A. Öwezow, A. Garajaýew

ÝOKARY MATEMATIKA BOÝUNÇA MESELELER ÝYGYNDYSY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary
üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2017

UOK 510 : 378
Ö 77

Öwezow A., Garajaýew A.
Ö 77 **Ýokary matematika boýunça meseleler ýygyndysy.** Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2017.

Ýokary matematika dersi boýunça şu okuw kitabyna çyzykly algebra, analitik geometriýa we matematiki analiziň bölümleri (analiziň başlangyjy, bir we köp üýtgeýänli funksiýanyň differensial we integral hasabyýeti, differensial deňlemeler) boýunça meseleler we ýumuşlar girizildi.

TDKP №157, 2017 KBK 22.11 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Giriş

Berkarar döwletimiziň bagtyýarlyk döwründe hormatly Prezidentimiziň parasatly ýolbaşçylygynda ýurdumyzda amala aşyrylýan düýpli özgertmeleriň netijesinde ykdysadyýetimizi has-da ýokary götermäge, ilatymyzyň ýaşaýyş-durmuş şertlerini gowulandyrmaga, dünýäniň ösen döwletleriniň derejesine çykarmaga gönükdirilen il bähbitli, ýurt ähmiýetli tutumly işleri ýurdumyzyň raýatlarynyň arasynda gyzgyn goldawa eýe bolýar.

Ýokary matematika dersini okatmagyň maksady ykdysatçy hünärmenlere matematiki bilim bermek, şeýlelikde, alnan bilimi ykdysady meseleleri modelirlemekde, derňemekde we çözmekde ulanmagy özleşdirmekden ybaratdyr.

Häzirki bazar ykdysadyýeti şertlerinde işlejek ykdysatçy hünärmenlerden düýpli ykdysady bilimiň hili boýunça talaplaryň ýokarlanmagy, olara berilýän düýpli matematiki bilimiň ornuny ýokarlandyryp, matematiki taýýarlygyň ýokary derejede bolmagyny talap edýär. Matematikanyň esaslaryny özleşdirmek adamda logiki oýlanma, takyk bolmak, çylşyrymly hadysalary iň esasy baglanyşyklary boýunça ýönekeýleşdirmek, her bir meselä çuňňur düşünmek we dogry (optimal) çözgüdi çalt kabul etmek ukybyny terbiýeleýär.

Ykdysatçy hünärmenleri taýýarlaýan ýokary okuw mekdepleriniň talyplaryny okatmaklyk ykdysadyýet biliminiň esasy bolup hyzmat edýän ýokary matematika dersinden başlanýar. Bu hünärler boýunça taýýarlamak üçin diňe okuw kitaby we matematikanyň bölümlerine degişli maglumat kitapçalar ýeterlik däldir, nazary maglumatlary amaly sapaklarda berkitmek we özbaşdak okamak üçin meseleleriň ýygyndysy zerurdyr. Ýygyndy taýýarlananda awtorlar, bir tarapdan, hödürlenýän mysal-meseleleri okuw dersiniň maksatnamasy bilen baglanyşdyrýarlar, beýleki tarapdan, gönükmeleri ykdysady manysy bilen dolduryp düzýärler. Şeýdip matematika aparatynyň ykdysady derňewlerinde ulanmaklygynyň mümkinçiliklerini görkezip bolýar.

Bu ýygynda analitiki geometriýa, çyzykly algebra we matematiki analiz bölümleri girýär. Analitiki geometriýadan gysga görnüşde berlen maglumatlar esasy düşünjeleri talyplara özleşdirmäge mümkinçilikleri döredýär. Bu bölümde tekizlikde we giňişlikde wektorlara, göni çyzyga, ikinji tertipli egri çyzyklara degişli mysallara garalýar. Çyzykly algebra bölüminde kesgitleýjilere, matrissalara we çyzykly deňlemeler sistemasyna degişli mysallara we meselelere seredilýär. Çyzykly algebra boýunça maglumatlar doly berilýär, sebäbi bu bölüm ähtimallyk nazaryýeti we matematiki statistika, çyzykly programmirleme derslerinde ulanylýar. Ýokary matematikanyň iň uly we ýeterlik derejede çylşyrymly matematiki analize degişli meseleler ýygyndynyň iň köp ornuny eýeleýär. Bu bölümde bir we köp argumentli funksiýanyň önümine, ekstremal meselelerine, kesgitli we kesgitsiz integrala, hatarlara degişli meselelere üns berilýär.

Her bölümde ykdysady meseleler hödürlenýär. Meseleler ýygyndysy ýokary okuw mekdepleriniň we orta hünär mekdepleriniň ykdysady hünärler boýunça bilim alýan talyplary üçin niýetlenendir.

I bap
ÇYZYKLY ALGEBRA

§ 1. Gönüde koordinatalar

Gönüde nokadyň ýerleşen ýagdaýyny kesgitlemek üçin koordinatalar sistemasyny aşakdaky görnüşde guralyň:

Gönüde erkin O nokady alalyň we ony koordinatalar başlangyjy diýip belgiläliň (*1-nji surat*).

Haýsy hem bolsa bir kesimi (OE = l) birlik ölçeg (masştab) diýip kabul edeliň.

Položitel ugry diýlip hemişe bolşy ýaly çepden saga gözýetimiň göni ugruny kabul edip alalyň: položitel ugruň tersini bolsa, otrisatel diýip atlandyralyň.

1-nji surat

Gurnalan koordinatalar sistemasynda M nokat položitel bolup, $x = \dfrac{OM}{l}$ san bilen kesgitlenilýär. Ol bolsa O nokatdan M nokada çenli bolan aralygyň alamatynyň goşmak edilip alnandygyny görkezýär, eger O başlangyç nokatdan M aralygyň ugry položitel bolsa, x sana M nokadyň koordinatasy diýilýär we umuman $M(x)$ görnüşde ýazylýar. Onda A,B,O,E,C,M nokatlaryň koordinatalary, degişlilikde – 5, – 3, 0, 1, 4, x sanlar bolup durýar.

1. Berlen $A(2{,}5)$, $B(-1\frac{3}{4})$, $C(\sqrt{2})$, $D(0)$ nokatlary gurmaly.

Çözülişi: Görşümiz ýaly, A hem-de B nokatlaryň gurluşlary aýdyň bolup durýar C – nokady gurmak üçin, koordinatalar başlangyjynyň sag tarapyndan $\sqrt{2}$-ä deň bolan kesimi ýerleşdireliň, ol bolsa biziň saýlap tapan birlik uzynlygymyzda gönüburçly deňýanly üçburçlugyň katetine deňdir. D nokadyň koordinatasy $x = 0$.

2. Berlen $A(3)$, $B(–3{,}5)$, $C(\sqrt{3})$, $D(-\sqrt{5})$ nokatlary gurmaly:

3. Aşakdaky deňlemeleri kanagatlandyrýan nokatlary gurmaly:

1) $x^2 + x - 6 = 0$;

2) $\frac{x-2}{3} + \frac{x-1}{2} = \frac{x+3}{4} - 1$;

3) $x^2 - 1 = 0$;

4) $x^2 + 1 = 0$;

5) $6x^3 - x^2 - x = 0$;

6) $x^2 - 8x + 16 = 0$;

7) $x^4 - 16 = 0$;

8) $x^2 + 7x = 0$.

4. $A(2)$ nokada simmetrik bolan nokatlaryň koordinatalaryny:

1) koordinatalar başlangyjyna;

2) $B(-3)$ nokada;

3) $C(4)$ nokada görä tapmaly.

§ 2. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk. Kesimleri berlen gatnaşyklar boýunça bölmek

Goý, A we B nokatlar özüniň x_1 we x_2 koordinatalary bilen berlen bolsun. Onda AB uzynlyk aşakdaky formula esasynda kesgitlenýär:

$$AB = x_2 - x_1 \tag{1}$$

bu ýerde x_1 – başlangyç nokadyň koordinatasy; x_2 – ahyrky nokadyň koordinatasy (*2-nji sur. ser.*).

2-nji surat

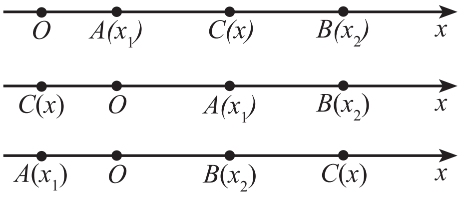
5. $A(x_1)$ we $B(x_2)$ iki nokadyň arasynyň uzaklygy (d) aşakdaky formula boýunça tapylýar.

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{2}$$

6. Eger göni san okunda $A(x_1)$ we $B(x_2)$ iki nokat berlen bolsa, onda islendik üçünji $C(x)$ nokat AB kesimi haýsy hem bolsa bir

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

gatnaşyk boýunça bölýär.



3-nji surat

7. $C(x)$ nokadyň koordinatalary aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (3)$$

Hususy ýagdaýda, eger $\lambda = 1$, bolsa onda, $AB = CB$ we

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (4)$$

8. Göni çyzykda (okda) berlen $A(2)$ we $B(-5)$, $C(-2)$ we $D(4)$ nokatlaryň esasynda emele gelýän kesimleriň uzynlygyny tapmaly. Birinji nokat kesimiň başlangyjyny, ikinji bolsa onuň ahyryny aňladýar.

Çözülişi: (1) formulany ulanyp taparys:

$$AB = (-5 - 2) = -7; \qquad CD = 4 - (-2) = 6.$$

9. A we B nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapyň:

1) $A(2)$, $B(3)$; 2) $A(-4)$, $B(-8)$.

Jogaby: 1) 1; 2) 4.

10. $A(-1)$ we $B(5)$ nokatlar bilen çäklenýän kesimi 1) $\lambda = \frac{2}{3}$; 2) $\lambda = -2$ gatnaşykda bölýän C nokady tapyň.

Jogaby: 1) $C(1{,}4)$; 2) $C(11)$.

11. AB kesimiň uzynlygyny tapyň:

1) $A(1)$ we $B(4)$; 2) $A(-2)$ we $B(3)$; 3) $A(1{,}5)$ we $B(-5{,}4)$;

4) $A(-3)$ we $B(-7)$. Netijäni gurup barlaň.

Jogaby: 1) 3; 2) 5; 3) – 6,9; 4) – 4.

12. A we B nokatlaryň arasyndaky uzynlygy tapyň:

1) $A(1)$ we $B(-3)$; 3) $A(6)$ we $B(2)$;

2) $A(-4)$ we $B(3)$; 4) $A(-7)$ we $B(-4)$.

Netijäni gurup barlaň.

Jogaby: 1) 4; 2) 7; 3) – 4; 4) 3.

13. Bir gönüde A, B, C nokatlar islendik görnüşde ýerleşende $AB + BC = AC$ deňligiň ýerine ýetýändigini subut ediň. Bu deňligiň dogrudygyny aşakdaky nokatlar üçin barlaň:

1) $A(2), B(3), C(5)$; 2) $A(-1), B(0), C(-3)$;

3) $A(1), B(-2), C(-4)$; 4) $A(x_1), B(x_2), C(x_3)$.

14. $A(-2), B(3), C(1)$ nokatlar berlen. Her bir nokadyň beýleki iki nokadyň arasyndaky kesimi haýsy gatnaşykda bölýändigini kesgitläň.

Jogaby: $\lambda_1 = \frac{3}{2}$; $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$; $\lambda_3 = -\frac{3}{5}$.

15. Eger λ : 1; $\frac{2}{3}$; 0; $-\frac{1}{2}$; –1; –3 bahalary alýan bolsa, onda $A(-2)$, $B(3)$ nokatlaryň arasyndaky kesimi λ gatnaşykda bölýän C nokadyň koordinatasyny tapyň.

Jogaby: $C\left(\frac{1}{2}\right)$; $C(0)$; $C(-2)$; $C(-7)$; olar ýaly nokat ýok; $C\left(5\frac{1}{2}\right)$.

§ 3. Kompleks sanlar

3.1. Kompleks sanlar

Goý, x, y hakyky sanlar bolsun. Onda $z = x + iy$ aňlatma kompleks san diýilýär, bu ýerde $i = \sqrt{-1}$. Şunlukda, x onuň hakyky bölegi, y bolsa onuň hyýaly bölegi diýlip atlandyrylýar. Olar üçin Re$z = x$, Im $z = y$ belgiler ulanylýar.

Eger $y = 0$ bolsa, onda $z = x$ hakyky sany alarys. Diýmek, hakyky sanlar kompleks sanlaryň hususy halydyr. $x = 0$ bolanda alynýan $z = iy$ sana sap hyýaly san diýilýär.

Iki $z_1 = x_1 + iy_1$ we $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks san diňe $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$

bolanda deň diýip hasap edilýär, ýagny

$$(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2,\ Im\, z_1 = Im\, z_2). \qquad (1)$$

Eger $x = 0$ we $y = 0$ bolsa, onda $z = x + iy$ kompleks san nola deň diýilýär.

Kompleks sanlaryň köplügi C bilen belgilenýär.

