandyr we

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + 1$$

deňlik ýerliklidir.

**5-nji häsiýet.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar moduly boýunça ýygnanýan bolsa, onda hataryň agzalarynyň orunlaryny çalşyryp alnan hatar hem moduly boýunça ýygnanýandyr.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ we $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatarlar berilsin, onda $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots +$ $+ a_n b_0$ hatara berlen hatarlaryň köpeltmek hasyly diýilýär.

**6-njy häsiýet.** Eger $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ bolsa we $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatarlar moduly boýunça ýygnanýan hatarlar bolsa, onda olaryň $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, köpeltmek hasyly hem moduly boýunça ýygnanýan hatardyr we

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$$

deňlik ýerine ýeter.

**5-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ moduly boýunça ýygnanýan hatarlar. Onda olaryň

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \; c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

köpeltmek hasyly, ýagny $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ hatar hem ýygnanýan hatardyr we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

deňlik ýerlikli bolar.

**7-nji häsiýet.** Islendik dargaýan hem-de ýygnanýan hatarlaryň jemi we tapawudy dargaýan hatardyr.

Köp meselelerde hataryň ýygnanýanlygyny ýa-da ýygnanmaýanlygyny bilmek ýeterlik bolýar. Mysal üçin, derýanyň 1 km uzynlykdaky böleginden birinji gün syzyp çykýan suwuň mukdary 1 litr, ikinji gün

$\frac{1}{2}$ litr, üçünji gün $\frac{1}{3}$ litr we ş. m. bolsun. Göräýmäge, syzyp çykýan suwlaryň mukdary köp hem däl ýaly (ýüzünji gün $100^{-1}$, müňünji gün $1000^{-1}$ litr we ş.m. ). Emma $n$ günde syzyp çykýan suwuň mukdary $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ litr bolar. $S_n$, öňden bilşimiz ýaly, dargaýan garmoniki hataryň bölek jemi we $n$ tükeniksizlige ymtylanda ol tükeniksizlige ymtylýar. Bu bolsa günleriň geçmegi bilen, derýadan syzyp ýiten suwuň mukdarynyň uçursyz uly sanlara ýetjegini aňladýar. Diýmek, garmoniki hataryň dargamagyny bilmek, derýadan syzyp çykýan suwlaryň mukdaryny azaltmagyň çäresiniň görülmelidigini görkezýär. Şuňa meňzeş mysallary ýene-de getirse bolardy, ýöne biz diňe bu mysal bilen çäkleneris.

Aşakda hatarlaryň ýygnanma nyşanlarynyň birnäçesi getirilýär.

## §3. Hatarlaryň ýygnanmagynyň zerurlyk nyşany

Goý, $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bolsun. Onda, kesgitlemä görä, $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ bolar. Yzygiderligiň häsiýetine görä, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ boljakdygy hem düşnüklidir. $S_n - S_{n-1} = a_n$ bolany sebäpli,

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad S - S = \lim_{n\to\infty} a_n$$

deňlikler ýerlikli bolarlar. Bu ýerden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

deňlik gelip çykýar. Oňa hatarlaryň ýygnanmagynyň zerurlyk nyşany diýilýär. Hataryň ýygnanmagy üçin, zerurlyk nyşanynyň ýerine ýetmegi hökmandyr. Ol ýerine ýetmese, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ýok bolsa ýa-da bar bolup, nola deň bolmasa, hatar dargaýandyr. Zerurlyk nyşanynyň ýerine ýetmegi hataryň ýygnanmagy üçin ýeterlik däldir, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bolan ýagdaýynda hem hataryň dargamagy mümkindir. Mysal üçin, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dargaýan hatardyr, emma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ zerurlyk nyşany ýerine ýetýändir.

## §4. Hatarlaryň ýygnanmagynyň deňeşdirme nyşany

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ we $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ san hatarlary berlen.

**Birinji deňeşdirme nyşany.** Goý, $n_0$ islendik natural san bolsun. Eger hemme $n \geq n_0$ tertip belgileri üçin $|a_n| \leq b_n$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatar ýygnanýan bolsa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar hem ýygnanýandyr.

**Subudy.** Şerte görä, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatar ýygnanýar. Onda onuň $S_n = b_0 + b_1 + + ... + b_n$, $n = 0, 1, ...$ bölek jemleriniň yzygiderliginiň $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ predeli bardyr we $n \geq n_0$ bolanda $b_n \geq 0$ bolýandygy üçin $S_n \leq S$ deňsizlik ýerliklidir. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ hatara seredeliň. $\overline{S_n} = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n|$, $n = 0$, 1, ... onuň bölek jemleriniň yzygiderligi. Sadalyk üçin, $n_0 = 0$ hasap edeliň. Onda, $\forall n$ üçin, alarys:

$$\overline{S_n} = |a_0| + |a_1| + ... + |a_n| \leq b_0 + b_1 + ... + b_n = S_n \leq S.$$

$\{\overline{S_n}\}_0^{\infty}$ monoton artýan we çäkli yzygiderlik bolany sebäpli ýygnanýandyr. Onda, kesgitlemä görä, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ hatar hem ýygnanýandyr. Geçen bölümleriň birinde bellenişi ýaly, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hataryň özi hem ýygnanýandyr.

**1-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n}$ hatary derňäliň. Bu ýerde $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n}$. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ bolany sebäpli, ýygnanmagyň zerurlyk şerti ýerine ýetýär. Diýmek, derňemegi dowam etdirmek gerek. Islendik $n$ üçin $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{3n^2+2}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ deňsizlikler ýerliklidirler. Eger indi, $b_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hatar bilen berlen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n}$ hatary deňeşdirsek, onda islendik $n$ üçin $|a_n| \leq b_n$ boljakdygy aýdyňdyr. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hatar, maýdalawjysy

$q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$, tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň agzalarynyň jemi hökmünde ýygnanýan hatar bolýar. Onda birinji deňeşdirme nyşany esasynda, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} \cdot \frac{1}{2^n}$ hatar hem ýygnanýandyr.

**Ikinji deňeşdirme nyşany.** Goý, $n_0$ islendik natural san bolsun. Eger hemme $n \geq n_0$ tertip belgiler üçin $0 \leq a_n \leq b_n$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar dargaýan bolsa, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatar hem dargaýandyr.

**Subudy.** Goý, tersine, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar dargaýar, emma $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatar ýygnanýan bolsun. Onda birinji nyşana görä, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar hem ýygnanýan bolardy. Bu bolsa nyşanyň şertine garşy gelerdi. Diýmek, nyşanyň talap edýän şertleri ýerine ýetende, ikinji $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hatar hem dargaýandyr.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3n+5}{2n^3+5n+3}$ hatary derňäliň. Islendik $n \geq 1$ üçin $b_n = \frac{2n^2+3n+5}{2n^3+5n+3} \geq \frac{2n^2}{2n^3+5n^3+3n^3} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{5n}$ deňsizlikler ýerliklidir. Eger indi $a_n = \frac{1}{5n}$, $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hatar bilen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3n+5}{2n^3+5n+3}$ hatary deňeşdirseň, islendik $n \geq 1$ ($n_0 = 1$) üçin $0 \leq a_n \leq b_n$ ýa-da $0 \leq \frac{1}{5n} \leq \frac{2n^2+3n+5}{2n^3+5n+3}$ boljakdygy aýdyňdyr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hatar dargaýan hatardyr. Onda, ikinji deňeşdirme nyşanyna görä, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+3n+5}{2n^3+5n+3}$ hatar hem dargaýandyr.

## §5. Hatarlaryň ýygnanmagy barada Dalamberiň nyşany

**Dalamberiň nyşany.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar üçin düzülen $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ predel bar bolsa, onda $l < 1$ bolanda hatar moduly boýunça ýygnanýar, $l > 1$ bolanda hatar dargaýar, $l = 1$ bolanda hataryň ýygnanmagy ýa-da dargamagy barada hiç zat aýdyp bolýan däldir.

**$l<1$ bolandaky subudy.** Predeliň häsiýetine görä, $\varepsilon=\frac{1-l}{2}$ san üçin $n_0$ san tapylyp, islendik $n\ge n_0$ üçin $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<l+\varepsilon=\frac{1+l}{2}<1$ deňsizlik ýerlikli bolar. Bu ýerden $\forall k>0$ bitin san üçin $|a_{n_0+k}|<\left(\frac{1+l}{2}\right)^k|a_{n_0}|$ deňsizligi alarys. $\max\limits_{0\le k\le n_0}|a_k|=N$ bilen belgiläliň we $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(N+|a_{n_0}|)\times\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0}$ hatarlary deňeşdireliň. Ikinji hatar maýdalawjysy $q=\frac{1+l}{2}$, $|q|<1$, tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň agzalarynyň jemi hökmünde ýygnanýan hatardyr we $\forall n\ge 0$ üçin $|a_n|\le(N+|a_{n_0}|)\cdot\left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-n_0}$ deňsizlik ýerliklidir. Onda, birinji deňeşdirme nyşanyň esasynda, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ hatar hem ýygnanýandyr.

**$l>1$ bolandaky subudy.** Predeliň häsiýetine görä, $\varepsilon=\frac{l-1}{2}$ san üçin $n_0$ san tapylyp, $n\ge n_0$ bolanda $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>l-\frac{l-1}{2}=\frac{l+1}{2}>1$ deňsizlik ýerlikli bolar. Bu ýerden, $\forall k>0$ bitin san üçin $|a_{n_0+k}|>|a_{n_0}|\cdot\left(\frac{1+l}{2}\right)^k$ deňsizligi alarys. Deňsizlik $|a_{n_0+k}|$ sanlaryň $k$ artanda çäksiz ösýändiklerini aňladýar. Diýmek, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ hatar üçin ýygnanmagyň zerurlyk şerti ýerine ýetmeýär we şol sebäpli ol dargaýan hatar bolýar.

**$l=1$ bolandaky subudy.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ hatarlara seredeliň. Olaryň birinjisi dargaýan hatar, ikinjisi bolsa ýygnanýan hatar. Emma olaryň ikisi üçin hem $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ bolýar. Diýmek, $l=1$ bolan ýagdaýynda hatar ýygnanýar ýa-da dargaýar diýen netije çykaryp bolmaz.

**1-nji mysal.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$, $a$ – islendik san, hatary derňäliň. $a_n=\frac{a^n}{n!}$,

$$a_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!};\ l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right|=$$

$$= \lim_{n\to\infty} |a| \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Diýmek, hatar ýygnanýar.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hatary derňäliň. $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$;

$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$ Diýmek, hatar ýygnanýar.

**3-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{3n+6}$ hatary derňäliň. $a_n = \frac{2n+5}{3n+6}$, $a_{n+1} = \frac{2n+7}{3n+9}$; $l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+7)(3n+6)}{(3n+9)(2n+5)} = 1$, diýmek, Dalamberiň nyşany bu hataryň ýygnanmagy barada hiç bir maglumat berip bilenok. Şol sebäpli ýygnanma barada maglumat aljak bolsaň, beýleki nyşanlary ulanyp görmeli. Biziň hatarymyz üçin $a_n = \frac{2n+5}{3n+6}$ we $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} \neq 0$. Ýagny hataryň ýygnanmagynyň zerurlyk nyşany ýerine ýetmeýär. Bu bolsa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{3n+6}$ hataryň dargaýanlygyny aňladýar.

## §6. Hatarlaryň ýygnanmagy barada Koşiniň nyşany

**Koşiniň nyşany.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hatar üçin düzülen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ predel bar bolsa, onda $l < 1$ bolanda hatar ýygnanýar, $l > 1$ bolanda hatar dargaýar, $l = 1$ bolanda hataryň ýygnanmagy ýa-da dargamagy barada hiç zat aýdyp bolýan däldir.

Koşiniň nyşanynyň subudy edil Dalamberiň nyşany üçin geçirilen subuda meňzeşlikde geçirilýär we şol sebäpli getirilmeýär.

**1-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ hatary derňäliň. $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Diýmek, derňelýän hatar ýygnanýandyr. Käbir hallarda hatarlaryň ýygnanma nyşanlaryny predel tapmak üçin hem ulanýarlar.

**2-nji mysal.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ predeli tapmaly. Umumy agzasy $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ bolan $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ hatary Koşiniň nyşany boýunça derňäliň.

Alarys: $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Diýmek, derňelýän hatar ýygnanýandyr. Onda, zerurlyk nyşany boýunça, onuň umumy agzasy nola ymtylmaly bolar, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ýa-da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = 0$ bolar. Bu bolsa biziň tapmaly predelimizdir.

## §7. Koşiniň integral nyşany

Belli bolşy ýaly, Dalamberiň we Koşiniň nyşanlaryny ulanmak köp hallarda hataryň ýygnanmagy barada bellibir netijä getirmeýär. Mysal üçin, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha$ islendik san, hatarlar şeýle hatarlardyr. Bu görnüşdäki hatarlara Koşiniň integral nyşanyny ulanmak amatly bolýar.

**Koşiniň integral nyşany.** Goý, $f(x) \in C(0, \infty)$, $f(x) \geq 0$ we monoton kemelýän funksiýa bolsun. Onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hatar we $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, $a > 0$ integral birwagtda ýygnanýarlar ýa-da dargaýarlar.

Biz bu nyşany subutsyz kabul ederis.

**1-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hatary $\alpha$-nyň dürli bahalarynda derňäliň.

Eger $\alpha \leq 0$ bolsa, onda $\frac{1}{n^{\alpha}} = n^{-\alpha} \geq 1$ we $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$ bolar. Zerurlyk şertiň ýerine ýetmeýänligi sebäpli hatar dargaýar. Eger $\alpha > 0$ bolsa, onda $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ funksiýa $(0, \infty)$ aralykda üznüksiz we monoton kemelýän funksiýadyr. Bu ýagdaýda, Koşiniň integral nyşanyna görä, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hatar we $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ integral birwagtda ýygnanýarlar ýa-da dargaýarlar. Emma $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$, kesgitlemä görä, $\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ predele deňdir. $\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right)$, $\alpha \neq 1$; $\int_1^{b}\frac{1}{x}dx = \ln b$ deňlikleri ulanyp alarys:

1) $\alpha > 1$. $\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1}$. Diýmek, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ ýygnanýar. Onda, Koşiniň integral nyşanynyň esasynda, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hatar hem ýygnanýar.

2) $\alpha = 1$. $\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$. Diýmek, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ dargaýar, onda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ hatar hem dargaýar.

3) $0 < \alpha < 1$. $\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \infty$. Diýmek, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ integral dargaýar, onda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hatar hem dargaýar. Ahyrda, şeýle netijä gelýäris: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hatar $\alpha \leq 1$ bolanda dargaýar, $\alpha > 1$ bolanda ýygnanýar.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+1}{6n^4+n+2}$ hatary derňemeli.

$a_n = \frac{3n^2+5n+1}{6n^4+n+2}$; $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bolany üçin, derňemäni dowam etmeli. $a_n = \frac{3n^2+5n+1}{6n^4+n+2} < \frac{3n^2+5n^2+n^2}{6n^4} = \frac{9}{6}\cdot\frac{1}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{6}\cdot\frac{1}{n^2}$ ýokarda alnan netijä görä ýygnanýan hatar bolýar. Onda, deňeşdirme nyşanynyň esasynda, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n+1}{6n^4+n+2}$ hatar hem ýygnanýandyr.

## §8. Leýbnisiň nyşany

Goý, $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + ... + (-1)^n u_n + ...$, $u_n > 0$, agzalarynyň alamatlary çalyşýan hatar bolsun.

**Leýbnisiň nyşany.** Eger islendik $n \geq 0$ üçin $u_n > u_{n+1}$ deňsizlik ýerine ýetse we $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ bolsa, onda $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + ...$ hatar ýygnanýan hatardyr. Eger hataryň jemini onuň $S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + ... + (-1)^n u_n$ bölek jemi bilen çalyşsak, onda goýberilýän ýalňyşlyk moduly boýunça $u_{n+1}$-den kiçidir.

Biz bu nyşany hem subutsyz kabul ederis.

**Mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ hatary derňemeli. Bu agzalarynyň alamatlary çalyşýan hatardyr; $u_n = \frac{1}{n!}$, islendik $n > 0$ üçin $u_n > u_{n+1}$ deňsizlik we $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ deňlik ýerine ýetýär. Diýmek, Leýbnisiň nyşany esasynda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ hatar ýygnanýandyr. Eger biz hataryň jemi hökmünde $S_6 = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ bölek jemi alsak, onda goýberilen ýalňyşlyk $\frac{1}{7!}$ sandan kiçi bolar. $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \approx 0,00020$ bolany üçin $S_6 = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$ bölek jem 0,00020 takyklykda hataryň jemine deňdir.

Şunuň bilen, hatarlary derňemek üçin ulanylýan nyşanlaryň sanawuny tamamlaýarys. Elbetde, bu sanawy dowam etdirse hem bolardy. Ýöne mesele çözmekde giňden ulanylýanlary biziň getiren nyşanlarymyzdyr.

## §9. Funksional hatarlar

Agzalary bellibir ýaýlada kesgitlenen

$$U_0(x) + U_1(x) +...+ U_n(x) +...$$

ýa-da gysgaldylan görnüşde

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$$

hatara funksional hatar diýilýär. $U_n(x)$ funksiýa umumy agza diýilýär. Hataryň berilmegi üçin, onuň islendik agzasyny hasaplap bolýan formula berilmelidir. Mysal üçin, $U_n = ax^n$, $n = 0, 1, ...$; $U_n = \frac{x^n}{1 + x^n}$, $n = 2, 3, ...$, we ş. m. Adatça, hatar we umumy agza üçin formula aýratyn ýazylman, olar birikdirilip, $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$ görnüşde ýazylýar.

Funksional hataryň agzalarynyň her birinde $x = x_0$ goýsak, onda hatar

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x_0)$$

görnüşdäki san hataryna öwrüler. Eger şu san hatary ýygnanýan bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ funksional hatar $x_0$ nokatda ýygnanýar diýilýär. Onuň $S(x_0)$ jemine $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hataryň $x_0$ nokatdaky jemi diýilýär. Eger $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x_0)$ hatar dargaýan bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $x_0$ nokatda dargaýar diýilýär.

Hataryň ýygnanýan nokatlarynyň köplügine onuň ýygnanma ýaýlasy, dargaýan nokatlarynyň köplügine bolsa dargama ýaýlasy diýilýär. Funksional hataryň ýygnanma ýaýlasyny san hatarlary üçin getirilen nyşanlary ulanyp tapsa bolar.

**1-nji mysal.** $\sum_{n=1}^{\infty} ax^n$ hataryň ýygnanma ýaýlasyny tapalyň. Hatarda $x$-i berlen hasap edip, hataryň özüni san hatary hasap edip, oňa Dalamberiň nyşanyny ulanalyň:

$$U_n = ax^n;\ U_{n+1} = ax^{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{ax^{n+1}}{ax^n}\right| = |x|.$$

Diýmek, $l = |x|$ bolýar. Şoňa görä $l = |x| < 1$ ýa-da $-1 < x < 1$ deňsizligi kanagatlandyrýan $x$ nokatlar berlen hataryň ýygnanma nokatlarynyň köplügidir ýa-da başgaça, ýygnanma ýaýlasydyr.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ hataryň ýygnanma ýaýlasyny tapalyň. Bu ýerde $U_n = \frac{\sin nx}{2^n}$, $n = 0, 1, ...,$ islendik $x$ üçin $|U_n| \le \frac{1}{2^n}$ deňsizlik ýerliklidir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hatar ýygnanýan hatardyr. Onda deňeşdirme nyşanlarynyň birinjisine görä, $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $x$-iň islendik bahasynda ýygnanýandyr. Başgaça aýdanymyzda, berlen hataryň ýygnanma ýaýlasy $(-\infty, \infty)$ – bütin $x$-ler okudyr.

**Kesgitleme.** Eger $D$ ýaýlada (kesim, aralyk we ş.m.) $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar kesgitlenen bolsa, $\forall x \in D$ üçin $|U_n(x)| \le b_n$, $b_n$ hemişelik sanlar, $n = 0, 1, ...,$ deňsizlikler ýerine ýetse we $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ san hatary ýygnanýan bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $D$ ýaýlada deňölçegli ýygnanýar diýilýär.

Islendik deňölçegli ýygnanýan hataryň şeýle hem ýygnanjakdygy aýdyňdyr. Goý, $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $[a,b]$ kesimde ýygnanýan bolsun we hataryň islendik agzasy $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolsun. $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hataryň jemini $S(x)$ bilen belgiläliň.

**Kesgitleme.** Eger $\forall x \in (a,b)$ we $\forall c \in [a,b]$ üçin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{c}^{x} U_n(x)dx$$

hatar ýygnanýan bolsa we onuň jemi $\int_{c}^{x} S(x)dx$ bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatary $[a,b]$ kesimde birin-birin integrirläp bolýar diýilýär.

**1-nji teorema.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $[a; b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsa we $\forall n$ üçin $U_n(x) \in C[a; b]$ bolsa, onda bu hatary $[a; b]$ kesimde birin-birin integrirläp bolar.

Mysal üçin, $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ hataryň agzalary $0 \le q < 1$, $[-q; q]$ kesimde $|ax^n| \le |a|q^n$, $n = 0, 1, \dots$ şertleri kanagatlandyrýarlar, $\sum_{n=0}^{\infty} |a|q^n$ san hatary bolsa ýygnanýan hatar. Onda, kesgitlemä görä, $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ hatar $[-q, q]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandyr we öňden bilşimiz ýaly, onuň jemi $S(x) = \dfrac{a}{1-x}$ bolýandyr. Diýmek, ýokarky teorema görä, $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ hatary $[-q; q]$ kesimde birin-birin integrirläp bolýar. Ýagny islendik $x \in [-q; q]$ üçin

$$\int_{0}^{x} \frac{a}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{x} ax^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n+1}x^{n+1}$$

deňlik ýerlikli bolar. Başgaça aýdylanda, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a}{n+1}x^{n+1}$ hatar $[-q, q]$ kesimde ýygnanýar we onuň jemi $\int_{0}^{x} \dfrac{a}{1-x}dx = -a\ln|1-x|$ bolar.

Indi hatarlary differensirlemek baradaky meseläni ýatlap geçeliň.

**Kesgitleme.** Goý, $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $[a; b]$ kesimde ýygnanýan we $S(x)$ onuň jemi bolsun. Eger $\sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x)$ hatar hem $[a; b]$ kesimde ýygnanýan we onuň jemi $S'(x)$ bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatary $[a; b]$ kesimde birin-birin differensirläp bolýar diýilýär.

**2-nji teorema.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatar $[a; b]$ kesimde ýygnanýan bolsa, onuň agzalary $[a; b]$ kesimde differensirlenýän funksiýalar we $\sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x)$ hatar $[a; b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ hatary $[a; b]$ kesimde birin-birin differensirläp bolýandyr.

**3-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$ hatary derňäliň. Goý, $R$ islendik položitel san bolsun. $[-R, R]$ kesimiň nokatlarynda $|e^{nx}/n!| \le e^{Rn}/n!$, $n = 0$, 1, ..., deňsizlikler ýerliklidirler we $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{Rn}}{n!}$ san hatary ýygnanýan hatardyr. Onda $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}/n!$ hatar $[-R, R]$ kesimde ýygnanýan hatar bolar. Derňelýän hataryň agzalary $[-R, R]$ kesimde differensirlenýän funksiýalar. Hataryň agzalarynyň önümlerinden durýan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{(n-1)!}$ hatara seredeliň. Onuň agzalary $[-R, R]$ kesimde $\left|\frac{e^{nx}}{(n-1)!}\right| \le \frac{e^{Rn}}{(n-1)!}$ deňsizlikleri kanagatlandyrýarlar we $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{Rn}}{(n-1)!}$ san hatary ýygnanýandyr. Şol sebäpli, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{(n-1)!}$ hatar $[-R, R]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandyr. Diýmek, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}/n!$ hatar ýokarky teoremanyň hemme şertlerini kanagatlandyrýar. Şoňa görä-de ony $[-R, R]$ kesimde birin-birin differensirläp bolýandyr.

## §10. Derejeli hatarlar

Derejeli hatarlar funksional hatarlaryň iň ýönekeýidir we iň köp ulanylýanydyr. Durmuşda ýüze çykýan meseleleri takmynan çözmekde ulanylýan matematikanyň gurallarynyň ähmiýetlileriniň biridir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

görnüşdäki funksional hatara derejeli hatar diýilýär. $a_0$, $a_1$, ... sanlara hataryň koeffisiýentleri diýilýär. Derejeli hataryň ýygnanýan ýaýlasy $(-R, R)$ görnüşdäki aralyk bolýar. $R$ sana ýygnanma radiusy, $(-R, R)$ aralyga ýygnanma aralygy diýilýär. $R$ radiusyň nola deň ýa-da tükeniksiz bolmagy mümkin. Birinji halda ($R = 0$) hatar diňe $x = 0$ nokatda ýygnanýar. Ýygnanma radiusy şeýle tapylýar. Hatara Dalamberiň nyşanyny ulanýarlar: $U_n = a_n x^n$, $U_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$,

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Eger $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ bolsa, onda $l = 0$ bolýar we $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatar $x$-iň islendik bahasynda ýygnanýar, ýagny $R = \infty$ bolýar. Eger $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ bolsa, onda $x \neq 0$ ýagdaýda $l = \infty$ bolýar we $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatar islendik $x \neq 0$ nokatda dargaýar, ýagny $R = 0$ bolýar. Eger $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, $q$ noldan tapawutly tükenikli san bolsa ($q \neq 0$, $q \neq \infty$), onda $l = |x|q$ bolýar we $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatar $|x|q < 1$ ýa-da $-\frac{1}{q} < x < \frac{1}{q}$ şerti kanagatlandyrýan nokatlarda ýygnanýar, ýagny $R = \frac{1}{q}$ bolýar. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ predeliň bar ýagdaýynda, $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ bahalary kabul etmek bilen, hataryň $R$ ýygnanma radiusy üçin

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

formulany alarys. Eger-de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatara Dalamberiň nyşanyny däl-de, Koşiniň nyşanyny ulansak, onda $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ bar ýagdaýynda $R$ ýygnanma radiusy üçin

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

formulany alarys.

**1-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň. $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ bolany sebäpli

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0$$

bolar. Diýmek, $R = \infty$ bolar.

**2-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň. $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n + 1)!$ bolany sebäpli

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

bolar. Diýmek, $R = 0$ bolar.

**3-nji mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň. $a_n = a$, $a_{n+1} = a$ bolany sebäpli

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a}{a}\right| = 1$$

bolar, ýagny $R = 1$ bolar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

görnüşdäki hatarlara hem derejeli hatar diýilýär. Ol $x-x_0=y$ çalşyrma girizmek bilen ýokarda seredilen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ görnüşdäki hatara getirilýär. Soňky hataryň ýygnanma ýaýlasynyň $-R < y < R$ deňsizlik bilen kesgitlenýändigini görüpdik. $y$-iň ýerine $y = x - x_0$ bahasyny goýup alarys.

$$-R < x - x_0 < R \quad \text{ýa-da} \quad x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Bu bolsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hataryň ýygnanma aralygydyr. $R$ sana onuň ýygnanma radiusy diýilýär. Bilşimiz ýaly, $R$ bu ýerde hem

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \quad \text{ýa-da} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

formula arkaly tapylar.

## §11. Ýygnanýan derejeli hatarlaryň häsiýetleri

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ýygnanýan hatarlar bolup, $R_a$ we $R_b$ sanlar degişlilikde olaryň ýygnanma radiuslary, $A(x)$ we $B(x)$ olaryň jemleri bolsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

hatarlara degişlilikde berlen hatarlaryň jemi, tapawudy we köpeltmek hasyly diýilýär. Olar ýygnanýan hatarlardyr. Eger $R_1, R_2, R_3$ degişlilikde olaryň ýygnanma radiuslary bolsa, onda olaryň her biri $\min(R_a, R_b)$ sandan kiçi däldir. Ýagny

$$R_i \geq \min(R_a, R_b), \; i = 1, 2, 3$$

deňsizlikler ýerliklidir.

Ondan başga-da $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ hataryň jemi goşulýan hatarlaryň jemlerini goşmak bilen tapylýar, ýagny hataryň ýygnanýan ýaýlasynda onuň jemi $A(x) + B(x)$ funksiýa deňdir; $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ hataryň jemi $A(x) - B(x)$ funksiýa, hatarlaryň köpeltmek hasylynyň, ýagny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hataryň jemi $A(x) \cdot B(x)$ funksiýa deňdir. Mysal üçin, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ hataryň ýygnanma radiusy $R_a = 2$; jemi $A(x) = \frac{2}{2-x}$ funksiýa deňdir. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n$ hataryň ýygnanma radiusy $R_b = 3$, onuň jemi $\frac{3}{3-x}$ funksiýa deňdir. Onda olaryň $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n$ jemi, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n$ tapawudy we $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]x^n$ köpeltmek hasyly bolan hatarlaryň ýygnanma radiuslary min(2, 3) = 2 sandan kiçi däldir. Olaryň jemleri bolsa degişlilikde $\frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x}$, $\frac{2}{2-x} - \frac{3}{3-x}$, $\frac{6}{(2-x)(3-x)}$ funksiýalar bolar.

Kähalatda derejeli hatarda üýtgeýäniň ýerine $\varphi(x) = b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ azat agzasy nola deň bolan köpagzany goýanyňda emele gelýän funksiýany öwrenmeli bolýar. Ýagny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berlen hatar bolsa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi(x)]^n$ görnüşdäki hatarlary öwrenmeli bolýar. Eger $\varphi(x)$ köpagzanyň hatarda gabat gelýän derejelerini yzygiderli tapyp, hatarda ýerine goýup ýönekeýleşdirsek, ýene-de derejeli hataryň emele geljegi aýdyňdyr. Emele gelen hataryň ýygnanma radiusy şeýle tapylýar.

Goý, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hataryň ýygnanma radiusy $R$ bolsun. Eger $(-q, q)$ aralygyň islendik nokady üçin $|\varphi(x)| < R$ bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\varphi(x)]^n$ hatary ýönekeýleşdirip alnan derejeli hataryň ýygnanma radiusy $q$-dan kiçi bolmaz.

**Mysal.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ hatarda $x$-iň ýerine $\varphi(x) = x - x^2$ goýlup alnan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\varphi^n$ hatary derňäliň. $\varphi = x - x^2$, $\varphi^2 = x^2(1 - 2x + x^2)$, $\varphi^3 = x^3(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$, $\varphi^4 = x^4(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)$ we ş.m. $\varphi(x)$-iň derejelerini hatarda ýerine goýup alarys:

$$1 + \frac{1}{2}(x - x^2) + \frac{1}{2^2}x^2(1 - 2x + x^2) + \frac{1}{2^3}x^3(1 - 3x + 3x^2 - x^3) +$$

$$+\frac{x^4}{2^4}(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \ldots$$

Emele gelen derejeli hataryň ýygnanma radiusyny hasaplalyň. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ hataryň ýygnanma radiusy 2-ä deň. $|\varphi(x)| < R$ ýa-da $|x - x^2| < 2$ deňsizlik $-1 < x < 1$ aralykda ýerine ýetýär. Diýmek, soňky alnan hataryň $(-1, 1)$ aralykda ýygnanjakdygy şübhesizdir.

Derejeli hatarlaryň ýene bir täsin häsiýetini ýatlap geçeliň. Berlen $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ hataryň ýygnanma radiusy $R$ bolsun. Hataryň agzalaryny 0-dan $x$-e çenli integrirläp, täze $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ hatar düzeliň. Onuň jemi berlen hataryň $S(x)$ jeminden 0-dan $x$-e çenli alnan, ýagny $\int_0^x S(x)dx$ integrala deň bolýar. Ýagny derejeli hatary ýygnanýan aralygynda birin-birin integrirläp bolýandyr. Üstesine-de, alnan täze hataryň ýygnanma radiusy başda berlen hataryň ýygnanma radiusyna deňdir. Diýmek, bir gezek birin-birin integrirläp alnan hatary ýene bir gezek birin-birin integrirläp bolýar, onuň hem ýygnanma radiusy $R$-e deňdir. Şeýlelikde, derejeli hatary ýygnanýan aralygynda 0-dan $x$-e çenli islendik gezek birin-birin integrirläp bolýar we emele gelýän hemme hatarlaryň ýygnanma radiuslary şol bir $R$ sana deňdir.

Edil şuňa meňzeşlikde derejeli hatary ýygnanýan aralygynda islendik gezek birin-birin differensirläp hem bolýandyr we emele gelýän hemme hatarlaryň ýygnanma radiuslary şol bir $R$ sana, ýagny başda berlen hataryň ýygnanma radiusyna deňdir.

Mysal üçin, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ hatara seredeliň. Onuň ýygnanma radiusy $R = 1$, jemi bolsa $S(x) = 1/(1 - x)$, ýagny

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1.$$

Onda ýokarda aýdylanlara görä,

$$\int_0^x \frac{1}{1-x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n dx, \quad |x|<1,$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x \frac{1}{1-x}dx\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^x x^n dx\right)dx, \quad |x|<1$$

we ş.m.,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)', \quad |x|<1,$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'', \quad |x|<1$$

we ş.m. deňlikler ýerlikli bolar.

## §12. Teýloryň hatary

$f(x)$ funksiýa $x_0$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen we $x_0$ nokatda onuň islendik tertipli önümi bar diýeliň.