$z_1 = a + bi$ we $z_2 = c + di$ kompleks sanlaryň jemi diýip,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

kompleks sana aýdylýar.

16. $z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = -5 + 3i$

$$z_1 + z_2 = (3 - 5) + (-4 + 3)i = -2 - i$$

Kompleks sanlaryň jemi aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – kommutatiwlik

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – assosiatiwlik

$z_1 = a + bi$ we $z_2 = c + di$ kompleks sanlaryň köpeltmek hasyly diýip,

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

kompleks sana aýdylýar.

17. $z_1 = 2 - 3i$ we $z_2 = -4 + 2i$ kompleks sanlaryň köpeltmek hasylyny tapmaly.

$$z_1 \cdot z_2 = (-8 + 6) + (4 + 12)i = -2 + 16i$$

Kompleks sanlaryň köpeltmek hasyly aşakdaky kanunlara eýedir:

1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – *kommutatiwlik*

2) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – *assosiatiwlik*

3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – *distributiwlik*

z kompleks sanyň natural derejesi şeýle kesgitlenýär:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n gezek}}$$

Aşakdaky deňlikleri aňsat subut edip bolýar:

$z^n \cdot z^m = z^{n+m}$

$(z^n)^m = z^{nm}$

$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^{\,n} \cdot z_2^{\,n}$

$a + bi$ – kompleks sanyň algebraik ýazgy görnüşi.

$z_1 = a + bi$ we $z_2 = c + di$ kompleks sanlaryň tapawudy diýip, $z_2 + z = z_1$ ýa-da $(c + di) + (x + yi) = a + bi$ deňlige kanagatlanýan $z = x + yi$ kompleks sana diýilýär.

18. $z_1 = 4 + 5i$ we $z_2 = -2 + 3i$ sanlaryň tapawudyny tapyň.

$$z_1 - z_2 = (4 + 5i) - (-2 + 3i) = 6 + 2i$$

Kompleks sanlaryň deňliginiň esasynda $z = a + bi$ sanyň nola deň bolmagy üçin $a = 0$ we $b = 0$ bolmagy zerur we ýeterlikdir. Başga sözler bilen $a^2 + b^2 = 0$. Bu ýerde $a + bi \neq 0$ bolmak üçin iň bolmanda a we b sanlaryň biri noldan tapawutly ýa-da $a^2 + b^2 \neq 0$ bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Goý, $z = a + bi$ kompleks san berlen bolsun. z_1 bilen bellenen we $a - bi$ sana deň sana $z = a + bi$ sana garşylykly san diýilýär.

$z_1 = a + bi$ we $z_2 = c+di \neq 0$ kompleks sanlaryň paýy diýip,

$$z_2 \cdot z = z_1 \quad \text{ýa-da} \quad (c + di)(x + yi) = a + bi \qquad (2)$$

deňligi kanagatlandyrýan $z = x + yi$ kompleks sana aýdylýar.

Şeýlelikde

$$z = x + yi = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$$

19. $z_1 = 2 - 3i$ we $z_2 = 1 + 2i$ sanlaryň paýyny tapyň.

Goý, $z_2 z = z^1$ we $z = x + yi$. Onda

$$(1 + 2i)(x + yi) = 2 - 3i \qquad \text{ýa-da}$$

$$(x - 2y) + (2x + y) = 2 - 3i.$$

Bu ýerden

$$\begin{cases} -x - 2y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$$

$$x = \frac{-4}{5} = -0{,}8; \;\; x = \frac{-7}{5} = -1{,}4; \;\; \text{ýa-da } \; z = -0{,}8 - 1{,}4i$$

Eger $z = a + bi$ bolsa, onda $\bar{z} = a - bi$ sana z-e çatyrymly san diýilýär.

Mysal üçin $z = 2 + 3i$ sanyň çatyrymlysy $\bar{z} = 2 - 3i$.

Hususy ýagdaýda $a = a + 0i$ hakyky san öz-özüne çatyrymly, sebäbi

$\bar{a} = a - 0i = a$.

Belgiläliň:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \omega}{z_2 \cdot \omega}$ ýa-da drobyň sanawjysyny we maýdalawjysyny noldan tapawutly bellibir sana köpeltmek bolýar.

Şu häsiýetiň esasynda amaly hasaplamalarda iki sanyň paýyny tapmak üçin onuň sanawjysyny we maýdalawjysyny, maýdalawjysynda duran sanyň çatyrymly sanyna köpeldilýär.

20.

$$\frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6 - 8i + 3i - 4i^2}{9 + 16} = \frac{10 - 5i}{25} = 0{,}4 - 0{,}2i$$

$\dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$ san z^{-1} bilen belgilenýär we bu san z sana ters diýilýär. Şeýlelikde, z_1 sany z_2 sana bölmek z_1 sany z_2^{-1} sana köpeltmegi aňladýar.

21. $z = 3 - i, \;\; z^{-1} = ?$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3 + i}{10} = 0{,}3 + 0{,}1i$$

$n = 0$ we bitin $n > 0$ üçin

$z^0 = 1,\ z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ kesgitlenýär.

Islendik bitin m we n sanlar üçin

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}; \qquad (z^n)^m = z^{nm};$$

$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n; \qquad \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$$

deňlikler ýerine ýetýär.

22. a) $i^3, i^4, i^5, i^{-1}, i^{-2}, i^{-3}, i^{-4}, i^{-5}$ hasaplaň.

$i^3 = i^2 \cdot i = -i;\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1;\ i^5 = i^4 \cdot i = i;$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i; \qquad i^{-2} = (i^2)^{-1} = -1;$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i; \qquad i^{-4} = (i^4)^{-1} = 1;$$

$$i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{i}{i} = -i$$

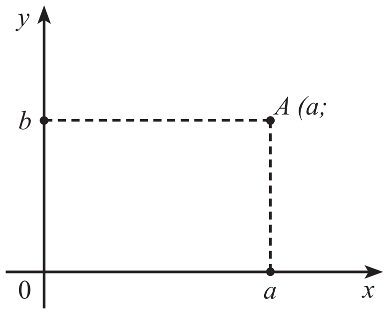
b) $z^{-3} = ?\ \ z = 1 - i$

$$z^{-3} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{1}{-2 - 2i} = \frac{-2 + 2i}{(-2)^2 + (-2)^2} =$$

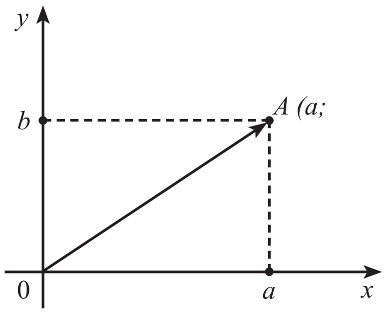
$$= \frac{-2 + 2i}{8} = -0{,}25 + 0{,}25i.$$

3.2. Kompleks sanyň geometriki manysy

Goý, tekizlik we onuň üstünde koordinata sistemasy berlen bolsun. Islendik A nokadyň ýerleşişi öz koordinatalary bilen ýa-da hakyky sanlaryň (a, b) jübüti bilen doly kesgitlenýär, a – absissa, b – ordinata.



4-nji surat



5-nji surat

Başlangyjy koordinatalar merkezinde ýerleşen islendik wektor hem A nokadyň koordinatalary bilen ýa-da şol bir (a,b) jübütlik bilen kesgitlenýär. Başga tarapdan, $a + bi$ kompleks san hem $(a;b)$ hakyky sanlaryň, jübütligi bilen kesgitlenýär. Şeýlelikde, kompleks sanlaryň tekizlikdäki nokatlaryň we başlangyjy koordinatalar merkezinde ýerleşen wektorlaryň arasynda özara bir bahaly degişlilik bar. Görkezilen özara bir bahaly degişlilik aşakdaky geometriki manysyny berýär: her bir $a + bi$ kompleks sany tekizlikde $A(a, b)$ nokat ýa-da başlangyjy koordinatalar merkezinde we ujy $A(a, b)$ nokatda bolan $\overrightarrow{OA}$ wektor ýaly şekillendirip bolýar.

Eger tekizligiň nokatlaryna kompleks sanlar özara bir bahaly degişlilige goýlan bolsa, onda ol tekizlige kompleks tekizligi diýilýär.

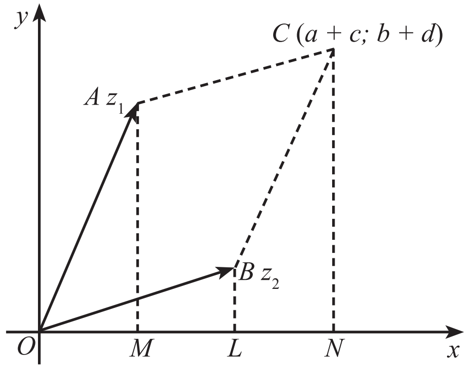
Hakyky sanlar (kompleks sanlaryň hususy ýagdaýy) abssissa sanlar okunda ýatan nokatlara we sap hyýaly sanlar ordinata okunda ýatan nokatlara serpigýär. Şol sebäpli kompleks tekizlikdäki abssissa okuna – hakyky ok, ordinata okuna bolsa, hyýaly ok diýlip aýdylýar.

3.3. Kompleks sanlaryň jeminiň geometriki manysy

Goý, $z_1 = a + bi$ we $z_1 = c + di$ kompleks sanlar, hem-de olara degişli $\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{OB}$ wektorlar berlen bolsun. $\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{OB}$ wektorlarda $OACB$ parallelogram guralyň.

Onda $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

2. sargyt № 1573



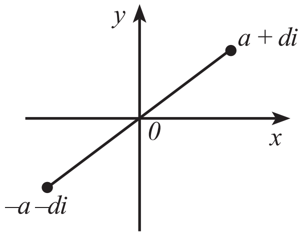
6-njy surat

$BL \perp 0x$, $AM \perp 0x$, $CN \perp 0x$ goşmaça göni çyzyklary geçireliň. $\Delta OBL = \Delta ACK$ (bir tarapy we oňa degişli iki burç boýunça) we $AKNM$ figura – gönüburçluk. Onda $ON = OM + MN = a + c$ we $CN = CK + KN = d + b$. Diýmek c nokada (ýa-da $\overrightarrow{OC}$ wektora) $z = (a + c) + (b + d)\,i = (a + bi) + (c + di) = z_1 + z_2$.

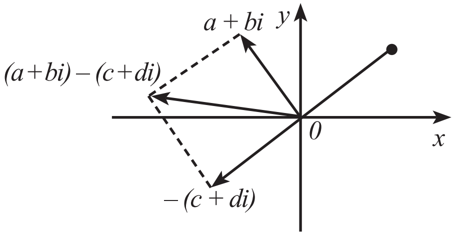
Şeýlelikde kompleks sanlaryň jemi wektorlaryň jemi ýaly tapylýar.

3.4. Kompleks sanlaryň tapawudynyň geometriki şekillendirilişi

Goý, $z = a + bi$ kompleks san berlen bolsun. Onda $-z = -a - bi$ san koordinatalaryň başlangyjyna görä $z = a + bi$ nokadyň simmetrik nokadydyr.

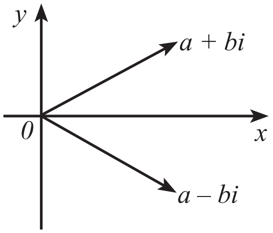


7-nji surat



8-nji surat

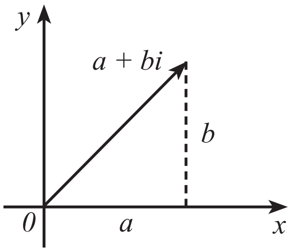
Bu ýerden kompleks sanlaryň tapawudy $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = z_1 + (-z_2)$ degişli wektorlaryň tapawudy ýaly çyzylýar.



9-njy surat

$z = a + bi$ we $\bar{z} = a - bi$ sanlar tekizlikde hakyky oka görä simmetrik wektorlar ýaly şöhlelendirilýär.

3.5. Kompleks sanyň moduly



10-njy surat

$z = a + bi$ kompleks sanyň moduly diýlip, oňa degişli wektoryň uzynlygyna aýdylýar.

z kompleks sanyň moduly $|z|$ ýa-da r bilen belgilenýär. Kesgitlemeden z üçin $|z| \geq 0$ we $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$.

Pifagoryň teoremasy boýunça. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Eger $z = a + 0 \cdot i$ hakyky san bolsa, onda $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a|$. Bu yerde $|a| - a$ hakyky sanyň absolýut ululygy. Şuňa meňzeşlikde $z = 0 + bi$ hyýaly san üçin:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|.$$

Hususy ýagdaýda $|\pm i| = |\pm 1| = 1$.

23. $z = 4 - 3i$, $|z|$ tapmaly.

$|z| = \sqrt{16 + 9} = 5$

Eger r käbir položitel hakyky san bolsa, onda kompleks sanyň modulynyň kesgitlemesi esasynda alarys:

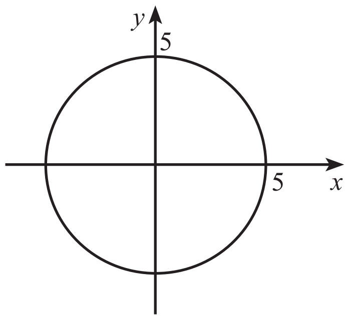
a) $|z| = r$ deňlemäni kanagatlandyrýan ähli z sanlaryň köplügi – merkezi koordinatalaryň başlangyjynda we r radiusy bolan töwerek;

b) $|z| \leq r$ – tegelek;

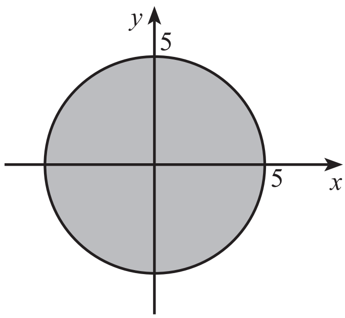
ç) $|z| > r$ – tegelegiň daşy;

d) $|z - z_0| = r$ – merkezi z_0 nokatda we radiusy r-e deň bolan töwerek.

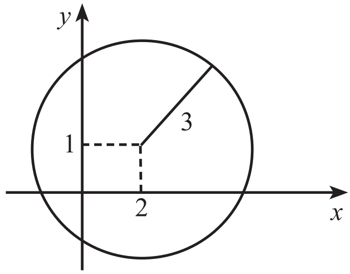
24. 1) $|z| = 5$; 2) $|z| \le 5$; 3) $|z - (2 + i)| \le 3$; 4) $5 \le |z - i| \le 7$ şertleri kanagatlandyrýan köplükleri kesgitläliň:



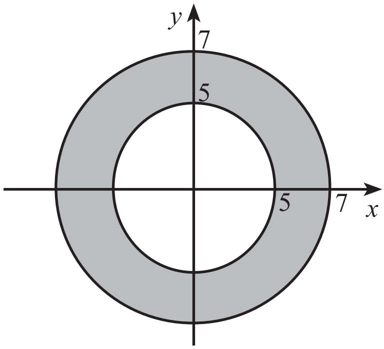
11-nji surat



12-nji surat

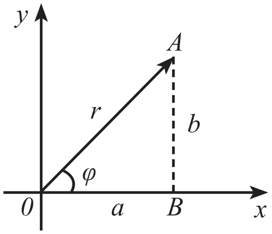


13-nji surat



14-nji surat

3.6. Kompleks sanyň argumenti



15-nji surat

$z \ne 0$ sana degişli wektoryň we Ox okuň položitel ugry bilen emele gelen burça $z = a + bi$ kompleks sanyň argumenti diýilýär.

Bu ýagdaýda, eger burçuň ugry sagat diliniň ugry boýunça bolsa, onda argumentiň bahasy otrisatel bolar, eger-de burçuň ugry sagat diliniň tersine bolsa, onda argumentiň bahasy položiteldir. z sanyň argumenti $\arg z$ ýa-da bir harp φ bilen ýazylýar.

Teorema. z_1 we z_2 kompleks sanlaryň jeminiň moduly goşulyjylaryň modullarynyň jeminden uly däldir we bu modullaryň tapawudyndan uly ýa-da deňdir.

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Bellik: argument bir bahaly kesgitlenmeýär. Argumentiň ululygy diýip $\varphi + 2\pi k$, (φ – belli görkezilen burç, k – bitin san) sanlaryň birini almak bolar. Şol sebäpli Arg$z = \varphi + 2\pi k$ ýazgyny ýazyp bolýar. arg$z$ bahasy Arg$z$ ululyklaryň biridir. Suratdan, eger $\varphi = \arg z$, $z = a + bi$ bolsa, onda $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

Bu formulalaryň üsti bilen φ argumentiň bahasyny tapmak bolar.

25. $z = 1 + i\sqrt{3}$ sanyň argumentini tapyň:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2,$$

$\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bu ýerden $\varphi = \dfrac{\pi}{3} \to \arg z = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$.

26. $z = 2 - 2i$

$$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$\cos\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Diýmek $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{4}$; Arg$z = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Bellik: eger z – hakyky položitel san bolsa, onda $\arg z = 0$; Arg$z = 2\pi k$, eger-de z – hakyky otrisatel san bolsa, onda $\arg z = \pi$; Arg$z = \pi + 2\pi k = \pi(2k + 1)$. Eger-de $\arg z = 0$ bolsa, onda onuň argumenti kesgitli däl.

$z = a+bi$ sanyň argumentini tapmak üçin $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{|b|}{|a|}$ deňlemäni kanagatlandyrýan iň kiçi položitel burçy tapyp, ony φ^* bilen belgileýäris. $z = a+bi$ sanyň koordinata tekizligiň haýsy çärýeginde ýerleşişine görä arg$z$ tapylýar:

eger $z \in$ I çärýege, onda $\varphi = \arg z = \varphi^*$,
eger $z \in$ II çärýege – $\varphi = \arg z = \pi - \varphi^*$,
eger $z \in$ III çärýege – $\varphi = \arg z = \pi + \varphi^*$,
eger z $\in$ IV çärýege – $\varphi = \arg z = 2\pi - \varphi^*$.

27. $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ sanlaryň argumentini tapyň.

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Goşmaça deňleme tg$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

Bu ýerden $\varphi^* = \frac{\pi}{3}$ onda

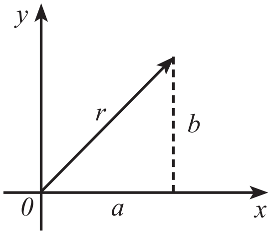
$$\varphi_1 = \arg z_1 = \varphi^* = \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \pi - \varphi^* = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\varphi_3 = \arg z_3 = \pi + \varphi^* = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3},$$

$$\varphi_4 = \arg z_4 = 2\pi - \varphi^* = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

3.7. Kompleks sanyň trigonometrik görnüşi



16-njy surat

$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$

Şu formulalaryň kömegi bilen $z = a + bi$ kompleks sanyň algebraik görnüşinden täze görnüşine geçmek bolar:

$$z = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Alnan $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ aňlatma z sanyň trigonometriki görnüşi diýilýär.

28. Ýokardaky sanlary trigonometrik görnüşinde ýazyň.

$z_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$,

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin\frac{2\pi}{3}$,

$z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}$,

$z_4 = \cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}$.

29. $z = 2 + 2\mathrm{i}$ sanyň trigonometrik görnüşini ýazyň.

Çözülişi: $r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{tg}\varphi^* = \frac{2}{2} = 1$; $\varphi^* = \frac{\pi}{4}$ sebäbi $z = 2 + 2i \in I$

Onda $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

30. $z = -\sqrt{3} + i$

$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$,

$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Onda $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

31. $z = 3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Bu ýerden $|z| = 3$, $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$

3.8. Trigonometrik görnüşinde berlen kompleks sanlaryň üstünde amallar

1. Köpeltmek. Eger $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ we $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ bolsa, onda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \qquad (1)$$

ýa-da kompleks sanlaryň köpeltmek hasylynyň moduly ol sanlaryň modullarynyň köpeltmek hasylyna we argumenti köpeldijileriniň argumentleriniň jemine deň.

Bu ýerden

$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

(1)-nji formula islendik tükenikli sany köpeldijiler üçin dogrudyr:

$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,…

$z_n = r_n (\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$.

Onda

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n =$

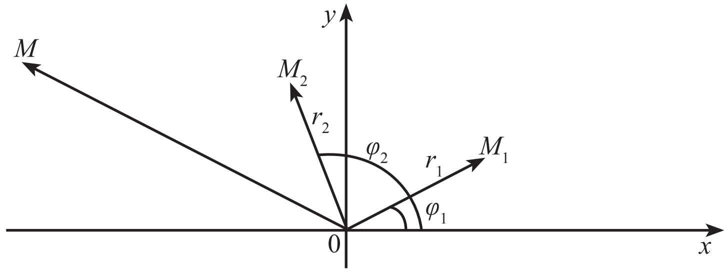
$= r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{r}_n (\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n))$.

Kompleks sanlaryň köpeltmek hasylynyň aşakdaky geometriki manysy bar:

Eger $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ kompleks sana $\overrightarrow{OM_1}$ wektor, $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + + i\sin\varphi_2)$ kompleks sana $\overrightarrow{OM_2}$ wektor degişli bolsa, onda olaryň köpeltmek hasylyna $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ $\overrightarrow{OM}$ wektor degişlidir. $\overrightarrow{OM}$ wektor $\overrightarrow{OM_1}$ wektory φ_2 burça öwrüp, onuň moduly r_2 gezek süýndirýär.

32. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ we $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ sanlary köpeldiň.

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$



17-nji surat

Okyjylara mysaldaky köpeltmek amalynyň çyzgysyny özbaşdak çyzmagy maslahat berýärin.

2. Derejä götermek. Eger $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bolsa, onda

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r^n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n))$$

formula arkaly alarys:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Bu formula Muawryň formulasy diýilýär.

33. Hasaplaň: $(1 + i)^{30}$

$1 + i$ sanyň trigonometriki görnüşini ýazalyň.

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

Onda $(1 + i)^{30} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{30} = (\sqrt{2})^{30} \cdot \left(\cos\frac{30\pi}{4} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) = 2^{15}\cos\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right) = 2^{15}\left(\cos + \frac{3\pi}{2} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2^{15} \cdot i.$

Eger z sanyň moduly 1-e deň bolsa, onda Muawryň formulasyndan

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\sin^n\varphi. \qquad (*)$$

Bu formula käbir trigonometrik formulalary getirip çykarmaga mümkinçilik berýär.

Eger $n = 2$ bolsa, onda:

$$\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

Bu ýerden belli formulalary alarys:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi.$$

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Bu ýerden

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

3. Bölmek. Eger $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ we $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ bolsa, onda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (1)$$

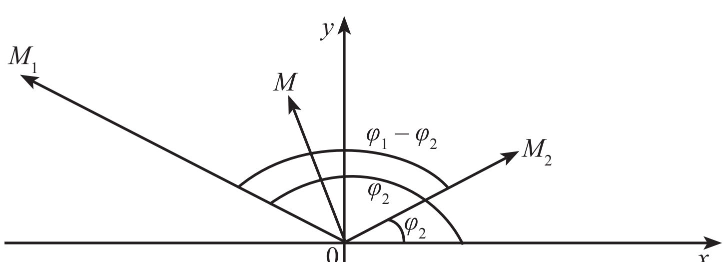
ýa-da

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}; \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

$z_1 = 1$ we $z_2 = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hususy ýagdaýda (1) formuladan $\frac{1}{z}$ ters sanyň trigonometriki görnüşini ýazmak bolar:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Kompleks sanlary bölmegiň aşakdaky geometriki manysy bar:



18-nji surat

Eger $z_1 = r_1$ $(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ kompleks sana $\overrightarrow{OM_1}$ wektor, $z_2 = r_2$ $(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) - \overrightarrow{OM_2}$ wektor laýyklykda goýlan bolsa, onda $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}$ $(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ paýa $\overrightarrow{OM}$ wektor laýyklykda goýlandyr. $\overrightarrow{OM}$ wektor $\overrightarrow{OM_1}$ wektory φ_2 otrisatel tarapa öwrülen burça we r_2 gezek gysylyp aýlanýar.

34. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ kompleks sanlaryň $\frac{z_1}{z_2}$ paýyny tapyň.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Bu sanlaryň geometriki şekilini we olaryň paýynyň geometriki manysyny görkezmek okyjylara maslahat berilýär.

3.9. Kompleks sandan kök almak

Kesgitleme. z sandan n-nji ($n \in N$, $n \geq 2$) derejeli kök diýip $U^n = z$ şerti kanagatlandyrýan islendik U sana aýdylýar. z sandan kök almak $\sqrt[n]{z}$ bilen belgilenýär.

Teorema. Islendik $z \neq 0$ sandan n-nji derejeli kök alyp bolýar we ol n sany dürli bahalary alýar.

$$U_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right); \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (3)$$

35. Hasaplaň: $\sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$

$$\sqrt{3} - i = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

bu ýerden

$$U_k = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[6]{2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{6}\right); \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

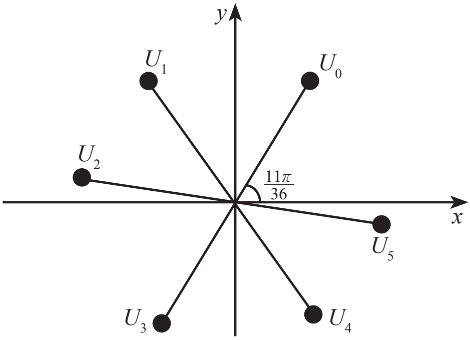
Onda alarys:

$$U_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}\right), \qquad U_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}\right),$$

$$U_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right), \qquad U_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}\right),$$

$$U_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}\right), \qquad U_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{71\pi}{36} + i\sin\frac{71\pi}{36}\right).$$

U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 kökleriň geometriki manysy aşakdaky suratda berilýär.