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

ýa-da tygşytly

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

görnüşdäki hatara $f(x)$ funksiýanyň $x_0$ nokatdaky Teýlor hatary diýilýär. Eger Teýloryň hatary $x_0$ nokadyň käbir etrabynda ýygnanýan we onuň jemi $f(x)$ funksiýa deň bolsa, onda $f(x)$ funksiýa garalýan etrapda Teýlor hataryna dargaýar diýilýär we

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

deňligi ýazylýar. Şeýlelikde, şoňky deňlik $f(x)$ funksiýanyň Teýlor hatarynyň ýygnanýandygyny we onuň jeminiň $f(x)$ funksiýa deňdigini aňladýar. Teýlor hatary öwrenilende esasy gyzyklandyrýan mesele hem şundan ybaratdyr. Bu meseläniň çözgüdini berýän teorema aşakda getirilýär.

**Teorema.** Eger $f(x)$ funksiýa $|x-x_0|<R$ aralykda tükeniksiz differensirlenýän bolsa, $\forall n \geq 1$ üçin we şol aralykdaky islendik $x$ üçin käbir $M>0$ san tapylyp, $|f^{(n)}(x)| \leq M$ deňsizlikler ýerine ýetýän bolsa, onda şol aralykda

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

deňlik ýerliklidir, ýagny $f(x)$ funksiýa Teýlor hataryna dargaýandyr.

Mysal üçin, $y=\sin x$ funksiýa $(-\infty,\infty)$ aralykda tükeniksiz differensirlenýär we $\forall x$, $\forall n \geq 1$ üçin $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$ deňsizlik dogrudyr. Diýmek, $y=\sin x$ funksiýanyň islendik $x_0$ nokatdaky Teýlor hatary $(-\infty,\infty)$ aralykda ýygnanýar we onuň jemi $\sin x$ funksiýa deňdir.

Teýloryň hatarynyň $x_0=0$ hususy halyna Makloreniň hatary diýilýär. Makloreniň hatarynyň

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

görnüşi bardyr. Käbir elementar funksiýalar üçin Makloreniň hataryny ýazalyň:

1. $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad -\infty<x<\infty;$

2. $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad -\infty<x<\infty;$

3. $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \quad -\infty<x<\infty;$

4. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad -1 < x < 1;$

5. $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$

Görşümiz ýaly, $f(x)$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazmak üçin onuň $x_0 = 0$ nokatdaky hemme önümlerini tapmak gerek bolýar. Käbir hallarda funksiýanyň önümini tapman hem Makloren hataryny ýazyp bolýar. Olaryň iki sanysyny ýatlap geçeliň.

**Birinji usul.** Eger $f(x)$ funksiýanyň Makloren hatary belli bolsa, onda $f(\varphi(x))$, $\varphi(x) = b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ görnüşdäki funksiýanyň Makloren hatary $f(x)$ funksiýanyň Makloren hatarynda $x$-iň ýerine $\varphi(x)$-i goýmak we ýönekeýleşdirmek bilen tapylýar.

**1-nji mysal.** $\sin x^3$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazalyň. Bu ýerde $\varphi(x) = x^3$. $\sin x$ funksiýanyň Makloren hatarynda $x$-iň ýerine $x^3$ goýup, gerek hatary alarys:

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+3}.$$

**2-nji mysal.** $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazalyň.

$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{3}}$ deňlikden görnüşi ýaly, $(1+x)^{\alpha}$ funksiýanyň hatarynda $\alpha = -\frac{1}{3}$, $x$-iň ýerine $x^4$ goýup, $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ funksiýanyň Makloren hataryny, ýagny

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)...\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} x^{4n}$$

hatary alarys.

**Ikinji usul.** Eger $f(x)$ funksiýa $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ Makloren hatary belli funksiýalaryň jemine deň bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň Makloren hatary goşulyjylaryň Makloren hatarlarynyň jemine deňdir.

**3-nji mysal.** $\sin x + \cos x$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazalyň:

$$\sin x + \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

**4-nji mysal.** $\dfrac{8x^2 - 33x + 29}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazalyň.

$$\frac{8x^2 - 33x + 29}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

deňlik dogrudyr.

$$\frac{2}{x-1} = -2 \cdot \frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2x^n;$$

$$\frac{5}{x-2} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^{n+1}} x^n;$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$$

bolany sebäpli, olary goşup alarys:

$$\frac{8x^2 - 33x + 29}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{5}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n.$$

Bu usuly tersine, funksiýanyň önümini tapmak üçin hem ulansa bolar. Mysal üçin, soňky deňlikden

$$\left(\frac{8x^2 - 33x + 29}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} = -\left(2 + \frac{5}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) n!, \quad n = 0, 1, ...,$$

boljakdygy aýdyňdyr.

## §13. Derejeli hataryň takmyn hasaplamakda ulanylyşy

I. Kesgitli integraly takmyn hasaplamagyň köp ýollary bar. Olaryň biri-de integral aşagyndaky funksiýanyň Teýlor hataryny ulanmakdyr. Mysallara seredeliň.

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^3\, dx$ integraly $10^{-4}$ takyklykda hasaplamaly. $\sin x^3$ funksiýanyň Teýlor hataryny ýazalyň:

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+3} = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \dots.$$

Bu hatar $x$-iň hemme bahasynda ýygnanýar. Diýmek, ony $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ kesimde birin-birin integrirläp bolýar. Alarys:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^3\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^9}{3!} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{15}}{5!} dx - \dots$$

ýa-da

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^3\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{10 \cdot 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{1}{16 \cdot 5!}\left(\frac{1}{2}\right)^{16} - \dots.$$

Deňligiň sag tarapyndaky hatar Leýbnisiň nyşanynyň şertlerini kanagatlandyrýar. Diýmek, hataryň jemini onuň $S_n$ bölek jemi bilen çalşyrsak, onda goýberilen nätakyklyk birinji taşlanan agzanyň modulyndan kiçi bolar.

$\frac{1}{10 \cdot 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{61440} < 10^{-4}$ bolany sebäpli, $10^{-4}$ takyklykda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^3\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

deňlik dogry bolar.

$$\frac{1}{16 \cdot 5! 2^{16}} = \frac{1}{125829120} < \frac{1}{10^8}$$

bolany sebäpli, $10^{-8}$ takyklykda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^3 dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{10 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

deňlik dogry bolar. Diýmek, alynýan agzalaryň sanyny köpeltmek bilen integraly islendik takyklykda hasaplap bolar.

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integraly $10^{-5}$ takyklykda hasaplamaly.

$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ funksiýanyň Makloren hataryny ýazalyň:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)...\left(-\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} x^{4n}.$$

Bu hatar $(-1,\ 1)$ aralykda ýygnanýar. Diýmek, ony $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ kesimde birin-birin integrirläp bolýar. Alarys:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)...\left(-\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{4n} dx$$

ýa-da

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)...\left(\frac{1}{4}+n-1\right)}{n!} \times$$

$$\times \frac{1}{4n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)}{2!} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 -$$

$$- \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{1}{4}+2\right)}{3!} \cdot \frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} + ....$$

Bu hatar Leýbnisiň nyşanynyň şertlerini kanagatlandyrýar we

$$\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)\left(\frac{1}{4}+2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13} < 10^{-5}$$

bolany sebäpli, $10^{-5}$ takyklykda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{640} + \frac{5}{147456} \approx 0,49847$$

deňlik dogry bolar.

$$\frac{\frac{1}{4}}{1!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{640} < 0,002$$

bolany sebäpli, 0,002 takyklykda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}$$

deňlik dogry bolar.

II. Hatarlaryň differensial deňlemeleri takmyn çözmekde ulanylyşyny mysallarda görkezeliň. $y'' = 3x^2y^5 - y^3$ deňlemäniň $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. $y(x)$ çözüwi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Makloreniň hatary görnüşinde gözleýärler. Bu hatary anyk ýazmak üçin $y^{(n)}(0)$ önümler belli bolmaly. $y(0)$, $y'(0)$ başlangyç şertlerde berlen. $y^{(n)}(0)$, $n \geq 2$, önümleri deňlemeden yzly-yzyna tapýarlar. Deňlemede $x$-iň ýerine 0-y goýup, alarys:

$$y''(0) = -y^3(0) = -1.$$

Deňlemäniň iki tarapyndan önüm alyp tapýarys:

$$y''' = 6xy^5 - 3x^2\cdot 5y^4\cdot y' - 3y^2y'.$$

Alnan deňlemede $x = 0$ goýup alarys:

$$y'''(0) = -3y^2(0) \cdot y'(0) = 0.$$

Differensial deňlemäniň iki tarapyndan iki gezek önüm alyp we $x = 0$ goýup, $y^{IV}(0)$ önümi tapýarlar we ş.m. Tapylan önümleriň bahalaryny $y(x)$ üçin ýazylan Makloreniň hatarynda ýerine goýup, tapylmadyk önümleri saklaýan agzalary taşlap, $y(x)$ üçin takmyn deňlik alarys:

$$y(x) \cong 1 - \frac{1}{2!}x^2.$$

Elbetde, takyklygy ýokarlandyrmak üçin, tapylýan önümleriň sanyny köpeltmeli bolar.

## §14. Furýe hatary

Berlen $f(x)$ funksiýany derňemek, onuň integralyny tapmak üçin we başga-da köp meselelerde funksiýanyň Teýlor hatarynyň ähmiýeti diýseň uludyr. Emma funksiýanyň Teýlor hataryna dargamagy üçin, onuň garalýan ýaýlada islendik tertipli önümi bolmalydyr. Bu diýseň çäklendiriji ýagdaýdyr. Köp meselelerde derňelýän funksiýanyň seredilýän ýaýlada hemme önümleri bolmaýar. Ine, şeýle funksiýalaryň derňewini ýeňilleşdirýän hatarlaryň biri Furýe hatarydyr. Ol şeýle kesgitlenýär. Goý, $f(x)$ funksiýa $2\pi$ periodly, $[-\pi, \pi]$ kesimde üznüksiz funksiýa bolsun.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

sanlara $f(x)$ funksiýanyň Furýe koeffisiýentleri diýilýär,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

hatara bolsa $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary diýilýär. Görşümiz ýaly, funksiýanyň Furýe hataryny düzmek üçin onuň $[-\pi, \pi]$ kesimde üznüksiz bolmagy ýeterlikdir. Furýe hatary $[-\pi, \pi]$ kesimde ýygnanýan bolsa, onda $\sin kx$, $\cos kx$, $k = 0, 1, ...$ funksiýalaryň periodiki bolmaklary sebäpli, bütin $x$-ler okunda hem ýygnanar. Eger $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary $[-\pi, \pi]$ kesimde ýygnanýan bolsa we onuň jemi $f(x)$ funksiýanyň özi bolsa, onda $f(x)$ funksiýa Furýe hataryna dargaýar diýilýär we

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

deňlik ýazylýar. Haçan $f(x)$ funksiýa Furýe hataryna dargaýar diýen sowala aşakdaky teorema jogap berýändir.

**Kesgitleme.** Eger $f(x)$-iň $[a, b]$ kesimde tükenikli sany birinji görnüşli üzülme nokatlary bolup, galan nokatlarynda üznüksiz bolsa, onda oňa $[a, b]$ kesimde bölekleýin üznüksiz funksiýa diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $f'(x)$ $[a, b]$ kesimde bölekleýin üznüksiz bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde bölekleýin endigan funksiýa diýilýär.

**Teorema.** Eger $f(x)$ $[-\pi, \pi]$ kesimde bölekleýin endigan bolsa, onda onuň Furýe hatary bütin $[-\pi, \pi]$ kesimde ýygnanýandyr. $[-\pi, \pi]$ kesimde $f(x)$ funksiýanyň üznüksiz nokatlarynda onuň jemi $f(x)$-e deňdir, $f(x)$-iň üzülýän $x_0$ nokadynda $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ deňdir, $[-\pi, \pi]$ kesimiň çäk nokatlarynda $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ sana deňdir.

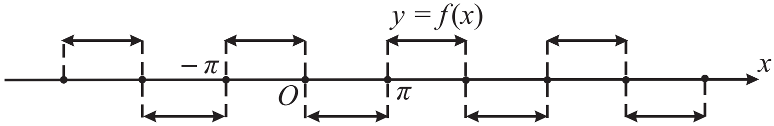
**Netije.** Eger $f(x)$ funksiýa teoremanyň şertlerini kanagatlandyrsa we üstesine $2\pi$ periodly bolsa, onda teorema bütin $x$-ler okunda dogrudyr,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

deňlik bütin $x$-ler okunda ýerliklidir.

Furýe hatarynyň $[-\pi, \pi]$ kesimde ýygnanmagy üçin, teoremanyň şertinden görnüşi ýaly, $f(x)$-iň $[-\pi, \pi]$ kesimde tükenikli sandaky üzülme nokady bolmaly. Ýagny olar 1, 2, $10^5$, $10^6$, $10^{10}$ ýaly sanda hem bolup bilerler. Bu bolsa ulanyş nazaryndan, inžener amalyýetinde gabat gelýän islendik funksiýanyň Furýe hatary ýygnanýar diýmekdir.

Mysal üçin, $f(x) = 1,\ -\pi < x < 0$, $f(x) = -1,\ 0 < x < \pi$, $f(x+2\pi)=f(x),\ \forall x \in R$, funksiýanyň *(125-nji surat)* Furýe hatary bütin $x$-ler okunda ýygnanýar. Onuň jemi $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots$, nokatlarda 1-e deň, $2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots$, nokatlarda –1-e deň, $x = k\pi,\ k \in Z$, funksiýanyň üzülýän nokatlarynda bolsa 0-a deň bolar.




*125-nji surat*

Ýene bir zady belläp geçeliň. Eger $f(x)$ Furýe hataryna dargaýan bolsa, özi hem jübüt funksiýa bolsa, onda islendik $k$ üçin

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$

bolar we Furýe hatary

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

görnüşi alar. Ýagny jübüt funksiýa diňe $\cos kx$ funksiýalar boýunça Furýe hataryna dargaýar. Tersine, eger $f(x)$ täk funksiýa bolsa, onda Furýe hatary

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

görnüşi alar.

**Mysal.** $f(x) = \sin\frac{1}{2}x$ funksiýanyň Furýe hataryny ýazalyň. $\sin\frac{1}{2}x$ täk funksiýadyr, diýmek, ol diňe sinuslar boýunça Furýe hataryna dargar, ýagny $\forall k$ üçin $a_k = 0$ bolar. $b_k$ Furýe koeffisiýentlerini tapalyň:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{1}{2}x \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-k\right)x - \cos\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}{\frac{1}{2}-k} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{\frac{1}{2}+k}\right] = \frac{(-1)^k}{\pi}\cdot\frac{8k}{1-4k^2}.$$

Diýmek, $[-\pi, \pi]$ aralykda

$$\sin\frac{1}{2}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi}\cdot\frac{8k}{1-4k^2}\cdot\sin kx$$

deňlik dogry bolar. $x = \pi$, $x = -\pi$ nokatlarda bolsa hataryň jemi 0-a deň bolar.

$[-\ell, \ell\,]$ kesimde 1-nji teoremanyň şertlerini kanagatlandyrýan $f(x)$ funksiýany hem özboluşly Furýe hataryna dargadyp bolar. Dogrudan hem, $\varphi(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right)$ funksiýa $[-\pi, \pi]$ kesimde 1-nji teoremanyň şertlerini kanagatlandyrýar. Şol sebäpli hem ol

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right)\sin kx dx$$

Furýe hataryna dargar (ýokardaky manysynda). Bu ýerde $\frac{\ell}{\pi}x = y$ çalşyrmany girizip alarys:

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi y}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi y}{\ell}, \quad -\ell \le y \le \ell,$$

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)\cos\frac{k\pi}{\ell}y dy, \; b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)\sin\frac{k\pi}{\ell}y dy.$$

Ahyrda, $y$-iň ýerine $x$ harpy ýazyp, $f(x)$ üçin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x,$$

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx, \quad b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx$$

ýene-de Furýeniň adyny göterýän hatary alarys. Öňki talaplara goşmaça $f(x)$ $[-\ell,\ell]$ kesimde üznüksiz we $f(x)$ $2\ell$ periodly funksiýa hasap etsek, onda bütin $x$-ler okunda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x$$

deňlik dogry bolar. Ýagny $f(x)$ bütin $x$-ler okunda Furýe hataryna dargar.

# XIII. ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETI

## §1. Giriş

Ähtimallyklar nazaryýeti matematikanyň soňky döwürde pajarlap ösýän şahalarynyň biridir. Onuň esasy sebäbi, bir tarapdan, bu nazaryýetiň usullarynyň we pikirleriniň matematikanyň klassyky usullarynyň geçmeýän ýerlerinde giňden ulanylmagy bolsa, beýleki tarapdan, onuň ulanylyş ýaýlasynyň giňelmegindedir. Ähtimallyklar nazaryýetiniň özüniň, oňa esaslanýan köpçülikleýin hyzmat etmek, matematiki statistika we başgalaryň ulanylmaýan ylymlary we pudaklary barmak basyp sanardan hem azdyr.

Bu ylmyň dörän wagtyny XVII asyr bilen, onuň ylym bolup ýol almagyny bolsa şol döwürde ýaşan B.Paskal, H.Gýuýgens, P.Ferma, Ý.Bernulli, P.Laplas, K.Gauss ýaly alymlaryň atlary bilen baglanyşdyrýarlar. Ähtimallyklar nazaryýetiniň şu wagtky derejesine ýetmeginde, onuň ulanylýan ýaýlalarynyň giňelmeginde A.N.Kolmogorow, A.Ý.Hinçin, P.L.Çebyşew, A.M.Lýapunow, A.A.Markow ýaly alymlaryň goşantlary diýseň uludyr.

Ähtimallyklar nazaryýeti tötän wakalardaky kanunalaýyklyklary öwrenýän ylymdyr. Biz tötän wakalara hemişe gabat gelýäris. Mysal üçin, siziň işe gideniňizde münýän awtobusyňyzyň duralga gelýän wagty diýseň tötändir. Onuň duralgadan iş ýeriňize çenli geçýän wagty hem tötändir. Ol şol bir köçe bilen hereket etse-de, onuň ýöreýän ýoly beýleki hereket edýän maşynlaryň päsgel bermegine görä, her gezek üýtgeşikdir, ýagny tötändir.

Ululygy ölçemeli bolsaňyz, takyk baha almak üçin siz ony birnäçe gezek ölçeýärsiňiz. Emma her gezek ölçäniňizde alýan bahaňyz tötändir. Bu tötänlikler garalýan esasy waka (awtobusyň hereketi, ululygyň bahasyny ölçemek) daşky wakalaryň täsir etmeginden bolýar.

Käbir ýagdaýlarda, daşky täsirler örän ujypsyz bolansoňlar, olaryň täsirini göz öňünde tutmasa hem bolýar. Bu halda esasy öwrenilýän waka kesgitlenen waka bolýar we biz ony matematikanyň öňden ösen differensial deňlemeler, matematiki derňew we ş.m. şahalaryna degişli usullar bilen öwrenip bileris.

Köp ýagdaýlarda daşky täsir edijiler örän köp sanda bolýarlar we olaryň bilelikdäki täsirini nazarda tutman bolmaýar. Şeýle hallarda matematikanyň ady tutulan şahalaryny ulanmak örän uly kynçylyklara getirýär ýa-da olary ulanmak mümkin hem bolmaýar. Mysal üçin, nili gorizonta bellibir burç bilen ýapgytlanan topdan çykýan oklaryň traýektoriýalary esasy şertleriň ýerine ýetmegine garamazdan (niliň gorizont bilen emele getirýän burçy saklanýar, howanyň temperaturasy birmeňzeş, şol bir kärhananyň taýýarlan meňzeş oklary atylýar) her gezek üýtgeşik bolýar. Şol traýektoriýalaryň her birini aýratyn öwrenjek bolsaň, onda traýektoriýany çyzýan okuň hereket edişiniň deňlemesini ýazmaly bolardy we şol anyk oka täsir eden hemme daşky wakalary göz öňünde tutmaly bolardy. Bu bolsa, birinjiden, mümkin hem däl, ikinjiden, mümkin bolaýanda hem örän çylşyrymly deňlemä getirerdi. Üçünjiden bolsa, onuň geregi hem ýok. Sebäbi bir traýektoriýa baradaky maglumat beýleki traýektoriýalar barada doly habar berip bilmeýär.

Ine, ähtimallyklar nazaryýeti edil şeýle köpçülikleýin synaglar geçirilýän hallardaky ýüze çykýan wakalary we şol wakalardaky kanunlary öwrenýän ylymdyr. Şeýlelikde, birmeňzeş wakalaryň toplumyny öwrenmek bilen, ähtimallyklar nazaryýeti örän uly kynçylyklara sezewar edýän her bir wakany aýratyn öwrenmek meselesini çetde goýup, olaryň toplumyny dolandyrýan kanunlary öwrenýär. Mysal üçin, bellibir şertlerde nyşana ok atylýar diýeliň. Eger ok ýekeje gezek atylsa, onda synagyň netijesi barada bellibir zady aýtmak kyn. Ok köp gezek atylanda, olaryň nyşana degen nokatlarynyň köplügi barada köp zat aýdyp bolýar. Ol nokatlar bellibir nokadyň töwereginde örän gür ýerleşýärler. Şol nokada golaýlaşdygyňça gürlük artýar, daşlaşdygyňça bolsa kemelýär. Diýmek, şol nokatlar bellibir kanuna laýyklykda ýerleşýärler. Ol kanun ähtimallyklar nazaryýetinde belli bolan normal paýlaýyş kanunydyr. Ýene bir mysal. Bir tarapynda surat, beýleki tarapynda bahasy ýazylan teňňäni oklanyňda, ol ýa surat tarapy bilen, ýa-da bahaly tarapy bilen ýokaryk ýatýar. Ol bir gezek oklananda onuň haýsy tarapynyň ýokarda boljagy barada dogry bir zat aýdyp bolmaýar. Goý, ol $n$ gezek oklanan bolsun we şol synagda surat $m$ gezek ýokarda gelen bolsun. $\frac{m}{n}$ gatnaşyk suratyň ýokarda bolmagynyň ýygylygyny häsiýetlendirýän sandyr. Synagyň sany uly bolanda ýygylygyň $\frac{1}{2}$ sana golaýlaşýandygyny tejribe arkaly görkezmek bolýar. Beýle ýagdaý esasy şertler saklanyp geçirilýän synaglarda ýüze çykýan islendik waka üçin hem dogrudyr. Ýagny $n$ tejribede waka $m$ gezek ýüze çykan bolsa, onda wakanyň ýygylygy bolan $\frac{m}{n}$ gatnaşyk $n$ tükeniksizlige ymtylanda bellibir $p$ sana ymtylýar. Diýmek, şol bir şertlerde ýüze çykýan wakalaryň toplumynyň özüni alyp barşy barada bellibir netijeler çykaryp bolýar. Bu ýagdaýyň iň ähmiýetli tarapy-da şeýle tejribeleriň toplumy ýene gaýtalanjak bolsa, onda tejribelerde ýüze çykýan birmeňzeş wakalaryň toplumynyň özüni nähili alyp barjakdygyny öňünden aýdyp bolmagydyr.

Mysal üçin, siz ekmek üçin bir hojalykdan tohum däne alýan bolsaňyz, sizi her bir aýratyn alnan dänäniň gögerenligi gyzyklandyrman, olaryň toplumynyň näçe göterim gögerenligi gyzyklandyrýandyr. Köp ýyllaryň dowamynda şol bir şertlerde, şol bir hojalykdan alnan tohum dänäni ekip, siz alnan tohum dänäniň ortaça 90%-niň gögerýänligini anyklap bilersiňiz. Eger indiki ýyl hem şol hojalykdan alnan tohum dänäni ekmek isleseňiz, onda öňünden onuň 90%-niň gögerjekdigini ygtybarly tassyklap bilersiňiz we şoňa laýyklykda hereket edersiňiz.

## §2. Esasy düşünjeler

Ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň birinjisi wakadyr. Islendik tejribäniň (synagyň) netijesine waka diýilýär. Mysal üçin, nyşana ok atylýan bolsa, onuň nyşana degmegi bir waka, degmezligi ýene bir waka. Talyplar synag tabşyranlarynda 5-lik baha almaklary bir waka, 4-lük baha almaklary ýene bir waka we ş.m.

Şol bir esasy şertlerde geçirilýän synaglaryň her birinde hökmany ýagdaýda ýüze çykýan waka **hökmany waka** diýilýär, synaglaryň hiç birinde ýüze çykmaýan waka **mümkin däl waka** diýilýär, synaglarda ýüze çykmagy we çykmazlygy mümkin bolan wakalara **tötän wakalar** diýilýär.

Mysal üçin, alty granlarynda birden alta çenli sanlar ýazylan kub görnüşdäki süňkjagaz (sanly süňkjagaz) oklanýar diýeliň. Ol ýere düşende ýokarky granynda birden alta çenli islendik sanyň bolmagy mümkin. Süňkjagazyň ýokarky granynda birlik san bolar diýen waka tötän wakadyr. Sebäbi onuň bolmagy hem mümkin, bolmazlygy-da mümkin. Süňkjagazyň ýokarky granynda ýedilik san bolar diýen waka bolup bilmejek, ýagny mümkin däl wakadyr; ýokarky grandaky san ýediden kiçidir diýen waka hemme wagt ýüze çykýan, ýagny hökmany wakadyr. Ýene bir mysal. Nyşana bir ok atylýar. Nyşana okuň degen ýerine baglylykda oňa baha berilýär. Bahalaryň iň ulusy 10, iň kiçisi 0 bolýar. Alnan baha 7-ä deň diýen waka tötän wakadyr. Sebäbi, onuň bolmagy hem, bolmazlygy hem mümkindir. Alnan baha 15-den kiçidir diýen waka hökmany wakadyr; 15-den uludyr diýen waka bolsa bolup bilmejek, ýagny mümkin däl wakadyr.

Wakalar uly latyn harplary bilen belgilenýär. Hökmany waka $E$ harpy bilen, mümkin däl waka bolsa $\varnothing$ belgi bilen belgilenýär. Galan tötän wakalary islendik harp bilen belgilese bolar. $A$ wakany inkär edýän we $A$ bilen jemi hökmany bolan waka garşylykly waka diýilýär we ol $\overline{A}$ belgi bilen belgilenýär. Mysal üçin, atylan ok nyşana deger diýen $A$ waka we nyşana degmez diýen $B$ waka garşylykly wakalardyr. Diýmek, $B = \overline{A}$ ýa-da $A = \overline{B}$ ýazmak bolar.

Biriniň ýüze çykmagy beýlekisiniň ýüze çykmagyny inkär edýän wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär. Mysal üçin, sanlyja süňkjagaz oklananda ýüze çykýan san 2-ä deň diýen $A$ waka we çykan san 4-e deň diýen $B$ waka sygyşmaýan wakalardyr. Islendik ikisi özara sygyşmaýan $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ wakalara goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar ulgamy diýilýär. Mysal üçin, sanlyja süňkjagaz oklananda $H_1$ – bir san ýüze çykdy, $H_2$ – iki san ýüze çykdy, ..., $H_6$ – alty san ýüze çykdy diýen wakalar bolup bilerler. $H_1$, $H_2$, ..., $H_6$ wakalar goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar ulgamydyr.

Biriniň ýüze çykmagy ýa-da çykmazlygy beýleki wakanyň ýüze çykmagyna ýa-da çykmazlygyna täsir etmeýän wakalara baglanyşyksyz wakalar diýilýär. Ýene-de sanlyja süňkjagaza ýüzleneliň. Goý, ol yzly-yzyna iki gezek taşlanan bolsun. $A$ – birinji gezek 3 san çykdy diýen waka, $B$ – ikinji gezek 4 san çykdy diýen waka. $A$ we $B$ wakalar özara baglanyşyksyz wakalardyr. Sebäbi ikinji gezekde 4-lügiň ýüze çykmagyna birinji gezek haýsy sanyň ýüze çykanlygynyň hiç bir dahyly ýokdur.

Indi wakalaryň üstünde geçirilýän amallary kesgitläliň.

**Kesgitleme.** $A$ we $B$ wakalaryň jemi diýip olaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar. Ol $A + B$ ýa-da $A \cup B$ belgi bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä, $A + B$ wakanyň ýüze çykmagy üçin ýa $A$ wakanyň ýüze çykmagy, ýa $B$ wakanyň ýüze çykmagy, ýa-da olaryň ikisiniň hem birden ýüze çykmagy zerurdyr. $A_1, A_2, ..., A_m$ wakalaryň jemi diýip olaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar. Ol $A_1+A_2+...+A_m$ ýa-da $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ görnüşde ýazylýar.

Mysal üçin, goý, $H_1$, $H_2$, ..., $H_6$ sanlyja süňkjagaz taşlananda 1, 2,..., 6 san ýüze çykdy diýen wakalar bolsunlar. Goý, $H_1 + H_2 = A$, $H_2 + H_4 + H_6 = B$ bolsun. Onda $A$ – ýüze çykan san ikiden uly däldir diýen waka bolýar, $B$ – ýüze çykan san jübütdir diýen waka bolýar.

**Kesgitleme.** $A$ we $B$ wakalaryň köpeltmek hasyly diýip olaryň ikisiniň hem bir wagtda ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar. Ol $A \cdot B$ ýa-da $A \cap B$ belgi bilen belgilenýär.

$A_1, A_2, ..., A_m$ wakalaryň köpeltmek hasyly diýip olaryň hemmesiniň bir wagtda ýüze çykmagyndan durýan waka aýdylýar. Ol $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_m$ ýa-da $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_m$ görnüşde ýazylýar.

**Mysal.** Nyşana yzly-yzlyna üç ok atylýar.

$A_1$ – ok birinji gezekde nyşana degdi diýen waka;

$A_2$ – ok ikinji gezekde nyşana degdi diýen waka;

$A_3$ – ok üçünji gezekde nyşana degdi diýen waka.

Käbir wakalara seredeliň.

$\overline{A_1}$ – ok birinji gezekde nyşana degmedi diýen waka;

$\overline{A_2}$ – ok ikinji gezekde nyşana degmedi diýen waka;

$\overline{A_3}$ – ok üçünji gezekde nyşana degmedi diýen waka.

$A_1 \cdot \overline{A_1}$ – ok nyşana hem degdi, hem-de degmedi diýen waka, ýagny bolup bilmejek wakadyr. Biz ony $A\overline{A_1} = \varnothing$ görnüşde hem ýazyp bileris.

$A_1 + \overline{A_1}$ – ýa ok deger, ýa-da ok degmez diýen waka, ýagny hemişe ýüze çykýan wakadyr. Biz ony $A_1 + \overline{A_1} = E$ görnüşde hem ýazyp bileris. Diýmek, islendik wakanyň onuň garşylyklysy bilen jemi hökmany waka bolýandyr.

$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – ok nyşana birinji gezekde degdi, ikinji gezekde-de degdi, üçünji gezekde-de degdi diýen wakadyr. Ýagny $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – nyşana üç ok degdi diýen waka bolýar.

$A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ – birinji gezekde ok nyşana degdi, galan gezeklerde degmedi diýen waka.

$\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$ – ikinji gezekde ok nyşana degdi, galan gezeklerde degmedi diýen waka.

$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$ – üçünji gezekde ok nyşana degdi, galan gezeklerde degmedi diýen waka.

Indi aşakdaky çylşyrymly waka seredeliň.

$$B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$$

$B$ – nyşana atylan üç okuň diňe biri degdi diýen wakadyr. $A + A = A$, $A \cdot A = A$ bolýany hem aýdyňdyr. Ahyrda, $A$ we $B$ sygyşmaýan wakalar üçin $A \cdot B = \varnothing$ bolýandygyny belläp geçeliň. $A \cdot B = \varnothing$ deňlikden $A$ we $B$ wakalaryň sygyşmaýanlygynyň gelip çykýanlygy sebäpli, bu deňligi sygyşmaýan wakalaryň kesgitlemesi hökmünde hem alsa bolar.

Eger $A$ wakanyň ýüze çykmagy $B$ wakanyň ýüze çykmagyna getirýän bolsa, onda $A$ waka $B$ waka getirýär diýilýär we ol gysgaça $A \subset B$ görnüşde belgilenýär. Eger birwagtda $A \subset B$ we $B \subset A$ bolsa, onda $A$ we $B$ wakalara deň wakalar diýilýär we ol $A = B$ görnüşde belgilenýär.

## §3. Ähtimallygyň klassyky kesgitlenilişi

Islendik tejribede ýüze çykýan wakalaryň hersiniň öz ýüze çykmak mümkinçiligi bar. Ine, şu her wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini häsiýetlendirmek üçin wakanyň ähtimallygy diýen düşünje girizilýär. Wakanyň ahtimallygy san bolýar. $A$ wakanyň ähtimallygy $P(A)$ bilen belgilenýär. Elbetde, tejribe geçirýäniň birinji gyzyklanýan zady, ol hem tejribe bilen baglanyşykly gerek bolan wakanyň ähtimallygyny bilmekdir. Wakanyň ähtimallygyny tapmak, umuman, aňsat däl. Emma käbir hallarda tejribe bellibir şertleri kanagatlandyrsa, ahtimallygy tapmak aňsatlaşýar.

Goý, $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ wakalar tejribäniň netijeleri bolsunlar we aşakdaky şertleri kanagatlandyrsynlar:

1. $H_1, H_2, ..., H_n$ goşa-goşadan şygyşmaýan wakalar, ýagny islendik $H_i$ we $H_j$, $i \neq j$, üçin, $H_i \cdot H_j = \varnothing$;

2. $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ *wakalaryň doly ulgamyny* düzýärler, ýagny $H_1 + H_2 + ... + H_n = E$;

3. $H_1, H_2, ..., H_n$ ýüze çykmak mümkinçilikleri deň bolan wakalar, ýagny olaryň ähtimallyklary özara deň bolmaly.