19-njy surat

U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 – dogry altyburçlugyň depeleri. Altyburçluk $r = \sqrt[6]{2}$ radiusly töweregiň içinden çyzylan.

36. $\sqrt[4]{1}$ tapyň.

$$U_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right) =$$

$$= \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2};$$

$k = 0, 1, 2, 3$ bahalary goýup, alarys:

$$U_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$U_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$U_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$U_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

37. $\sqrt[3]{i}$ tapyň.

$$U_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 4\pi k}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi + 4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 4\pi k}{6};$$

$k = 0,1,2$ bahalary goýup, alarys:

$$U_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1),$$

$$U_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + 1),$$

$$U_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

3.10. Birlikden kökler

Birlikden n-nji derejeli kök almak esasy hususy ýagdaýlaryň biridir. Bu köküň n sany bahasy bardyr. $1 = \cos 0 + i\sin 0$ bolany üçin umumy formuladan birlikden n-nji derejeli köküň ähli bahalary aşakdaky formula arkaly berilýär:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Eger n jübüt san bolsa, onda $k = 0$ we $k = \frac{\pi}{2}$ bolanda hakyky kökleri alyp bolýar, eger-de n täk san bolsa, onda diňe $k = 0$ bolanda hakyky kök almak bolar. Kompleks tekizlikde birlikden n-nji derejäniň kökleri birlik radiusly töweregiň üstünde ýerleşýärler we ol töweregi olar deň n sany dugalara bölýärler; 1 san töweregi bölýän nokatlaryň biridir. Bu ýerden birlikden n-nji derejeli hakyky däl kökleri hakyky oka görä simmetrik ýerleşýärler we olar jübüt-jübütden özara çatrymlydyr.

Birlikden kwadrat köküň iki bahasy bar: 1 we –1, birlikden dördünji derejeli köküň dört bahasy bar: 1, – 1, i, $-i$. Soňra birlikden üçünji derejeli köküň bahalaryny bilmek örän peýdaly bolar. Onuň kökleri

$$\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}; \quad k = 0, 1, 2$$

formula arkaly tapylýar ýa-da birlikden başga iki özara çatrymly

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sanlar kökleriň bahasydyr.

Kompleks sandan n-nji derejeli köküň ähli bahalaryny bu bahalaryň birini birlikden n-nji derejeli köküň bahalarynyň ählisine köpeldip alyp bolýar. Hakykatdan hem, goý β san $\propto$ sandan n-nji derejeli köküň bir bahasy bolsun ýa-da $\beta^n = \alpha$ we ε – birlikden n-nji derejeli köküň bahasynyň biri ýa-da $\varepsilon^n = 1$. Onda

$$(\beta\varepsilon)^n = \beta^n\varepsilon^n = \alpha$$

ýa-da $\sqrt[n]{\alpha}$ üçin bahalarynyň biri bolup durýar. β-ny birlikden n-nji derejeli köküň bahalarynyň her birine köpeldip, α sandan n-nji derejeli köküň n sany dürli köküň bahasyny ýa-da bu köküň ähli bahalaryny alarys:

Mysallar

1) –8-den kub köküň bir bahasy –2-ä deň. Beýleki ikisi bolup $-2\varepsilon_1 = -1 + i\sqrt{3}$ we $-2\varepsilon_2 = -1 - i\sqrt{3}$ sanlar hyzmat edýär.
2) $\sqrt[4]{81}$ dört bahasy bar: $3, -3, 3i, -3i$.

Iki sany birlikden n-nji derejeli köküň köpeltmek hasylynyň özi hem birlikden n-nji derejeli kökdür. Hakykatdan hem, eger $\varepsilon^n = 1$ we $\eta^n = 1$ bolsa, onda $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n; \eta^n = 1$.

Birlikden n-nji derejeli köküň bahasyna ters san hem şolar ýaly kökdür. Hakykatdan hem, goý $\varepsilon^n = 1$. Onda $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ deňlikden $\varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1$, ýa-da $(\varepsilon^{-1})^n = 1$ gelip çykýar.

Umuman, birlikden n-nji derejeli köküň islendik derejesi hem birlikden n-nji derejeli kökdür.

3.11. Eyleriň formulasy. Kompleks sanyň görkezijili görnüşi

Kompleks sanyň algebraik we trigonometriki görnüşlerinden başga-da görkezijili görnüşi bar. Ol görnüş elektrotehnikada giňden ulanylýar.

φ hakyky üýtgeýän ululyga bagly $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ görnüşde berlen kompleks sanlara garalyň. Trigonometriki görnüşde berlen sanlaryň köpeltmek düzgüni boýunça alarys:

$$z(\varphi_1) \cdot z(\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = z(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (1)$$

$z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ funksiýa üçin differensirlenmek kanunyny ulanyp, taparys:

$$z'(\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)' = -\sin\varphi + i\cos\varphi =$$
$$= i^2\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\,z(\varphi) \qquad (2)$$

Kompleks görkezijili $e^{i\varphi}$ aňlatma garalyň. Bu ýerde

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots,$$

φ – islendik hakyky san. $U(\varphi) = e^{i\varphi}$ kompleks funksiýa üçin belli köpeltmek we differensirlenmek düzgünleri ýerine ýetýär diýip, güman edeliň. Onda alarys:

$$U(\varphi_1)\cdot U(\varphi_2)=e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i\varphi_1+i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=U(\varphi_1+\varphi_2) \tag{3}$$

$$U'(\varphi)=(\mathrm{e}^{i\varphi})'=ie^{i\varphi}=i\cdot U(\varphi) \tag{4}$$

Her bir $z(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ kompleks sana özara bir bahaly degişlilige $U(\varphi)=e^{i\varphi}$ kompleks görkezme aňlatmany goýalyň.

(1), (3) we (2), (4) gatnaşyklardan $z(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ we $U(\varphi)=e^{i\varphi}$ aňlatmalaryň köpeltmek we differensirlenmek amallara görä deň häsiýetlere eýedir ýa-da olaryň modelleriniň bir logiki gurluşy bar.

Şeýlelikde $e^{i\varphi}$ we $\cos\varphi+i\sin\varphi$ aňlatmalaryň logiki manysy birdir. Şol sebäpli kesgitleme boýunça

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{5}$$

alarys. (5) formula Eýleriň formulasy diýlip atlandyrylýar.

Goý, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks san berlen bolsun. Onda Eýleriň formulasyndan peýdalanyp, alarys:

$$z=r\cdot e^{i\varphi}.$$

Alnan kompleks sanyň görnüşine kompleks sanyň görkezijili görnüşi diýilýär. Kompleks sanyň görkezijili görnüşi kompleks sanlaryň üstünde geçirilýän amallara ýeňillik döredýär.

Ýokarda girizilen köpeltmek, bölmek, derejä götermek we kökden çykarmak amallar aşakdaky görnüşde ýazylýar.

Goý, $z_1=r_1\cdot \mathrm{e}^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2\cdot e^{i\varphi_2}$ bolsun, onda

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot e^{i\varphi_1}\cdot r_2\cdot e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\cdot e^{i\varphi_1}}{r_2\cdot e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Goý, $z=r\cdot e^{i\varphi}$ bolsun, onda

$$z^n=r^n\cdot e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}}=\sqrt[n]{r}\,e\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n},$$

bu ýerde $k = 0, 1, 2, .., n - 1$.

38. Aşakdaky kompleks sanlaryň görkezijili görnüşini tapyň:

1) $z_1 = 1 + i$, 2) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Çözülişi:

1) $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$. Onda $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $r = |z_2| = 2$, $\arg z_2 = \frac{7\pi}{6}$. Onda $z_1 = -\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

39. Aşakdaky sanlaryň algebraik görnüşlerini tapyň.

1) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 2) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$; $z_3 = e^{-3+4i}$.

Çözülişi:

1) Alarys: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 1 + i\sqrt{3}$.

2) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi i}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi i}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$.

3) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i \sin 4) \approx 0{,}05(-0{,}65 - 0{,}76i)$
$\approx \approx -0{,}03 - 0{,}04$.

40. z_1 we z_2 sanlaryň $z_1 \cdot z_2$ köpeltmek hasylyny we $\frac{z_1}{z_2}$ paýy tapyň, netijelerini trigonometriki görnüşinde ýazyň.

a) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}$, $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; b) $z_1 = \mathrm{e}^{3-7i}$, $z_2 = \mathrm{e}^{-4+5i}$.

Çözülişi:

a) $z_1 \cdot z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 3 \cdot 6 \cdot e^{\frac{2i}{3}+\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18\left(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6}\right)$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{\frac{3i}{6}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}\right).$$

b) $z_1 \cdot z_2 = e^{3-7i} \cdot \mathrm{e}^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{3-7i}}{e^{-4+5i}} = \mathrm{e}^{7-12i} = \mathrm{e}^{7}(\cos(-12) + i\sin(-12)).$$

41. Hasaplaň: a) z^4; $\sqrt[5]{z}$. Bu ýerde $z = 2\,e^{-3i}$. Netijäni algebraik görnüşde ýazyň.

a) $z^4 = (2e^{-3i}))^4 = 2^4 e^{-3i\cdot 4} = 16e^{-12i} = 16(\cos(-12) + i\sin(-12)) \approx$ $\approx 16(0{,}8438 + 0{,}5366i) \approx 13{,}50 + 8{,}59i$.

b) $U_k = \sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{(-3+2\pi k)i}{5}}$, $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

$U_0 = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(-\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) \approx 1{,}15(0{,}85 - 0{,}565i) \approx$ $\approx 0{,}95 + 0{,}65i$,

$$U_1 = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{(-3+2\pi)i}{5}} \approx 0{,}91 + 0{,}70i,$$

$$U_2 = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{(-3+4\pi)i}{5}} \approx -0{,}39 - 0{,}03i,$$

$$U_3 = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{(-3+6\pi)i}{5}} \approx -1{,}15 - 0{,}03i,$$

$$U_4 = \sqrt[5]{2}\,e^{\frac{(-3+8\pi)i}{5}} \approx -0{,}33 - 1{,}10i.$$

42. Görkezilen aňlatmalary ýerine ýetirmeli.

1) $(1 + 2i) + (5 - 6i)$;

2) $(2 - i)(2 + i)$;

3) $\dfrac{1+2i}{1+i}$;

4) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$; *Jogaby*: $8 + i$.

5) $(1 + 2i) - (3 - i)$; *Jogaby*: $-2 + i$.

6) $3(2 - i) \cdot i \cdot (1 - i)$; *Jogaby*: $9 + 3i$.

7) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$; *Jogaby*: $-13 + 23i$.

8) $(2 - i)^2$; *Jogaby*: $3 - 4i$.

9) $(1 + 2i)^3$ *Jogaby*: $-11 - 2i$.

10) $\dfrac{1-i}{i}$; *Jogaby*: $-1 - i$.

11) $\dfrac{2-5i}{3+4i}$; *Jogaby*: $-\dfrac{14}{25} - \dfrac{23}{25}i$.

12) $\dfrac{2-3i}{1+i}$; *Jogaby*: $-2 - 2{,}5i$.

13) $\dfrac{\sqrt{3} - i}{(1 - i\sqrt{3})^2}$; *Jogaby*: $-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}i$.

Çözülişi:

1) $(1 + 2i) + (5 - 6i) = (1 + 5) + (2i - 6i) = 6 - 4i$;

2) $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$;

3) $\dfrac{1-2i}{1+i} = \dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+2i-i-2i^2}{1-i^2} = \dfrac{1+i+2}{1+1} =$
$= \dfrac{3+i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

43. 1) $x=2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $0 \le y \le 2$; 4) $-2 \le x \le 0$ we $1 \le y \le 3$; 5) $Rez = Imz$; 6) $Imz = 2Rez$ şertlere kanagatlandyrýan $z = x + iy$ kompleks sanlaryň geometriki köplügi nämäni aňladýar?

Jogaby: 1) $x = 2$ göni çyzyk; 2) $x = 1$ we $x = 3$ göni çyzyklaryň arasyndaky wertikal zolak; 3) $y = 0$ we $y = 2$ göni çyzyklaryň arasyndaky gorizontal zolak; 4) $x = -2$, $x = 0$ we $y = 1$, $y = 3$ zolaklaryň umumy bölegi – gönüburçluk; 5) birinji we üçünji koordinata burçlaryň bissektrisasy; 6) abssissa oky bilen $\alpha = \text{arctg}2$ burçy düzýän we koordinata başlangyjyndan geçýän göni çyzyk.

44. Deňlemeleriň çözüwlerini tapyň (x we y – hakyky sanlar):

1) $(1 + i)\,x + (2 + i)\,y = 5 + 3i$; *Jogaby*: $x = 1$; $y = 2$.

2) $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$; *Jogaby*: $x = 3$; $y = -2$.

3) $(3-y+x)(1+i)+(x-y)(2+i)=6-3i$; *Jogaby*: çözüwi ýok

4) $(3-y+x)(1-i)+(x-y)(2+i)=6-3i$;

Jogaby: x – islendik san, $y=x-1$.

Çözülişi: 1) $(1+i)\,x+(2+i)\,y=5+3i$;
$x+ix+2y+iy=5+3i.$

Deňlemäniň iki tarapynyň hakyky we hyýaly böleklerini deňeşdirip alarys:

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ x+y=3 \end{cases}$$

bu sistemadan $x=1$; $y=2$.

45. Hasaplaň:

1) i^3; 6) i^8; 10) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$; 14) i^{-15};

2) i^4; 7) i^{32}; 11) $\frac{5}{1+2i}$; 15) $(-i)^{20}$;

3) i^5; 8) i^{31}; 12) $\frac{2i-3}{1+2i}$; 16) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$;

4) i^6; 9) i^{65}; 13) $\frac{2+3i}{i}$; 17) $\frac{2+i}{2-i}(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$.

5) i^7;

Jogaplary:

1) $-i$; 6) 1; 10) $\frac{i}{2}$; 14) i;

2) 1; 7) 1; 11) $1-2i$; 15) -2^{10};

3) i; 8) $-i$; 12) $\frac{-1+5i}{2}$; 16) 0;

4) -1; 9) i; 13) $3-2i$; 17) $\frac{-41+257i}{65}$.

5) $-i$;

46. Aşakdaky kompleks sanlary trigonometrik görnüşinde ýazyň:

1) $1 - i\sqrt{3}$;

2) $-\sqrt{3} + i$;

3) $2 + 2i$;

4) 3;

5) -2;

6) $2i$;

7) $-3i$;

8) $\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

9) $\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

10) $-\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

11) $-\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$;

12) $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;

13) $2\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$;

14) $1 + \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

Jogaplary:

4) $3(\cos 0 + i\sin 0)$;

5) $2(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$;

6) $2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$;

7) $3(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$;

8) $3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$.

9) $3(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$;

10) $3(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$;

11) $3(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$;

12) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

Çözülişi:

1) $1 - i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right) = 2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$;

2) $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$; $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi = 150^\circ$,

$-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$.

3) $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $\mathrm{tg}\varphi = \frac{2}{2} = 1$ we berlen san I çärýekde ýerleşýär. Şol sebäpli $\varphi = 45^\circ$. Onda $2 + 2i = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$.

13) $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ = 12) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos300^{\circ} +$ $+i\sin300^{\circ}$.

14) $1 + \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos45^{\circ} + i\sin45^{\circ})$.

47. $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}$ sanlar berlen. Hasaplaň: 1) $z_1 \cdot z_2 \cdot z3$, 2) $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, 3) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2}$.

Jogaby: 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3+i}}{2}$; 4) z_2.

Çözülişi: 1) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

48. Kompleks sanyň trigonometrik görnüşini peýdalanyp hasaplaň:

1) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10}$; 2) $(1 + i\sqrt{3})^{-6}$.

Çözülişi:

1) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5}\right) = 2^{10}(\cos2\pi +$ $+ i\sin2\pi) = 2^{10}(1 + 0) = 2^{10} = 1024$;

2) $(1 + i\sqrt{3})^{-6} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-6} = 2^{-6}\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) =$ $= \frac{1}{64}(\cos2\pi + i\sin2\pi) = \frac{1}{64}(1 + 0) = \frac{1}{64}$;

3) $\dfrac{\cos\frac{5}{12}\pi - i\sin\frac{5}{12}\pi}{\cos\frac{7}{12}\pi - i\sin\frac{7}{12}\pi}$; *Jogaby*: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

4) $\dfrac{1-i}{(1+i)^5}$; *Jogaby*: $\dfrac{1}{4}i$.

5) $(1-i\sqrt{3})(1-i)\left(\cos\dfrac{1}{12}\pi - i\sin\dfrac{1}{12}\pi\right)$; *Jogaby*: $-\sqrt{2}-i\sqrt{6}$.

6) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^9}{(\sqrt{3}-i)^6}$; *Jogaby*: $8i$.

7) $(1-i)^7$; *Jogaby*: $8(1+i)$.

8) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^5$; *Jogaby*: $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

9) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$; *Jogaby*: 1.

10) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; *Jogaby*: $512(1-i\sqrt{3})$.

11) $(1+i)^{25}$; *Jogaby*: $4096(1+i)$.

49. Kökleriň ähli bahalaryny tapyň:

1) $z=\sqrt{-1}$; 2) $z=\sqrt[3]{i}$;

1) $z=\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{2}$

$k=0;\quad z_1=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=0+i=i.$

$k=1;\quad z_2=\cos\dfrac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}=-i.$

2) $z=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}}=\cos\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k}{3}.$

$k=0;\quad z_1=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i.$

$k=1;\quad z_2=\cos\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k}{3}=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}=$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

$k = 2; \quad z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$

3) $\sqrt[4]{i}$; 4) $\sqrt[3]{-1}$; 5) $\sqrt[4]{-4}$; 6) $\sqrt[5]{-1+i}$; 7) $\sqrt[6]{2-2\sqrt{3}}$.

Jogaby:

3) $u_k = \cos\frac{\pi + 4\pi k}{8} + i\sin\frac{\pi + 4\pi k}{8} = 0, 1, 2, 3.$

4) $u_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3} = 0, 1, 2;$ $u_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} =$
$= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad u_1 = -1{,}0; \quad u_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$

5) $u_0 = 1 + i, u_1 = -1 + i, \qquad u_2 = -1 - i, u_3 = 1 - i.$

6) $u_k = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi + 8\pi k}{20} + i\sin\frac{3\pi + 8\pi k}{20}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

7) $u_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi + 6\pi k}{18} + i\sin\frac{5\pi + 6\pi k}{18}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

50. Aşakdaky kompleks sanlary görkezijili görnüşinde ýazyň:

1) $1 + i$; 5) -3;
2) $-\sqrt{3} - i$; 6) $2i$;
3) $-1 - i$; 7) $\sqrt{3} - i$;
4) $-1 - i\sqrt{3}$; 8) $\frac{2 - 2i}{1 + i\sqrt{3}}$;

Çözülişi:

1) $r = \sqrt{2}, \quad \arg z = \frac{\pi}{2}$. Onda $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.

2) $r = 2, \quad \arg z = \frac{7\pi}{6}$. Onda $-\sqrt{3} - i = 2\, e^{i7\pi/6}$.

Jogaby: 3) $\sqrt{2}\, e^{5\pi i/4}$; 4) $2e^{4\pi i/3}$; 5) $3e^{\pi i}$; 6) $2e^{\pi i/2}$; 7) $2e^{11\pi i/6}$;
8) $\sqrt{2}\, e^{17\pi i/12}$.

§ 4. Kesgitleýjiler

4.1. Kesgitleýjiler. Ikinji we üçünji tertipli kesgitleýjiler. Kesgitleýjileriň häsiýetleri

Goý, bize aşakdaky çyzykly deňlemeler sistemasy berlen bolsun

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

x_1 tapmak üçin sistemanyň birinji deňlemesini a_{22}, ikinji deňlemesini bolsa a_{12} köpeldeliň, soňra olary agzama-agza goşup alarys:

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, x_1 = b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}.$$

bu ýerden

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

x_2 tapmak üçin sistemanyň birinji deňlemesini a_{21}, ikinji deňlemesini bolsa a_{11} köpeldeliň, soňra olary agzama-agza goşup alarys:

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, x_2 = b_2\, a_{11} - b_1\, a_{21}$$

bu ýerden

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

x_1 we x_2 üçin tapylan aňlatmalaryň ikisiniň hem maýdalawjysynyň berlen deňlemeleriň näbellileri koeffisiýentlerinden düzülen aňlatmalardygyny, sanawjylarynyň bolsa maýdalawjydan x_1 we x_2 koeffisiýentlerini degişlilikde, b_1 we b_2 azat agzalar bilen çalşyrylyp alnandygyny görýäris.

Sistemanyň koeffisiýentleriniň ýerleşiş tertibini üýtgetmezden tablisa düzeliň:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Kwadrat görnüşinde ýerleşdirilen dört sandan ybarat bolan tablisa degişli $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ tapawuda ikinji tertipli kesgitleýji diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Görşümiz ýaly, bu kesgitleýji iki setirden we iki sütünden ybarat. a_{ik} $(i,\ k = 1,2)$ sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. a_{ik} element i-nji setiriň we k-njy sütüniň kesişýän ýerinde ýerleşýär. a_{11} we a_{22} elementleriň emele getirýän diagonalyna esasy diagonal, a_{12} we a_{21} elementleriň emele getirýän diagonalyna bolsa kömekçi diagonal diýilýär. Ikinji tertipli kesgitleýji onuň esasy diagonallardaky elementleriniň köpeltmek hasylyndan kömekçi diagonaldaky elementleriň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir.

51. Aşakdaky kesgitleýjileri hasaplaň:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22,$$

$$\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & 3\cos\alpha \\ 2\cos\alpha & 3\sin\alpha \end{vmatrix} = 6\sin^2\alpha - 6\cos^2\alpha = -6\cos 2\alpha.$$

Dokuz elementden kwadrat tablisa düzeliň:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Kwadrat görnüşinde ýerleşdirilen dokuz elementden ybarat bolan tablisa degişli

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$
$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

sana üçünji tertipli kesgitleýji diýilýär we şeýle belgilenýär

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. Bu ýerde hem i, k indeksler degişlilikde a_{ik} elementiň haýsy setirde we haýsy sütünde ýerleşýändigini görkezýär. Üçünji tertipli kesgitleýjileriň üç setiri we üç sütüni bolýar. Kesgitleýjileri hasaplamagyň usullaryndan iki sanysyny görkezeliň.

1-nji usul. Kesgitleýjiniň birinji we ikinji sütünleri sag tarapdan täzeden ýazmak bilen aşakdaky tablisany düzýäris:

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ - \quad - \quad - \end{array}$$

Üstünden tutuş çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny «+» alamatlary bilen, punktir çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny «–» alamatlary bilen almak arkaly üçünji tertipli kesgitleýjini taparys.

2-nji usul. Üçünji tertipli kesgitleýji aşakdaky usul boýunça hasaplanýar:

a) goşmak alamatlylar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

b) aýyrmak alamatlylar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Kesgitleýjiniň bahasynyň her bir goşulyjysynda kesgitleýjidäki islendik setirden we sütünden bir elementiň bardygyny görkezýär.

52. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 -$$

$$-4 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 5 = -12 - 10 + 8 - 4 - 16 - 15 = -49.$$

4.2. Kesgitleýjileriň esasy häsiýetleri

Kesgitleýjileriň birnäçe täsin häsiýetleri bolup, olary ýerlikli ulanmaklyk kesgitleýjileri hasaplamagy ýeňilleşdirýär. Biz şol häsiýetleriň esasylaryny 3-nji tertipli kesgitleýjilerde düşündirmek bilen çäklenjekdiris.

Kesgitleýjini transponirlemek kesgitleýjiniň ululygyny üýtgetmeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Eger kesgitleýjiniň islendik iki setiriniň ýa-da sütüniniň ýerini çalşyrsak, onda onuň ululygynyň diňe alamaty üýtgeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Özara deň iki setiri ýa-da sütüni bolan kesgitleýji nola deň.

Meselem: $a_{i1} = a_{i2} = b_i$, $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & a_{13} \\ b_2 & b_2 & a_{23} \\ b_3 & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da bir sütüniniň ähli elementleriniň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda ony kesgitleýjiniň daşyna çykarmak bolar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Tutuş bir setiri ýa-da bir sütüni noldan ybarat bolan kesgitleýji nola deň:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Iki setiriniň ýa-da iki sütüniniň elementleri proporsional bolan kesgitleýji nola deň. Mysal üçin, $a_{i1} = b_i$; $a_{i2} = kb_i$ bolsa, onda ol nola deňdir, ýagny

$$\begin{vmatrix} b_1 & kb_1 & a_{13} \\ b_2 & kb_2 & a_{23} \\ b_3 & kb_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Kesgitleýjiniň m-nji setiriniň ýa-da sütüniniň her bir elementi iki goşulyjynyň jeminden ybarat bolsa, onda ol şol tertipdäki iki kesgitleýjiniň jemine deňdir, olaryň birinjisiniň m-nji setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri şol goşulyjylaryň birinjisinden ybarat, ikinjisiniň m-nji setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri şol goşulyjylaryň ikinjisinden ybarat, galan setirleriň elementleri üç kesgitleýjilerde hem bir meňzeşdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Kesgitleýjiniň setiriniň ýa-da sütüniniň her bir elementiniň üstüne beýleki setiriniň ýa-da sütüniniň degişli elementlerini käbir k sana köpeldip goşsak onda kesgitleýjiniň ululygy üýtgemeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu häsiýetleriň dogrulygyna göz ýetirmek üçin kesgitleýjileri hasaplamak ýeterlikdir.

Kesgitleýjileri hasaplaň:

53. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}.$

Çözülişi:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 1 = 6 + 5 = 11.$$

54. $\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 2.

55. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: – 8.

56. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 1.

57. $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: – 4*x*.

58. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 1.

59. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Çözülişi:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot3+2\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1-2\cdot2\cdot2-3\cdot3\cdot1-2\cdot1\cdot1=$$
$$=12++2+6-8-9-2=20-19=1.$$

60. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: –3.

61. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 10 & 3 & 16 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: – 4.

62. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 0.

63. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: –20.

64. $\begin{vmatrix} a & a & x \\ a & x & a \\ x & a & a \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $3a^2x - x^3 - 2a^3$.

65. $\begin{vmatrix} i & i & 1 \\ -i & i & 1 \\ i & -1 & i \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 0.

4.3. Kesgitleýjini onuň setiriniň we sütüniniň elementleri boýunça dagatmak

66. Dördünji tertipli kesgitleýjide a_{23} minoryny tapyň:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

67. Üçünji sütün boýunça dagadyp, kesgitleýjini hasaplaň:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2 \cdot (3 - 4 + 0 + 1 - 2 - 0) + 0 - 1 \cdot (6 + 0 + 2 - 1 - 8 - 0) =$$
$$= -2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) = 4 + 1 = 5.$$

68. Ikinji sütün boýunça dagadyp, kesgitleýjileri hasaplaň:

a) $\begin{vmatrix} 2 & a & 1 & 3 \\ 1 & b & -1 & 2 \\ -2 & c & -1 & 1 \\ 4 & d & -1 & 4 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $-5a + 24b - 9c - 10d$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & -1 \\ 2 & b & -2 & 1 \\ -2 & c & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $4a + b + 3c - 6d$.

69. Üçünji setir boýunça dagadyp, kesgitleýjileri hasaplaň:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ x & y & z & t \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $-x - 10y + 3z + 3t$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ x & y & z & t \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $-7x - 2y + 8z - 2t$.

70. Setir ýa-da sütün boýunça dagadyp, kesgitleýjileri hasaplaň:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: –28.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: –30.

ç) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 0.

d) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55}$.

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$. *Jogaby*: $(-1)^{\frac{5(5-1)}{2}} a_{15} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} \cdot a_{51}$.

4.4. *n*-nji tertipli kesgitleýjiler we olaryň hasaplanylyşy

Kesgitleme. A matrisanyň n-nji tertipli kesgitleýjisi diýip, onuň her bir setirinden we sütüninden diňe bir element alnyp, olaryň köpeltmek hasyllary olara girýän elementleriň birinji indeksleri 1, 2, ... , n tertipde ýerleşdirilende ikinji indeksleriniň emele getirýän orunçalşyrmalarynyň sany jübüt bolanda (+) alamaty bilen, täk bolanda (–) alamaty bilen alnyp jemlenende alnan sana aýdylýar.

n-nji tertipli kesgitleýji aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nl} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4.5. Kesgitleýjini setiriň we sütüniň elementleri boýunça dagatmak

Bu temany düşündirmek hem-de netijeleri gysgaça formulirlemek üçin algebraik doldurgyç diýlen düşünjäni girizeliň. Belli bolşy ýaly:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}. \qquad (1)$$

Bu deňligiň sag böleginden haýsy-da bolsa bir elementi, meselem a_{13} elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}$ tapawudy alarys. a_{12} elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{23}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{33}$ tapawudy alarys. Ýokardaky formulanyň sag böleginden islendik elementi ýaýyň daşyna çykarsak, ýaýyň içinde galýan bu tapawuda (kesgitleýjä) ýaýyň daşyna çykarylan elementiň algebraik doldurgyjy diýilýär. Meselem, a_{12} elementiň algebraik doldurgyjy $a_{23}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{33}$ bolýar we ş.m.

4. sargyt № 1573

a_{ik} elementiň algebraik doldurgyjyny A_{ik} bilen belgiläliň, onda a_{13} elementiň algebraik doldurgyjy A_{13}, a_{22} elementiň algebraik doldurgyjy A_{22} bolýar. (1) formulada haýsy-da bolsa bir setiriň elementlerini, meselem ikinji setiriň elementlerini ýaýyň daşyna çykaryp, alarys:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\,(a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{33}) + a_{22}\,(a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}) +$$

$$+ a_{23}\,(a_{12} \cdot a_{31} - a_{32} \cdot a_{11}).$$

Indi ýokardaky deňligi algebraik doldurgyçlar arkaly ýazalyň:

$$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

Umuman, islendik setiriň elementleri üçin aşakdaky formulany ýazyp bilýäris:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}.$$

Islendik sütüniň elementleri üçin aşakdaky formulany ýazyp bilýäris:

$$\Delta = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + a_{3k} \cdot A_{3k}.$$

n tertipli kesgitleýji üçin hem aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}. \qquad (2)$$

ýa-da

$$\Delta = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \ldots + a_{nk} \cdot A_{nk}. \qquad (3)$$

Netije. Kesgitleýjiniň ululygy onuň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini olaryň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jemine deňdir.

(2) we (3) formulalara setiriň we sütüniň elementleri boýunça *kesgitleýjiniň dargamasy* diýilýär.

Indi islendik tertipli kesgitleýjiniň elementi üçin algebraik doldurgyjyň tapylyşyny görkezeliň.

Haýsy-da bolsa bir a_{ik} elementi alyp, onuň ýerleşen setiriniň we sütüniniň üstüni çyzalyň. Galan elementleriň emele getirýän kesgitleýjisine şol a_{ik} elementiň **minory** diýilýär. Minoryň tertibi berlen kesgitleýjiniň tertibinden bir san kiçidir. a_{ik} elementiň *minory* M_{ik} bilen belgilenýär. $(-1)^{i+k} M_{ik}$ sana bolsa a_{ik} elementiň *algebraik doldurgyjy* diýilýär we A_{ik} bilen belgilenýär. Diýmek,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \qquad (4)$$

Meselem, ýokarda alnan a_{32} elementiň A_{32} algebraik doldurgyjy aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{23}.$$

Kesgitleýjiniň elementiniň minory arkaly tapylan doldurgyjyň ýokarda kesgitlenen doldurgyç bilen gabat gelýändigini belläp geçeliň.

(2), (3) we (4) formulalar berlen kesgitleýjiniň tertibini şol kesgitleýjiniňkiden bir san kem bolan kesgitleýjiler bilen çalşyp hasaplamaga mümkinçilik berýär. Bu ýagdaý kesgitleýjileriň tertibi üçden uly bolanda giňden ulanylýar.

71. Aşakdaky kesgitleýjini ikinji tertipli kesgitleýjä getirip hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi: Berlen kesgitleýjä (2) formulany peýdalanyp, birinji setiriň elementleri boýunça dagadyp ýazalyň:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) - 2(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 3 \cdot 3) =$$

$$=4\,(4) - 2(-1) + 1 \cdot (-7) = 16 + 2 - 7 = 11.$$

72. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Çözülişi:

Üçünji setiri boýunça dagadyp, alarys:

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{3+1} M_{31} + 0 \cdot (-1)^{3+2} M^{32} + 0 \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + 1 \cdot (-1)^{3+4} M_{34} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+4} M_{34} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6-4) = -2.$$

Kesgitleýjileriň çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmekde we derňemekde peýdalanylýan ýene-de bir häsiýetine, üçünji tertipli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjide garalyň. Kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jeminiň nämä deňdigini tapalyň. Mysal üçin, ýokardaky kesgitleýjiniň ikinji setiriniň elementlerini üçünji setiriniň elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jemini tapalyň.

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix}; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

deňlikleri göz öňünde tutup alarys:

$$a_{21} \cdot A_{31} + a_{22} \cdot A_{32} + a_{23} \cdot A_{33} = a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0,$$

(kesgitleýjileriň üçünji häsiýetine görä nola deň bolýar). Şuňa meňzeşlikde islendik setir üçin

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + a_{i3} \cdot A_{j3} = 0, \quad (i \neq j).$$

Islendik sütün üçin

$$a_{1i} \cdot A_{1j} + a_{2i} \cdot A_{2j} + a_{3i} \cdot A_{3j} = 0, \quad (i \neq j)$$

boljakdygyna göz ýetirmegiň kynçylygy ýokdur. Islendik tertipli kesgitleýjiler üçin aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + ... + a_{in} \cdot A_{jn} = 0, \quad (i \neq j).$$

$$a_{1i} \cdot A_{1j} + a_{2i} \cdot A_{2j} + ... + a_{ni} \cdot A_{nj} = 0, \quad (i \neq j).$$

Diýmek, kesgitleýjiniň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi nola deňdir.

73. Bäşinji tertipli kesgitleýjini hasaplaň

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi: Bäşinji setiri 3-e köpeldip ikinji setire goşup, bäşinji setiri 4-e köpeldip dördünji setirden aýryp, alarys:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Bu kesgitleýjini diňe noldan tapawutly bir elementi bar bolan üçünji sütüni boýunça dagadalyň

$$d = -1 \cdot (-1)^{5+3} \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Alnan kesgitleýjini ýene-de özgerdeliň: Ikinji setiri ikä köpeldip birinji setire goşup, ikinji setiri üçe köpeldip üçünji setirden aýryp, ikinji setiri ikä köpeldip dördünji setirden aýryp alarys:

$$d = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 6 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

we ony birinji sütüni boýunça dagadalyň:

$$d = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix},$$

bu kesgitleýjini üçünji setir boýunça dagadyp hasaplalyň :

$$d = 36 \cdot \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -20 \end{vmatrix} - (-33) \cdot \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \cdot \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 \cdot (-72) - (-33) \cdot (-104) + (-24) \cdot (-208) = -1032.$$

Eger kesgitleýjide esasy diagonalyň bir tarapyndaky ähli elementleri nol bolsa onda bu kesgitleýjiniň ululygy esasy diagonalda duran elementleriň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjä Wandermondyň kesgitleýjisi diýilýär.

Wandermondyň kesgitleýjisiniň ululygy ähli dürli $a_i - a_j$ $(1 \le j < i \le n)$ tapawutlaryň köpeltmek hasylyna deňdir.

Hakykatdan hem $n = 2$ bolanda $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$

Goý, $n - 1$ tertipli Wandermondyň kesgitleýjileri üçin subut edilen bolsun. D kesgitleýjini aşakdaky ýaly özgerdeliň:

n-nji (soňky) setirinden a_1-e köpeldilen (n – 1)-nji setiri aýralyň, soňra (n – 1)-nji setirden a_1-e köpeldilen (n – 2)-nji setiri aýralyň we ş.m., soňunda 2-nji setirden a_1-e köpeldilen 1-nji setiri aýralyň. Onda alarys:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Soňky kesgitleýjini birinji sütün boýunça dagatsak we umumy köpeldijileri kesgitleýjiniň daşyna çykarsak, onda alarys:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Soňky köpeldiji (n – 1) tertipli Wandermondyň kesgitleýjisidir. Diýmek

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1)\cdot \prod_{2 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Ýokardaky ýaly subut edip bolar:

$$d = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ýokarda kesgitleýjini setiri ýa-da sütüni boýunça dagadypdyk. Kesgitleýjini birnäçe setiri ýa-da sütüni boýunça dagatmak bolýar. Bu umumylaşdyrma Laplasyň teoremasy diýilýär.

Teorema (Laplas). Goý, n tertipli kesgitleýjide k setir (ýa-da k sütün) saýlanan bolsun ($1 \le k \le n - 1$). Onda saýlanan k setirde (ýa-da sütünde) saklanýan ähli k tertipli minorlaryň olaryň algebraik dolduryjylaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi d' kesgitleýjiniň bahasyna deňdir.

Mysallar

74.

$$d=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & a_n^{n-1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_n^2 & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_n & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{k+1},k+1 & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,k+1} & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

75. Hasaplaň

$$d=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Nollary saklaýan birinji we üçünji sütünler boýunça dagadalyň:

$$d=(-1)^{1+3+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=(-8)\cdot(-20)-(-10)\cdot(-62)-7\cdot 87=-1069.$$

76. Kesgitleýjileri hasaplaň:

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & & & \\ -2 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Çözülişi: a) kesgitleýjiniň üçünji setirine ikinji setiri goşup alarys:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad -2 \quad 2 \quad 4$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -7 & -11 & 8 \\ 0 & 12 & 13 & 13 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -22 & -17 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -11 & -8 \\ 12 & 13 & 13 \\ -22 & -17 & -17 \end{vmatrix} \quad -1 \quad -1$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -8 \\ -1 & 0 & 13 \\ -35 & 0 & -17 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 13 \\ -35 & 17 \end{vmatrix} = 3\cdot(17+65) = 246.$$

$$b)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad -1 \quad -2$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xleftarrow{\;-2\;} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

77. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 3.

78. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 6.

79. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 18.

80. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 20.

81. $\begin{vmatrix} 13 & 15 & 14 & 13 \\ 22 & 23 & 18 & 18 \\ 7 & 7 & 6 & 5 \\ 26 & 30 & 29 & 25 \end{vmatrix}$. *Jogaby:* 26.

82. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 19 & 13 \\ 3 & 11 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 0.

83. $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 5 & 9 \\ 9 & 15 & 9 & 15 \\ 13 & 22 & 13 & 21 \\ -17 & 3 & 6 & 17 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 192.