Eger tejribede şu şertleri kanagatlandyrýan wakalar bar bolsa, onda tejribe «ýagdaýlar shemasyna getirilýär» diýilýär, $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ wakalaryň her birine bolsa *ýagdaý* diýilýär.

Goý, $A$ ýagdaýlar shemasyna getirilýän tejribe bilen baglanyşykly islendik waka bolsun. $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ ýagdaýlar bolsun. $H_i$ ýagdaýyň ýüze çykmagy $A$ wakanyň ýüze çykmagyna getirýän bolsa, onda $H_i$ ýagdaýa $A$ waka ýardam edýän ýagdaý diýilýär. Eger $A$ waka ýardam edýän ýagdaýlaryň sany $m$ bolsa, onda $A$ wakanyň $P(A)$ ähtimallygy $P(A) = \frac{m}{n}$ formula arkaly kesgitlenýär. Muňa ähtimallygyň klassyky kesgitlenilişi diýilýär.

Mysallara seredeliň. Tejribe sanly süňkjagazy oklamakdan durýar. Bu tejribäniň ýagdaýlar shemasyna getirýändigini görkezeliň. $H_i$, $i = \overline{1,6}$ bilen $i$ san ýüze çykdy diýen wakany belgiläliň.

1. $H_i$, $i = \overline{1,6}$ – goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar.

2. $H_i$, $i = \overline{1,6}$ – wakalaryň doly ulgamyny düzýärler.

3. $H_i$, $i = \overline{1,6}$ – deň mümkinçilikli wakalar.

Diýmek, biziň tejribämiz ýagdaýlar shemasyna getirilýär. $A$ bilen tejribede jübüt san ýüze çykdy diýen wakany, $B$ bilen ýüze çykan san üçe bölünýär diýen wakany belgiläliň. $A$ waka ýardam edýänler $H_2$, $H_4$, $H_6$ ýagdaýlar bolar, $B$ waka ýardam edýänler $H_3$, $H_6$ ýagdaýlar bolar. Onda formula laýyklykda, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ bolar. Islendik $i$ üçin $P(H_i) = \frac{1}{6}$, $P(A+B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{6}$ boljakdygyny görmek kyn däldir.

**Mysal.** Gutuda 6 sany ak şar, 7 sany gara şar bar. Tötänden gutudan bir şar çykarylýar, şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny tapalyň.

**Çözülişi.** Gutuda 13 şar bar. Olar belgilenen diýip hasap edeliň. $H_i$, $i = \overline{1,13}$, $i$-nji şar çykaryldy diýen waka. $H_i$, $i = \overline{1,13}$, wakalaryň deň mümkinçilikli, goşa-goşadan sygyşmaýan we wakalaryň doly ulgamyny emele getirýän wakalardygy görnüp dur. Diýmek, biziň gutudan bir şary tötänden çykarmak tejribämiz ýagdaýlar shemasyna getirilýär. Bizi gyzyklandyrýan $A$ – ak şar çykaryldy diýen wakadyr. $H_i$, $i = \overline{1,13}$, ýagdaýlardan onuň ýüze çykmagyna ýardam edýänleriniň sany $m = 6$. Onda, formula görä, $P(A) = \frac{6}{13}$ bolar. Ýene iki waka seredeliň. $E$ – çykarylan şar ýa akdyr, ýa-da garadyr diýen waka bolsun. Bu hökmany wakadyr. $H_i$, $i = \overline{1,13}$, ýagdaýlaryň hemmesi oňa ýardam edýärler. Diýmek,

$$P(E) = \frac{13}{13} = 1$$

bolar. $\varnothing$ – çykarylan şar gök reňklidir diýen waka. Ol bolup bilmejek wakadyr, sebäbi gutuda gök şar ýok. Oňa ýagdaýlaryň hiç biri ýardam etmeýär, ýagny $m = 0$. Diýmek,

$$P(\varnothing) = \frac{0}{13} = 0$$

alarys. Bu ýagdaý islendik tejribe üçin hem dogrudyr. Hökmany wakanyň ähtimallygy $P(E) = 1$, mümkin däl wakanyň ähtimallygy $P(\varnothing) = 0$, $A$ wakanyň ähtimallygy bolsa $0 \leq P(A) \leq 1$ şerti kanagatlandyrýandyr. Eger $A \subset B$ bolsa, $P(A) \leq P(B)$, $A = B$ bolsa, $P(A) = P(B)$ boljakdygy hem düsnüklidir.

## §4. Ähtimallygyň statistiki kesgitlenilişi

Eger tejribe ýagdaýlar shemasyna getirilmese, bu bolsa, köplenç, şeýledir, onda ähtimallygy ýokardaky ýönekeýje formula arkaly kesgitläp bolmaýar. Beýle ýagdaýlarda statistiki usula ýüzlenýärler. Ol şundan ybarat. Tejribäni şol bir şertlerde $n$ gezek gaýtalaýarlar. Eger $n$ gezekde $A$ waka $m$ gezek ýüze çyksa, $m/n$ gatnaşyga *$A$ wakanyň ýygylygy* diýilýär we $P^*(A)$ bilen belgilenýär, ýagny $P^*(A) = \frac{m}{n}$. Şweýsar alymy J. Bernulliniň subut etmegine görä, islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $|P^*(A) - P(A)| = |\frac{m}{n} - P(A)| > \varepsilon$ diýen wakanyň ähtimallygy $n$ tükeniksizlige ymtylanda nola ymtylýandyr, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{m}{n} - P(A)| > \varepsilon\right) = 0$$

deňlik ýerliklidir. Ýönekeý dil bilen aýdanyňda, islendik $A$ wakanyň ýygylygy $n$-iň ösmegi bilen onuň ähtimallygyna golaýlaşýandyr.

Diýmek, wakanyň ýygylygy bilen onuň ähtimallygynyň arasynda örän jebis gatnaşyk bar. Bu gatnaşyk ýygylyk kesgitlenendäki geçirilen tejribeleriň sany näçe köp boldugyça, şonça-da aýdyň bolýar. Biz ähtimallygy wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini aňladýan san hökmünde kesgitledik. Ýokarky getirilen delillere görä, wakanyň ýygylygyna hem, $n$ uly bolan ýagdaýynda, wakanyň ýüze çykmagyny häsiýetlendirýän san hökmünde garamak dogrudyr.

Wakalaryň ýüze çykmak mümkinçiligini ähtimallygyň üsti bilen aňlatmagyň düýp manysy-da uly ähtimallykly wakalaryň ortaça kiçi ähtimallykly wakalardan köp ýüze çykmagyndadyr. Bu ýagdaý praktiki meselelerde giňden ulanylýandyr. Mysal üçin, wakalaryň ähtimallyklarynyň üsti bilen olaryň haýsysyna öwrenilýän prosesde köp üns bermeli, haýsysyna az üns bermeli diýen sowala jogap berip bolar. Ýa-da ähtimallyklary az bolan wakalara mümkin däl wakalar hökmünde, ähtimallyklary uly bolan wakalara bolsa hökmany wakalar hökmünde garap, prosesi öwrenmegi ýeňilleşdirip bolar.

Wakalaryň ähtimallyklaryny klassyky usul bilen hem, statistiki usul bilen hem kesgitlemek umumy halda aňsat däldir. Köp wakalaryň ähtimallyklaryny bu iki ýol bilen hasaplamak mümkin hem däl. Şol sebäpli, wakalaryň ähtimallyklaryny hasaplaýan özge ýollary hem ulanýarlar. Olar barada biz aşakdaky bölümlerde gürrüň bereris. Mysallara ýüzleneliň.

**1-nji mysal.** B.W. Gnedenkonyň «Ähtimallyklar nazaryýetiniň kursy» diýen kitabynda Şwed döwletiniň statistikasynyň 1935-nji ýyldaky ýaňy doglan çagalaryň gyzlara we oglanlara paýlanyşy baradaky aşakdaky tablisa (*) getirilýär. Tablisada görnüşi ýaly, gyz çaganyň dogmagynyň ýygylygy, geçirilen synaglaryň möçberiniň uly bolany sebäpli, aýma-aý üýtgemeýär diýen ýaly (şol bir 0,482 sanyň golaý töwereginde ýerleşýärler). Bu bolsa wakanyň ýygylygynyň tejribäniň sanynyň köpelmegi bilen bellibir sana ymtylmagyny tassyklaýar diýse bolar.

*Tablisa (*)*

| Aýlar | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Ýyl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hemmesi | 7280 | 6957 | 7883 | 7884 | 7892 | 7609 | 7585 | 7393 | 7203 | 6903 | 6552 | 7132 | 88273 |
| Oglanlar | 3743 | 3550 | 4017 | 4173 | 4117 | 3944 | 3964 | 3797 | 3712 | 3512 | 3392 | 3761 | 45682 |
| Gyzlar | 3537 | 3407 | 3866 | 3711 | 3775 | 3665 | 3621 | 3596 | 3491 | 3891 | 3160 | 3371 | 42591 |
| Gyzlaryň dogulmagynyň ýygylygy | 0,486 | 0,490 | 0,490 | 0,471 | 0,478 | 0,482 | 0,477 | 0,486 | 0,485 | 0,491 | 0,482 | 0,473 | 0,482 |

**2-nji mysal.** Aşakda ýene-de şol gollanmadan, iki alym tarapyndan teňňe oklananda onuň suratly tarapynyň çykmagynyň ýygylygyny kesgitlemek üçin geçirilen işleriň netijelerini jemleýän tablisa getirilýär.

| Synag geçiriji | Oklanan sany | Surat tarapynyň çykan sany | Ýygylyk |
|---|---|---|---|
| Býuffon | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| K.Pirson | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| K.Pirson | 24000 | 12012 | 0,5005 |

Görşümiz ýaly, bu tablisa ýokarda aýdylanlary tassyklaýar.

## §5. Birleşdirmeleriň esasy formulalary

Ähtimallyklara degişli mysallar çözülende esasy ulanylýan formulalar aşakdakylardyr.

**Ornaşdyrmalar**. Şol bir dürli $n$ elementden düzülen we diňe şol elementleriň geliş tertibi bilen tapawutlanýan setirlere ornaşdyrmalar diýilýär. $n$ elementden düzülen ornaşdyrmalaryň sany $P_n$ bilen belgilenýär we ol $P_n = n!$ formula arkaly kesgitlenýär. Bu ýerde $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

**1-nji mysal.** 5 sany dürli reňkli şarjagazlardan düzüp boljak ornaşdyrmalaryň sanyny hasaplalyň. Formula görä,

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

**Ýerleşdirmeler**. $n$ dürli elementleriň $m$ sanysyndan düzülen we biri-birinden ýa elementleri bilen, ýa-da elementleriň geliş tertibi bilen tapawutlanýan setirlere ýerleşdirmeler diýilýär. $n$ dürli elementlerden $m$ element boýunça düzülen ýerleşdirmeleriň sany $A_n^m$ bilen belgilenýär we ol $A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$ formula arkaly hasaplanýar.

**2-nji mysal.** 5 sany dürli reňkli şarjagazlardan 3 element boýunça düzülen ýerleşdirmeleriň sanyny hasaplalyň. Formula görä

$$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 60.$$

**Utgaşdyrmalar.** $n$ dürli elementleriň $m$ sanysyndan düzülen we elementleriň iň bolmanda biri bilen tapawutlanýan setirlere utgaşdyrmalar diýilýär. $n$ dürli elementlerden $m$ element boýunça düzülen utgaşdyrmalaryň sany $C_n^m$ bilen belgilenýär we ol

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$$

formula arkaly hasaplanýar.

**3-nji mysal.** 5 sany dürli reňkli şarjagazlardan 3 element boýunça düzülen utgaşdyrmalaryň sanyny hasaplalyň. Formula boýunça

$$C_5^3 = \frac{5(5-1)(5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Ýerleşdirmeleriň, utgaşdyrmalaryň we ornaşdyrmalaryň arasynda

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

görnüşli baglanyşyk bardyr. Biziň sereden mysalymyz üçin, bu baglanyşyk –

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}.$$

Formuladaky belgilemeleriň bahalaryny ýerine goýup, 10 = 60/6 deňligiň dogrudygyna göz ýetirse bolar. Islendik $n$ üçin $C_n^0 = 1$ kabul edilýär. Islendik $m \leq n$ položitel bitin sanlar üçin

$$C_n^m = C_n^{m-n}$$

deňlik dogrudyr. Biz birleşdirmeleri $n$ sany dürli elementler üçin kesgitledik. Eger-de elementleriň içinde meňzeşleri bar bolsa, ýagny $n_1, n_2, ..., n_k$ ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) özara meňzeş elementleriň sanlary bolsalar, onda $n$ elementlerden düzülen, elementleri gaýtalanyp bilýän ornaşdyrmalaryň sany $P(n_1, ..., n_k)$ bilen belgilenýär we ol

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

formula arkaly hasaplanýar.

**4-nji mysal.** Berlen bäş şarjagazyň 3-üsi ak, 2-si gara reňkli. Olardan düzülen ornaşdyrmalaryň sanyny tapalyň. Formula görä

$$P(3,2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

Mysalyň şertlerinde

$$C_5^3 = 3, \quad A_5^3 = 7$$

boljakdygyny hasaplap tapmak kyn däldir. Ýene bir ýatlamaly zadyň biri-de «Paskalyň üçburçlugy» diýlip atlandyrylýan tablisadyr. Ol şeýle düzülýär:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | 2 | | 1 | | | |
| | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | |
| | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | |
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| . | . | . | . | . | . | . | | | | |

Bu tablisanyň 1-den üýtgeşik islendik elementi onuň duran setiriniň ýokary ýanyndaky setirde şol elementiň üstünde ýerleşýän iki elementiň jemine deňdir. «Paskalyň üçburçlugynyň» islendik $k$-njy setiriniň elementleriniň degişlilikde $C_k^0, C_k^1, ..., C_k^k$ bilen gabat gelýändigini görmek kyn däldir. Bu tablisa utgaşdyrmalary aňsat hasaplama ýollarynyň biridir. Ondan başga-da «Paskalyň üçburçlugynyň» $k$-njy setiriniň elementleriniň $(1 + x)^k$ binomyň koeffisiýentlerine deň bolýandygyny hem ýatlamak artykmaç bolmaz.

## §6. Ähtimallygyň geometriki kesgitlenilişi

Ähtimallygy tapmagyň ýokarda getirilen klassyky we statistiki usullarynyň ýetmezçiliklerini belläp geçeliň.

Käbir tejribelerde ýüze çykýan wakalaryň sanynyň tükeniksiz köp bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda klassyky usuly ulanmak mümkin däl. Tükenikli bolýan halda bolsa, olaryň içinden ýagdaýlar shemasyny emele getirýänlerini saýlap almak kyn bolýar. Ýagny geçirilýän tejribeleriň köpüsi klassyky usulyň şertlerini kanagatlandyrmaýarlar. Bu halatlarda tejribeçiniň statistiki usula ýüzlenmegi mümkin. Bu ýerde hem kynçylyklaryň döremegi mümkin. Mysal üçin, tejribeleriň hemmesinde şol bir şertleriň ýerine ýetirilmegini gazanmak kyn bolýar; tejribäni şol bir şertleri saklap näçe köp geçirseň-de, ähtimallygyň takyk bahasyny bilip bolmaýar.

Ine, şuňa görä, käbir meseleler çözülende ähtimallygyň geometriki kesgitlemesini ulanýarlar. Goý, biziň tejribämiz berlen nokady $[a, b]$ kesimde tötänden ýerleşdirmekden durýan bolsun. $[a, b]$ kesimde ýatýan, uzynlygy $l$-e deň bolan kesim alalyň. Berlen nokat $[a, b]$ kesimde tötänden ýerleşdirildi, diýmek, şol nokadyň alnan kesime düşmeginiň ähtimallygy kesimiň $l$ uzynlygyna bagly bolup, onuň $[a, b]$ kesimde nirede ýerleşýändigine bagly däldir. Şol şertde, nokat uzynlygy $l$-e deň bolan kesime düşdi diýen $A$ wakanyň $P(A)$ ähtimallygy

$$P(A) = \frac{l}{b-a}$$

formula arkaly kesgitlenýär.

**1-nji mysal.** Uzynlygy $d$ deň bolan, $A$ we $B$ nokatlary birleşdirýän telefon simi tötänden $C$ nokatda üzülýär. $C$ nokadyň $A$ nokatdan uzaklygynyň $l$-den kiçi bolmazlygynyň ähtimallygyny tapalyň.

Simiň üstünde $A$ nokatdan uzaklygy $l$-e deň bolan $D$ nokat alalyň. Şeýlelikde, biziň meselämiz $C$ nokat uzynlygy $d-l$ bolan $DB$ kesime düşer diýen $F$ wakanyň ähtimallygyny tapmaklyga syrygýar. $C$ nokadyň $AB$ kesime tötänden düşýänligi sebäpli, biz ýokarky formulany ulanyp bileris:

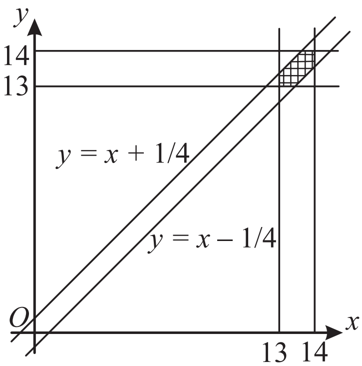
$$P(F) = \frac{d-l}{d}.$$

Edil şeýle meselelere tekizlikde we giňişlikde hem seretse bolar. Goý, $D$ tekizlikde (giňişlikde) ýatan, meýdany (göwrümi) $S$ ($V$) bolan ýaýla bolsun. $Q$ şol ýaýlada ýatýan we meýdany (göwrümi) $S_1$ ($V_1$) bolan ýaýla bolsun. Onda $D$ ýaýla tötänden ýerleşdirilen $C$ nokadyň $Q$ ýaýla düşmeginiň $P$ ähtimallygy $P = \frac{S_1}{S}$ $\left(P = \frac{V_1}{V}\right)$ formula arkaly tapylýar.

**2-nji mysal.** Iki talyp sagat 13 bilen 14-üň arasynda bir ýerde duşuşmagy gürleşýärler. Birinji gelen ikinjä 15 minut garaşýar we soň gaýdýar. Talyplaryň her biri duşuşyk ýerine gelmeli ($13-14$ sagat aralygynda) wagty tötänden saýlap alýar. Talyplaryň duşuşar diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

Goý, birinji talybyň gelen wagty $x$, ikinjiniň duşuşyga gelen wagty $y$ bolsun. Şerte görä $13 \le x \le 14$, $13 \le y \le 14$ deňsizlikler dogrudyrlar. $x$ we $y$ wagtlar tötänden saýlanýanlygy sebäpli, $(x, y)$ nokat

$D(13 \le x \le 14,\ 13 \le y \le 14)$ kwadrata tötänden ýerleşdirilen diýip bileris. Talyplaryň duşuşmagy üçin ($A$ wakanyň ýüze çykmagy üçin) $|x - y| < \frac{1}{4}$ deňsizlik ýerine ýetmelidir. Diýmek, $A$ wakanyň ýüze çykmagy üçin, $(x, y)$ tötän nokat $D$ kwadratyň $|x - y| < \frac{1}{4}$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlardan durýan $D_1$ bölegine ýerleşmelidir. $D_1$ ýaýla $-\frac{1}{4} < y - x < \frac{1}{4}$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlardan, başgaça aýdanyňda, $D$ ýaýlanyň $y = x - \frac{1}{4}$ we $y = x + \frac{1}{4}$ gönüleriň arasynda ýerleşýän nokatlaryndan durýar *(126-njy surat)*. $D$ ýaýlanyň $S$ meýdany 1-e deň. $D_1$ ýaýlanyň $S_1$ meýdany $S_1 = S - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$. Diýmek, $P(A) = \frac{S_1}{S} = \frac{7}{16}$.



*126-njy surat*

**3-nji mysal.** Aragatnaşyk bölümine sagat 3 bilen 5-iň arasynda gelýän wagtlary tötän bolan 3 habaryň gelmegine garaşylýar. Habary kabul edýän desga birinji habary kabul edenden soň $\frac{1}{2}$ sagat geçirip, işlemesini bes edýär. Kabul ediş desgasy üç habaryň üçüsini hem kabul eder diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny kesgitläliň. Goý, $x$ birinji habaryň gelen wagty, $y$ we $z$ bolsa ikinji we üçünji habarlaryň gelen wagtlary bolsunlar. Olar şerte görä, $3 \le x \le 5$, $3 \le y \le 5$, $3 \le z \le 5$, $x \le y$, $x \le z$ deňsizlikleri kanagatlandyrýarlar. Koordinatalary ýokarky şertleri kanagatlandyrýan $M\ (x,\ y,\ z)$ nokatlaryň $D$ köplügi $Q(3 \le x \le 5, 3 \le y \le 5, 3 \le z \le 5)$ kubuň $\frac{1}{3}$ bölegini tutýar, ýagny onuň göwrümi $D = \frac{2^3}{3}$ bolar. Kabul ediji desganyň üç habary hem kabul etmegi üçin, ýene-de $x \le z \le x + \frac{1}{2}$, $x \le y \le x + \frac{1}{2}$ deňsizlikleriň ýerine ýetmekleri gerekdir. $D$ ýaýlanyň soňky deňsizlikleri kanagatlandyrýan nokatlarynyň $D_1$ köplüginiň tutýan göwrüminiň $\frac{5}{96}\cdot 2^3$ deň boljakdygyny görkezmek kyn däl. Indi biz öz meselämizi şeýle beýan edip bileris: $M(x, y, z)$ nokat tötänden $D$ ýaýla düşýär. Ol nokadyň $D_1$ ýaýla düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly. Diýmek, ähtimallygyň geometriki kesgitlenişine görä,

$$P(A) = \frac{göwr.D_1}{göwr.D} = \frac{5\cdot 2^3}{96} : \frac{2^3}{3} = \frac{5}{32}.$$

Bu meselä üç adamyň dördünji adam bilen bilelikde duşmaklary baradaky mesele hökmünde hem garasa bolar.

Biz ähtimallygyň üç dürli kesgitlenişine seretdik. Eger tejribe klassyky shema gabat gelýän bolsa we şol tejribedäki $A$ wakanyň ähtimallygy nola deň bolsa, onda $A$ waka mümkin däl waka bolýar, ähtimallygy bire deň bolsa hökmany waka bolýar. Emma klassyky shema gabat gelmeýän tejribelerde bu hemişe beýle däldir. Mysal üçin, tejribe nokady meýdany $S$ bolan $D$ ýaýla oklamakdan durýan bolsa, onda şol nokadyň $D$ ýaýladaky $M$ nokadyň üstüne düşmeginiň ähtimallygy, ähtimallygyň geometriki kesgitlenişine görä, nola deňdir. Emma bu waka mümkin däl waka däldir, sebäbi oklanýan nokadyň $M$ nokadyň üstüne düşmegi mümkin wakadyr. Eger $D$ ýaýlada birnäçe çyzyklar geçirsek we $D$ ýaýlanyň şol çyzyklara degişli däl nokatlarynyň köplügini $D_1$ ýaýla diýip alsak, onda $meýd.D_1 = meýd.D$ bolany sebäpli, oklanýan nokadyň $D_1$ ýaýla düşmeginiň ähtimallygy 1-e deň bolar. Emma bu waka hökmany waka däldir. Sebäbi oklanýan nokat çyzyjaklaryň üstüne düşse, bu waka ýüze çykmaz. Klassyky shema gabat gelmeýän tejribede islendik wakanyň ähtimallygynyň bire deňdigini ýa däldigini takyk bilip hem bolanok. Muňa garamazdan, durmuş tejribesiniň görkezişine laýyklykda, ähtimallygy nola golaý wakalar örän seýrek ýüze çykýarlar, tersine, ähtimallyklary bire golaý wakalar, köplenç, ýüze çykýarlar.

Şol sebäpli, ähtimallyklary nola golaý wakalara tejribeden netije çykarylanda az üns berýärler, ähtimallyklary bire golaý wakalar bolsa, esasy üns berilmeli wakalar hasap edilýär. Ýöne beýle esaslanmalar her bir geçirilýän tejribä baglydyr.

## §7. Wakalaryň jeminiň ähtimallygyny hasaplamakda ulanylýan esasy formulalar

Islendik iki $A$ we $B$ wakanyň jeminiň $P(A + B)$ ähtimallygy aşakdaky formula arkaly tapylýar:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1}$$

Islendik iki $A$ we $B$ sygyşmaýan wakalaryň jeminiň ähtimallygy aşakdaky formula arkaly tapylýar:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Islendik $n$ sany $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň jeminiň $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$ ähtimallygy aşakdaky formula arkaly tapylýar:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i A_j) + \\ + \sum_{i<j<k}^{n} P\left(A_i \cdot A_j \cdot A_k\right) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n). \tag{3}$$

Islendik $n$ sany $A_1, A_2, ..., A_n$ goşa-goşadan sygyşmaýan wakalaryň jeminiň ähtimallygy aşakdaky formula arkaly tapylýar:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{4}$$

(1) – (4) formulalara, gysgalyk üçin, ähtimallyklary goşmak formulasy diýeris.

Garşylykly $A$ we $\overline{A}$ wakalaryň jeminiň ähtimallygy, olar sygyşmaýan bolandyklary sebäpli, $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ formula arkaly tapylýar. Emma $A + \overline{A} = E$ çyn waka bolany üçin, $P(A + \overline{A}) = P(E) = 1$ bolar. Şoňa görä $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ýa-da $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ deňligi alarys. Bu deňlik, adatça, $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$ belgilemeleri girizip,

$p = 1 - q$ görnüşde hem ýazylýar. Indi formulalaryň ulanylyşyna mysallar getireliň.

**1-nji mysal.** 10 sany guralyň 2-si näsaz. Olaryň içinden tötänden saýlanyp alnan ikisiniň iň bolmanda biri saz diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

Eger $A_1$ – birinji alnan gural saz, $A_2$ – ikinji alnan gural saz diýen wakalar bolsalar, onda $A = A_1 + A_2$ boljakdygy düşnüklidir. 10 sany guraldan 2 guraly, olaryň alnyş tertibini göz öňünde tutup, $A_{10}^2$ usul bilen saýlap boljakdygy aýdyňdyr. Olaryň içinde $A_1$ wakanyň ýüze çykmagyna ýardam edýänleriniň sany 72, $A_2$ üçin hem şeýle. $A_1 \cdot A_2$ waka ýardam edýänleriniň sany $A_8^2$. (1) formula görä,

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesiniň esasynda,

$$P(A_1) = \frac{72}{A_{10}^2} = \frac{72}{90}; \quad P(A_2) = \frac{72}{A_{10}^2} = \frac{72}{90}; \quad P(A_1A_2) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{56}{90}.$$

Tapylan bahalary ýerine goýup alarys:

$$P(A) = \frac{72}{90} + \frac{72}{90} - \frac{56}{90} = \frac{88}{90} = \frac{44}{45}.$$

**2-nji mysal.** Nyşana ortada ýerleşýän tegelekden we ony gurşap alýan iki halkadan ybarat. Mergen nyşana bir ok atýar. Okuň tegelege degmeginiň ähtimallygy 0,20, birinji halka degmeginiň ähtimallygy 0,15, ikinji halka degmeginiň ähtimallygy 0,10-a deň. Mergeniň oky nyşana deger diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň. $A_1$ – ok tegelege degdi, $A_2$ – ok birinji halka degdi, $A_3$ – ok ikinji halka degdi diýen wakalar bolsalar, onda $A = A_1 + A_2 + A_3$ boljakdygy düşnükli. Şerte görä, $P(A_1) = 0{,}20$, $P(A_2) = 0{,}15$, $P(A_3) = 0{,}10$. $A_1, A_2, A_3$ goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar bolýanlygy sebäpli, (4) formulany ulanyp alarys:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \text{ ýa-da } P(A) = 0{,}20 + 0{,}15 + 0{,}10 = 0{,}45.$$

**3-nji mysal.** Kärhana öndürýän enjamlarynyň 100-isinden 5-isini näsaz goýberýär. Tötänden 100 enjamdan 2-sini saýlap alýarlar. Şol ikiň iň bolmanda biri sazdyr diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

$A$ wakanyň garşylykly $\overline{A}$ wakasy – saýlanyp alnan enjamlaryň ikisi hem näsaz diýen wakadyr. Bu tejribede $\overline{A}$ wakanyň ähtimallygyny ilki tapmak amatly. 100 enjamdan 2-sini $C_{100}^{2}$ usul bilen saýlap bolýar. Şolaryň içinden birini tötänden alýandygymyz sebäpli, biziň tejribämiz ýagdaýlar shemasyna gabat gelýär. Ol ýagdaýlaryň $\overline{A}$ waka ýardam edýänleriniň sany $C_5^2$ bolar. Şoňa görä, $\overline{A}$ wakanyň $P(\overline{A})$ ähtimallygy üçin alarys:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_5^2}{C_{100}^2} = \frac{20}{9900} = \frac{1}{495}.$$

Indi $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ formulany ulanyp, taparys:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{495} \approx 0,998,$$

ýagny ulanyş nazardan $A$ hökmany wakadyr diýse bolar.

## §8. Wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygyny hasaplamakda ulanylýan esasy formulalar

Bellibir şertlerde geçirilýän tejribede $A$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy belli bolsun. Eger tejribäniň geçirme şertleri üýtgedilse, onda $A$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygynyň üýtgemegi mümkin. Mysal üçin, başlangyç şertlerde tejribe geçirilende $B$ waka ýüze çykan bolsa, onda biziň başlangyç şertlerimiziň üstüne ýene bir «$B$ waka ýüze çykdy» diýen şert goşuldygy bolýar. Diýmek, bu ýagdaýda $A$ wakanyň ýüze çykma ähtimallygynyň üýtgemegi mümkin. $B$ wakanyň ýüze çykmagy bilen $A$ wakanyň üýtgän ähtimallygyna şertli ähtimallyk diýilýär we ol $P(A/B)$ bilen belgilenýär. $P(A/B)$ – «$A$ wakanyň $B$ waka ýüze çykandaky şertli ähtimallygy» diýlip okalýar. $A$ wakanyň başlangyç şertlerdäki $P(A)$, ýagny $B$ wakanyň ýüze çykandygy belli bolmandaky ähtimallygyna şertsiz ähtimallyk diýilýär. $P(A/B)$ şertli ähtimallyk, $P(B) \neq 0$ bolan halda

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{5}$$

formula arkaly hasaplanýar. Edil şoňa meňzeşlikde, $P(A) \neq 0$ bolan halda

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{6}$$

formula hem dogrudyr. $A$ we $B$ wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) \tag{7}$$

ýa-da

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \tag{8}$$

deňgüýçli formulalar arkaly tapylýar. $A$ we $B$ baglanyşyksyz wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \tag{9}$$

formula arkaly hasaplanýar. Bu ýagdaýda (5) we (6) formulalar degişlilikde

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B) \tag{10}$$

görnüşleri alarlar. Diýmek, $A$ we $B$ baglanyşyksyz wakalar bolsalar, onda $A$-nyň $B$ waka görä şertli ähtimallygy $A$ wakanyň şertsiz ähtimallygyna deňdir we tersine hem dogrudyr. Ýagny baglanyşyksyz wakalaryň biriniň ýüze çykmagy beýlekisiniň ähtimallygyny üýtgetmeýär.

Eger $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar goşa-goşadan baglanyşyksyz bolsalar, onda olara goşa-goşadan baglanyşyksyz wakalar ulgamy diýilýär. Eger $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň islendik biri galan wakalaryň islendik sanysynyň köpeltmek hasylynyň her biri bilen baglanyşyksyz bolsa, onda şeýle wakalara toparlaýyn baglanyşyksyz wakalar ulgamy diýilýär. Eger $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar toparlaýyn baglanyşyksyz bolsalar, onda $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$ wakalar hem toparlaýyn baglanyşyksyz bolarlar. Toparlaýyn baglanyşyksyz wakalaryň ulgamyny emele getirýän $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ wakalaryň köpeltmek hasylynyň $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n)$ ähtimallygy

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n) \qquad (11)$$

formula arkaly hasaplanýar.

$A_1, A_2, ..., A_n$ islendik wakalaryň köpeltmek hasylynyň ähtimallygy

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1 ... A_{n-1}) \qquad (12)$$

formula arkaly hasaplanýar. Mysal üçin, $n = 3$ bolanda formula

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)$$

görnüşe geler. (11), (12) formulalar wakalaryň köpeldiş tertibini üýtgedeňde hem dogrudyr. (7), (8), (11), (12) formulalara, gysgalyk üçin, ähtimallyklary köpeltmek formulalary diýeris. Toparlaýyn baglanyşyksyz wakalar ulgamyny emele getirýän $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ wakalaryň iň bolmanda biriniň, ýagny $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot ... \cdot P(\overline{A_n}) \qquad (13)$$

formula arkaly hasaplanýar. Bu formula

$$\overline{A} = \overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + ... + \overline{A}_n,$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

formulalara esaslanýandyr. Adatça, $P(\overline{A}_i) = q_i, i = \overline{1,n}$ belgilemeleri girizip, ony

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$$

görnüşde ýazýarlar. Formulalaryň ulanylyşyna degişli mysallara seredeliň.

**1-nji mysal.** 2 gara we 4 ak şar bar bolan gutudan yzly-yzyna iki şar çykarýarlar. Ikinji çykarylan şar ak bolar diýen $A$ wakanyň, birinji çykarylan şar gara bolar diýen $B$ wakanyň ýüze çykandaky şertli ähtimallygyny tapalyň.

6 şardan, olaryň reňklerine garaman, $A_6^2$ usul bilen iki şary saýlap alyp bolýar. Diýmek, tejribede 30 ýagdaý bar. Ol ýagdaýlaryň $A$ waka ýardam edýänleriniň sany 20. Olaryň $B$ waka ýardam edýänleriniň sany 10. Olaryň $AB$ waka ýardam edýänleriniň sany 8. Diýmek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä,

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}; \quad P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad P(AB) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$$

$P(A/B)$ ähtimallygy şertli ähtimallygy hasaplamagyň (5) formulasyny ulanyp taparys:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4}{15} : \frac{1}{3} = \frac{4}{5}.$$

$P(A) \neq P(A/B)$ bolany sebäpli, $A$ we $B$ özara baglanyşykly wakalar bolýarlar. $P(A/B)$ ähtimallygy başgaça-da hasaplap bolýar. $B$ waka ýüze çykan ýagdaýynda gutuda 1 gara we 4 ak şar galýar. Şeýle şarlary saklaýan gutudan ak şary çykarmagyň ähtimallygynyň klassyky shema görä $\frac{4}{5}$ boljakdygy düşnüklidir. Biz $P(AB)$ ähtimallygy hem (7) formulany ulanyp tapyp bileris:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}.$$

**2-nji mysal.** $P(A) = a$, $P(B) = b \neq 0$.

$$P(A/B) \geq \frac{a + b - 1}{b}$$

deňsizligi subut edeliň. (5) formula görä,

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{b};$$

(1) formula görä,

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B) \geq a + b - 1.$$

Diýmek,

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{b} \geq \frac{a + b - 1}{b}.$$

**3-nji mysal.** Kärhana gurallarynyň 95%-ini talabalaýyk we talabalaýyklaryň 86%-ini birinji derejeden goýberýär. Kärhanadan tötänden alnan bir gural birinji derejeli bolar diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

Goý, $B$ – alnan gural talabalaýyk diýen waka bolsun. $A = AB$, $P(A/B) = 0{,}86$, $P(B) = 0{,}95$ bolýandygy sebäpli, (7) formulany ulanyp taparys:

$$P(A) = P(AB) = P(B)P(A/B) = 0{,}95 \cdot 0{,}86 = 0{,}817.$$

**4-nji mysal.** Üç sany sanlyja şahjagazlar taşlananda olaryň iň bolmanda biri 6-lyk sany görkezer diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

Goý, $A_1, A_2, A_3$ degişlilikde birinji, ikinji, üçünji şahjagaz altylyk görkezer diýen wakalar bolsunlar. $A_1, A_2, A_3$ wakalar we $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ garşylykly wakalaryň her üçüsi aýratynlykda toparlaýyn baglanyşyksyz wakalar ulgamyny düzýärler:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{6}, \quad P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = \frac{5}{6},$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3.$$

Indi toparlaýyn baglanyşyksyz wakalar üçin bolan (11) formulany ulanyp alarys:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Ahyrda, (13) formulany ulanyp taparys:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}.$$

## §9. Doly ähtimallyklar formulasy. Çaklamalar formulasy

Eger tejribede ýüze çykýan $H_1, H_2, ..., H_n$ wakalar aşakdaky iki şerti:

1. $H_1, H_2, ..., H_n$ – goşa-goşadan sygyşmaýan wakalar;

2. $H_1 + H_2 + ... + H_n = E$ (islendik tejribede olaryň iň bolmanda biri ýüze çykýar) kanagatlandyrsalar, onda olara çaklamalar diýip at berýärler. Eger $A$ tejribede ýüze çykyp bilýän islendik waka bolsa, onda onuň $P(A)$ ähtimallygy

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... +P(H_n)P(A/H_n)$$

formula arkaly tapylar. Bu formula doly ähtimallyklar formulasy diýilýär.

$A$ waka ýüze çykandan soň çaklamalaryň ähtimallyklarynyň üýtgemekleri mümkin. Üýtgän ähtimallyklar, ýagny $P(H_i/A)$, $i = \overline{1,n}$ ähtimallyklar iňlis alymy Beýesiň adyny göterýän

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)}$$

formula arkaly tapylýar. Bu formula, adatça, çaklamalar formulasy diýilýär.

**1-nji mysal.** Harytlaryň iki toplumynyň birinde 12, beýlekisinde bolsa 10 haryt bar. Toplumlaryň hersinde bir haryt zaýa. Birinji toplumdan bir harydy alyp ikinjä goşýarlar we soňra ikinji toplumdan tötänden birini saýlap alýarlar. Çykarylan haryt zaýa diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

$H_1$ – çykarylan haryt birinji topluma degişli, $H_2$ – çykarylan haryt ikinji topluma degişli diýen wakalara seredeliň. $H_1$, $H_2$ özara sygyşmaýan, $H_1 + H_2 = E$ bolan wakalar. Diýmek, biz doly ähtimallyklar formulasyny ulanyp bileris:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Meseläniň şertine görä,

$$P(H_1) = \frac{1}{11}, \quad P(H_2) = \frac{10}{11}, \quad P(A/H_1) = \frac{1}{12}, \quad P(A/H_2) = \frac{1}{10}.$$

Ähtimallyklaryň tapylan bahalaryny formulada goýup alarys:

$$P(A) = \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{12} + \frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10} = \frac{13}{132}.$$

**2-nji mysal.** Ýokarky mysalyň şertlerinde $A$ waka ýüze çykan bolsun. Ýagny alnan haryt zaýa çykan bolsun. $H_1$, $H_2$ çaklamalaryň üýtgän, ýagny $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$ şertli ähtimallyklaryny tapalyň. Çaklamalar formulasyny ulanyp taparys:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{13}{132}} = \frac{1}{13};$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{11}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{13}{132}} = \frac{12}{13}.$$

## §10. Bernulliniň gaýtalanýan synaglar üçin formulasy

Şol bir şertlerde gaýtalanýan tejribeleriň islendiginde $A$ wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki tejribeleriň netijelerine bagly däl bolsa, onda şeýle tejribelere baglanyşyksyz tejribeler diýilýär. Eger baglanyşyksyz tejribeleriň her birinde $A$ waka şol bir $p$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsa, onda onuň $n$ tejribede $m$ gezek ýüze çykmagynyň $P_n(m)$ ähtimallygy J. Bernulliniň adyny göterýän

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q = 1 - p)$$

formula arkaly kesgitlenýär. $n$ san uly bolan hallarynda ähtimallygy ýokarky formula boýunça hasaplamak kynçylyk döredýär. Şol sebäpli $n$ uly bolan ýagdaýlarynda fransuz matematigi Laplasyň teoremalaryny ulanýarlar.

**Laplasyň lokal teoremasy.** Eger $n$ ýeterlik uly bolsa, onda $P_n(m)$ ähtimallygy

$$P_n(m) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

formula arkaly takmyn hasaplap bolar. Özi hem $n$ näçe uly bolsa, formula şonça-da takykdyr.

**Laplasyň integral teoremasy.** $n$ ýeterlik uly bolanda, $m$ san $m_1$ we $m_2$ ($m_1 < m_2$) sanlaryň arasynda ýatyr diýen wakanyň $P_n(m_1, m_2)$ ähtimallygy

$$P_n(m_1, m_2) \cong \Phi(x'') - \Phi(x'), \quad x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

formula arkaly takmyn hasaplap bolar. Özi hem $n$ näçe uly bolsa, formula şonça-da takykdyr.

Hasaplamalary ýeňilleşdirmek üçin,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

funksiýalaryň ýörite tablisalary düzülendir.

**1-nji mysal.** Nyşana baglanyşyksyzlykda üç gezek ok atylýar. Her gezekde okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy $p$ deň. Üç okuň diňe ikisi nyşana deger diýen $A$ wakanyň ähtimallygyny tapalyň.

$A$ wakanyň $P_3(2)$ ähtimallygyny Bernulliniň formulasyny ulanyp tapýarys:

$$P(A) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = 3p^2 q \quad (q = 1 - p).$$

**2-nji mysal.** Her tejribede ýüze çykmagynyň ähtimallygy $p = 0{,}2$ bolan $A$ wakanyň 400 tejribede 104 gezek ýüze çykmagynyň takmynan ähtimallygyny tapalyň. Synaglaryň sany (400) köp bolany üçin, Laplasyň lokal teoremasyny ulanýarys. $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $m = 104$ sanlary ulanyp alarys:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{104 - 80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{24}{8} = 3.$$

Tablisadan $\varphi(3) = 0{,}0044$ tapýarys. Indi gözlenýän ähtimallygy hasaplaýarys:

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{0{,}0044}{8} = 0{,}0006.$$

**3-nji mysal.** Atyjynyň bir okda nyşana degmeginiň ähtimallygy $p = 0{,}75$. Atylan 100 okuň nyşana degenleriniň sany 70 bilen 80 arasynda bolar diýen wakanyň ähtimallygyny takmyn tapalyň.

Synaglaryň sany (100) köp bolany üçin, Laplasyň integral teoremasyny ulanýarys. $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 100$, $m_1 = 70$, $m_2 = 80$ sanlary ulanyp alarys:

$$x' = \frac{70 - 75}{2{,}5 \cdot \sqrt{3}} = -1{,}15, \qquad x'' = \frac{80 - 75}{2{,}5 \cdot \sqrt{3}} = 1{,}15,$$

$$P_{100}(70, 80) = \Phi(x'') - \Phi(x') = 2\Phi(1{,}15) = 0{,}7498.$$

# XIV. TÖTÄN ULULYKLAR WE MATEMATIKI STATISTIKADAN MAGLUMATLAR

Geçen bölümlerde meseleler çözülende biz köp ýagdaýlarda tejribede alyp biljek bahalary öňünden belli bolmadyk ululyklara duşýardyk. Häzirki zamanda tötän ululyklar diýlip at berilýän şeýle ululyklary öwrenmeklige örän uly üns berýärler. Sebäbi, bir tarapdan, wakalar bilen baglanyşykly meseleleri tötän ululyklar bilen bagly meselelere getirip çözmek amatly bolsa, beýleki tarapdan, tötän ululyklar shemasyna getirilip çözülýän meseleleriň gerimi has giň bolýar. Tötän ululyk, adatça, şeýle kesgitlenýär: islendik tejribede bellibir baha eýe bolýan, emma öňünden haýsy baha eýe boljagyny bilip bolmaýan ululyga tötän ululyk diýilýär. Mysal üçin, nyşana atylan bäş okuň nyşana degenleriniň sany tötän ululykdyr. Sebäbi onuň öňünden haýsy baha eýe boljagy belli däldir. Jisimiň tejribe üsti bilen kesgitlenýän dykyzlygy tötän ululykdyr. Sebäbi, onuň hem öňünden haýsy baha eýe boljakdygy belli däldir.

Tejribede alyp biljek bahalarynyň hemmesini san bilen belgiläp çykyp bolýan tötän ululyklara diskret tötän ululyklar diýilýär. Tejribede alyp biljek bahalary bir kesimi ýa-da bütin sanlar okuny doldurýan tötän ululyklara üznüksiz tötän ululyklar diýilýär.

Ýokarda getirilen mysallarymyzyň birinjisindäki tötän ululyk diskret tötän ululyga mysal, ikinjisindäki bolsa üznüksiz tötän ululyga mysal bolup biler. Tötän ululyklary, adatça, $X$, $Y$, ... – baş harplar bilen, olaryň alyp biljek bahalaryny degişlilikde $x_1$, $x_2$, ..., $y_1$, $y_2$, ... – setir harplar bilen belgileýärler.

## §1. Diskret tötän ululyklar we olaryň san häsiýetlendirijileri

Goý, $X$ – tötän ululyk, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – onuň alyp biljek bahalary bolsun. $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ wakalaryň $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, ..., $P(X = x_n)$ ähtimallyklaryny degişlilikde $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ bilen belgiläliň.

Aşakdaky tablisa $X$ tötän ululygyň paýlanyş hatary diýilýär:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

Paýlanyş hatary berlen tötän ululyk berildi hasap edilýär. Diýmek, $X$ tötän ululygyň berilmegi üçin onuň alyp biljek bahalary ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) we şol bahalary nähili ähtimallyklar bilen ($p_1$, $p_2$, ..., $p_n$) kabul edýänligi belli bolmalydyr. $X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n$ goşa-goşadan sygyşmaýan we doly ulgamy emele geirýän wakalar bolany sebäpli, islendik paýlanyş hatarynda $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ deňlik ýerlikli bolmalydyr.

**Mysal.** Nyşana üç ok atylýar. Her ok atylanda onuň nyşana degmeginiň ähtimallygy $p = 0{,}4$, $X$ – nyşana degen oklaryň sany. $X$ tötän ululygyň paýlanyş hataryny ýazalyň.

$X$-iň alyp biljek bahalary $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. $X = x_i$, $i = \overline{0,3}$ wakalaryň ähtimallyklaryny Bernulliniň formulasyny ulanyp tapýarys:

$$p_0 = C_3^0 \cdot (0,4)^0 \cdot 0,6^3 = 0,216; \quad p_1 = C_3^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432;$$

$$p_2 = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288; \quad p_3 = C_3^3 \cdot 0,4^3 = 0,064.$$

Diýmek, $X$-iň paýlanyş hatary

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

görnüşde bolar. Tablisadan görnüşi ýaly, $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$X$ tötän ululygyň alyp bilýän bahalary 0, 1, 2, ..., $n$ sanlar bolsa we $X = k$ wakanyň $p_k$ ähtimallygy

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

formula bilen tapylýan bolsa, onda $X$ tötän ululyk binomial kanun boýunça paýlanan diýilýär. $X$ tötän ululygyň alyp bilýän bahalary 0, 1, 2, 3, ... sanlar bolsa we $X = k$ wakanyň $p_k$ ähtimallygy

$$p_k = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \ a > 0$$

formula bilen tapylýan bolsa, onda $X$ tötän ululyk Puassonyň kanuny boýunça paýlanan diýilýär. Ýokarda getirilen mysaldaky $X$ tötän ululyk binomial kanun boýunça paýlanandyr. Eger $n$ tejribäniň her birinde $A$ waka $p$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsa, tejribeler baglanyşyksyz bolsalar, $p$ san örän kiçi we $n$ örän uly bolsa, onda $X$ tötän ululyk, $n$ tejribede $A$ wakanyň ýüze çykan sany, adatça, $a = np$ bolandaky Puassonyň kanuny boýunça paýlanan bolýar. Ýagny $X = k$ wakanyň $p_k$ ähtimallygy

$$p_k = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

formula arkaly kesgitlenýär.

**Mysal.** Elektrik desgasy $n = 1000$ sany elektroelementlerden durýar. Bir elementiň ýylyň dowamynda bozulmagynyň ähtimallygy $p = 0{,}001$ we ol beýleki elementleriň ýagdaýyna bagly däl. Desganyň ýylyň dowamynda iki elementiniň bozulmagynyň ähtimallygyny tapalyň.

$n$ ýeterlik uly we $p$ ýeterlik kiçi bolany sebäpli, ýylyň dowamynda bozulan elementleriň sanyny aňladýan $X$ tötän ululyk Puassonyň kanuny boýunça paýlanandyr diýip bileris. Ýokarky formulada $k = 2$, $np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$ goýup alarys:

$$p_2 = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = 0,184.$$

Tötän ululyklar bilen baglanyşykly ýene-de birnäçe düşünje girizeliň.

**Baglanyşyksyz tötän ululyklar.** Alyp bilýän bahalary $x_i$, $i = \overline{0,n}$ bolan $X$ we alyp bilýän bahalary $y_j$, $j = \overline{0,m}$ bolan $Y$ tötän ululyklar berlen. Eger islendik $i$, $0 \le i \le n$ we islendik $j$, $0 \le j \le m$ üçin $X = x_i$ we $Y = y_j$ wakalar baglanyşyksyz bolsalar, onda $X$ we $Y$ ululyklara baglanyşyksyz tötän ululyklar diýilýär. Bu kesgitlemäni başgaça hem aýtsa bolar: eger $X$ tötän ululygyň paýlanyş kanuny (hatary) $Y$ tötän ululygyň haýsy bahany kabul edenine bagly bolmasa, onda $X$ we $Y$ ululyklara baglanyşyksyz tötän ululyklar diýilýär. Mysal üçin, tejribe biri-birinden bihabar iki mergeniň hersiniň öz nyşanasyna üç ok atmagyndan durýar diýeliň. $X$ – birinji mergeniň nyşana degen oklarynyň sany, $Y$ – ikinji mergeniň nyşana degen oklarynyň sany bolsun. $X$ we $Y$ ululyklaryň baglanyşyksyz tötän ululyklardygy düşnüklidir.

Alyp bilýän bahalary $z_k$, $k = \overline{0,s}$ bolan $Z$ tötän ululygy alalyň. Eger, islendik $i$, $0 \le i \le n$; $j$, $0 \le j \le m$; $k$, $0 \le k \le s$, üçin $X = x_i$, $Y = y_j$, $Z = z_k$ wakalar toparlaýyn baglanyşyksyz bolsalar, onda $X, Y, Z$ ululyklara baglanyşyksyz tötän ululyklar diýilýär. Islendik tükenikli sandaky tötän ululyklaryň baglanyşyksyzlygy hem edil şeýle kesgitlenýär.

**Tötän ululyklaryň jemi.** Alyp bilýän bahalary $x_i$, $i = \overline{0,n}$ bolan $X$ we alyp bilýän bahalary $y_j$, $j = \overline{0,m}$ bolan $Y$ tötän ululyklar berlen. $X$ we $Y$ tötän ululyklaryň $X + Y$ jemi täze bir tötän ululykdyr. Onuň alyp bilýän bahalary $x_i + y_j$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$, sanlardan durýar. $x_i + y_j$ baha degişli $P_{ij}$ ähtimallyk bolsa $P_{ij} = P[(X = x_i)\cdot(Y = y_j)]$ formula bilen kesgitlenýär.

Eger $x_i + y_j$ sanlaryň birnäçesi özara deň bolsalar, onda $X + Y$ tötän ululygyň paýlanyş hatarynda ol bir gezek ýazylýar, oňa degişli ähtimallyk bolsa özara deň bolan jemleriň ähtimallyklarynyň jemine deň hasap edilýär.

Mysal üçin, $x_1 + y_3 = a,\ x_5 + y_1 = a,\ x_7 + y_2 = a$ bolsa, onda paýlanyş hatarda $a$ san ýazylýar, oňa degişli ähtimallyk bolsa $P_{13} + P_{51} + P_{72}$ sana deň bolýar. Ikiden köp sandaky tötän ululyklaryň jemi hem edil şeýle kesgitlenýär.

**Tötän ululyklaryň köpeltmek hasyly.** Tötän ululyklaryň $X \cdot Y$ köpeltmek hasyly täze bir tötän ululykdyr. Onuň alyp bilýän bahalary $x_i \cdot y_j$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$ sanlardan durýar, $x_i \cdot y_j$ baha degişli $P_{ij}$ ähtimallyk bolsa $P_{ij} = P[(X = x_i) \cdot (Y = y_j)]$ formula bilen kesgitlenýär. Eger birnäçe $x_i \cdot y_j$ görnüşdäki sanlar özara deň bolsalar, onda olaryň umumy bahasy $X \cdot Y$ ululygyň paýlanyş hatarynda bir gezek ýazylýar we oňa degişli ähtimallyk bolsa özara deň $x_i \cdot y_j$ bahalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir. Ikiden köp sandaky tötän ululyklaryň köpeltmek hasyllary hem edil şeýle kesgitlenýär. $X_1$, $X_2$, ..., $X_m$ tötän ululyklar baglanyşyksyz bolanlarynda olaryň jeminiň we köpeltmek hasylynyň paýlanyş kanunyny ýazmak aňsatlaşýar. Sebäbi bu ýagdaýda

$$P[(X_1 = x_i^1)\cdot(X_2 = x_j^2)\cdot ... \cdot(X_k = x_e^k)] =$$
$$= P(X_1 = x_i^1)\cdot P(X_2 = x_j^2)\cdot ... \cdot P(X_k = x_e^k)$$

formula ýerliklidir. Bu ýerde $x_s^m$, $s = 1, 2, ..., X_m$ tötän ululygyň alyp biljek bahalary.

Indi diskret tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijilerini kesgitläliň.

**Matematiki garaşma.** Diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip onuň hemme alyp biljek bahalarynyň özleriniň ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar. $X$ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny $M(X)$ (käbir ýagdaýlarda $m_x$) bilen belgileýärler. Kesgitlemä görä, matematiki garaşma

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$$

formula arkaly kesgitlenýär. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ bolmalydygyny bilýäris. Eger $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ bolsa, onda

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

deňligi alarys. Ýagny matematiki garaşma orta arifmetiki baha bilen gabat gelýär. Şunuň esasynda, matematiki garaşma arifmetiki orta bahanyň umumylaşdyrmasy diýse bolar. Matematiki garaşmanyň esasy häsiýetlerini sanap geçeliň.

1. Hemişelik $C$ ululygyň matematiki garaşmasy onuň özüne deňdir:

$$M(C) = C.$$

2. Hemişelik $C$ ululygy matematiki garaşma alamatynyň daşyna çykaryp bolar:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i).$$

4. Baglanyşyksyz $X_1, X_2, ..., X_n$ tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy olaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

**Dagynyklyk.** $X$ tötän ululygyň dagynyklygy $D(X)$ bilen belgilenýär we kesgitlemä görä,

$$D(X) = M(X - m_x)^2.$$

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerini ulanyp, soňky deňligi

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2$$

görnüşde hem ýazyp bolar. $X$ diskret tötän ululyk

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

paýlanyş kanuny bilen berilse, onda onuň dagynyklygy

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i \quad \text{ýa-da} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2$$

formula arkaly tapylar. Dagynyklygyň häsiýetlerini sanap geçeliň.

1. Hemişelik $C$ ululygyň dagynyklygy nola deňdir:

$$D(C) = 0.$$

2. Hemişelik $C$ ululygy dagynyklyk alamatynyň daşyna ony kwadrata göterip çykaryp bolar:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. $X$ we $Y$ baglanyşyksyz tötän ululyklaryň jeminiň dagynyklygy olaryň dagynyklyklarynyň jemine deňdir:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

**Orta kwadratik gyşarma.** $X$ tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasy

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$

formula arkaly kesgitlenýär.

**Korrelýasiýa momenti.** $X$ we $Y$ tötän ululyklaryň korrelýasiýa momenti $K_{xy}$ bilen belgilenýär we ol

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$$

formula arkaly kesgitlenýär.

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

formula bilen kesgitlenýän $\rho_{xy}$ sana *korrelýasiýa koeffisiýenti* diýilýär. Korrelýasiýa momenti we korrelýasiýa koeffisiýenti $X$ we $Y$ ululyklaryň arasyndaky baglanyşygy häsiýetlendirýär. Eger $X$ we $Y$ baglanyşyksyz ululyklar bolsalar, onda $\rho_{xy} = 0$ bolar. Eger $\rho_{xy} \neq 0$ bolsa, onda hökmany halda $X$ we $Y$ baglanyşykly bolar. Korrelýasiýa momenti nola deň bolan tötän ululyklara korrellirlenmedik tötän ululyklar diýilýär, nola deň bolmadyklara bolsa korrellirlenen tötän ululyklar diýilýär.

**Momentler.** $X$ tötän ululygyň $k$ tertipli başlangyç momenti $v_k$ bilen belgilenýär we ol

$$v_k = M(X^k)$$

formula bilen kesgitlenýär.

$X$ tötän ululygyň $k$ tertipli merkezi momenti $\mu_k$ bilen belgilenýär we

$$\mu_k = M(X - m_x)^k$$

formula bilen kesgitlenýär. Nazary paýlanyşyň normal paýlanyşdan tapawutlanýanyny kesgitlemek üçin, simmetriýa ýokluk koeffisiýenti $A_s$,

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

we eksses $E_k$,

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

girizilýär. Indi matematiki garaşmanyň we dagynyklygyň häsiýetlerinden ýene birini getireliň. Islendik $X$ we $Y$ tötän ululyklar üçin

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) + K_{xy},$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}$$

deňlikler dogrudyr. Mysallara geçeliň.

**1-nji mysal.** $X$ tötän ululyk binomial kanun boýunça paýlanan: $i$, $0 \le i \le n$, onuň alyp biljek bahalary, $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ olara degişli ähtimallyklar. Ýagny onuň paýlanyş hatary aşakdaky ýaly bolar:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $C_n^0 p^0 q^n$ | $C_n^1 p^1 q^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^n p^n q^0$ |

$X$-iň san häsiýetlendirijilerini kesgitläliň.

1. Matematiki garaşma $M(X)$:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = np \quad (m_x = np).$$

2. Dagynyklyk $D(X)$:

$$D(X) = M(X - m_x)^2 = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 C_n^k p^k q^{n-k} = npq.$$

3. Orta kwadratik gyşarma $\sigma_x$:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}\,.$$

4. Başlangyç momentler $v_k$:

$$v_1 = M(X) = np;$$

$$v_2 = M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = D(X) + m_x^2 = npq + n^2 p^2;$$

$$v_3 = np[1 + 3(n-1)p + (n-1)(n-2)p^2];$$

$$v_4 = np[1 + 7(n-1)p + 6(n-1)(n-2)p^2 + (n-1)(n-2)(n-3)p^3].$$

5. Merkezi momentler:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = D(X) = npq;$$

$$\mu_3 = np[q - 2pq];$$

$$\mu_4 = np[q + (5 + 2n)p - 6(2 + n)(n - 1)p^2 - 3(n + 1)(n - 1)(n - 2)p^3].$$

6. Simmetriýa ýokluk koeffisiýenti $A_s$:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{np(q - 2pq)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{1 - 2p}{\sqrt{npq}}.$$

7. Eksses $E_k$:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{npq^2} \cdot [q + (5 + 2n)p - 6(2 + n)(n - 1)p^2 -$$

$$- 3(n + 1)(n - 1)(n - 2)p^3] - 3.$$

8. Korrelýasiýany hasaplamak.

$X \leq 1$ bolanda 0-a deň, $X > 1$ bolanda 1-e deň bolan $Y$ tötän ululyga seredeliň. $(X \leq 1)$ wakanyň ähtimallygy $\alpha = \sum_{i=0}^{1} C_n^i p^i q^{n-i}$, $(X > 1)$ wakanyň ähtimallygy $\beta = \sum_{i=2}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}$, $Y$ tötän ululygyň paýlanyş hatarynyň bolsa

| $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\alpha$ | $\beta$ |

görnüşde boljakdygy düşnüklidir. $K_{xy}$ korrelýasiýa momentini tapalyň. $K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y)$ bolany sebäpli, $M(XY)$, $M(X)$, $M(Y)$ ululyklary tapmak ýeterlikdir. $XY$ ululygyň paýlanyş hatary

| $XY$ | 0 | 1 | 2 | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\alpha$ | 0 | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^n p^n q^0$ |

görnüşde bolar. Diýmek,

$$M(XY) = \sum_{i=2}^{n} C_n^i i p^i q^{n-i}, \quad M(X) = np, \quad M(Y) = \beta.$$

Şoňa görä,

$$K_{xy} = \sum_{i=2}^{n} C_n^i i p^i q^{n-i} - np\beta = n(n-1)p^2 q^{n-1}.$$

Şeýlelik bilen, $X$ we $Y$ hökmany baglanyşykly tötän ululyklardyr.

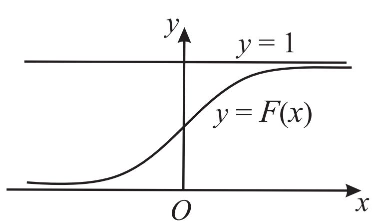
## §2. Üznüksiz tötän ululyklar. Olaryň berlişi we san häsiýetlendirijileri

Üznüksiz tötän ululyklar özleriniň paýlanyş funksiýalary ýa-da paýlanyşyň dykyzlygy bilen berilýärler. Olar şeýle kesgitlenýärler.

**Paýlanyş funksiýasy.** $X$ üznüksiz tötän ululyk üçin $X < x$ wakanyň ahtimallygyny $F(x)$ bilen belgileýärler we oňa paýlanyş funksiýasy diýýärler. Şeýle kesgitlemä görä alarys:

$$F(x) = P(X < x).$$

$F(x)$ funksiýa berlen bolsa, $X$ tötän ululyk berildi hasap edilýär. $F(x)$ ähtimallygy aňladýanlygy sebäpli, onuň bahalary $[0; 1]$ kesime degişlidir. Islendik $x_1 < x_2$ üçin $P(X < x_1) \leq P(X < x_2)$ bolany sebäpli, $F(x)$ kemelmeýän funksiýadyr. Şeýle hem $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ deňlikler ýerliklidir. Diýmek, $F(x)$ $(-\infty, \infty)$ aralykda 0-dan 1-e çenli artýan, otrisatel däl, kemelmeýän funksiýa bolýar *(127-nji surat)*. Mysal üçin, $F(x) = \left(\text{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right)/\pi$ edil şeýle funksiýadyr. $X$ tötän ululygyň alyp biljek bahalarynyň hemmesi $(a, b)$ aralyga degişli bolsa, onda $x \leq a$ bolanda $F(x) = 0$, $x \geq b$ bolanda $F(x) = 1$ boljakdygy düşnüklidir.



*127-nji surat*

$X$ tötän ululygyň $(a, b)$ aralyga düşmeginiň ähtimallygy, ýagny $P(a \leq X < b)$ ähtimallyk

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

formula arkaly tapylýar. Mysal üçin, $F(x) = \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right]$ paýlanyş funksiýasy bilen berlen $X$ tötän ululygyň tejribe netijesinde ýüze çykan bahasynyň $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 3\right)$ aralyga düşmeginiň $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \le X < \sqrt{3}\right)$ ähtimallygy

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \le X < \sqrt{3}\right) = F(\sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right] - \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{6}.$$

**Paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy.** $X$ üznüksiz tötän ululygyň paýlanyş funksiýasynyň önümine paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasy diýilýär we ol $f(x)$ bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä,

$$f(x) = F'(x).$$

Mysal üçin, $F(x) = \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right]$ paýlanyş funksiýasy bolan $X$ tötän ululygyň paýlanyşynyň $f(x)$ dykyzlyk funksiýasy üçin alarys:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}\left[\text{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right]' = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Kesgitlemeden gelip çykyşy ýaly, $f(x)$ otrisatel däl we $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ bolan funksiýadyr. Bu ýerden $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ boljakdygy hem düşnüklidir. Dykyzlyk funksiýasy belli bolan $X$ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

formula bilen, $X$ tötän ululygyň $(a, b)$ aralyga düşmeginiň $P(a \le X < b)$ ähtimallygy bolsa

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

formula arkaly kesgitlenýär.

**Matematiki garaşma.** Üznüksiz $X$ tötän ululygyň $M(X)$ matematiki garaşmasy

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

formula bilen, $D(X)$ dagynyklygy

$$D(X) = M(X - m_x)^2$$

ýa-da

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx,$$

ýa-da

$$D(X) = M(X^2) - m_x^2$$

formula bilen kesgitlenýär. Olar diskret tötän ululyklardaky ýaly häsiýetlere eýedirler. Orta kwadratik gyşarma, korrelýasiýa momenti, korrelýasiýa koeffisiýenti we momentler edil diskret ululyklara degişli bolan formulalar bilen kesgitlenýärler we şol ýerdäki häsiýetlere-de eýedirler. Ahyrda, $X$ tötän ululygyň paýlanyşynyň $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyna paýlanyş kanuny diýilýändigini hem belläp geçeliň.

## §3. Esasy paýlanyş kanunlary

**Deňölçegli paýlanyş kanuny**

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ -\infty < x < a \text{ bolanda}, \\ \dfrac{1}{b-a}, \ \ a \le x \le b \text{ bolanda}, \\ 0, \ \ b < x < \infty \text{ bolanda} \end{cases}$$

formulalar bilen kesgitlenýär. Deňölçegli paýlanan $X$ tötän ululyk üçin

$$M(X) = \frac{b+a}{2}, \ \ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

**Görkezijili paýlanyş kanuny**

$$f(x)=\begin{cases}0, \ x<0 \text{ bolanda},\\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \ x\geq 0 \ \text{ bolanda}, \quad \lambda>0-\text{hemişelik},\end{cases}$$

formulalar bilen kesgitlenýär. Görkezijili paýlanan $X$ tötän ululyk üçin

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

**Normal paýlanyş kanuny**

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

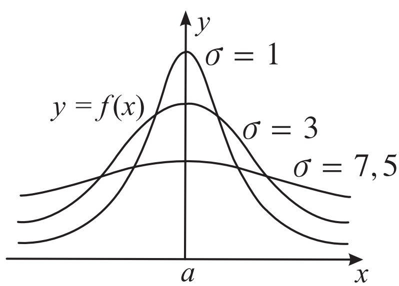
formula bilen kesgitlenýär. Normal paýlanan $X$ tötän ululyk üçin

$$M(X)=a, \quad D(X)=\sigma^2, \quad \sigma_x=\sigma.$$

Normal paýlanan $X$ tötän ululygyň $(\alpha, \beta)$ aralyga düşmeginiň $P(\alpha\leq X<\beta)$ ähtimallygy

$$P(\alpha\leq X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$



*128-nji a surat*

formula bilen kesgitlenýär. Şol tötän ululyk üçin $|X-a|<\delta$, $\delta$ – berlen san, deňsizligiň ýerine ýetmeginiň $P(|X-a|<\delta)$ ähtimallygy

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formula arkaly tapylýar. $\delta=3\sigma$ bolan halda formula

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)$$

ýa-da

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973$$

görnüşe geler, ýagny uly ygtybarlyk bilen $|X - a| < 3\sigma$ hemişe ýerine ýetýär diýse bolar. Normal paýlanyşyň $f(x)$ dykyzlygynyň grafigine normal egri ýa-da Gaussyň egrisi diýilýär. Onuň grafiginiň görnüşleri (dürli $\sigma$-lar üçin) *128-nji a suratda* getirilen. Bu grafik $x = a$ gönä görä simmetrikdir, $x = a$ nokatda grafigiň iň beýik nokady bardyr we $\sigma$-nyň artmagy bilen grafik $x$-ler okuna gysylýandyr.