84. $\begin{vmatrix} 27 & 20 & 13 & 46 \\ 44 & 64 & -20 & 45 \\ 40 & 21 & -13 & -55 \\ 55 & 40 & 24 & 84 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 1.

85. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 7 & -3 & 7 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$. *Jogoby*: – 37.

86. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 & 6 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & -8 & 1 \\ 10 & -2 & -4 & 7 & 7 \\ -7 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. *Jogoby*: – 43.

87. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 3 & 7 & -2 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. *Jogaby*: 98.

88. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Beýlekileriň ählisinden birinji setiri aýyrýarys:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Birinji sütünden a_1-x, ikinjiden a_2-x, …, n-njiden a_n-x tapawutlary daşyna çykarýarys:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$\frac{a_1}{a_1-x}=-1+\frac{x}{a_1-x}$ goýarys we ähli sütünleri birinjä goşarys:

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right).$$

89. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$

D_n kesgitleýjä $x_1, \ldots, x_{n-1}$- den bagly bolan, koeffisiýentleri bilen x_n bir näbelliden köpagza hökmünde seredip, ol $x_n = x_1$, $x_n = x_2$, …, $x_n = x_{n-1}$ ýagdaýynda nola öwrülýändigini we şonuň üçin $x_n - x_1$, $x_n - x_2$, …, $x_n - x_{n-1}$ tapawutlara bölünýändigini görýäris.

Bu ähli köpeldijiler özara ýönekeý (çünki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ algebra taýdan özbaşdak). Diýmek, D_n olaryň köpeltmek hasyllaryna bölünýär,

$$D_n = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

D_n iň soňky setiri boýunça goýup, ol x_n özgelere garanda $n - 1$ dereje köpagza bolup durýandygyny görýäris, üstesine-de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ näbellilerden x_n^{n-1} ýagdaýynda koeffisiýent D_{n-1} Wandermondyň kesgitleýjisine deň; çünki iň soňky deňligiň sag böleginde ýaýlaryň köpeltmek hasyllary 1 koeffisiýent bilen x_n^{n-1} düzýär, onda $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ köpagza x_n düzenok we deňligiň iki böleginde x_n^{n-1} ýagdaýynda koeffisiýentleri deňläp, $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ alarys, ondan $D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_n - 1)$. n-iň $(n - 1)$-e çalşylmagy bilen bu deňligi ulanyp, alarys:

$$D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Bu aňlatmany D_{n-1} üçin geçenki aňlatmada D_n üçin goýarys. Bu pikiri dowam edip, biz ahyry $x_2 - x_1$ köpeldijini bölüp aýyrarys, soňra Wandermondyň kesgitleýjisiniň birinji derejesine geleris $D_1 = 1$.

Şeýlelikde,

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}) = \\ = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

90. n-nji derejeli kesgitleýjini hasaplamaly:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Birinji setir boýunça ýerleşdirip, rekurent gatnaşygy taparys:

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ deňlemäniň $\alpha = 2$, $\beta = 3$ kökleri bar.

$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, bu ýerde $C_1 = \dfrac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha-\beta)}$, $C_2 = -\dfrac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha-\beta)}$ formula boýunça:

$$D_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

91. $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & x_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \end{vmatrix}.$

Jogaby: $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23}) \dots (x_n - a_{n-1,n})$.

92. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$

Jogaby: $(-1)\dfrac{n(n-1)}{2} b_1 b_2 \dots b_n$.

93. $\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_2 & a_3 & a_n \\ -x_1 & \dots & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -x_2 & x_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_n \end{vmatrix}.$

Jogaby: $x_1 x_2 \dots x_n \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dots + \dfrac{a_n}{x_n}$.

94. $\begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix}.$

Jogaby: $a_1 b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1})$.

Görkezme. $D_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) D_{n-1}$ gatnaşygy almaly.

§ 5. MATRISALAR

5.1. Matrisalaryň üstünde amallar

Kesgitleme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

görnüşdäki sanlaryň tertipleşdirilen gönüburçly tablisasyna **matrisa** diýilýär.

Ykdysadyýetde matrisa mysal hökmünde islendik m sany setirli we n sany sütünli tablisa (meselem, dürli bölümiň işgärleriniň dürli wagtdaky ýerine ýetiren işleriniň mukdaryny görkezýän tablisa; pudagyň öndürýän önümlerine sarp edilýän resurslaryň mukdaryny görkezýän tablisa we ş.m.) seredip bolar.

A matrisanyň m sany setiri we n sany sütüni bar. Şol sebäpli oňa $m \times n$ ölçegli **gönüburçly matrisa** diýilýär. a_{ij} ($i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$) sanlara matrisanyň elementleri diýilýär. a_{ij} element i-nji setir bilen j-nji sütüniň kesişmesinde ýerleşýär. Matrisalar latyn elipbiýiniň baş harplary bilen belgilenýär. a_{ij} elementli, m setirli we n sütünli matrisa $A = \{a_{ij}\}$ $i=1,..., m, j = 1, ..., n$ görnüşde belgilener. Eger matrisa $1 \times n$ ölçegli bolsa (ýagny bir setiri, n sany sütüni bolsa), onda oňa **setir matrisa** diýilýär. Setir matrisalara mysal hökmünde $A = (a_1, a_2,..., a_n)$ görnüşdäki wektorlary getirip bolar. Eger matrisa $n \times 1$ ölçegli bolsa, onda oňa **sütün matrisa** diýilýär. Ol

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

görnüşde belgilener. $m \times n$ ölçegli gönüburçly A matrisanyň setirlerine $U^i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$, $(i = 1,2, ..., m)$ wektorlar hökmünde, sütünlerine bolsa

$$V^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ (j = 1,2 ,..., n)$$

görnüşdäki wektorlar hökmünde garap bolar.

Eger-de $m = n$ bolsa, onda A matrisa **kwadrat matrisa** diýilýär.

Eger matrisanyň hemme elementleri nola deň bolsa, onda oňa **nol matrisa** diýilýär we şeýle belgilenilýär:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) matrisada $m = n$ diýeliň. Eger $i \neq j$ bolanda $a_{ij} = 0$, $i = j$ bolanda $a_{ij} \neq 0$ bolsa, onda A matrisa **diagonal matrisa** diýilýär we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Eger (2) matrisada diagonal elementleriň hemmesi 1-e deň bolsa, onda bu marisa **birlik matrisa** diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Eger-de $a_{ij}=a_{ji}$ bolsa, onda A matrisa **simmetrik matrisa** diýilýär.

Eger-de $A = \{a_{ij}\}$ we $B = \{b_{ij}\}$ $i = 1,..., m, j = 1,..., n$ matrisalaryň degişli elementleri deň bolsa (ýagny, $a_{ij} = b_{ij}$), onda bu matrisalara deň diýilýär we $A = B$ görnüşde ýazylýar.

5.2. Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallar

Kesgitleme 1. $A = \{a_{ij}\}$ $i = 1,...,m, j = 1,..., n$ matrisany α sana köpeltmek diýip, netijede $\alpha A = \{\alpha a_{ij}\}$ $i = 1,..., m, j = 1,...,n$ matrisany berýan amala aýdylýar.

A we B matrisalary sana köpeltmek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. $1A = A$, $(-1)A = -A$, $0A = 0$. *(soňky deňligiň çep tarapyndaky* 0 *– san, sag tarapyndaky* 0 *– nol matrisadyr).*

2. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ *(assosiatiwlik – utgaşdyrma).*

3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(sanlara görä distributiwlik – paýlaşdyrma).*

4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(matrisalara görä distributiwlik – paýlaşdyrma).*

Eger A matrisanyň elementleri käbir pudagyň harytlarynyň her bir görnüşini öndürmekde ýerine ýetirilýän tehnologiki usullara sarp edilýän wagtlary görkezýän bolsa, onda bu matrisany α sana köpeltmekden alnan αA matrisanyň elementleri pudagyň harytlarynyň her bir görnüşiniň α sanysyny öndürmekde ýerine ýetirilýän tehnologiki usullara sarp edilýän wagtlary görkezer.

Kesgitleme 2. Ölçegleri deň bolan $A = \{a_{ij}\}$ we $B = \{b_{ij}\}$, $i = 1,..., m, j = 1,...,n$ matrisalaryň jemi diýip $C = \{C_{ij}\} = \{a_{ij}+b_{ij}\}$, $i = 1,...,m, j = 1,..., n$ (ýagny elementleri A we B matrisalaryň degişli elementleriniň jemi bolan) matrisa aýdylýar.

A we B matrisalaryň jemini tapmak amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

5. sargyt № 1573

1. $A + B = B + A$ *(jemiň kommutatiwligi – orun çalşyrma)*

2. $A + (B+C)=(A + B) + C$ *(assosiatiwlik – utgaşdyrma)*.

3. Islendik ölçegleri deň bolan A we B matrisalar üçin $A + X = B$ deňligi kanagatlandyrýan ýeke-täk X matrisa bardyr. Ol matrisa B we A matrisalaryň tapawudy diýilýär we $B – A$ görnüşde belgilenilýär. $A + X = 0$ deňlemäniň çözüwine A matrisanyň garşylykly matrisasy diýilýär we $(– A) = 0 – A$ görnüşde belgilenýär. $(– A) =\{a_{ij}\}$ bolýandygy görünýär.

Kesgitleme 3. Eger A matrisanyň sütünleriniň sany B matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolsa, onda bu matrisalara ylalaşykly matrisalar diýilýär. $A = \{a_{ij}\}$ $i = 1,...,m,$ $j = 1,...,n$ we $B = \{b_{ij}\}$, $i = 1,...,n,$ $j = 1,...,k$ ylalaşykly matrisalaryň köpeltmek hasyly diýip $m\times k$ tertipli, elementleri

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} +...+ a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}$$

(ýagny i – setirde we j – sütünde duran c_{ij} elementi A matrisanyň i – setiriniň elementleriniň B matrisanyň j – sütüniniň elementlerine degişlilikde köpeltmek hasyllarynyň jemine deň) deň bolan $C = AB =$ $= \left\{\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}\right\}$ matrisa aýdylýar.

$C = AB$ matrisanyň setirleriniň sany A matrisanyň setirleriniň sanyna, sütünleriniň sany bolsa, B matrisanyň sütünleriniň sany bilen gabat gelýär.

AB köpeltmek hasyla A matrisany B matrisa *çepden köpeltmek hasyl*, ýa-da B matrisany A matrisa *sagdan köpeltmek hasyl* diýilýär.

Umuman aýdylanda, $AB = BA$ kommutatiwlik deňligi matrisalaryň köpeltmek hasyly üçin mydama ýerine ýetenok (meselem, bu deňlik ylalaşykly däl matrisalar üçin ýerine ýetenok). Eger ol deňlik käbir A we B matrisalar üçin ýerine ýetýän bolsa, onda olara *kommutatiw matrisalar* diýilýär.

Eger A matrisa kwadrat matrisa bolsa, onda onuň n-nji derejesi diýip ony öz-özüne n gezek köpeltmekden alynýan, A^n görnüşde belgilenýän matrisa aýdylýar. Diýmek, $A^n = A.A. \ldots A.$ $A^0 = E$ hasap edilýär.

Matrisalaryň köpeltmek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. $AE = EA = A, A0 = 0A = 0$.

2. $(AB)C = A(BC)$, (assosiatiwlik).

3. $(A + B)C = AC+BC, A(B + C) = AB + AC$, (distributiwlik).

Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallar islendik tertipdäki matrisalar üçin dogrudyr. Şonuň üçin biz 3-nji tertipi kwadrat matrisalar üçin ýerine ýetirilýän amallary görkezeliň.

1) Matrisany k sana köpeltmek üçin bu matrisanyň hemme elementlerini k sana köpeltmek gerek:

$$ka = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

2) A we B matrisalary goşmak (aýyrmak) üçin bu matrisalaryň degişli elementlerini goşmaly (aýyrmaly):

$$A\pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{23}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

3) A matrisany B matrisa köpeltmek üçin A matrisanyň setirleriniň elementlerini B matrisanyň sütünleriniň degişli elementlerine köpeldip goşmaly:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

bu ýerde

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{31}$, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$, $c_{13} = a_{11}b_{13} + + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$,

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$, $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$, $c_{23} = = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$,

$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$, $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$, $c_{33} + a_{31}b_{13} + + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$.

Bu ýerde hem, umuman aýdylanda $AB \neq BA$ bolýandygy görünýär.