**«Hi kwadrat» paýlanyş kanuny** ($\chi^2$ paýlanyş kanuny)

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leq 0 \text{ bolanda}, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot G\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, \; x > 0 \text{ bolanda}, \end{cases}$$

$$G(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

formulalar bilen kesgitlenýär. $k$ sana azatlyk derejesiniň sany diýilýär. «Hi kwadrat» paýlanyş kanunyna boýun $X$ tötän ululyk üçin

$$M(X) = k, \quad D(X) = 2k.$$

**Stýudentiň paýlanyş kanunynyň dykyzlygy**

$$S(t,n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}},$$

$$B_n = G\left(\frac{n}{2}\right) / \sqrt{\pi(n-1)} \cdot G\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

formulalar bilen kesgitlenýär. $k = n - 1$ sana azatlyk derejesiniň sany diýilýär. Stýudentiň paýlanyş kanunyna boýun $X$ tötän ululyk üçin

$$M(X) = 0, \quad D(X) = \frac{n-1}{n-3}.$$

Adatça, $n \geq 30$ bolanda Stýudentiň paýlanyş kanuny

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

normal kanun bilen gabat gelýär diýip hasap edýärler.

## §4. Matematiki statistikadan maglumatlar

Matematiki statistika tejribeleriň netijesinde alnan maglumatlary tertipleşdirýän, toparlaýan, öwrenýän we şonuň esasynda netijeler çykarýan ylym diýse bolar. Durmuşyň we tebigatyň adamlaryň öňünde goýýan meselelerini örän uly takyklykda çözmek klassyky usullara başartmaýan ýerinde matematiki statistikanyň usullaryna ýüzlenmeli bolýar. Klassyky usulyň ýetmez ýeri, bir tarapdan, onuň bilen meseleler çözülende öwrenilýän ulgama täsir edýän wakalaryň juda köp bolmagy bilen olaryň hemmesini göz öňünde tutup bolmaýanlygy bolsa, beýleki tarapdan, täsir edýän wakalar tötän bolanda, köplenç, olary göz öňünde tutmak mümkin hem bolmaýanlygyndadyr.

Ine, şeýle ýagdaýlarda matematiki statistikanyň usullary öňe sürülýär. Sebäbi ol öz çykarýan netijelerinde tejribelerden gelip çykan maglumatlara daýanýar, maglumatlar bolsa öwrenilýän ulgama täsir edýän tötän we tötän däl wakalaryň hemmesiniň täsiri esasynda döreýär. Diýmek, matematiki statistika öz çykarýan netijelerinde öwrenilýän ulgama täsir edýän hemme wakalary göz öňünde tutýar diýse bolar. Ol öz usullarynda ähtimallyklar nazaryýetiniň tötän wakalary we tötän ululyklary öwrenmeginden gelip çykan esasy nazary kanunlara esaslanýandyr. Şonuň üçin onuň çykarýan netijeleri çürt-kesik şeýle ýa-da şeýle däl diýen görnüşde bolman, bellibir ygtybarlykda şeýle ýa-da şeýle däl diýen görnüşde bolýar. Netijeler bilen gyzyklanýan adam bolsa, şol ygtybarlyklara esaslanyp, bellibir karara gelýär.

Mysal üçin, siziň gyzyklanýan enjamlaryňyzy bäş sany kärhana goýberýän bolsun. Alynmaly enjamlaryň sany örän uly bolany sebäpli, uly töwekgellige gitmek amatly däl. Sebäbi enjamlaryň içinde bozuklarynyň sanynyň köp bolmagy bilen ýitginiň örän uly bolmagy mümkin. Diýmek, her bir kärhananyň goýberýän 1000 enjamynyň içinden çykýan näsazlarynyň sany esasy gyzyklandyrýan ululyk bolýar. Ol ululyk tötän ululykdyr. Eger onuň paýlanyş kanuny belli bolsa, onda biz onuň garaşylýan sanyny, ýagny matematiki garaşmasyny, dagynyklygyny, onuň bahasynyň nähili ähtimallyk bilen bellibir aralykda ýatjagyny hasaplap bilerdik we enjam satyn almak barada bellibir karara gelerdik. Iň bolmanda matematiki garaşmasy we dagynyklygy belli bolsa hem käbir karara gelse bolardy.

Matematiki statistikanyň esasy wezipeleriniň biri-de öwrenilýän ululygyň tejribe geçirmek bilen alnan bahalarynyň esasynda onuň matematiki garaşmasyny, dagynyklygyny we paýlanyş kanunyny takmyn hasaplamak we alnan takmyn ululyklaryň ygtybarlygyny kesgitlemekdir. Aşakda şu meselelere serederis. Gerek boljak esasy düşünjeleri girizeliň.

Öwrenilýän $X$ tötän ululygyň tejribeler esasynda alnan bahalarynyň $x_1, x_2, ..., x_N$ toplumyna *baş toplum* diýilýär. Käbir hallarda $N$ uly san bolanda, bellibir usul bilen baş toplumdan kiçiräk bir toplumy saýlap alýarlar we oňa *saýlama toplum* diýilýär, onuň elementleriniň sanyna bolsa saýlamanyň göwrümi diýilýär. Eger toplumyň elementleri artýan tertipde belgilenen bolsalar, onda oňa *wariasion hatar* diýilýär. Goý, $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlama hatar bolsun. Olaryň içinde gabat gelýänleri hem bolmagy mümkin. Eger $x_1$ baha $n_1$ gezek, ..., $x_k$ baha $n_k$ gezek gaýtalanýan bolsa we $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bolsa, onda $n_1, n_2, ..., n_k$ sanlara degişlilikde $x_1, x_2, ..., x_k$ sanlaryň ýygylygy, $\frac{n_i}{n} = w_i$ sanlara bolsa olaryň otnositel ýygylygy diýilýär.

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ |

görnüşdäki tablisa ýygylygyň statistiki paýlanyşy,

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | $w_1$ | $w_2$ | ... | $w_k$ |

$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1$, görnüşdäki tablisa otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Saýlamanyň $x_1, x_2, ..., x_n$ elementleriniň iň kiçisi $a$ deň, iň ulusy $b$ deň bolsun. $[a, b]$ kesimi islendik $m$ kesimlere böleliň we olary $J_1, J_2, ..., J_m$ bilen belgiläliň. Her bir $J_s$ kesime saýlamanyň şol kesime düşen elementleriniň otnositel ýygylyklarynyň $P_s^*$ jemini degişli edeliň we tablisa düzeliň:

| $J_i$ | $J_1$ | $J_2$ | ... | $J_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i^*$ | $P_1^*$ | $P_2^*$ | ... | $P_m^*$ |

$$P_1^* + P_2^* + ... + P_m^* = 1.$$

Şeýle tablisa statistiki hatar diýilýär. Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyna, $X$ diskret tötän ululyk bolanda, $X$-iň paýlanyş hatarynyň takmyn görnüşi hökmünde garasa bolar. Statistiki hatara bolsa üznüksiz $X$ tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň takmyn görnüşi hökmünde garasa bolar.

**Mysal.** Geçirilen 20 tejribede $X$ ululyk 5 bahany 2 gezek, 7 bahany 3 gezek, 10 bahany 8 gezek we 15 bahany 7 gezek kabul edipdir. $X$ tötän ululyk üçin ýygylygyň, otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny we statistiki hatary düzeliň:

| $x_i$ | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 3 | 8 | 7 |

– ýygylygyň statistiki paýlanylyşy;

| $x_i$ | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 0,1 | 0,15 | 0,4 | 0,35 |

– otnositel ýygylygyň statistiki paýlanylylyşy.

5, 7, 10, 15 bahalar [5, 15] kesimde ýerleşýärler. Kesimi $J_1 = [5, 8)$, $J_2 = [8, 11)$, $J_3 = [11, 15]$ aralyklardan durýan üç bölege böleliň. [5, 8) aralyga bahalaryň 2-si (5, 7) düşýär, diýmek, oňa degişli $P_1^*$ ýygylyk $0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$-e deň, [8, 11) aralyga diňe bir baha (10) düşýär, diýmek, oňa degişli $P_2^*$ ýygylyk 0,4-e deň, [11, 15] kesime diňe bir baha (15) düşýär, diýmek, oňa degişli ýygylyk $P_3^* = 0{,}35$ bolar. Şularyň esasynda, statistiki hatar aşakdaky ýaly bolar:

| $J_i$ | [5, 8) | [8, 11) | [11, 15] |
|---|---|---|---|
| $P_i^*$ | 0,25 | 0,4 | 0,35 |

## §5. Statistiki paýlanyş funksiýasy

Tötän ululygyň paýlanyş funksiýasynyň

$$F(x) = P(X < x)$$

deňlik bilen kesgitlenýändigini biz öňden bilýäris. $F(x)$ funksiýa nazary paýlanyş funksiýasy diýilýär. Goý, $x_1, x_2, ..., x_n$ $X$ tötän ululygyň tejribeler esasynda alnan bahalaryndan düzülen baş toplumdan bölüp alnan bir saýlama toplum bolsun. Saýlama toplumyň bahalarynyň $x_i < x$ deňsizligi kanagatlandyrýanlarynyň sanyny $n_x$ bilen belgiläliň. Elbetde, $\frac{n_x}{n}$ san $X < x$ wakanyň şu topluma degişli ýygylygy bolar. $n$ ýeterlik uly bolanda $X < x$ wakanyň $\frac{n_x}{n}$ ýygylygynyň şol wakanyň $P(X < x)$ ähtimallygyna golaýlaşýandygyny biz öň belläp geçipdik. Ine, şunuň esasynda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

funksiýa statistiki paýlanyş funksiýasy diýilýär. Ýokarda getirilen delillere görä, ol $n$ ýeterlik uly bolanda, $F(x) = P(X < x)$ nazary paýlanyş funksiýasyna ýeterlik golaý bolar. Durmuşda köp ýagdaýlarda $n$ sany ýeterlik uly almak ýa mümkin däl, ýa-da mümkin bolaýanda hem uly çykdajylara getirýär. Şol sebäpli, matematiki statistika $n$ ýeterlik uly bolmanda hem, $F^*(x)$ belli ýagdaýynda, tejribe geçirijini kanagatlandyrýan ygtybarlykda $X$-iň paýlanyş funksiýasynyň bellibir nazary paýlanyş funksiýasyna golaýdygyny tassyklap bilmelidir.

**Mysal.** Ýygylygyň statistiki paýlanyşy

| $X$ | 5 | 7 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 3 | 8 | 7 |

bilen berlen $X$ tötän ululygyň statistiki paýlanyş funksiýasyny tapalyň:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5 \text{ bolanda}, \\ \frac{2}{20}, & 5 < x \le 7 \text{ bolanda}, \\ \frac{5}{20}, & 7 < x \le 10 \text{ bolanda}, \\ \frac{13}{20}, & 10 < x \le 15 \text{ bolanda}, \\ 1, & 15 < x \text{ bolanda}. \end{cases}$$

Görşümiz ýaly, $F^*(x)$ bahalary $[0, 1]$ kesimde ýatýan, kemelmeýän we $\lim_{x \to -\infty} F^*(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F^*(x) = 1$ şertleri kanagatlandyrýan funksiýadyr, ýagny ol nazary $F(x)$ funksiýanyň hemme häsiýetlerine eýedir.

## §6. Statistiki dykyzlyk funksiýasy

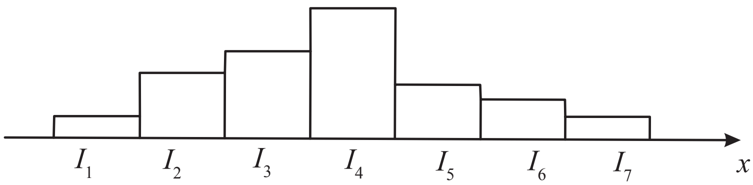
Goý, $x_1, ..., x_n$ saýlama toplum bolsun. Topluma girýän bahalaryň kiçisi $a$, ulusy $b$ bolsun. $[a,b]$ kesimi $I_1, I_2, ..., I_k$ aralyklara böleliň we toplum üçin statistiki hatary düzeliň:

| $I_i$ | $I_1$ | $I_2$ | ... | $I_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i^*$ | $P_1^*$ | $P_2^*$ | ... | $P_k^*$ |

Statistiki dykyzlyk funksiýasy $f^*(x)$ şeýle kesgitlenýär:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, \quad x \notin [a,b] \quad \text{bolsa}, \\ \dfrac{P_i^*}{|I_i|}, \quad x \in I_i \quad \text{bolsa} \ \ (i = \overline{1,k}). \end{cases}$$

Bu ýerde $|I_i|$ – $I_i$ aralygyň uzynlygy. $f^*(x)$ funksiýanyň grafigine gistogramma diýilýär, ol tekje görnüşli çyzykdyr *(128-nji b surat).*




*128-nji b surat*

$f^*(x)$ funksiýanyň $f(x)$ $(f(x) = F'(x))$ nazary dykyzlyk funksiýasynyň hemme häsiýetlerine eýedigine aňsatlyk bilen göz ýetirse bolar. Onuň üstesine-de, $n$ tükeniksizlige, $I_k$ aralyklaryň uzynlyklary bolsa nola ymtylanda $f^*(x)$ funksiýanyň ähtimallyk boýunça $f(x)$ funksiýa ymtyljakdygyny hem görkezse bolar.

## §7. Tötän ululygyň san häsiýetlendirijilerini statistiki bahalamak

Biz tötän ululygyň matematiki garaşma, dykyzlyk, orta kwadratik gyşarma, momentler ýaly san häsiýetlendirijilerine seredip geçipdik. Olaryň statistiki bahalamalaryna degişlilikde statistiki matematiki garaşma, statistiki dagynyklyk we ş.m. diýilýär. Olar şeýle kesgitlenýärler. Goý, $x_1, x_2, ..., x_n$ $X$ tötän ululygy öwrenmekde geçirilen tejribeler esasynda düzülen baş toplumdan alnan saýlama toplum bolsun. Statistiki matematiki garaşma $M^*(X)$ bilen belgilenýär we

$$M^*(X) = \frac{x_1 + x_2 + .... + x_n}{n}$$

formula arkaly kesgitlenýär. Gerek ýerinde $M^*(X)$ ululygy $\overline{X}_s$ bilen hem belgiläris. Statistiki dagynyklyk $D^*(X)$ bilen belgilenýär we

$$D^*(X) = \frac{(x_1 - \overline{X}_s)^2 + (x_2 - \overline{X}_s)^2 + ... + (x_n - \overline{X}_s)^2}{n}$$

formula arkaly kesgitlenýär. Bu formula

$$D^*(X) = M^*(X^2) - [M^*(X)]^2$$

ýa-da gysgaça

$$D^*(X) = (\overline{X^2})_s - (\overline{X}_s)^2$$

görnüşde hem ýazylýar.

Statistiki orta kwadratik gyşarma $\sigma^*(X)$ bilen belgilenýär we

$$\sigma^*(X) = \sqrt{D^*(X)}$$

formula arkaly kesgitlenýär.

Düzedilen statistiki dagynyklyk $S^2$ bilen belgilenýär we

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{X}_s)^2 + (x_2 - \overline{X}_s)^2 + ... + (x_n - \overline{X}_s)^2}{n - 1}$$

ýa-da

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D^*(X)$$

formula bilen kesgitlenýär.

Düzedilen statistiki orta kwadratik gyşarma $S$ bilen belgilenýär we

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D^*(X)}$$

formula bilen kesgitlenýär.

$k$ tertipli başlangyç statistiki moment $M_k$ bilen belgilenýär we

$$M_k = \frac{x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k}{n}$$

formula bilen kesgitlenýär.

$k$ tertipli merkezi statistiki moment $m_k$ bilen belgilenýär we

$$m_k = \frac{(x_1 - \overline{X}_s)^k + (x_2 - \overline{X}_s)^k + ... + (x_n - \overline{X}_s)^k}{n}$$

formula bilen kesgitlenýär.

$k$ tertipli ýönekeý statistiki moment $M_k^1$ bilen belgilenýär we

$$M_k^1 = \frac{(x_1 - c)^k + (x_2 - c)^k + ... + (x_n - c)^k}{n}$$

formula arkaly kesgitlenýär. Bu ýerde $c$ – erkin hemişelik san, ol $M_k^1$ momentleri hasaplamany ýeňilleşdirmek üçin ulanylýar.

Statistiki simmetriýa ýokluk koeffisiýenti $\alpha_s$ bilen belgilenýär we

$$\alpha_s = \frac{m_3}{[\sigma^*(X)]^3}$$

formula arkaly kesgitlenýär.

Statistiki eksses $\ell_k$ bilen belgilenýär we

$$\ell_k = \frac{m_4}{[\sigma^*(X)]^4}$$

formula bilen hasaplanýar.

**Bellik.** Statistiki san häsiýetlendirijiler hasaplananda gabat gelýän jemlerde $x_i$ elemente degişli goşulyjy şol elementiň ýygylygy näçe bolsa, şonça gezek gaýtalanmalydyr.

## §8. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny anyklamak meselesi

Goý, tejribede öwrenilýän $X$ tötän ululygyň diskret ululykdygy belli bolsun we $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ geçirilen tejribeleriň esasynda düzülen saýlama toplum bolsun. Ýokarda görkezilişi ýaly,

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | $w_1$ | $w_2$ | ... | $w_k$ |

otnositel ýygylygyň paýlanyşyny düzeliň. Tejribeleriň netijeleriniň soňky paýlanyşyny nazara alyp, $X$ tötän ululyk bellibir paýlanyş kanunyna boýun diýen çaklama edeliň. Şol belli kanun esasynda $x_1, x_2, ..., x_k$ bahalaryň $p_1^*, p_2^*, ..., p_k^*$ ýygylyklaryny tapalyň. Eger $|w_i - p_i^*|$ ululyklar örän kiçi sanlar bolsalar, onda biziň çaklamamyz dogry diýip kabul etse bolar. Elbetde, çaklamanyň dogrulygyny ýa-da nädogrulygyny anyklaýan has ygtybarly usullar hem bar. Mysal üçin, $X$ tötän ululygyň Puassonyň $P_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ paýlanyş kanunyna boýunlygy öňünden belli diýeliň. Onda $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$ bolar. $P_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ formulada $\lambda = M(X)$-iň ýerine oňa golaý bolan $M^*(X) = \overline{X_s}$ bahany goýup, $P_k = \frac{(\overline{X_s})^k}{k!}e^{-\overline{X_s}}$ takmyn formulany alarys. $\overline{X_s}$ näçe takyk kesgitlense, ýokarky formulanyň hem şonça takyk boljakdygy düşnüklidir. $X$ tötän ululygyň paýlanyş kanuny öňünden belli däl bolsun, emma onuň bahalary položitel bitin sanlar bolup $\overline{X_s}$ bilen $D^*(X)$ golaý bolsunlar. Onda ol Puassonyň paýlanyş kanunyna boýundyr diýen çaklama etse bolar.

**1-nji mysal.** Rezerfordyň, Çedwigiň we Ellisiň geçiren 2608 tejribeleriniň her birinde $\frac{1}{8}$ minutyň dowamynda dargan radioaktiw

| Bir tejribede dargaýan atomlaryň sany | Geçirilen tejribeleriň sany | Bir tejribede dargaýan atomlaryň sany | Geçirilen tejribeleriň sany |
|---|---|---|---|
| 0 | 57 | 8 | 45 |
| 1 | 203 | 9 | 27 |
| 2 | 383 | 10 | 10 |
| 3 | 525 | 11 | 4 |
| 4 | 532 | 12 | 0 |
| 5 | 408 | 13 | 1 |
| 6 | 273 | 14 | 1 |
| 7 | 139 | Jemi | 2608 |

atomlaryň sany hasaplanypdyr. Tejribeleriň netijeleri ýokarky tablisada getirilýär. $\frac{1}{8}$ minut wagt aralygynda dargan atomlaryň sanyny $X$ bilen belgiläliň. $X$ tötän ululygyň nazary paýlanyş kanunyny anyklalyň. Tablisany ulanyp taparys

$$M^*(X) = \bar{x} = 3,87,$$
$$D^*(X) = [\sigma^*(X)]^2 = 3,69.$$

$X$-iň bahalary otrisatel däl bitin sanlar we onuň statistiki matematiki garaşmasy bilen dagynyklygy golaý. Bu bolsa $X$ tötän ululyk Puassonyň paýlanyş kanunyna boýundyr diýmäge mümkinçilik berýär. Puassonyň kanunynda $\lambda$-nyň ýerine 3,87 goýup, gözlenýän paýlanyş kanunyny

$$P_k = \frac{(3,87)^k}{k!} e^{-3,87}, \quad k = 0, 1, ...$$

görnüşde alarys.

**2-nji mysal.** Magdan akymyndaky gyzyl bölejiklerini hasaplaýan enjamyň göz astyna düşmeýän ýerindäki gyzyl bölejikleriniň sany her 2 sekuntdan hasaplanyp dur. Hasaplanan bölejikleriň sany we şol sanyň görnen gezekleriniň sany aşakdaky tablisada getirilýär.

| Bölejikleriň sany | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Jemi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Görnen gezekleriniň sany | 381 | 568 | 357 | 175 | 67 | 28 | 5 | 2 | 1583 |

$X$ – her gezek hasaplanan bölejikleriň sany. $X$ tötän ululygyň paýlanyş kanunyny anyklalyň. $X$ otrisatel däl bitin bahany kabul edýär. Tablisany ulanyp taparys:

$$M^*(X) = \bar{x} = 1,427,$$
$$D^*(X) = [\sigma^*(X)]^2 = 1,514.$$

Bu iki ululygyň bir-birine golaý bolany sebäpli, $X$ Puassonyň paýlanyş kanunyna boýun diýip bileris. Puassonyň kanunynda $\lambda = 1{,}427$ goýup, gözlenýän paýlanyş kanunyny

$$P_k = \frac{(1,427)^k}{k!} e^{-1,427}, \quad k = 0, 1, ...$$

görnüşde alarys.

## §9. Üznüksiz tötän ululygyň paýlanyş kanunyny anyklamak meselesi

$X$ üznüksiz tötän ululyk üçin tejribeleriň esasynda $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ saýlama toplum we soňkynyň esasynda bolsa

| $I_i$ | $I_1$ | $I_2$ | ... | $I_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i^*$ | $P_1^*$ | $P_2^*$ | ... | $P_k^*$ |

statistiki hatary düzeliň. Şu hatary we käbir goşmaça maglumatlary göz öňünde tutup, $X$ tötän ululyk bellibir paýlanyş kanunyna boýun diýen çaklama edeliň. Şol belli kanuna esaslanyp, $X$ tötän ululygyň $I_i$ $(i = \overline{1,k})$ aralyklara düşmeginiň $P_i$ $(i = \overline{1,k})$ ähtimallyklaryny kesgitläliň. $|P_i^* - P_i|$ $(i = \overline{1,k})$ sanlaryň her biriniň ýa-da $\sum_{i=1}^{k} |P_i^* - P_i|$ jemiň ýeterlik kiçi bolmagy biziň çaklamamyzyň dogrulygynyň bir tassyklamasy bolar.

$X$ tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň görnüşi belli we ol diňe $M(X)$, $D(X)$, $M(X^2)$ ýaly ululyklara bagly diýeliň. Beýle ýagdaýda paýlanyşyň aňlatmasyndaky $M(X)$, $D(X)$, $M(X^2)$ ýaly ululyklary olara golaý bolan $M^*(X)$, $D^*(X)$, $M^*(X^2)$ ýaly ululyklar bilen çalşyryp, gözlenýän nazary paýlanyş kanunyna golaý paýlanyş kanunyny alarys.

**Momentler usuly.** $X$ tötän ululygyň nazary paýlanyş kanunynyň görnüşi belli we ol $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_s$ parametrlere bagly bolsun. Belli nazary paýlanyş kanuny boýunça $v_k$ $(k = \overline{1,s})$ momentleri hasaplaýarlar. Elbetde, $v_k$ momentler $\alpha_i$ $(i = \overline{1,s})$ parametrleriň funksiýalary bolar. Soňra belli saýlama toplum boýunça $M_k$ $(k = \overline{1,s})$ statistiki başlangyç momentleri hasaplaýarlar.

$$v_k = M_k, \quad k = \overline{1,s},$$

deňlemeler ulgamyndan $\alpha_i$ $(i = \overline{1,k})$ näbelli parametrleri tapýarlar we olaryň tapylan bahalaryny nazary paýlanyş kanunynda ýerlerine goýup, gözlenýän nazary paýlanyşa golaý bolan paýlanyş kanunyny alýarlar.

Şeýle usul bilen alnan paýlanyş kanuny gerek bolan nazary paýlanyş kanuny bilen doly gabat gelmeýär. Olaryň gabat gelmeýändikleriniň sebäbi geçirilen tejribeleriň sanynyň çäkli bolmagy bilen bagly ýagdaýlar bilen düşündirilýärmi ýa-da biziň saýlap alan nazary paýlanyş kanunymyzyň statistiki paýlanyş kanunyndan has daşda bolmagy bilen düşündirilýärmikä? Ine, şu sowallara jogap bermek üçin ylalaşyk şertleri hyzmat edýär. Biz olaryň diňe birine serederis.

**Pirsonyň ylalaşyk şerti.** Oňa, adatça, Pirsonyň $\chi^2$ şerti diýilýär. Ol şundan ybarat: $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlama toplum boýunça statistiki hatary düzýärler. Goý, ol aşakdaky görnüşde bolsun:

| $I_i$ | $I_1$ | $I_2$ | ... | $I_s$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $P_1^* = \frac{m_1}{n}$ | $P_2^* = \frac{m_2}{n}$ | .. | $P_s^* = \frac{m_s}{n}$ |

Bu ýerde $m_i$ – saýlama toplumyň $I_i$ aralyga düşen elementleriniň sany. $X$ tötän ululyk bellibir $A$ nazary paýlanyş kanunyna boýun diýeliň (çaklama). Şol kanunyň esasynda $X$ tötän ululygyň $I_i$ $(i = \overline{1,s})$ aralyklara düşmeginiň $p_i$ $(i = \overline{1,s})$ ähtimallyklaryny tapalyň we

$$\chi^2 = U = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

ululyga seredeliň. $n$ ýeterlik uly bolanda $U$ ululygyň paýlanyş kanuny $\chi^2$ paýlanyş kanunyna golaý bolýar. Soňky paýlanyşyň azatlyk derejesiniň sany $k$ diňe $s$-iň, ýagny aralyklaryň sanynyň üsti bilen kesgitlenýär. Eger $P_i^*$ ýygylyklaryň üstüne $\sum_{i=1}^{s} P_i^* = 1$ deňlikden başga baglanyşyk ýüklenmedik bolsa, onda $k = s - 1$, eger başga-da baglanyşyklar ýüklenen bolsa, onda $k = s - 1$ ýene-de şol baglanyşyklaryň sanyça kemelýär. Indi:

1) $U$ üçin bolan ýokarky aňlatmada, belli bolan $m_i$, $p_i$, $n$ sanlary goýup, $U^*$ bahany tapalyň;

2) $\chi^2$ paýlanyşyň azatlyk derejesiniň sanyny kesgitläliň;

3) $\chi^2$ paýlanyş üçin düzülen tablisadan $U^*$ we $k$ boýunça $P(U > U^*)$ ähtimallygy tapalyň.

Eger tapylan ähtimallyk uly bolsa, onda $A$ barada edilen çaklama dogry hasap edilýär, eger-de kiçi bolsa, onda ol çaklama ýalňyş hasap edilýär.

**Mysal.** Islendik adamyň boýunyň uzynlygy öňünden belli bolmansoň, biz oňa 1,4 we 2,5 *m* aralykda bahalary bolan $X$ tötän ululyk hökmünde garap bileris. $X$-iň paýlanyş kanunyny Pirsonyň ylalaşyk şertiniň üsti bilen anyklalyň. Tötänden alnan 1000 adamyň boýy ölçelipdir. Olaryň boýlarynyň uzynlyklary aşakdaky tablisada ýerleşdirilipdir.

| Boý uzynlyk-lary (aralyklar) | 143-152 | 152-155 | 155-158 | 158-161 | 161-164 | 164-167 | 167-170 | 170-173 | 173-176 | 176-179 | 179-188 | Jemi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Adam sany | 9 | 26 | 65 | 120 | 181 | 204 | 170 | 122 | 64 | 28 | 11 | 1000 |

Tablisadaky ýygylyklaryň ($I_i$) aralyklar boýunça ýerleşişi we umumy pikirler esasynda $X$ tötän ululyk normal paýlanyş kanuny bilen berlipdir diýen çaklama edilýär. Tablisa görä $X$ tötän ululygyň orta bahasy ($M^*(X)$) tapylýar: $M^*(X) = 165{,}53$ *sm*; onuň statistiki orta kwadratiki gyşarmasy $\sigma^*(X) = 6{,}048$ *sm* bolýar. $M(X) = M^*(X) = 165{,}53$; $\sigma(X) = \sigma^*(X) = 6{,}048$ hasap edip, nazary normal paýlanyş kanunynyň anyk görnüşini alarys:

$$f(x) = \frac{1}{6{,}048\sqrt{2\pi}} \exp\frac{(x - 165{,}53)^2}{2 \cdot 36{,}5751}.$$

Alnan paýlanyş kanuny boýunça $X$ tötän ululygyň tablisadaky aralyklara degişli nazary ýygylyklary ($np_i$) tapylýar. Bu ýerde

$n = 1000$; $p_i$ bolsa $X$ tötän ululygyň $i$-nji aralyga düşmeginiň $f(x)$ kanun boýunça tapylan ähtimallyklary. Tapylan nazary ýygylyklardan tablisa düzeliň:

| $I_i$ | 143-152 | 152-155 | 155-158 | 158-161 | 161-164 | 164-167 | 167-170 | 170-173 | 173-176 | 176-179 | 179-188 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $np_i$ | 11 | 27 | 65 | 120 | 175 | 198 | 175 | 122 | 66 | 28 | 11 |

Iki tablisanyň esasynda $U^*$ ululygy kesgitleýärler:

$$U^* = 1{,}3427.$$

$m_i$ – ýygylyklaryň üstüne ýüklenen baglanyşyklaryň sany üç bolany üçin, $\left(\sum_{i=1}^{11} m_i = 1000;\ M^*(X) = M(X), \sigma^* = \sigma\right)$ paýlanyşyň azatlyk derejesiniň sany $k = 11 - 3 = 8$. Indi $k = 8$ we $U^* = 1{,}3427$ sanlara görä $\chi^2$ paýlanyşyň tablisasyndan $P(U > U^*) = 0{,}99$ ähtimallygy tapýarys. Diýmek, $X$ tötän ululyk normal paýlanyş kanuna boýun diýen çaklamamyz dogry bolup çykdy.

## §10. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileriniň bahalamalaryny anyklamak meselesi

Ýokarda tötän ululygyň matematiki garaşma, dagynyklyk, momentler ýaly san häsiýetlendirijilerini tejribeler esasynda bahalapdyk, ýagny olaryň statistiki bahalaryny kesgitläpdik. Meseleler çözülende, köplenç, şu tapylan takmyn bahalamalaryň takyklygy nähilikä, olary nähili ygtybarlykda kabul edip bolarka diýen sowallar ýüze çykýar. Aşakda bu sowallara diňe matematiki garaşma üçin jogap berlişine serederis.

1. Goý, $X$ tötän ululygyň normal paýlanyş kanunyna boýunlygy we paýlanyşyň orta kwadratiki gyşarmasy belli bolsun. $m_x$ – gözlenýän matematiki garaşma, $\bar{x} = M^*(X)$ – onuň statistiki bahalamasy bolsun.

Bu halda

$$P(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} < m_x < \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(t) = \gamma,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$n$ – tejribäniň sany, deňlik ýerine ýetýär. $\gamma$ sana ynam ähtimallygy, $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ aralyga ynam aralygy diýilýär. Bu deňligiň manysy $\gamma$ ygtybarlykda ynam aralygynyň $m_x$ matematiki garaşmany öz içinde saklaýandygyndan durýar. $\gamma$ ygtybarlyk, adatça, öňünden berilýär, mysal üçin, $\gamma = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}96$ we ş.m. $\gamma$ belli bolandan soň $2\Phi(t) = \gamma$ ýa-da $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ deňlikden, $\Phi(t)$ funksiýanyň tablisasyny ulanyp, $t$-niň bahasy tapylýar. Eger $t = t_\gamma$ bolsa, onda gözlenýän ynam aralygy $\left(\bar{x} - t_\gamma\sigma/\sqrt{n},\quad \bar{x} + t_\gamma\sigma/\sqrt{n}\right)$ bolar.

2. $X$ tötän ululyk normal paýlanyş kanunyna boýun. $\sigma$ – belli däl; $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – saýlama toplum. Saýlama toplum boýunça $\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$; $\quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_s)^2/(n-1)}$ ululyklar tapylýar. $\gamma$ – ygtybarlyk öňünden berilýär, ynam aralygy $\left(\bar{x} - t_\gamma s/\sqrt{n},\quad \bar{x} + t_\gamma s/\sqrt{n}\right)$ görnüşde tapylýar. $t_\gamma$ indi Stýudentiň paýlanyş kanunyna degişli tablisadan, azatlyk derejesiniň sany $k = n - 1$-e deň hasap edip tapylýar. Bu ýerde hem $m_x$ matematiki garaşma $\gamma$ ygtybarlykda ýokarda getirilen ynam aralygynda ýatýar.

## §11. Korrelýasiýa nazaryýetinden maglumatlar

Tejribeleriň netijesinde ýüze çykýan ululyklaryň sany köp ýagdaýlarda birden köp bolýar. Şu ýagdaýda, olaryň arasynda baglanyşyk barmyka, ol baglanyşyk nähili görnüşdekä diýen sowallar ýüze çykýar. Aňsatlyk üçin, ululyklaryň sany iki bolan halyna seredeliň.

Eger $x$ we $y$ üýtgeýänleriň arasynda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ näbelli parametrlere bagly $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ görnüşdäki funksional baglanyşygyň barlygy belli bolsa, onda näbelli parametrleri tapmak usullarynyň biri aşaky usuldyr. Oňa iň kiçi kwadratlar usuly diýilýär. Goý, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$ ululyklaryň $n$ tejribäniň netijesinde alnan bahalary bolsun. Täze $\varphi$ funksiýa düzeliň:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i, \ \alpha_1, \ \alpha_2, ..., \ \alpha_k)]^2.$$

$\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_k^0$ parametrleriň gözlenýän bahalary $\varphi$ funksiýanyň minimal bahasyny berýär diýip kabul edilýär. Köp argumentli funksiýanyň argumentleriniň şeýle bahalaryny tapmak usuly derňewden bellidir. Onuň ulanylyşyny $f = \alpha_1 x + \alpha_2$ bolan halynda görkezeliň. Bu ýagdaýda $\varphi$ funksiýa $\varphi = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_2]^2$ görnüşde bolar. $\varphi$ funksiýanyň $\alpha_1, \alpha_2$ boýunça hususy önümlerini nola deňläp, $\alpha_1$ we $\alpha_2$ parametrleriň gözlenýän bahalary üçin aşakdaky ulgamy alarys:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_2]x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha_1 x_i - \alpha_2] = 0. \end{cases}$$

Bu ulgamyň çözüwini

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = \overline{(y - \bar{y})(x - \bar{x})},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \overline{(x - \bar{x})^2}$$

belgilemeleri girizip,

$$\alpha_1^0 = \frac{\overline{(y - \bar{y})(x - \bar{x})}}{\overline{(x - \bar{x})^2}}, \quad \alpha_2^0 = \bar{y} - \frac{\overline{(y - \bar{y})(x - \bar{x})}}{\overline{(x - \bar{x})^2}}\bar{x}$$

görnüşde ýazyp bolar. Indi $f = \alpha_1 x + \alpha_2$ deňlikde $\alpha_1$ we $\alpha_2$-niň ýerine olaryň tapylan $\alpha_1^0, \alpha_2^0$ bahalaryny goýup, gözlenýän baglanyşyga golaý bolan $\tilde{f} = \alpha_1^0 x + \alpha_2^0$ baglanyşygy alarys. Tejribeleriň sanynyň köpelmegi bilen soňky formulanyň takyklygynyň artjakdygy düşnüklidir. Köp hallarda $x$ we $y$ ululyklaryň arasynda funksional baglanyşyk ýok bolýar. Mysal getireliň. Aşakdaky tablisa syn edeliň:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(s)$ hasyl / $x(s)$ dökün | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | Jemi | Ortaça hasyl ($s$.) |
| 10 | 9 | 4 | 1 | – | – | – | 14 | 10,86 |
| 30 | 1 | 10 | 9 | 3 | – | – | 23 | 13,22 |
| 50 | – | 2 | 6 | 14 | 6 | – | 28 | 15,71 |
| 70 | – | – | 1 | 10 | 18 | 6 | 35 | 17,66 |
| Jemi | 10 | 16 | 17 | 27 | 24 | 6 | 100 | |

Onuň birinji setirinde her gektardan alynýan hasylyň mukdarlary ýerleşdirilen, birinji sütünde her gektara dökülýän döküniň dürli mukdarlary ýerleşdirilen. 2-7-nji sütünlerde dürli mukdarda dökün berlende degişlilikde 10 $s$, 12 $s$, ..., 20 $s$ hasyl beren gektarlaryň sanlary ýerleşdirilen. 9-njy sütünde, ýokardan aşak 10 $s$ dökün berlen gektarlardan alnan ortaça hasyl (10,86), 30 $s$ dökün berlen gektarlardan alnan ortaça hasyl (13,22) we ş.m. ýerleşdirilen.

Tablisadan görnüşi ýaly, şol bir mukdarda dökün berlen gektarlar dürli mukdarlardaky hasyl berýärler. Diýmek, $x$ 1 *ga* berlen döküniň mukdaryny aňladýan ululyk, $y$ 1gektardan alnan hasylyň mukdaryny aňladýan ululyk bolsa, onda olaryň arasynda funksional baglanyşygyň bolmagy mümkin hem däl. Emma 9-njy sütünden görnüşi ýaly, $x(s)$ dökün berlen gektarlardan alnan hasyllaryň ortaça bahasy ($x$ belli baha eýe bolandaky $y$-iň ortaça bahasy) bilen $x$-iň arasynda hökmany funksional baglanyşyk bar. Ýagny $y$ ululygyň $x$-iň her bir anyk bahasyndaky orta bahasy $\bar{y}_x$ bilen $x$-iň arasynda $\bar{y}_x = f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k)$ görnüşdäki funksional baglanyşyk bar.

Şeýle baglanyşyga **korrelýasion baglanyşyk** diýilýär. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ näbelli parametrler $x,\ \bar{y}_x$ ululyklaryň degişli bahalaryndan durýan $(x_1, \bar{y}_{x_1}),\ (x_2, \bar{y}_{x_2}), ..., (x_n, \bar{y}_{x_n})$ tablisany ulanmak bilen edil ýokardaky ýaly tapylýar.

**Mysal.** Ýokarda getirilen mysal üçin $\bar{y}_x$ we $x$-iň arasyndaky baglanyşyk $\bar{y}_x = \alpha_1 x + \alpha_2$ görnüşde hasap edip, $\alpha_1$ we $\alpha_2$ parametrleri tapalyň. Tablisa görä,

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 50, \quad x_4 = 70,$$
$$\bar{y}_{x_1} = 10,86, \; \bar{y}_{x_2} = 13,22, \; \bar{y}_{x_3} = 15,71, \; \bar{y}_{x_4} = 17,66.$$

$\varphi$ funksiýany düzeliň:

$$\varphi = [10,86 - \alpha_1 \cdot 10 - \alpha_2]^2 + [13,22 - \alpha_1 \cdot 30 - \alpha_2]^2 +$$
$$+ [15,71 - \alpha_1 \cdot 50 - \alpha_2]^2 + [17,66 - \alpha_1 \cdot 70 - \alpha_2]^2.$$

Indi $\bar{x}, \bar{y}, \overline{(y-\bar{y})(x-\bar{x})}, \overline{(x-\bar{x})^2}$ ululyklary hasaplalyň we taýýar formulalary ulanalyň:

$$\bar{x} = \frac{10 + 30 + 50 + 70}{4} = 40,$$

$$\bar{y} = \frac{10,86 + 13,22 + 15,71 + 17,66}{4} = 14,36,$$

$$\overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{30^2 + 10^2 + 10^2 + 30^2}{4} = 500,$$

$$\overline{(y-\bar{y})(x-\bar{x})} = \frac{3,50 \cdot 30 + 1,14 \cdot 10 + 1,35 \cdot 10 + 3,30 \cdot 30}{4} =$$
$$= 57,23.$$

Tapylan bahalary

$$\alpha_1^0 = \frac{\overline{(y-\bar{y})(x-\bar{x})}}{\overline{(x-\bar{x})^2}}, \qquad \alpha_2^0 = \bar{y} - \alpha_1^0 \bar{x}$$

formulalarda ýerine goýup alarys: $\alpha_1^0 = 0,1145$, $\alpha_2^0 = 9,78$. Şeýlelikde, $\bar{y}_x$-iň $x$-e bolan korrelýasiýasy $\bar{y}_x = 0,1145x + 9,78$ görnüşde bolar.

Korrelýasion baglanyşyk $f(x, \alpha_1, ..., \alpha_k)$ funksiýa dürli görnüşlerde bolanda-da, gatnaşýan ululyklaryň sany ikiden köp bolanda-da şuňa meňzeş ýollar bilen tapylýar.

# XV. KOMPLEKS ÜÝTGEÝÄNIŇ FUNKSIÝALARY

## §1. Esasy düşünjeler

Tekizlikde $D$ ýaýla we $M(x, y) \in D$ nokada seredeliň. $M(x, y)$ nokada $z = x + iy$ kompleks üýtgeýäni degişli edeliň. Diýmek, $M(x, y)$ nokat berlen diýmek bilen $z = x + iy$ ululyk berlen diýmek deňgüýçli tassyklama bolýar. Şoňa görä, beýan edişlikde amatly bolýany sebäpli, $M(x, y)$ nokat berlipdir diýmegiň ýerine $z = x + iy$ nokat berlipdir, $M(x, y)$ nokatlaryň $D$ ýaýlasy diýmegiň ýerine $z$ nokatlaryň $D$ ýaýlasy, $xOy$ tekizlik diýmegiň ýerine $z$ tekizlik diýen düşünjeleri ulanýarys.

$D$ ýaýlada $z_0 = x_0 + iy_0$ nokat alalyň. $z_0$ nokady öz içinde saklaýan, $D$ ýaýlada ýatýan islendik $D_1$ ýaýla $z_0$ nokadyň etraby diýeris. $|z - z_0| < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan $z = x + iy$ nokatlaryň köplügine $z_0$ nokadyň $\varepsilon$ etraby diýeris we ony $S_{z_0}^{\varepsilon}$ bilen belgiläris. $z$-iň we $z_0$-yň bahalaryny $|z - z_0| < \varepsilon$ deňsizlikde ýerine goýup, alarys:

$$|x + iy - x_0 - iy_0| < \varepsilon$$

ýa-da

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

Bu bolsa $S_{z_0}^{\varepsilon}$ etrabyň merkezi $z_0$ nokatda, radiusy $\varepsilon$ bolan tegelegiň içki nokatlaryndan durýanyny görkezýär. $z_0$ nokadyň $0 < |z_0 - z| < \varepsilon$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan $z$ nokatlardan durýan ýaýlasyna ýörite $\varepsilon$ etrap diýilýär we ol $\Pi_{z_0}^{\varepsilon}$ bilen belgilenýär. Eger $x \to x_0$, $y \to y_0$ predeller ýerine ýetseler, onda $z = x + iy$ nokat $z_0 = x_0 + iy_0$ nokada ymtylýar diýilýär we $z \to z_0$ görnüşde belgilenýär.

Hakyky $x$, $y$ üýtgeýänleriň degişlilikde $x_0$ we $y_0$ nokatlardaky $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ artdyrmalaryny ulanyp, $z$ üýtgeýäniň $z_0$ nokatdaky $z - z_0 = \Delta z$ artdyrmasyny $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ görnüşde ýazyp bileris we $z \to z_0$ diýen şerti $\Delta z \to 0$ bilen çalşyryp bileris.

Indi kompleks bahaly funksiýa düşünjesini girizeliň. Goý, $u(x, y)$ we $v(x, y)$ $D$ ýaýlada kesgitlenen hakyky funksiýalar bolsunlar. Onda $F = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ funksiýa *kompleks bahaly funksiýa* diýilýär. Bu at $F$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň islendik nokadyndaky bahasynyň kompleks san bolýany bilen düşündirilýär.

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/(2i)$$

deňlikleri ulanyp, $F$ funksiýany

$$F = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

görnüşde ýazyp bolýar. Diýmek, $F$ funksiýa $z$ üýtgeýäniň funksiýasy bolýar we biz $F = f(z)$, ýagny $F - z$ üýtgeýäniň funksiýasy diýip ýazmaga haklydyrys. Şeýlelikde, kompleks üýtgeýäniň $f(z)$ funksiýasy

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

deňlik bilen kesgitlenýär. $u(x, y)$ funksiýa $f(z)$ funksiýanyň hakyky bölegi diýilýär we $u = Re\, f(z)$ bilen belgilenýär; $v(x, y)$ funksiýa $f(z)$ funksiýanyň hyýaly bölegi diýilýär we $v = Im\, f(z)$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde, $f(z) = u + iv$ funksiýany

$$f(z) = Re\, f(z) + i\, Im\, f(z)$$

görnüşde hem ýazyp bileris.

Eger $u(x, y)$ we $v(x, y)$ funksiýalar $D$ ýaýlada üznüksiz bolsalar, onda $f(z)$ funksiýa $D$ ýaýlada üznüksiz diýilýär we $f(z) \in C(D)$ bilen belgilenýär. $f_1(z) \in C(D)$, $f_2(z) \in C(D)$ bolan halynda $f_1 \pm f_2$, $f_1 \times f_2$ funksiýalaryň, $\forall z \in D$ üçin $f_2(z) \neq 0$ bolan halynda $f_1 / f_2$ funksiýanyň hem $D$ ýaýlada üznüksiz boljagy kesgitlemeden gelip çykýar.

Eger $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiýalar $D$ ýaýlada deňölçegli üznüksiz bolsalar, onda $f(z) = u + iv$ funksiýa $D$ ýaýlada deňölçegli üznüksiz diýilýär. Ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz $u$ we $v$ funksiýalaryň şol ýaýlada deňölçegli üznüksiz bolýany bize öňden belli. Şoňa görä, ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz $f(z)$ funksiýanyň şol ýaýlada deňölçegli üznüksiz boljagy düşnüklidir.

$f(z)=u+iv$ funksiýanyň $|f(z)|$ moduly $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$ formula arkaly tapylýar. Eger $u$ we $v$ funksiýalar ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz bolsalar, onda $|f(z)|$ funksiýa hem şol ýaýlada üznüksiz bolar, ýagny $|f(z)|$ ýapyk $D$ ýaýlada üznüksiz bolar. Bu ýerden iki üýtgeýänli hakyky funksiýalar üçin belli bolan teoremalardan $|f(z)|$-iň $D$ ýaýlada çäkli boljakdygy, onuň şol ýaýlada iň uly baha we iň kiçi baha eýe boljakdygy gelip çykýar.

Eger $D$ ýaýlanyň $z_0$ nokadynda $u$ we $v$ funksiýalaryň iň bolmanda biri üzülýän bolsa, onda $f(z)$ funksiýa üzülýän funksiýa diýilýär, $z_0$ nokada üzülme nokady diýilýär. Goý,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$$

predeller bar bolsunlar. Onda $a+ib$ sana $f(z)$ funksiýanyň $z\to z_0$ bolandaky predeli diýilýär we $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+ib$ ýazylýar. $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$ predeller bar diýeliň.

Onda

$$\lim_{z\to z_0}(f_1\pm f_2)=\lim_{z\to z_0} f_1\pm\lim_{z\to z_0} f_2;\ \lim_{z\to z_0} cf_1(z)=c\lim_{z\to z_0} f_1(z),\ c-\text{hemişelik},$$

$\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)f_2(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$ we $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)\neq 0$ bolan ýagdaýynda $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}$ boljakdygy kesgitlemeden gelip çykýar.

## §2. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň önümi

$D$ ýaýlada $f(z)=u+iv$ kompleks üýtgeýänli funksiýa kesgitlenen. $z_0\in D,\ \ z\in D,\ \ z-z_0=\Delta z$.

**Kesgitleme.** Eger

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

predel bar bolsa, onda $z_0$ nokatda $f(z)$ funksiýanyň önümi bar diýilýär. Şol predele funksiýanyň $z_0$ nokatdaky önümi diýilýär we önüm $f'(z_0)$ ýa-da $\dfrac{df(z_0)}{dz}$ bilen belgilenýär.

Kesgitlemä görä alarys:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1}$$

bu ýerde $\Delta z$-iň islendik bahalaryny alyp nola ymtylýandygyny belläp geçeliň. Mysal üçin, $f'(z_0)$ bar bolsa, onda islendik $\alpha$ we $\beta$ sanlar üçin $\Delta z = \alpha\Delta t + i\beta\Delta t$, $\Delta t \to 0$ kabul etsek

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(z_0 + \alpha\Delta t + i\beta\Delta t) - f(z_0)}{\alpha\Delta t + i\beta\Delta t}$$

deňlik dogry bolmalydyr. $\alpha = 0, \ \ \beta = 1$ halda $\Delta t = \Delta y$, onda:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y}. \tag{2}$$

$\alpha = 1, \ \ \beta = 0$ halda $\Delta t = \Delta x$, onda:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Ýokarda getirilen (1) formulada $z_0$-yň ýerine $z$-i goýup, $f(z)$ funksiýanyň $z$ nokatdaky $f'(z)$ önümi üçin

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{4}$$

formulany alarys. Indi $f(x)$ hakyky funksiýanyň $x$ nokatdaky $f'(x)$ önümini kesgitleýän

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

formulany ýazalyň. Bu formulalaryň birinjisi ikinjisinden $x$-iň ýerine $z$-i goýmak bilen alynýar. Diýmek, hakyky $f(x)$ funksiýalar üçin (5) formulany ulanyp tapylan differensirleme düzgünlerinde $x$ harpy $z$ harpa çalşyp, $f(z)$ funksiýalar üçin differensirleme düzgünlerini alarys:

| № | Hakyky funksiýalar üçin | Kompleks üýtgeýäniň funksiýalary üçin |
|---|---|---|
| 1. | $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ | $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ |
| 2. | $[f_1(x) \pm f_2(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x)$ | $[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$ |
| 3. | $[cf(x)]' = cf'(x)$ | $[cf(z)]' = cf'(z)$ |
| 4. | $[f_1(x)f_2(x)]' =$ $= f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x)$ | $[f_1(z)f_2(z)]' =$ $= f_1'(z)f_2(z) + f_2'(z)f_1(z)$ |
| 5. | $f_2(x) \neq 0$ bolsa $\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' =$ $= \dfrac{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)}{f_2^2(x)}$ | $f_2(z) \neq 0$ bolsa $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' =$ $= \dfrac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)}$ |
| 6. | $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u';\ u = u(x)$ | $[f(u(z))]' = f'(u) \cdot u';\ u = u(z)$ |
| 7. | $(x^n)' = nx^{n-1}$ | $(z^n)' = nz^{n-1}$ |
| 8. | $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt{z})' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$ |
| 9. | $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ | $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$ |
| 10. | $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\right)' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1}$ | $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i\right)' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i i z^{i-1}$ |

Berlen $x$ nokatda $f(x)$ hakyky funksiýanyň önüminiň bolmazlygynyň mümkin bolşy ýaly, $f(z) = u + iv$ funksiýanyň hem berlen $z$ nokatda önüminiň bolmazlygy mümkindir. Mysal üçin, $f(z) = x - iy$ funksiýanyň (4) formula arkaly $z$ nokatda önüminiň barlygyny barlalyň. Alarys:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{x + \Delta x - i(y + \Delta y) - x + iy}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y},$$

bu ýerde $\Delta x = 0$ bolanda

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = -1,$$

$\Delta y = 0$ bolanda

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = 1.$$

Diýmek, $f(z) = x - iy$ funksiýanyň, başgaça ýazanymyzda $f(z) = \bar{z}$ funksiýanyň $z$ nokatda önümi ýokdur. Şeýlelikde, $f(z)$ funksiýanyň önüminiň bolmagy üçin $u$ we $v$ funksiýalaryň käbir şerte boýun bolmagy gerekdir. Şol şertleri anyklamaga geçeliň. Islendik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiýany

$$f(z) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

görnüşde ýazyp bolýandygyny başda görüpdik. Goý, $u(x, y)$ we $v(x, y)$ funksiýalaryň $z = x + iy$ $(M(x, y))$ nokatda birinji tertipli hususy önümleri bar bolsun. $f(z)$ funksiýanyň $z$ nokatda $f'(z)$ önümi bar bolsun. Onda ol önümi soňky deňligi $z$-e görä differensirläp tapsa bolar, ýagny

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d(z + \bar{z})}{2dz} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{d(z - \bar{z})}{2idz} +$$

$$+ i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{d(z + \bar{z})}{2dz} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{d(z - \bar{z})}{2idz} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{d\bar{z}}{dz}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \left(1 - \frac{d\bar{z}}{dz}\right) \cdot \frac{1}{i} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\left(1 + \frac{d\bar{z}}{dz}\right) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \left(1 - \frac{d\bar{z}}{dz}\right)\right]$$

ýa-da

$$f'(z) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] \cdot \frac{d\bar{z}}{dz}. \tag{6}$$

Ýokarda getirilen mysala görä, $\frac{d\bar{z}}{dz}$ önüm ýokdur. Diýmek, $f'(z)$ önümiň bolmagy üçin soňky deňlikde $\frac{d\bar{z}}{dz}$ önümi saklaýan agza nola deň bolmalydyr, ýagny

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Bu ýerden hakyky we hyýaly bölekleri aýratyn nola deňläp alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7}$$

Diýmek, $z$ nokatda $f'(z)$ önümiň bar ýagdaýynda $z$ nokatda (7) deňlikleriň ýerine ýetmegi hökmanydyr, ýagny (7) şertler $z$ nokatda $f'(z)$ önümiň bolmagynyň zerurlyk şertleridir. Eger $z$ nokatda $u$ we $v$ funksiýalar differensirlenýän bolsalar, onda (7) şertleriň $z$ nokatda önüm bolmagy üçin ýeterlikdigini aňsatlyk bilen subut etse bolar. (7) şertlere *Koşi-Rimanyň şertleri* diýilýär. (7) şertleriň ýerine ýeten halynda $f'(z)$ önümi

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

formula arkaly hasaplap bolýandygy (6) deňlikden görünýär. (7) şertleri ulanyp, soňky deňligi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

görnüşlerde hem ýazmak bolar.

**Mysal.** $f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$ funksiýanyň önüminiň barlygyny barlalyň. $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$ belgilemeleri girizip, (7) şertleri barlalyň:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$$

deňliklerden (7) şertleriň ýerine ýetýändikleri görünýär. Diýmek, garalýan funksiýanyň $z$ tekizligiň islendik nokadynda önümi bardyr. Önüm tapmagyň ýokarda getirilen formulalaryndan $f'(z) = f(z)$ boljakdygyny görse bolar.

Eger birbelgili $f(z)$ funksiýanyň diňe $z_0$ nokatda däl-de, onuň käbir etrabynyň nokatlarynda hem önümi bar bolsa, onda $f(z)$ funksiýa $z_0$ nokatda golomorf diýilýär. $D$ ýaýlada birbelgili $f(z)$ funksiýanyň $D$ ýaýlanyň hemme nokatlarynda önümi bar bolsa, onda $f(z)$ funksiýa $D$ ýaýlada golomorf diýilýär. $D$ ýaýlanyň nokatlarynda önümi bar $f(z)$ funksiýa $D$ ýaýlada analitik funksiýa diýilýär. Diýmek, analitik funksiýa köpbelgili hem bolup biler.

Eger $D$ ýaýlanyň $z_0$ nokadynyň käbir $\Pi_{z_0}^{\varepsilon}$ etrabynda $f(z)$ kesgitlenen bolsa we $z_0$ nokatda kesgitlenmedik bolsa ýa-da $z_0$ nokatda $f'(z_0)$ önüm bolmasa, onda $z_0$ nokada $f(z)$ funksiýanyň ýalňyz bozuk nokady diýilýär. $f(z)$ funksiýanyň ýalňyz däl bozuk nokatlary hem bolup biler.

## §3. Tekizlikdäki egriler barada maglumat

Goý, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $z$ tekizlikdäki $L$ egriniň parametrik deňlemesi bolsun. Ol deňlemäni $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, görnüşde hem ýazsa bolar. $z(t)$ funksiýanyň $t$ parametre görä önümi

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

formula arkaly kesgitlenýär. $\vec{a} = \{x'(t), y'(t)\}$ wektoryň $L$ egriniň $M(x(t), y(t))$ ýa-da $z(t)$ nokadyndaky galtaşýanyň ugrukdyryjysy bolýany öňden bize belli. Şoňa görä, $y'(t)/x'(t)$ gatnaşyk şol galtaşýanyň burç koeffisiýentine deň bolar. Beýleki tarapdan $z'(t)$ ululygyň argumentiniň tangensi hem şol gatnaşyga deň. Diýmek, $z'(t)$ ululygyň argumenti $z(t)$ egriniň $M(x(t), y(t))$ nokadyndaky galtaşýanynyň $x$-ler oky bilen emele getiren burçuna deňdir.

Indi iki egriniň arasyndaky burç diýen düşünje girizeliň. Goý, $L_1$ we $L_2$ egriler $z_0 = x_0 + iy_0$ nokatda kesişýän bolsun we şol nokatda olaryň galtaşýanlary bar bolsun.

**Kesgitleme.** $L_1$ we $L_2$ egrileriň $z_0$ nokatdaky galtaşýanlarynyň arasyndaky burça şol egrileriň ($z_0$ nokatdaky) aralaryndaky burç diýilýär.

Goý, $L_1$ egriniň deňlemesi $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $L_2$ egriniň deňlemesi $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, bolsun. Ýa-da $L_1$ egriniň deňlemesi $z = z_1(t)$, $z_1(t) = x_1(t) + i\,y_1(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $L_2$ egriniň deňlemesi $z = z_2(t)$, $z_2(t) = x_2(t) + i\,y_2(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, bolsun. Goý, $L_1$ we $L_2$ $z_1(t_1) = z_2(t_2)$ nokatda kesişýän bolsun. Onda arg $z_2'(t_2)$ – arg $z_1'(t_1)$ tapawudyň şol egrileriň arasyndaky ($z_1(t_1) = z_2(t_2)$ nokatdaky) burç boljakdygy ýokarda aýdylanlardan gelip çykýar. Eger burç ýokarky tapawut bilen hasaplansa, onda biz burçuň hasaplanyş ugry $L_1$-den $L_2$-ä tarap diýeris.

## §4. Funksiýanyň önüminiň geometrik manysy. Konform özgertme

Tekizlikde $D$ ýaýla we şol ýaýlada kesgitlenen birbelgili, üznüksiz $u(x, y)$ we $v(x, y)$ funksiýalara seredeliň. Onda $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ funksiýa hem $D$ ýaýlada birbelgili hem üznüksiz bolar. Täze $w = u + i\,v$ üýtgeýän girizip, $w = f(z)$ ýazyp bileris. Şeýlelikde, $D$ ýaýlanyň islendik $z_0$ nokady $w_0 = f(z_0)$ deňlik arkaly $w$ tekizligiň $w_0$ nokadyna geçýär, $D$ ýaýla bolsa $w$ tekizligiň käbir $Q$ köplügine geçer. Diýmek, biz $w = f(z)$ deňlige $D$ ýaýlanyň $Q$ köplüge bolan özgertmesi hökmünde garap bileris. $f(z)$ funksiýanyň birbelgili hem üznüksiz bolanlygy sebäpli, bu özgertme hem birbelgili we üznüksiz bolar.

$D$ ýaýlanyň $z_0$ nokadyndan geçýän iki $l_1$ we $l_2$ egriler $w = f(z)$ özgertmede $Q$ köplügiň $w_0 = f(z_0)$ nokadyndan geçýän $L_1$ we $L_2$ egrilere öwrülerler.

**Kesgitleme.** Eger $l_1$ we $l_2$ egrileriň ($z_0$ nokatda) arasyndaky burç $w_0 = f(z_0)$ nokatdan geçýän degişli $L_1$ we $L_2$ egrileriň arasyndaky burça deň bolsa we ol burçlaryň hasaplaýyş ugurlary hem saklansa, onda $w = f(z)$ $z_0$ nokatda konform özgertme diýilýär. Eger $w = f(z)$ $D$ ýaýlanyň islendik nokadynda konform özgertme bolsa, onda $w = f(z)$ $D$ ýaýlada konform özgertme diýilýär.

Goý, $z_0 \in D$, $l_1$ we $l_2$ şol nokatdan geçýän egriler, $z = z_1(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $z_1(t_1) = z_0$, birinji egriniň, $z = z_2(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, $z_2(t_2) = z_0$, ikinji egriniň parametrik deňlemesi bolsun. $z_1(t), z_2(t)$ funksiýalaryň $z_1'(t_1) \neq 0, z_2'(t_2) \neq 0$ önümleri bar diýeliň. Onda $l_1$ we $l_2$ egrileriň olaryň $z_0$ kesişme nokadynda galtaşýanlary bardyr we olaryň arasyndaky burç $\arg z_2'(t_2) - \arg z_1'(t_1)$ tapawuda deň bolar. Goý, $L_1$ we $L_2$ $w_0 = f(z_0)$ nokatdan geçýän $l_1$ we $l_2$ egrileriň $w$ tekizlikdäki şekilleri bolsun. Onda $w = f(z_1(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $L_1$ egriniň, $w = f(z_2(t))$, $\gamma \leq t \leq \delta$, $L_2$ egriniň parametrik deňlemesi bolar. Indi $f(z)$ funksiýanyň $z_0$ nokatda noldan tapawutly önümi bar, ýagny $f'(z_0) \neq 0$ diýen teklibi girizeliň.

$$[f(z_2(t))]'_{t=t_2} = f'(z_2(t))z_2'(t_2) = f'(z_0)z_2'(t_2) \neq 0,$$

$$[f(z_1(t))]'_{t=t_1} = f'(z_1(t))z_1'(t_1) = f'(z_0)z_1'(t_1) \neq 0$$

bolýanlygy sebäpli, $L_1$ we $L_2$ egrileriň olaryň $w_0$ kesişme nokatlarynda galtaşýanlary bardyr we olaryň arasyndaky burç $\arg[f'(z_0) \cdot z_2'(t_2)] -$ $- \arg[f'(z_0) \cdot z_1'(t_1)]$ tapawuda deň bolar. Kompleks sanlaryň häsiýetlerine görä,

$$\arg[f'(z_0) \cdot z_2'(t_2)] = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(t_2),$$

$$\arg[f'(z_0) \cdot z_1'(t_1)] = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_1).$$

Bu ýerden

$$\arg[f'(z_0)z_2'(t_2)] - \arg[f'(z_0)z_1'(t_1)] = \arg z_2'(t_2) - \arg z_1'(t_1)$$

deňligi alarys. Ýagny $L_1$ we $L_2$ egrileriň ($w_0$ nokatda) arasyndaky burç $l_1$ we $l_2$ egrileriň ($z_0$ nokatda) arasyndaky burça deň we burçlaryň hasaplanyş ugurlary saklanýarlar. Diýmek, $f'(z_0) \neq 0$ bolanda $w = f(z)$ özgertme $z_0$ nokatda konform özgertmedir. Eger bütin $D$ ýaýlada $f'(z_0) \neq 0$ bolsa, onda $w = f(z)$ bütin $D$ ýaýlada konform özgertme bolar.

**1-nji mysal.** $w = az + b$, $a \neq 0$, funksiýanyň önümi $z$ tekizligiň islendik nokadynda nola deň däl we $w = az + b$ bütin $z$ tekizliginde birbelgili we üznüksiz. Diýmek, $w = az + b$ özgertme konform özgertmedir.

**2-nji mysal.** $w = z^2$ funksiýanyň önümi $z \neq 0$ nokatlarda noldan üýtgeşik we $w = z^2$ bütin $z$ tekizliginde üznüksiz we birbelgili funksiýa. Diýmek, $w = z^2$ özgertme $z$ tekizligiň $z = 0$ nokatdan özge nokatlarynda konform özgertmedir.

**Bellik.** $f'(z_0)$ önümiň $|f'(z_0)|$ modulynyň $w = f(z)$ özgertmäniň $z_0$ nokatdaky uzalmasy boljakdygyny hem görkezmek kyn däldir.

## §5. Kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integraly

Tekizlikde ýatan, uzynlygy çäkli bolan $L$ egrä seredeliň. $z = w_A$ onuň başlangyç nokady, $z = w_B$ onuň ahyrky nokady bolsun. $L$ egriniň nokatlarynda $f(z)$ funksiýa kesgitlenen diýeliň. $L$ egrini $z_0 = w_A$, $z_1$, $z_2$, ..., $z_n = w_B$ nokatlar bilen böleklere böleliň. $z_i - z_{i-1} = \Delta z_i$ $i = \overline{1,n}$; $\max_i |\Delta z_i| = h$ belgilemeleri girizeliň. Egriniň $(z_{i-1}, z_i)$, $i = \overline{1,n}$, dugalarynyň üstünde $w_i$ nokatlary alalyň we

$$\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta z_k \tag{8}$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f(z)$ funksiýanyň $L$ egri boýunça **integral jemi** diýilýär.

**Kesgitleme.** Eger $h$ nola ymtylanda (8) jem $L$ egrini nähili usul bilen bölekläniмize we $w_i$ nokatlary nähili edip saýlanymyza garamazdan, bellibir predele ymtylsa, onda $f(z)$ $L$ egri boýunça integrirlenýär diýilýär, şol predele bolsa $f(z)$ funksiýanyň $L$ egri boýunça integraly diýilýär we integral

$$\int_L f(z)\,dz \quad \text{ýa-da} \quad \int_{w_A}^{w_B} f(z)\,dz$$

bilen belgilenýär.

Diýmek, kesgitlemä görä,

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta z_i.$$

Indi kompleks üýtgeýänli funksiýanyň integraly haýsy funksiýalar üçin bar, ýagny haýsy funksiýalar $L$ egri boýunça integrirlenýärlerkä diýen sowala jogap berjek bolalyň. Goý, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bolsun. $f(z)$ funksiýanyň $L$ egriniň nokatlarynda kesgitlenendigi üçin, $u$ we $v$ funksiýalar hem şol häsiýete eýedirler.

$$z_k = x_k + iy_k, \qquad k = \overline{1,n},$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,\ w_k = \xi_k + i\eta_k,\ k = \overline{1,n},$$

belgilemeleri girizeliň.

$$|\Delta z_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \quad |\Delta z_k| \le h, \quad k = \overline{1,n},$$

bolany sebäpli,

$$|\Delta x_k| \le h, \quad |\Delta y_k| \le h \quad k = \overline{1,n},$$

deňlikler ýerlikli bolar. Indi şu belgilemeleri ulanyp, integral jemi özgerdip ýazalyň. Alarys:

$$\sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)][\Delta x_k + i\Delta y_k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\}].$$

Diýmek,

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{h\to 0}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k]\Bigg]. \tag{9}$$

Eger $\int_L f(z)\,dz$ bar bolsa, onda (9) deňligiň sag bölegindäki

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k],$$

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k]$$

predeller hem bar bolmaly. Öňden belli bolşy ýaly, ol predeller degişlilikde

$$\int_L udx - vdy, \quad \int_L udy + vdx$$

integrallara deňdirler. Şeýlelikde,

$$\int_L f(z)\,dz$$

integralyň barlygyndan ýokarky egriçyzykly integrallaryň barlygy we

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L udx - vdy + i\int_L udy + vdx \qquad (10)$$

deňlik gelip çykýar. Tersine hem dogrudyr. Eger

$$\int_L udx - vdy, \qquad \int_L udy + vdx$$

egriçyzykly integrallar bar bolsa, onda

$$\int_L f(z)\,dz$$

integral hem bardyr we (10) deňlik dogrudyr. Bu teklip (9) deňlikden gelip çykýar. Ine, şuňa görä, (10) deňlige

$$\int_L f(z)\,dz$$

integralyň kesgitlemesi hökmünde garap bolar. $f(z)$ funksiýa $L$ egriniň nokatlarynda üznüksiz we çäkli bolsa, onda $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiýalar hem $L$ egriniň nokatlarynda üznüksiz we çäkli bolar. Bu şertlerde (10) deňligiň sag bölegindäki integrallar bardyrlar. Diýmek, $f(z)$ $L$ egriniň nokatlarynda üznüksiz we çäkli bolsa,

$$\int_L f(z)\,dz$$

integral bardyr. Kompleks funksiýanyň

$$\int_L f(z)\,dz$$

integralyny hasaplamak (10) formulanyň sag bölegindäki egriçyzykly integrallary hasaplamak bilen geçirilýär.

**Mysal.** $L$ egri $y = 3x + 5$, $1 \leq x \leq 6$, deňleme bilen berlen. Şol egriniň $A(1, 8)$, $B(6, 23)$ nokatlarynyň arasyndaky bölegi boýunça

$$\int_L z^2\,dz$$

integraly hasaplamaly.

$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ deňlikden $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ alarys.

Diýmek, (10) formula görä

$$\int_A^B z^2 dz = \int_A^B (x^2 - y^2)dx - 2xydy + i\int_A^B (x^2 - y^2)dy + 2xydx.$$

$L$ egriniň deňlemesini ulanyp, egriçyzykly integrallary hasaplalyň:

$$\int_A^B (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int_1^6 [x^2 - (3x+5)^2]dx - \int_1^6 2x(3x+5)3dx =$$

$$= \int_1^6 (-26x^2 - 60x - 25)dx = -\frac{9115}{3},$$

$$\int_A^B (x^2 - y^2)dy + 2xydx = \int_1^6 [(x^2 - (3x+5)^2)3dx + 2x(3x+5)dx] =$$

$$= \int_1^6 (-18x^2 - 80x - 75)dx = -3065.$$

Bu ýerden alarys:

$$\int_A^B z^2 dz = -\frac{9115}{3} - i\cdot 3065.$$

Aşakda integralyň birnäçe häsiýetleri subutsyz getirilýär. Goý, $f$, $g$ funksiýalar $L$ egri boýunça integrirlenýän bolsun.

1. $c$ – hemişelik ululyk üçin

$$\int_L c\cdot f(z)dz = c\cdot \int_L f(z)dz.$$

2. $\int_L [f(z) + g(z)]dz = \int_L f(z)dz + \int_L g(z)dz.$

3. $\int_L f(z)dz = \int_A^B f(z)dz = -\int_B^A f(z)dz.$

4. Eger $|f(z)|$ $L$ egri boýunça integrirlenýän bolsa, onda $f(z)$ hem şol egri boýunça integrirlenýändir we aşakdaky deňsizlik dogrudyr:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leq \int_L |f(z)|\cdot|dz| = \int_L |f(z)|\,ds.$$

5. $L$-e degişli islendik $C$ nokat üçin

$$\int_A^B f(z)\,dz = \int_A^C f(z)\,dz + \int_C^B f(z)\,dz.$$

## §6. Koşiniň integral teoremasy we integral formulasy

$L$ öz-özüni kesmeýän, uzynlygy çäkli we ýapyk egri. $D$ şol egri bilen çäklenen birbagly ýaýla.

**Koşiniň integral teoremasy.** Eger $f(z)$ ýapyk $D$ ýaýlada golomorf bolsa, onda

$$\int_L f(z)\,dz = 0.$$

**Koşiniň umumylaşdyrylan integral teoremasy.** Eger $Q$ bir-birini kesmeýän, öz-özüni kesmeýän, ýapyk we uzynlyklary çäkli $L$, $L_1$, $L_2$, …, $L_k$ egriler bilen çäklenen köpbagly ýaýla bolsa hem-de $f(z)$ $Q$ ýapyk ýaýlada golomorf bolsa, onda

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} f(z)\,dz$$

deňlik dogrudyr. Bu ýerde $L$ egri $L_i$, $i = \overline{1,k}$, egrileri öz içinde saklaýar, egriler bir-biriniň içinde ýatmaýarlar we deňlikdäki integrallaryň hemmesi degişli egrisi boýunça sagat diliniň hereketiniň ters ugry boýunça alynýar diýip hasap edilýär.

Eger islendik öz-özüni kesmeýän ýapyk egri bilen hereket edilende, şol egri bilen çäklenen birbagly ýaýla hereket edýäniň çep eli tarapynda galsa, onda şeýle ugruň sagat diliniň hereketiniň ters ugry diýip hasap edilýändigini ýatlap geçeliň.

Goý, $f(z)$ ýokarda kesgitlenen ýapyk $D$ ýaýlada golomorf we $z \in D$ käbir nokat bolsun. Bu şertlerde Koşiniň integral formulasy atly

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)d\xi}{z - \xi}$$

formula ýerliklidir. Kompleks üýtgeýänli funksiýalaryň nazaryýetinde bu formulanyň ähmiýeti diýseň uludyr. Onuň üsti bilen, mysal üçin, $D$ ýaýlada golomorf funksiýanyň şol ýaýlanyň islendik nokadynda tükeniksiz gezek differensirlenýändigini we islendik nokadyň töweregiňde derejeli hatara dargaýandygyny subut etmek bolýar.

Koşiniň integral teoremalarynyň ýene bir netijesini belläp geçeliň. Goý, $D$ ýokarda kesgitlenen ýaýla, $f(z)$ $D$ ýapyk ýaýlanyň $z_1, z_2, ..., z_k$ içki nokatlaryndan başga nokatlarynda golomorf funksiýa bolsun. Onda $z_s$, $s = \overline{1,k}$, nokadyň käbir etrabynda $f(z)$ funksiýa

$$f(z) = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_{-i}^{s}}{(z - z_s)^i} + \frac{a_{-1}^{s}}{z - z_s} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^s (z - z_s)^i$$

Loranyň hataryna dargaýar we

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(z)dz = \sum_{s=1}^{k} a_{-1}^{s}$$

formula dogry bolýar. Soňky formula integraly hasaplamakda giňden ulanylýar.

**Mysal.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4}dx$ integraly hasaplalyň. $x^2+y^2=R^2, y\geq 0, R>1$, ýarym töwerek we $(-R, R)$ aralyk bilen çäklenen $D$ ýaýla seredeliň. $f(z) = \frac{1}{1 + z^4}$ funksiýa $D$ ýaýlanyň $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + $ $+ i\frac{1}{\sqrt{2}}$ nokatlaryndan özge nokatlarynda golomorfdyr. Diýmek, ol ýokarda aýdylanlara görä, şol nokatlaryň käbir etrabynda Loranyň hataryna dargaýandyr:

$$\lim_{z\to z_1}\frac{z - z_1}{1 + z^4} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{z_1}{4},$$

$$\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{1+z^4}=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4z_2^3}=\frac{z_2}{4z_2^4}=-\frac{z_2}{4}$$

predelleriň bolmagy

$$a_{-1}^{1}=-\frac{z_1}{4},\quad a_{-1}^{2}=-\frac{z_2}{4}$$

boljakgyny görkezýär. Eger $L$ bilen $L_1$ ýarym töwerekden we $(-R, R)$ aralykdan durýan egrini bellesek, onda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{1+z^4}dz=-\frac{z_1+z_2}{4}$$

deňligi alarys. Bu ýerden:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{L_1}\frac{1}{1+z^4}dz+\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^4}dx\right]=-\frac{z_1+z_2}{4}.$$

Bu deňlikde $R\to\infty$ bolanda predele geçip alarys:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\lim_{R\to\infty}\int_{L_1}\frac{1}{1+z^4}dz+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx\right]=-\frac{2}{\sqrt{2}}i.$$

Emma

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{L_1}\frac{1}{1+z^4}d\ \right|\le\lim_{R\to\infty}\left|\int_{L_1}\frac{1}{R^4-1}|dz|\right|=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^4-1}\int_{L_1}ds=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{R^4-1}=0$$

bolýandygy sebäpli, bu ýerden:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=-\frac{2}{\sqrt{2}}i$$

ýa-da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=2\sqrt{2}\,\pi$$

deňligi alarys.

# XVI. MATEMATIKI MODELLER. OLARYŇ ULANYLYŞY WE ÇÖZÜLIŞ USULLARY

Adamzat öz durmuşynda köpsanly tebigy hadysalary öwrenmeli bolýar. Bu bolsa öz gezeginde köpsanly fiziki, himiki, ykdysady we ş.m. meseleleri çözmeklige getirýär. Elbetde, bu meseleleri çözmegiň esasy guraly bolup tejribe hyzmat edýär. Emma owunjak meseleler çözülende tejribeler üstünliklere getirýän hem bolsa, çylşyrymly meseleler çözülende tejribeleriň sanyny köpeltmeli bolýar. Bu bolsa köp wagt talap edýär we köp material çykdajylara getirýär. Siziň bilşiňiz ýaly, bu iki ululygyň möçberi adamzat üçin örän çäkli we olary diýseň tygşytly harç etmeli bolýar. Onuň üstesine-de, tejribe bilen öwrenmek örän kyn ýa-da mümkin däl meseleler hem bar. Olar ýerasty hadysalar, adamyň saglygy bilen baglanyşykly meselelerdir. Şeýle ýagdaýlarda meseläni çözmekde esasy gural bolup ýüze çykan matematiki modeldir. Matematiki model öwrenilýän hadysanyň özüni alyp barşyny matematiki simwollaryň üsti bilen takmyn aňlatmak diýmekdir. Hadysany matematiki modeliň üsti bilen öwrenmeklik, esasan, aşakdaky böleklerden durýar.

*Birinjiden*, hadysanyň ýüze çykmagyna getiren sebäpler, onuň birwagtda bolup geçýän beýleki hadysalar bilen baglanyşygy çuňňur öwrenilmelidir. Şol sebäpler we baglanyşyklar matematiki simwollaryň üsti bilen özara baglanyşdyrylmalydyr. Ol baglanyşdyrma dürli matematiki görnüşde bolup biler: algebraik deňlemeler ulgamy, funksional baglanyşyk, ady differensial deňlemeler we ş.m. Ahyrda, alnan matematiki meseleleriň haýsy şertlerde çözülmelidigi anyklanylmalydyr.

*Ikinjiden*, alnan matematiki mesele kesgitlenen şertlerde matematikanyň usullary bilen çözülmelidir.

*Üçünjiden*, matematiki usul bilen alnan çözüwden çykýan netijeler hadysany öwrenmek üçin geçirilen tejribeleriň netijeleri bilen deňeşdirilmelidir. Eger olar ýeterlik takyklykda gabat gelseler, onda matematiki model kabul edilmelidir, eger-de gabat gelmese, onda täze model düzülmelidir.

Häzirki wagtda matematiki modelirlemek usuly ylmyň we ulanyşyň dürli pudaklarynda giňden peýdalanylýar. Onuň esasy sebäbi hem matematiki meseleleri örän çalt we örän uly takyklykda çözüp bilýän EHM-iň ýüze çykmagyndadyr. EHM-iň kämilleşýändikleri we olaryň hasaplaýyş ukyplarynyň has ýokarlanýandyklary matematiki modelirlemek usulynyň mundan beýläk hem ösjekdigininiň şübhesiz şaýadydyr. Käbir mysallara seredeliň.

## §1. Ykdysadyýetden mesele

Kärhana *A* we *B* görnüşli önüm taýýarlamak üçin iki görnüşli çig maly ulanýar. Önümiň her görnüşiniň birini taýýarlamak üçin harç edilýän çig malyň görnüşleriniň mukdary aşakdaky tablisada getirilen.

| Çig malyň görnüşi | Önümiň birini taýýarlamak üçin harç edilen çig malyň mukdary (*kg*) | | Çig malyň mukdary (*kg*) |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | |
| I | 12 | 4 | 300 |
| II | 3 | 12 | 240 |
| Önümiň birini ýerleşdirmekden alnan girdeji (*manat*) | 30 | 40 | |

Tablisada I we II görnüşli çig mallaryň ulanylyp boljak umumy mukdary (300 we 240) we önümiň birini ýerleşdirmekden gelýän girdeji hem görkezilendir. Önümleri islendik mukdarda ýerleşdirmek meselesi çözülen hasap edeliň. *A* we *B* görnüşli önümleriň hersini näçe mukdarda öndüreniňde iň uly girdeji alnarka diýen sowala jogap tapjak bolalyň. Görşümiz ýaly, bu ykdysadyýete degişli mesele. Ony matematiki modelirleme usuly bilen çözmäge girişeliň.

Goý, $x - A$ görnüşli önümleriň öndüriljek mukdary, $y - B$ görnüşli önümleriň öndüriljek mukdary bolsun. Elbetde, $x$, $y$ otrisatel bolup bilmez. Ondan başga-da, $x$ we $y$ mukdardaky önümleri öndürmek üçin harç edilen birinji görnüşli çig malyň $12x + 4y$ mukdary 300-den uly bolup bilmez, ikinji görnüşli çig malyň $3x + 12y$ mukdary 240-dan uly bolup bilmez, ýagny $12x + 4y \le 300$, $3x + 12y \le 240$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ deňsizlikler ýerine ýetmeli bolar. $A$ görnüşli önümiň $x$ sanysyny, $B$ görnüşli önümiň $y$ sanysyny ýerleşdirmekden alnan girdeji bolsa $F = 30x + 40y$ bolar. Indi ýokarda garalan ykdysady meseläni arassa matematiki mesele hökmünde beýan edip bileris:

$$\begin{cases} 12x + 4y \le 300, \\ 3x + 12y \le 240, \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan $(x, y)$ çözüwleriň içinden $F = 30x + 40y$ funksiýa iň uly baha berýänini saýlap almaly.

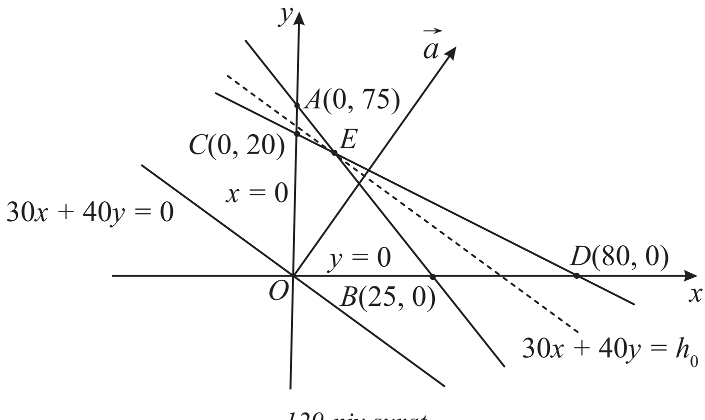
Ine, şu arassa matematiki meselä ýokarda garalan ykdysady meseläniň matematiki modeli diýilýär. Bu meseläniň ýönekeýje geometriki çözüliş usuly bar. Deňsizlikleri deňliklere öwrüp ýazýarlar we

$$12x + 4y = 300,$$

$$3x + 12y = 240,$$

$$x = 0, y = 0$$

göni çyzyklaryň deňlemeleri alynýar. Olary koordinatalar ulgamynda guralyň *(129-njy surat)*.




*129-njy surat*

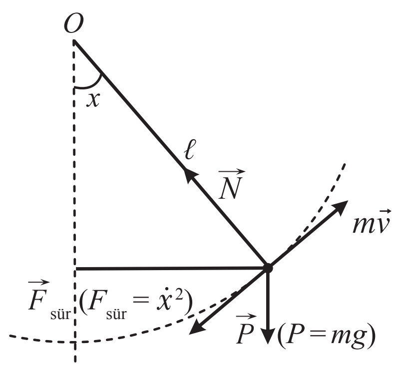
Çözüwler köpburçlugy atly *OCEB* köpburçlugy alýarlar. Ýokardaky deňsizlikleri kanagatlandyrýan $(x, y)$ nokatlar *OCEB* köpburçluga degişlidirler. $F = 30x + 40y$ funksiýanyň iň uly baha eýe bolýan, *OCEB* köpburçluga degişli $(x_0, y_0)$ nokady şeýle tapylýar. *O* nokatda $\vec{a} = \{30,\ 40\}$ wektory gurýarlar. $30x + 40y = 0$ göni çyzygy gurýarlar we ony $\vec{a}$ wektoryň ugry boýunça, öz-özüne parallel edip tä *OCEB* köpburçluk bilen iň soňky gezek kesişýänçä süýşürýärler. Soňky kesişme nokady, çyzgydan görnüşi ýaly, *E* nokat bolýar, göni bolsa $30x + 40y = h_0$ ýagdaýy eýeleýär. Diýmek, $F = 30x + 40y$ funksiýanyň iň uly bahasy $h_0$ bolar. Ony tapmak üçin, *F* funksiýada *x* we *y*-iň ýerine *E* nokadyň $x = 20,\ \ y = 15$ koordinatalaryny goýmak ýeterlikdir. Ýagny gözlenýän $F_{max}$ girdeji $F_{max} = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 15 = 1200$ manat bolar.

Şeýlelikde, matematiki modeli ulanmak bilen goýlan meseläniň şeýle çözüwini aldyk: berlen şertlerde girdejiniň iň uly bolmagy üçin (1200 manat) *A* görnüşli önümleriň 20 sanysyny, *B* görnüşli önümleriň 15 sanysyny öndürmeli.

## §2. Mehanika degişli mesele

Maýatnikler durmuşda uly orun tutýarlar. Olar köp gurallaryň düzüminde bolýarlar. Mysal üçin, ýeriň tebigy ýa-da emeli titremelerini öwrenmekde ulanylýan seýsmograf atly guralyň esasyny düzýän L. Eýleriň adyny göterýän maýatniklerdir. Olaryň daýançlary ýer bilen örän berk baglanyşdyrylýar we ýer herekete gelende, daýanjynyň hem herekete gelmegi bilen, maýatnik hereket edip başlaýar. Elbetde, bizi gyzyklandyrýan esasy mesele maýatnigiň wagt bilen baglanyşykly nähili hereket etjegi bolar. Goý, maýatnik, ölçeg desgalarynyň köpüsinde edilişi ýaly, suwuklyga çümdürilen bolsun we ol suwuklyk maýatnik hereket edende, onuň tizliginiň tersine ugrukdyrylan, tizligiň kwadratyna barabar bolan sürtülme güýjüni döredýän bolsun *(130-njy surat).*

Eger *x* bilen maýatnigiň dikligine ugrukdyrylan gönüden gyşarma burçuny belgilesek, onda *x* $\ddot{x} + c\dot{x}|\dot{x}| + k\sin x = 0$ görnüşdäki deňlemäni kanagatlandyrar.




*130-njy surat*

Dogrudan hem, mehanikanyň momentler kanunyny ulanyp alarys: $\frac{dI}{dt} = M_{\vec{P}} + M_{\vec{N}} + M_{\vec{F}_s}$. Bu ýerde $I = lmv$ – hereket mukdarynyň momenti, $M_{\vec{P}}, M_{\vec{N}}, M_{\vec{F}_s}$ – degişlilikde $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_s$ güýçleriň $O$ nokada görä momentleri:

$$M_{\vec{P}} = -mgl\sin x, \quad M_{\vec{N}} = 0, \quad M_{\vec{F}_s} = -lF_s = -l\dot{x}|\dot{x}|.$$

$v = l\frac{dx}{dt}$ bolýandygyny göz öňünde tutup, tapylan momentleri ýokarky deňlemede ýerine goýup alarys:

$$lm\frac{dv}{dt} = -mgl\sin x - l\dot{x}|\dot{x}|.$$

$\frac{dv}{dt} = l\ddot{x}, \quad \frac{g}{l} = k, \quad \frac{1}{ml} = c$ belgilemeleri girizsek,

$$\ddot{x} + c\dot{x}|\dot{x}| + k\sin x = 0$$

deňlemäni alarys. Ol ikinji tertipli çyzykly däl differensial deňlemedir. Goý, $t = 0$ bolanda, $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a$ berilsin. Diýmek, başdaky gyzyklanýan mehanika degişli bolan meselämiz

$$\ddot{x} + c\dot{x}|\dot{x}| + k\sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a$$

matematika degişli bolan differensial deňlemeler üçin Koşiniň başlangyç meselesine syrykdy. Alnan matematiki mesele mehanika degişli bolan meseläniň matematiki modelidir. Elbetde, oňa absolýut takyk model diýip bolmaz, sebäbi ol deňleme çykarylanda öwrenilýän mehaniki mesele barada köp hili goýberişler edilipdi. Şeýle-de bolsa matematiki model öwrenilip, seredilýän mesele barada köp gerekli netijeleri almak bolar.

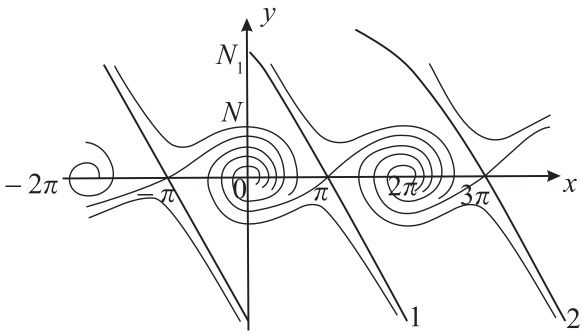
Differensial deňlemede $\dot{x} = y$ belgileme girizip, ony

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -cy|y| - k\sin x \end{cases}$$

ulgam görnüşinde ýa-da ikinji deňlemäni birinjä bölüp,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy|y| - k\sin x}{y}$$

bir deňleme görnüşde ýazyp bolar. Soňky deňlemäniň integral egrileri *xOy* tekizlikde 131-nji suratdaky ýaly ýerleşýärler.




*131-nji surat*

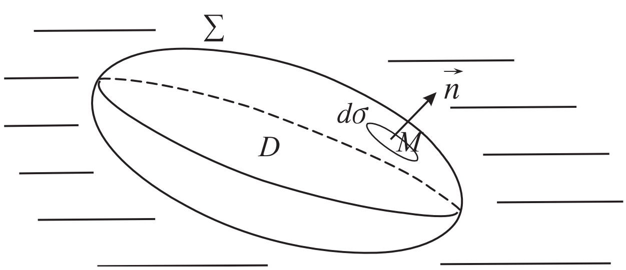
$M_1(\pi, 0)$ nokatdan çykýan 1 belgili egri $y$-ler okunda $N_1(0, a_1)$ nokatda, $M_3(3\pi, 0)$ nokatdan çykýan 2 belgili egri $N_3(0, a_3)$ nokatda we ş.m., $M_{2k+1}((2k+1)\pi, 0)$ nokatdan çykýan egri $N_{2k+1}(0, a_{2k+1})$ nokatda we ş.m. gutarýarlar. Soňky deňlemäniň $N(0, a)$, $0 < a < a_1$, nokatdan çykýan integral egrisi wagtyň artmagy bilen spiral boýunça $O(0, 0)$ nokada golaýlaşýar. Mehanikanyň diline geçirenimizde, bu teklip başlangyç tizligi $0 < a < a_1$ şerti kanagatlandyrýan maýatnik $x = 0$ nokadyň töwereginde yrgyldap, wagtyň geçmegi bilen onuň yrgyldysy öçmek bilen bolýar diýmekdir. Soňky deňlemäniň $x = 0$ bolanda $N(0, a)$, $a_1 \le a \le a_3$ nokatdan çykýan egrisi wagtyň geçmegi bilen saga tarap uzalyp, $(2\pi, 0)$ nokada spiral boýunça golaýlaşyp başlaýar. Mehanikanyň dilinde bu teklip başlangyç tizligi $a_1 < a < a_3$ deňsizligi kanagatlandyrýan maýatnik wagtyň geçmegi bilen öz asylan $O$ nokadynyň daşyndan bir gezek aýlanyp, soňra $x = 0$ nokadyň töwereginde yrgyldap, wagtyň geçmegi bilen öçmek bilen bolýar diýmekdir we ş.m. Eger başlangyç tizlik $a_{2k+1} < a < a_{2k+3}$ deňsizligi kanagatlandyrsa, onda maýatnik wagtyň artmagy bilen öz asylan nokadynyň töwereginde $k + 1$ gezek aýlanar we $x = 0$ nokadyň töwereginde yrgyldap öçmek bilen bolýar.

Elbetde, maýatnik bilen baglanyşykly *c, k* parametrleriň üýtgemegi bilen yrgyldylaryň nähili üýtgeýändigini hem derňese bolardy.

## §3. Suwuklyk akymy bilen baglanyşykly mesele

Islendik suwuklyk akymy öwrenilende esasy gyzyklandyrýan ululyklar suwuklygyň bölejikleriniň tizlikleri, suwuklygyň islendik nokadyndaky basyşy we suwuklygyň dykyzlygy bolýar. Eger seredilýän ululyklaryň bahalaryny az sanly nokatlarda tapmak gerek bolsa, onda olary tejribäniň üsti bilen tapsa hem bolar. Emma nokatlaryň sany tükeniksiz köp, gyzyklandyrýan wagt aralygy uly bolan ýagdaýynda tejribeler üsti bilen ululyklary tapmagyň uly kynçylyklara getirmegi mümkin. Ondan başga-da, ululyklaryň sanly nokatlardaky we sanly wagt pursatlaryndaky bahalary suwuklygyň akymy barada umumy netijelere gelmegi kynlaşdyrýar. Şol sebäpli, suwuklygyň akymynyň matematiki modeline ýüzlenmeli bolýar. Belgilemeler girizeliň. $P(x, y, z, t)$ – suwuklygyň $M(x, y, z)$ nokadyndaky $t$ wagtdaky basyşy, $g(x, y, z, t)$ – $M(x, y, z)$ nokatdaky $t$ wagtdaky dykyzlyk, $u(x, y, z, t)$, $\vartheta(x, y, z, t)$, $\omega(x, y, z, t)$ – $M$ nokatdaky $t$ wagtdaky $\vec{v}$ tizligiň koordinatalary, $\gamma$ – suwuklygyň şepbeşikligi (nola deň hasap edilýär), $\vec{F}(x,y,z,t)$ – daşky güýçleriň massa birligine täsir edýän dykyzlygy. Suwuklygyň akymynyň içinde ýerleşýän, göz öňüne getirilýän $\sum$ üst bilen çäklenen $D$ ýaýlany dolduryan suwuklygyň bölegine täsir edýän güýçleri tapalyň *(132-nji surat)*. $P(x, y, z, t)$ basyşyň täsiriniň jemleýji güýji

$$\vec{R}_1 = -\iint_{\Sigma} P \cdot \vec{n} d\sigma = -\iiint_{D} gradP dxdydz$$




*132-nji surat*

integrala deňdir. Bu ýerde $P = P(x,y,z,t)$, $\vec{n} - \sum$ üste geçirilen daşky normal. Daşky $\vec{F}(x,y,z,t)$ güýçleriň $D$ ýaýladaky suwuklyk bölegine täsiriniň jemleýjisi $\vec{R}_2 = \iiint\limits_D g\vec{F}\,dxdydz$ integrala deňdir. Seredilýän suwuklyk bölegine täsir edýän başga güýç ýok. Şonuň üçin seredilýän suwuklyk böleginiň hereket deňlemesi Nýutonyň kanunyna laýyklykda

$$\iiint\limits_D g\frac{d\vec{v}}{dt}dxdydz = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = -\iiint\limits_D gradP dxdydz + \iiint\limits_D g\vec{F}\,dxdydz$$

ýa-da

$$\iiint\limits_D \left[g\frac{d\vec{v}}{dt} + gradP - g\vec{F}\right]dxdydz = 0$$

görnüşde bolar. $D$ ýaýlanyň islendik möçberde bolup bilýänligi sebäpli, bu ýerden L. Eýleriň adyny göterýän suwuklygyň hereket deňlemesini alarys:

$$g\frac{d\vec{v}}{dt} + gradP - g\vec{F} = 0.$$

Deňlemä girýän $\frac{d\vec{v}}{dt} - t$ boýunça doly önüm şeýle hasaplanýar:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} u_x{}'u + u_y{}'\vartheta + u_z{}'\omega + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \vartheta_x{}'u + \vartheta_y{}'\vartheta + \vartheta_z{}'\omega + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} \\ \omega_x{}'u + \omega_y{}'\vartheta + \omega_z{}'\omega + \dfrac{\partial \omega}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Alnan hereket deňlemesi üç deňlemeden durýar, emma deňleme bäş sany $u\,\vartheta, \omega, P, g$ näbelli funksiýany saklaýar. Şol sebäpli, hereketiň deňlemesiniň ýanyna ýene iki deňleme goşýarlar. Olaryň birinjisi üznüksizlik deňlemesi diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial g}{\partial t} + div(g\vec{v}) = 0$$

deňlemedir. Ikinjisi bolsa, ýagdaý deňlemesi diýlip atlandyrylýan, dykyzlyk bilen basyşy baglanyşdyrýan $P = f(g)$ görnüşli deňlemedir. Şeýlelik bilen,

$$\begin{cases} g\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + gradP - g\vec{F} = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} + div(g\vec{v}) = 0, \\ P = f(g) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy seredilýän suwuklyk akymy baradaky gidromehanika degişli meseläniň matematiki modeli bolýar. Bu modeli çözüp, $u, \vartheta, \omega, P, g$ funksiýalary tapmak bilen suwuklyk akymy baradaky mesele takmyn çözülýär. Sebäbi modeliň özi takmyndyr. Elbetde, akyma täsir edýän beýleki hadysalary göz öňünde tutup, modeli takyklaşdyrsa bolar. Soňky ulgamyň üçünji deňlemesiniň ýok halynda, $g$ = const, hereket kadalaşdy, $\vec{v}$ tizligiň $\varphi$ potensial funksiýasy bar we $\vec{F}$ güýjüň $u$ potensial funksiýasy bar hasap edip, ulgam has ýönekeý

$$\frac{|\vec{v}|^2}{g} - \frac{1}{g}P + u = \text{const}, \quad \Delta\varphi = 0 \; \left(\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)$$

görnüşe getirilýär. Bu deňlikleriň birinjisine Bernulliniň deňlemesi, ikinjisine bolsa suwuklygyň gysylmazlyk şerti diýilýär. Soňky deňlemeden $\varphi$-ni, $\vec{v}$ = grad $\varphi$ boýunça tizligi, ahyrda Bernulliniň deňlemesinden $P$-ni tapyp, goýlan mesele çözüldi diýse bolar.

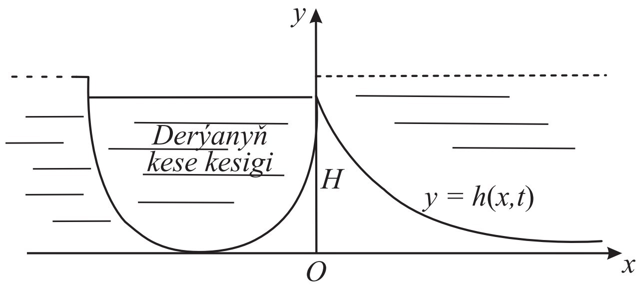
## §4. Derýalardan, suw howdanlaryndan syzyp çykýan suwuň mukdary barada mesele

Suw tebigatyň bize beren iň gymmatly baýlyklarynyň biridir. Ony aýap saklamak we tygşytly ulanmak iň wajyp meseleleriň biridir. Derýalardan, howdanlardan we başga desgalardan syzyp çykýan we ýerasty suwlara goşulyp ýitip gidýän süýji suw mukdary diýseň uludyr. Olaryň ýerasty suwlaryň derejelerini galdyryp, ýerleri şorladýandyklary hem bellidir. Derýalardan, howdanlardan syzyp çykýan suwuň mukdaryny kesgitlemek, suwuň syzyş kanunlaryny tapmak meseleleri suw bilen iş salyşýanlaryň öňünde köpden bäri durýan meselelerdir. Şeýle meseleleriň ýönekeýjeleriniň birine seredeliň. Uzynlygy ölçeg birligine deň bolan derýa böleginden bir tarapa syzyp çykýan suwuň mukdaryny matematiki modelirlemäniň kömegi bilen kesgitlejek bolalyň. Meseläni ýeňilleşdirmek üçin şeýle teklipleri girizeliň:

*a*) seredilýän derýa böleginiň kese kesigi parabola bolmaly;

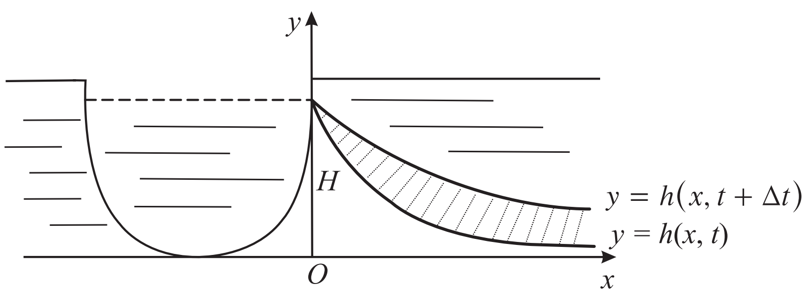
*b*) derýanyň iki tarapyndaky topragyň gurluşy derýanyň seredilýän böleginiň boýuna we derýadan bir tarapa uzak aralyklara çenli üýtgemeli däl;

*ç*) suw geçirmeýän gatlak derýanyň düýbüne galtaşýar we gorizontal ýerleşýär.




*133-nji surat*

Koordinatalar oklaryny girizeliň: $x$ oky derýanyň ugruna perpendikulýar, $y$ oky suw syzmaýan gatlaga perpendikulýar geçirilýär *(133-nji surat)*. Bu ýerde, $H$ – derýadaky suwuň derejesi, $y = h(x, t)$ ýerasty suwlaryň $t$ wagtdaky derejesi. Belli bolşy ýaly, $h(x,t)$ $m\frac{\partial h}{\partial t} = v\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ Bussineskiniň deňlemesini kanagatlandyrýar. Bu ýerde $m$ – topragyň öýjüklik koeffisiýenti, $v$ – syzma koeffisiýenti, $y = h(x, t + \Delta t)$ – ýerasty suwuň $t + \Delta t$ wagtdaky derejesi bolýar *(134-nji surat)*.




*134-nji surat*

Eger indi $y = h(x, t)$ we $y = h(x, t + \Delta t)$ egrileriň arasyndaky $S$ meýdany derýanyň seredilýän böleginiň uzynlygyna (ýagny 1-e) köpeltsek, onda $\Delta t$ wagtda derýadan syzan suwuň toprakda tutýan $V = S \cdot 1$ göwrümini alarys, $mV$ bolsa şol göwrümde ýerleşýän suwuň mukdary bolar. Diýmek, $\Delta t$ wagtda derýadan syzan suwuň mukdary

$$mV = m\int_0^\infty [h(x,t+\Delta t) - h(x,t)]dx$$

formula arkaly kesgitlener. Derýadan wagt birliginde syzýan suwuň $Q$ mukdaryny tapmak üçin, soňky deňligiň sag bölegini $\Delta t$ bölüp, $\Delta t$ nola ymtylanda predele geçmek ýeterliklidir:

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m}{\Delta t}\int_0^\infty [h(x,t+\Delta t) - h(x,t)]dx$$

ýa-da

$$Q = m\int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}dx.$$

Indi Bussineskiniň deňlemesiniň iki tarapyndan $x$ boýunça $(0, \infty)$ aralykda integral alalyň:

$$\int_0^\infty m\frac{\partial h}{\partial t}dx = v\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\Big(h\frac{\partial h}{\partial x}\Big)dx.$$

Deňligiň çep tarapynyň $Q$ deňdigini we $\lim\limits_{x \to \infty} h\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$Q = -vh(0, t) \cdot h_x'(0, t)$$

ýa-da $h(0, t) = H$ boljakdygyny nazarda tutup, alarys:

$$Q = -vH \cdot h_x'(0, t).$$

Soňky deňlemedäki $h_x'(0, t)$ näbelli ululygy tapmagyň birnäçe usuly bar. Olaryň biri-de $h = Hu,\ S = \dfrac{x}{a\sqrt{t}}$ çalşyrmalary girizip, Bussineskiniň deňlemesini ady differensial deňlemä getirme usulydyr.

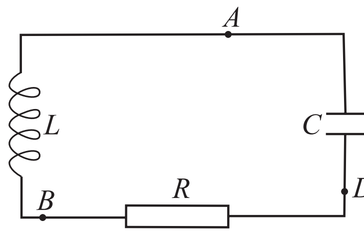
Alnan ady differensial deňleme çözülýär we $h_x'(0, t)$ ululyk tapylýar. Ahyrda, derýanyň seredilýän böleginden wagt birliginde syzýan suwuň $Q$ mukdary üçin

$$Q = \frac{w_0}{\sqrt{t}} H\sqrt{H}$$

formula alynýar. $w_0$ – derýanyň her bölegi üçin aýratyn kesgitlenmeli ululykdyr.

## §5. Elektrik zynjyrlary bilen baglanyşykly mesele

Sygymy $C$ bolan kondensator, $R$ – garşylyk we $L$ – öz-özünden induksirlenme yzygiderli ýapyk zynjyra birikdirilen *(135-nji surat)*.



*135-nji surat*

$t = 0$ wagtda kondensatora $q_0$ mukdardaky zarýad berilýär. Wagtyň geçmegi bilen $q$ zarýad üýtgäp başlaýar we zynjyrda $i$ – tok emele gelýär. Islendik $t$ wagtda kondensatoryň zarýadynyň mukdaryny we zynjyrdaky elektrik akymynyň güýjüni bilip bolarmyka, olar wagtyň geçmegi bilen kanuna laýyklykda nähili üýtgeýärlerkä diýen sowala jogap berjek bolalyň. Zynjyra ölçeg desgalaryny birleşdirip, ol ululyklary belli wagt pursatlarynda ölçäp bolardy. Emma ol ölçegleriň üsti bilen gözlenýän ululyklaryň umumy üýtgeýiş kanunlaryny tapmak kyn bolardy. $R$, $L$ hemişelikleriň $q(t)$, $i(t)$ ululyklaryň üýtgemegine nähili täsir edýänlerini bilmek has hem kyn bolardy. Şol sebäpli ýokarky soraglara jogap bermek üçin, garalýan fiziki ulgamyň matematiki modeline ýüzlenilýär.

Seredilýän zynjyry $A$, $B$, $D$ nokatlaryň kömegi bilen bölek zynjyrlara böleliň. $AB$, $BD$, $DA$ böleklerdäki elektrik dartgynlyklary $V_1$, $V_2$, $V_3$ bilen belgiläliň. Zynjyrlar üçin belli kanuna görä, $V_1 + V_2 + V_3 = 0$ bolmaly. Belli bolşy ýaly, $V_1 = \dfrac{d\alpha}{dt}$, $\quad V_2 = Ri(t)$, $\quad V_3 = \dfrac{q(t)}{C}$. Bu ýerde $\alpha$ – magnit akymy. Şeýlelikde, aşakdaky deňlemä gelýäris:

$$\frac{d\alpha}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

$\alpha = Li, \quad \dfrac{dq}{dt} = i$ deňlemeleri göz öňünde tutup alarys:

$$L\frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Soňky deňleme $q(0) = q_0, \quad q'(0) = 0$ başlangyç şertler bilen bilelikde seredilýän meseläniň matematiki modeli bolar. Deňlemäniň başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi $\dfrac{1}{LC} > \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2$ deňsizlik ýerine ýetende

$$q(t) = q_0 e^{-ht}\left(\cos w_1 t + \frac{h}{w_1}\sin w_1 t\right),$$

$$w_1^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \quad h = \frac{R}{2L}$$

görnüşde bolýar. Diýmek, kondensatoryň $q(t)$ zarýady wagtyň geçmegi bilen $q = 0$ nokadyň töwereginde yrgyldap öçmek bilen bolýar. Deňlemäniň başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi $\dfrac{1}{LC} < \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2$ deňsizlik ýerine ýetende

$$q(t) = \frac{q_2 q_0}{q_2 - q_1}e^{q_1 t} - \frac{q_1 q_0}{q_2 - q_1}e^{q_2 t},$$

$$q_1 = -h + \sqrt{h^2 - \frac{1}{LC}}, \quad q_2 = -h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{LC}}$$

deňleme bilen kesgitlener. Bu gezek hem $q(t)$ zarýad wagtyň geçmegi bilen öçmek bilen bolýar. Elektrik akymynyň güýjüni $i = \dfrac{dq}{dt}$ formulany ulanyp, $q(t)$ zarýad üçin tapylan formulany differensirläp tapsa bolar. Elektrik akymynyň güýjüniň hem edil $q(t)$ zarýad ýaly özüni alyp barjakdygy düşnüklidir.

## §6. Stohastiki matematiki model

Köp ýagdaýlarda öwrenilýän hadysa täsir edýän ululyklary formulalar arkaly aňladyp we olaryň arasyndaky baglanyşygy deňleme hökmünde ýazyp, ýokarda seredilenler ýaly kesgitli matematiki modeli gurmak başardýar. Ol modeller matematikanyň klassyky usullary bilen çözülýär we ondan gerek netijeler çykarylýar. Birnäçe ýagdaýlarda hadysany döreden sebäpleriň we oňa wagta baglylykda täsir edýän ululyklaryň käbirleriniň ýa-da hemmesiniň tötän ululyklar bolýandyklary sebäpli, şeýle modeli düzmek diýseň kynlaşýar ýa-da mümkin hem bolmaýar. Hadysany öwrenmek üçin düzülen matematiki modeller öz içinde tötän ululyklary saklaýarlar. Şeýle modellere stohastiki matematiki modeller diýilýär. Olary klassyky usullar bilen çözmek bolmaýar. Olaryň öz düzüliş we çözüliş usuly bar. Bir mysala seredeliň.

Goý, kadaly hereketde bolan ulgam (bu ýerde ulgam örän giň manyda düşünilýär. Ol bir adam, enjamlar we ş.m. bolup biler) tötän ululyklaryň täsiri astynda öz kadaly hereketini bozan bolsun. Esasy gyzyklandyrýan sowal ulgam kadaly hereketine gaýdyp gelermikä we haçan gelerkä diýen sowal bolýar. Bu meseläniň matematiki modeli şeýle düzülýär. Ulgamy öz kadaly hereketini bozmaga getiren tötän ululyklaryň täsirini bir $x_t$ tötän ululyk hökmünde aňladýarlar, ol näçe kiçi bolsa, şonça-da ulgamyň kadaly hereketine gelmek mümkinçiligi artýar. Köp hallarda $x_t$ aşakdaky stohastiki deňlemäni kanagatlandyrýar:

$$\frac{d}{dt}x_t = -\left(\lambda + B\frac{d}{dt}W_t\right)x_t,$$

bu ýerde $\lambda$, $B$ – parametrler, olar statistiki usullar bilen kesgitlenýärler, $W_t$ –Winer prosesi. Ol aşakdaky şertler bilen kesgitlenýär:

1) $W_0 = 0$;

2) $W_t$ – Gaussyň prosesi;

3) $M_{W_t} = 0$, islendik $t \geq 0$ üçin;

4) $W_t$ prosesiň baglanyşyksyz durumly artdyrmalary bar (durumly diýmek, islendik $t$ we $s$ üçin $W_t - W_s$ tapawudyň paýlanyşy diňe $t - s$ tapawuda bagly diýmekdir).

Deňlemedäki önümler ýönekeý funksiýalaryň önümleri bilen gabat gelmeýärler, olaryň kesgitleniş ýollary bar. Indi $\lambda$ we $B$ parametrleriň haýsy bahalarynda seredilýän ulgam kadaly hereketine gaýdyp gelerkä diýen sowala jogap berjek bolalyň. $x_t$ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dagynyklygyny tapalyň. Seredilýän deňlemeleriň nazaryýetine laýyklykda, olar degişlilikde

$$\dot{\mu}_t = \left(\frac{B^2}{2} - \lambda\right)\mu_t, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_t = Mx_t,$$

$$\dot{D}_t = 2(B^2 - \lambda)D_t + B^2\mu_t^2, \quad D_0 = 0$$

deňlemeleri kanagatlandyrýarlar. Olar ýönekeý ady differensial deňlemelerdir. Olary çözüp alarys:

$$\mu_t = e^{\left(\frac{B^2}{2} - \lambda\right)t},$$

$$D_t = e^{2(B^2-\lambda)t}\left(1 - e^{-B^2 t}\right).$$

Çözüwlerden görnüşi ýaly, ulgamyň kadaly hereketine gaýdyp gelmegi üçin $B^2 - \lambda < 0$ deňsizligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. $B^2 - \lambda$ näçe kiçi otrisatel san bolsa, ulgamyň şonça-da basym kada girmegine garaşsa bolar.

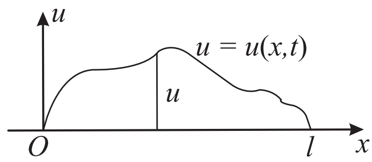
Ulgamy basym kadalaşdyrmak üçin geçirilýän çäreleriň birinde $B^2 - \lambda$ tapawut bir baha eýe bolsa, beýlekisinde başga baha eýe bolar. Bahalaryň haýsy kiçi bolsa, şol çäräniň, $\mu_t$, $D_t$ ululyklar üçin alnan formulalardan gelip çykyşy ýaly, ulgamy kada salmak meselesinde ähmiýeti uly hasap edilýär.

## §7. Matematiki fizikanyň deňlemeleri

Fizika degişli bolan tolkunyň ýaýramagy, ýylylygyň ýaýramagy, elektrik we mehaniki ulgamlardaky yrgyldylar ýaly meseleler öwrenilende, köp ýagdaýda, ýüze çykýan matematiki modeller differensial deňlemeler görnüşinde bolýarlar. Şeýle differensial deňlemelere matematiki fizikanyň deňlemeleri diýilýär. Olaryň käbirlerine seredip geçeliň.

**1. Taryň yrgyldysynyň deňlemesi.**

Tar deňagramlylyk ýagdaýynda $x$-ler okunyň $[0, l]$ kesimi bilen gabat gelýär diýeliň. Ol kesimiň uçlarynda, ýagny $x = 0$, $x = l$ nokatlarda berkidilen bolsun. $t = 0$ wagtdan başlap tar yrgyldap başlaýar. Taryň nokatlary diňe bir tekizlikde hereket etsinler. Ol tekizlikde $x$-ler okuna perpendikulýar $u$ okuny geçireliň we $xOu$ tekizlikde geçýän taryň yrgyldylaryny öwreneliň.



*136-njy surat*

Yrgyldynyň matematiki modelini düzmek üçin şeýle teklipler girizeliň:

a) taryň nokatlary diňe $u$ okuna parallel hereket edýärler *(136-njy surat);*

b) yrgyldylar ujypsyz hasap edilýär, ýagny $u(x, t)$ hereket edýän taryň abssissasy $x$ bolan nokadynyň $t$ wagtdaky tutýan ornunyň ordinatasy bolsa, onda $u(x, t)$, $u_x'(x, t)$ islendik wagtda kiçi ululyklar bolýarlar. Şol sebäpli, hasaplamalarda olaryň kwadratlary örän kiçi ululyklar hasap edilip, taşlanýarlar;

ç) taryň islendik nokadyndaky dartgynlyk güýji islendik wagtda hemişelik hasap edilýär;

d) tara ugry $u$ okuna parallel, çyzykly dykyzlygy $\rho \cdot f(x,t)$ bolan daşky güýç täsir edýär hasap edilýär.

Ine, şu talaplar ýerine ýetse, $u(x, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

deňlemäni kanagatlandyrýar. Oňa taryň mejbury yrgyldylarynyň deňlemesi diýilýär. Eger $f(x, t) \equiv 0$ bolsa, ýagny daşky güýçler täsir etmeýän bolsalar, deňleme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

görnüşe geler. Oňa taryň erkin yrgyldysynyň deňlemesi diýilýär.

**2. Maýyşgak tekizligiň yrgyldysynyň deňlemesi.**

*Oxyu* gönüburçly koordinatalar ulgamynda maýyşgak tekiz üst başlangyç ýagdaýda *xOy* tekizlik bilen gabat gelýär diýeliň. Goý, ol wagtyň geçmegi bilen başlangyç ýagdaýynyň töwereginde yrgyldaýan bolsun. Eger $u = u(x, y, t)$ funksiýanyň $t$ wagtdaky grafigi yrgyldaýan üstüň $t$ wagtdaky tutýan orny bolsa, onda ýokarda tar üçin edilen talaplara meňzeş talaplar edilse, $u(x, y, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t)$$

görnüşli deňlemäniň çözüwi bolar. Ol deňlemä maýyşgak tekizligiň mejbury yrgyldysynyň deňlemesi diýilýär. Maýyşgak tekizligiň islendik çäkli böleginiň yrgyldysynyň deňlemesi hem edil ýokarky görnüşde bolýar.

**3. Howada sesiň ýaýraýşynyň deňlemesi.**

Giňişlikde howanyň islendik $M(x, y, t)$ nokatdaky bölejiginiň tizligini $\vec{V} = \{\mu(x, y, z, t);\ v(x, y, z, t);\ w(x, y, z, t)\}$ bilen belgiläliň. $u(x, y, z, t)$ – tizligiň potensial funksiýasy $\left(\text{grad}u = \vec{V}\right)$, käbir teklipler ýerine ýetende

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

deňlemäni kanagatlandyrýar. Ol deňlemä tolkunlar deňlemesi diýilýär.

**4. Ýylylyk geçirijilik deňlemesi.**

Eger jisimiň temperaturasy dürli nokatlarynda dürli bolsa, onda ýylylyk akymy emele gelýär. Diýmek, jisimde bolýan ýylylyk akymyny öwrenmek üçin onuň dürli nokatlaryndaky temperaturalaryny bilmek gerek bolýar. Jisimiň $M(x, y, z, t)$ nokadyndaky $t$ wagtdaky temperaturasyny $T(x, y, z, t)$ bilen belgilesek, onda $T(x, y, z, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

deňlemäniň çözüwi bolar. Ol deňlemä ýylylyk geçirijilik deňlemesi diýilýär.

**5. Laplasyň deňlemesi.**

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ gysgaça $\Delta u = 0,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \text{ gysgaça } \Delta u=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0, \text{ gysgaça } \Delta u=0$$

görnüşli deňlemelere Laplasyň deňlemeleri diýilýär. Olaryň çözüwlerine bolsa garmoniki funksiýalar diýilýär. Laplasyň deňlemeleri durnukly hadysalar öwrenilende ýüze çykýarlar. Durnukly hadysalarda bolup geçýän özgermeler wagta bagly bolmaýar. Mysal üçin, jisimiň nokatlarynyň temperaturalary wagta bagly bolmasa, onda bolýan ýylylyk akymy-da wagta bagly bolmaz, ýagny akym kadaly (durnukly) akym bolar. Eger $T(x, y, z)$ jisimiň nokatlarynyň temperaturasy bolsa, onda $\frac{\partial T}{\partial t}\equiv 0$ bolar. Onda ýokarda $T$ üçin ýazan deňlemämiz

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

görnüşe geler, ýagny Laplasyň deňlemesine öwrülýär.

Indi seredilýän matematiki modelleri, ýagny matematiki fizikanyň deňlemelerini çözmegiň üýtgeýänleri bölme usulyny we tapawutlar deňlemelerine getirmek usulyny ýönekeý mysallaryň üsti bilen düşündireliň.

**Üýtgeýänleri bölme usuly.** Yrgyldaýan tar $x = 0$, $x = l$ nokatlarda berkidilen. $t = 0$ wagt pursadynda onuň tutýan orny $u = \varphi(x)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat gelýär. Onuň nokatlarynyň başlangyç tizligi $\psi(x)$ funksiýanyň bahalaryna deň. Taryň yrgyldama kanunyny tapalyň. Matematikanyň dilinde bu mesele şeýle beýan edilýär. $u(x, t)$ funksiýanyň grafigi taryň $t$ wagtdaky tutýan orny bilen gabat gelsin. Onda esasy mesele $u(x, t)$ funksiýany tapmakda durýar. Tara daşyndan hiç bir güýç täsir etmeýänligi sebäpli, $u(x, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

deňlemäni we

$$u(x, 0)=\varphi(x),$$

$$u_t'(x, 0)=\psi(x) \qquad (2)$$

başlangyç şertleri hem-de

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(l, t) = 0 \tag{3}$$

çäk şertleri kanagatlandyrmaly bolar. (1) – (3) şertleri kanagatlandyrýan $u(x, t)$ funksiýa üýtgeýänleri bölme usuly bilen şeýle tapylýar. (1) deňlemäniň $u(x, t) = X(x)T(t)$ görnüşli we (3) şertleri kanagatlandyrýan çözüwlerini tapýarlar. Şonuň üçin $u(x, t) = X(x)T(t)$ funksiýany (1) deňlemede ýerine goýýarlar we soňra alnan deňligiň iki tarapyny-da $X(x)T(t)$ funksiýa bölýärler. Netijede,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

deňligi alýarlar. $x$ we $t$ üýtgeýänleriň baglanyşyksyz bolandyklary sebäpli, bu gatnaşyklaryň her biri hemişelik sana deň bolmaly bolar:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} - \lambda,$$

$\lambda$ – hemişelik san. Ýagny $u(x, t)$ funksiýanyň (1) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin $T(t)$ funksiýanyň

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{4}$$

deňlemäniň, $X(x)$ funksiýanyň

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{5}$$

deňlemäniň çözüwi bolmagy ýeterlikdir.

$u(x, t) = X(x)T(t)$ funksiýadan (3) şertleri kanagatlandyrmagyny talap edýärler, ýagny

$$u(0, t) = X(0)T(t) \equiv 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) \equiv 0.$$

Bu ýerden $X(0) = X(l) = 0$ bolmalydygy gelip çykýar. (5) deňlemäniň nola deň bolmadyk, $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan $X(x)$ çözüwiniň bolmagy üçin $\lambda$-nyň položitel san bolmagy, ýagny $\lambda = S^2$ bolmagy hökmandyr.

$$X''(x) + S^2 X(x) = 0$$

deňlemäniň $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan noldan üýtgeşik çözüwi diňe $S = \frac{n\pi}{l}$ $\left(\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)$ görnüşde bolanda (bu ýerde $n$ bitin san) bolup bilýär we ol

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$$

görnüşde bolýar. (4) deňlemede $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ goýup, onuň

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t$$

umumy çözüwi tapylýar. Diýmek, $u(x, t) = X(x)T(t)$ görnüşde bolan we çäk şertleri kanagatlandyrýan çözüwleriniň sany tükeniksiz köp. Olar

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, ...$$

formulalar arkaly kesgitlenýärler. Indi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{6}$$

hatar bilen kesgitlenýän $u(x, t)$ funksiýa seredeliň. Seredilýän hataryň özüniň, ony $x$-e görä iki gezek differensirläp alnan hataryň, ony $t$ görä iki gezek differensirläp alnan hataryň $x$-iň $0 \leq x \leq l$ bahalarynda, $t$-niň $t \geq 0$ bahalarynda ýygnanmagyny talap etsek, onda (1) deňlemäniň çyzykly deňleme bolany sebäpli, $u(x, t)$ (hataryň jemi) funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar. $u_n(x, t)$ funksiýalaryň çäk şertleri kanagatlandyrýandyklary sebäpli, $u(x, t)$ funksiýa hem çäk şertleri kanagatlandyrar, ýagny

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

deňlikler ýerlikli bolar. $u(x, t)$ funksiýanyň başlangyç $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t'(x, 0) = \psi(x)$ şertleri kanagatlandyrmagyny talap edip alarys:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x),$$

$$u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{nt}'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x).$$

Eger $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiýalar $[0,l]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda soňky deňliklerden $A_n$ we $B_n$ koeffisiýentler üçin

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

formulalar gelip çykar we $u(x, t)$ funksiýa doly kesgitlener. Ol (2), (3) şertleriň ikisini-de kanagatlandyrar. Onuň üstesine-de, $\varphi(x)$ funksiýa üç gezek üznüksiz differensirlenýän bolsa, $\varphi(0) = \varphi(l)$, $\varphi''(0) = \varphi'(l)$ şertleri kanagatlandyrsa, $\psi(x)$ funksiýa bir gezek üznüksiz differensirlenýän we $\psi(0) = \psi(l)$ şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda (6) hataryň üsti bilen kesgitlenen $u(x, t)$ funksiýa (1)–(3) şertleri kanagatlandyrýan funksiýa bolar, ýagny $u(x, t)$ gözlenýän çözüw bolar.

**Tapawutlar ulgamyna getirip çözmek usuly.**

Bu soňky döwürde EHM-iň kuwwatynyň we ulanmak mümkinçiliginiň artmagy bilen giňden ulanylýan usullaryň biridir. Onuň ulanylyşyny ýönekeýje mysalyň üsti bilen düşündireliň. Goý,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

deňlemäni we

$$u(x, 0) = x,$$

$$u_t'(x, 0) = 1$$

başlangyç hem-de

$$u(0, t) = t,$$

$$u(1, t) = 1 + t$$

çäk şertleri kanagatlandyrýan $u(x, t)$ funksiýany $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ ýaýlada tapmaly bolsun. $h = 0{,}1$ sany alalyň we $D$ ýaýlada $x = kh$, $k = \overline{0,10}$, $t = mh$, $m = \overline{0,10}$, gönüleri geçireliň. Olaryň kesişmeginden emele gelen figura tor diýilýär. Gönüleriň kesişme nokatlaryna toruň düwünleri diýilýär. $D$ ýaýlada 121 sany düwün nokady bar. Eger $h$ sany kiçeltsek, mysal üçin, $h = 0{,}01$ alsak, onda $D$ ýaýladaky düwün nokatlarynyň sany has hem köpeler. $h$ sana toruň ädimi diýilýär. Tapawutlar ulgamyna getirip çözmek usuly gözlenýän $u(x, t)$ funksiýanyň toruň düwünlerindäki bahalaryny takmyn tapmakdan durýandyr. Eger-de $u(x, t)$ çözüwiň tapylýan bahalarynyň takyklygyny artdyrmak gerek bolsa, onda toruň ädimini kiçeltmeli bolardy. Biziň mysalymyzda $M(kh, mh)$, $0 \leq k \leq 10$, $0 \leq m \leq 10$ düwün nokatlar bolar. $u(x, t)$ funksiýanyň $M(kh, mh)$ nokatdaky bahasyny $u_{k,\,m}$ bilen belgiläliň. Belli bolşy ýaly, $u(x, t)$ funksiýanyň gerek hususy önümleri bar hasap edilende, onuň $M(kh, mh)$ nokatdaky ikinji tertipli önümlerini

$$u_{xx}''(kh, mh) \cong \frac{(u_{k+1,m} - u_{k,m}) - (u_{k,m} - u_{k-1,m})}{h^2},$$

$$u_{tt}''(kh, mh) \cong \frac{(u_{k,m+1} - u_{k,m}) - (u_{k,m} - u_{k,m-1})}{h^2}$$

deňlikler arkaly tapawutlar bilen çalşyryp bolýar, birinji tertipli önümleri bolsa

$$u_x'(kh, mh) \cong \frac{u_{k+1,m} - u_{k,m}}{h},$$

$$u_t'(kh, mh) \cong \frac{u_{k,m+1} - u_{k,m}}{h}$$

deňlikler arkaly tapawutlar bilen çalşyryp bolýar. Bu deňlikleriň takyklygy $h$ näçe kiçi bolsa, şonça-da uludyr. $D$ ýaýlanyň içinde ýatýan düwün nokatlarynyň her birinde ($M(kh, mh)$, $1 \leq k \leq 9$, $1 \leq m \leq 9$), $u_{xx}''$ we $u_{tt}''$ önümleri tapawutlar bilen çalşyryp, differensial deňlemäni tapawutlar deňlemesine öwrüp alarys:

$$\frac{(u_{k,m+1} - u_{k,m}) - (u_{k,m} - u_{k,m-1})}{h^2} \cong \frac{(u_{k+1,m} - u_{k,m}) - (u_{k,m} - u_{k-1,m})}{h^2},$$

$$1 \leq k \leq 9, \quad 1 \leq m \leq 9.$$

Şeýlelik bilen, 121 sany näbellileri ($u_{k,m}$, $k = \overline{0,10}$, $m = \overline{0,10}$) saklaýan 81 deňleme alarys. Ýetmeýän 40 deňleme başlangyç we çäk şertleri ulanmak bilen tapylýar. $u(0, t) = t$ şertde $t = mh$, $0 \leq m \leq 10$ goýup,

$$u_{0,\,m} = mh,\ 0 \leq m \leq 10$$

deňlemeleri, $u(1, t) = 1 + t$ şertde $x = 10h$, $t = mh$, $0 \leq m \leq 10$ goýup,

$$u_{10,\,m} = 1 + mh,\ 0 \leq m \leq 10$$

deňlemeleri, $u(x, 0) = x$ şertde $t = 0$, $x = kh$, $1 \leq k \leq 9$ goýup,

$$u_{k,\,0} = kh,\ 1 \leq k \leq 9$$

deňlemeleri, $u_t'(x, 0) = 1$ şertde $x = kh$, $1 \leq k \leq 9$ goýup we $u_t'(kh, 0)$ önümi

$$u_t'(kh, 0) \cong \frac{u_{k,1} - u_{k,0}}{h}$$

bilen çalşyryp,

$$u_{k,\,1} - u_{k,\,0} = h,\ 1 \leq k \leq 9$$

deňlemeleri alarys. Başlangyç we çäk şertlerinden gelip çykan deňlemeleriň sany 40 bolýar. Diýmek, deňlemeleriň sany bilen tapmaly $u_{k,\,m}$ näbellileriň sany bir-birine deň bolýar. Alnan 121 deňlemeden durýan ulgama tapawutlar ulgamy diýilýär. Ony çözüp, $u(x, t)$ funksiýanyň düwün nokatlaryndaky bahalaryny käbir takyklykda tapýarlar. Garalýan ulgamyň çözüwiniň

$$u_{k,\,m} = kh + mh,\ 0 \leq k, m \leq 10$$

boljakdygyny görse bolar. Köp meseleler üçin düzülen tapawutlar ulgamy şeýle aňsatlyk bilen çözülmeýär. Bu ýagdaýda inženeriň kuwwatly kömekçisi bolan EHM-e ýüzlenmeli bolýar.

## PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR


1. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Bilim – bagtyýarlyk, ruhubelentlik, rowaçlyk. Aşgabat, TDNG, 2014.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap, Saýlanan eserler. VIII tom, Aşgabat, TDNG, 2015.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap, Saýlanan eserler. IX tom. Aşgabat, TDNG, 2016.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Türkmenistan – Beýik Ýüpek ýolunyň ýüregi. Aşgabat, 2017.

5. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2016.

6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.

7. Türkmenistanyň Prezidentiniň obalaryň, şäherçeleriň, etrapdaky şäherleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin rejelenen görnüşdäki milli Maksatnamasy. Aşgabat, 2015.

8. Türkmenistanyň durmuş-ykdysady taýdan ösüşiniň 2011 – 2030-njy ýyllar üçin milli Maksatnamasy. Aşgabat, TDNG, 2010.

9. Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy. Aşgabat, 2006.

10. *Hudaýberenow Ö. G*. Ýokary matematika. Aşgabat, 2007.

11. *Худайберенов Ө. Атаев Я.* Аналитик геометрия ве чызыклы алгебраның элементлери. Ашгабат, «Магарыф», 1979.

12. *Hudaýberenow Ö., Handöwletow M., Hudaýberenow N.* Açyk hanalardan syzyş meselesi barada. Türkmenistanda ylym we tehnika, № 6, 2001.

13. *Бахвалов Н. В.* Численные методы. Москва, 1973.

14. *Гмурман В. Э.* Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, 1977.

15. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. Москва, Наука, 1988.

16. *Демидович Б. Н.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, Физматгиз, 1958.

17. *Карасьев А. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, 1970.

18. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. Москва, 1949.

19. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Москва, 1950.

20. *Мушхелишвили Н. И.* Курс аналитической геометрии. Москва, 1947.

21. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 1949.

22. *Поя Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. Москва, 1957.

23. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1959.

24. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнение математической физики. Москва, 1953.

25. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II, III. Москва, 1958.

26. *Хинчин А. Е.* Краткий курс математического анализа. Москва, 1955.

## MAZMUNY

## III. Analitiki geometriýa

## IV. Matrisalar



## V. Derňewe giriş

**VI. Differensial hasaplaýyş**

## VII. Integral hasaplaýyş

**VIII. Köp üýtgeýänli funksiýalar**



**IX. Differensial deňlemeler**

## X. Ikigat we üçgat integrallar



## XI. Egriçyzykly we üst integrallary barada düşünje

## XII. Hatarlar



## XIII. Ähtimallyklar nazaryýeti

**XIV. Tötän ululyklar we matematiki statistikadan maglumatlar**



**XV. Kompleks üýtgeýäniň funksiýalary**



**XVI. Matematiki modeller. Olaryň ulanylyşy we çözüliş usullary**

**Öwezmämmet Hudaýberenow**

ÝOKARY MATEMATIKA

*Ikinji neşir*

Tehniki ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby


| | |
|---|---|
| Redaktor | *B. Orazdurdyýewa* |
| Surat redaktory | *O. Çerkezowa* |
| Teh. redaktor | *O. Nurýagdyýewa* |
| Kompýuter bezegi | *M. Mullikowa* |
| Neşir üçin jogapkär | *N. Nurullaýew* |

Çap etmäge rugsat edildi 13.02.2018. Ölçegi 60x90$^1/_{16}$.
Edebi garniturasy. Çap listi 38,0. Şertli-reňkli ottiski 115,25.
Hasap-neşir listi 28,52. Şertli çap listi 38,0.
Sargyt № 1285. Sany 3200.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.