95. A we B matrisalar berlen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A+B$, $A-B$, $3A$, AB matrisalary tapmaly:

Çözülişi:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2+4 & 1-6+1 & 3+2+1 \\ 4-0-4 & 2+0-1 & 6-0-1 \\ -2-2+12 & -2+6+3 & -3-2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 8 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Matrisalaryň transponirlenilişi

Kesgitleme 4. A matrisanyň setirlerini sütünleri bilen çalyşsak, onda emele gelen matrisa A matrisa *transponirlenen matrisa* diýilýär. Matrisa transponirlenen matrisany tapmak amalyna matrisany transponirlemek amaly diýilýär. Berlen A matrisa transponirlenen matrisa A^T bilen belgilenilýär. Şeýlelikde, eger $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$

bolsa, onda $A^T=\{a_{ji}\}$ $j=1,...,m,$ $i=1,...,n$ bolar. Transponirlemek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. $(A^T)^T = \text{A}.$

2. $(\alpha A)^T = \alpha\ AT,\ \alpha\ R.$

3. $(A+B)^T = A^T + B^T.$

4. $(AB)^T = A^T B^T.$

96. Amallary ýerine ýetiriň:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

Çözülişi:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -2 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

97. Eger $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ we $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ berlen bolsa, onda

$AB = \{c_{ij}\}$ matrisanyň c_{21}elementini tapyň:

$$c_{21} = 6\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 24 + 3 + 2 + 2 = 31.$$

98. Matrisalaryň köpeltmek hasylyny tapyň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Çözülişi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+(-2)\cdot 1+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1+(-3)\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ -2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} 1\cdot 3+2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot(-2)+(-3)\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ -2\cdot 3+1\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 1 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot(-1)+(-3)\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ -2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 1 \end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2-2+2 & 3-4-2+1 & 1-2-2+1 \\ 4+1-3-2 & 6-2-3-1 & 2-1-3-1 \\ -4+1-3-2 & -6-2+2+1 & -2-1+2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -8 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisalaryň köpeltmek hasylyny tapyň:

99. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}$.

100. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

101. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 15 & -12 \\ 36 & -30 \end{pmatrix}$.

102. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 4 & 18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

103. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

104. $(2\ \ 1\ \ -3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $(5\ \ -15\ \ -23)$.

105. $(2\ \ 2\ \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: (12).

106. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 10 & 14 & 12 \\ 14 & 14 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

107. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 23 & 22 & 28 \\ 0 & -7 & -8 \\ -4 & -11 & -8 \end{pmatrix}$.

108. $\begin{pmatrix} n & -n & n \\ 1 & 1 & 1 \\ -n & n & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n & 1 & n \\ n & 1 & -n \\ -n & 1 & n \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -3n^2 & n & 3n^2 \\ -n & 3 & n \\ 3n^2 & -n & 3n^2 \end{pmatrix}$.

109. Amallary ýerine ýetiriň:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{10}$; ç) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Jogaby: a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ç) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

110. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisa berlen bolsun. $AB = BA$ şert ýerine ýeter ýaly, B matrisalaryň ählisini tapyň. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a \end{pmatrix}$

111. Eger A we B matrisalar üçin AB we BA köpeltmek hasyllar kesgitlenen we $AB = BA$ bolsa, onda A we B – kwadrat matrisalar we olaryň tertibiniň deňdigini subut etmeli.

112. Eger A matrisada

a) i we j setirleriň orny çalşyrylsa;
b) i setire j sütüni k sana köpeldilip goşulsa;
ç) B matrisanyň i we j sütünleriniň orny çalşyrylsa;
d) B matrisanyň i sütünine j sütüni k sana köpeldilip goşulsa, onda A we B matrisalaryň köpeltmek hasyly nähili üýtgär?

Jogaplary a) i we j setirler ornuny çalşar; b) i setire k sana köpeldilen j setir goşular; ç) i we j sütünler ornuny çalşar; d) i sütüne k sana köpeldilen j setir goşular.

113. Eger A we B matrisalar – bir tertipli kwadrat matrisalar we $AB \neq BA$ bolsa, onda

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 - b^2 = (A - B)(A + B)$.

5.4. Ters matrisa

Ters matrisa düşünjesi kwadrat matrisalar köplügi üçin kesgitlenýär. Goý, A kwadrat matrisa berlen bolsun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$AB = BA = E$ bolsa, onda B matrisa A matrisa *ters bolan matrisa* diýilýär we A^{-1} bilen belgilenýär. Onda

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

bu ýerde E birlik matrisa.

A matrisanyň ters matrisasynyň bolmagy üçin hökmany $\Delta(A) \neq 0$ bolmaly.

Kesgitleýjisi nola deň bolmadyk kwadrat matrisa *aýratyn matrisa* diýilýär.

A matrisanyň A^{-1} ters matrisasy aşakdaky formula arkaly tapylýar:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ters matrisanyň käbir häsiýetleri:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$.

114.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisanyň A^{-1} ters matrisasyny tapmaly.

$$\Delta = \det A \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 12 + 24 - 3 = -6 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$, diýmek, A matrisanyň ters matrisasy bar.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2+12 = 14,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+9) = -10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (3-8) = 5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-6 = -4,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9-4 = -13,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6-2) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1.$$

Onda

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} – matrisanyň dogry tapylandygyny bilmek üçin $AA^{-1} = E$ şertiň ýerine ýetýändigini barlaýarys.

$$AA^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 28+5-39 & 42+10-52 & 28-15-13 \\ -20-4+24 & -30-8+32 & -20+12+8 \\ -4+1+3 & -6+2+4 & -4-3+1 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Diýmek, A^{-1} matrisa dogry tapylypdyr.

115. Matrisanyň setirlerini özgerdip, ters matrisany tapyň.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&3&2\\2&2&4\end{pmatrix}.$$

Çözülişi:

$$-2 \quad -3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\3&3&2&0&1&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)\to \quad -2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-4&-3&1&0\\0&-2&0&-2&0&1\end{array}\right)\to$$

$$2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&-4&1&1&-2\\0&-2&0&-2&0&1\end{array}\right)\to \quad -\frac{1}{8} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&-4&1&1&-2\\0&0&-8&0&2&-3\end{array}\right)\to$$

$$-2 \quad 4 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&-4&1&1&2\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{array}\right)\to$$

$$-2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{array}\right).$$

Şeýlelikde

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\1&0&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}.$$

Barlag:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&\frac{2}{4}\\1&0&\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\3&3&2\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Aşakdaky matrisalaryň ters matrisasyny tapyň:

116. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

117. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

118. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1,5 & 1 \end{pmatrix}$.

119. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

120. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,6 & 2,4 & 2 \\ -0,2 & 0,8 & 1 \end{pmatrix}$.

121. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -18 & 32 & -13 \end{pmatrix}$.

122. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -17 & 8 & 11 \\ 8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

123. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -3 & 26 & 31 \\ 3 & -25 & -30 \\ 2 & -16 & -19 \end{pmatrix}$.

124. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

125. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

126. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 33 & -6 & -26 & 17 \\ 6 & -1 & -5 & 3 \\ -25 & 5 & 20 & -13 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

127. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -2 & -7 \\ 3 & 7 & -2 & -5 \\ -2 & -7 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

128. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$.

129. $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrisaly deňlemeleri çözüň:

130. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Çözülişi:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = 5 \qquad A_{12} = -2 \qquad A_{21} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 & -15+6 & 0-3 \\ -2-1 & 6-2 & 0+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

131. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

132. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 20 \\ -1 & -3 & 28 \\ -2 & -1 & 17 \end{pmatrix}$.

133. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -15 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -10 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Jogaby: $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 20 & 25 & -1 \end{pmatrix}$.

134. $X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} -10 & 17 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$.

135. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 9 & -6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$.

136. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 7 & 2 & 3\\ 10 & -1 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$ *Jogaby*: $\begin{pmatrix}22 & 8 & -27\\ 25 & 12 & -30\\ 51 & 21 & -62\end{pmatrix}.$

137. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$ *Jogaby*: $\begin{pmatrix}-9 & 5 & 4\\ -9 & 4 & 4\end{pmatrix}.$

138. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$ *Jogaby*: $\begin{pmatrix}-7 & -13\\ -10 & -19\end{pmatrix}.$

139. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

Jogaby: $\begin{pmatrix}3 & 7 & -6\\ 1 & 7 & -5\\ 1 & 7 & -5\end{pmatrix}.$

5.5. Matrisanyň minory we rangy

Kesgitleme. Matrisanyň birnäçe setiriniň we sütüniniň üstüni çyzyp, galan elementleriniň ornuny üýtgetmezden alnan kesgitleýjä *A matrisanyň minory* diýilýär.

Kesgitleme. Matrisanyň noldan tapawutly iň uly minorynyň tertibine *A matrisanyň rangy* diýilýär. Mysal üçin,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 5\\ 7 & 1 & 6 & 3\\ 6 & 8 & 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Matrisanyň üçünji tertipli minorlaryň hemmesi nola deň, emma ikinji tertipli minorlaryň içinde noldan tapawutlanýany bar, meselem $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Diýmek, A matrisanyň rangy 2-ä deňdir. A matrisanyň rangyny $r(A)$ diýip belgileýäris. Biziň mysalymyzda $r(A)=2$

140.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\\0&0\end{pmatrix},\quad 2)\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix},\qquad 3) C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Birinji matrisanyň rangy $r(A) = 2$. Ikinji matrisanyň rangy $r(B) = 1$. Üçünji matrisanyň rangy $r(C) = 3$.

Teorema. $m \times n$ ölçegli matrisanyň k tertipli minorynyň hemmesi nola deň bolsa, onda $k + 1$ tertipli minorlarynyň hem hemmesi nola deňdir.

Matrisanyň rangyny tapmak üçin bu teoremadan ugur alyp, aşakdaky kadany gollamak bolar.

1. Kiçi tertipdäki minordan uly tertipdäki minora geçmeli.
2. Eger matrisanyň k tertipli minorynyň biri noldan tapawutly bolsa, onda şol minoryň daşyna agyl bolan setirleri we sütünleri çyzmak arkaly düzülýän $k + 1$ tertipli minorlara garamaly. Eger şonda $k + 1$ tertipli minorlaryň hemmesi nola deň bolsa, onda matrisanyň rangy $r = k$ bolar. Eger $k + 1$ tertipli minorlaryň biri noldan tapawutly bolsa, onda ýokardaky usuly $k + 1$ tertipli minora ulanyp, $k + 2$ tertipli minorlaryň nola deňligine ýa-da deň däldigine garamaly we ş.m. Biziň ýaňyja rangyny tapan matrisamyzda bu aýdylanlary düşündireliň. $\begin{vmatrix}3&4\\7&1\end{vmatrix}$ minoryň daşyna agyl bolan setirler we sütünler arkaly üçünji tertipli minorlary hasaplalyň.

$$\begin{vmatrix}3&4&2\\7&1&6\\6&8&4\end{vmatrix}=0;\qquad \begin{vmatrix}3&4&5\\7&1&3\\6&8&10\end{vmatrix}=0$$

diýmek, matrisanyň rangy $r = 2$.

Matrisany elementar özgertmek.

Berlen matrisanyň: *a)* setirleriniň ýa-da sütünleriniň ornuny çalşyrmak bilen; *b)* setirleriniň ýa-da sütünleriniň ähli elementlerini nola deň bolmadyk sana köpeltmek bilen; *c)* bir setiriň ýa-da sütüniň ähli elementlerini bir sana köpeldip, başga bir setiriň ýa-da sütüniň degişli elementlerine goşmak bilen täze matrisa alynsa, berlen matrisada elementar özgertmeler geçirildi diýilýär. Bu iki matrisanyň ranglarynyň deňdigini subut etmek bolar. Ekwiwalent matrisalaryň ranglarynyň deňligi matrisanyň rangyny tapmagyň oňat ýoluny salgy berýär.

141. Matrisanyň rangyny kesgitlemeli.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad r = 3.$$

142. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisanyň A^{-1} ters matrisasyny tapyň.

Çözülişi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3;$$

$$A_{11} = 2, \qquad A_{12} = -3, \qquad A_{21} = -3, \qquad A_{22} = 6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

143. Matrisanyň rangyny kesgitläň:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 15 & 4 \\ -9 & 13 & 4 & 17 & 2 \end{pmatrix}.$$

Çözülişi: Berlen matrisada noldan tapawutly elementler bar. Şol sebäpli matrisanyň rangy 1-den kiçi däl.

$d = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 49 + 3 = 52 \neq 0$. Onda matrisanyň rangy 2-den kiçi däl.

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ -9 & 13 & 4 \end{vmatrix} \quad -2 \quad -1 \quad = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -13 & 13 & 0 \\ -16 & 16 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & 15 \\ -9 & 13 & 17 \end{vmatrix} \quad -7 \quad 9 = \begin{vmatrix} 0 & -52 & -104 \\ 1 & 7 & 15 \\ 0 & 76 & 152 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -52 & -104 \\ 76 & 152 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ -9 & 13 & 2 \end{vmatrix} \quad -7 \quad 9 \quad \begin{vmatrix} 0 & -52 & -26 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 76 & 38 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -52 & -26 \\ 76 & 38 \end{vmatrix} =$$

$$= 26 \cdot 38 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Şeýlelikde, d minoryň gyrasynyň jäheklenen minorlarynyň ählisi nola deň. Diýmek, berlen matrisanyň rangy 2-ä deň.

144. Elementar özgertmeleriň kömegi bilen matrisanyň rangyny tapyň:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Çözülişi: Elementar özgertmeleriň kömegi bilen berlen matrisany trapesiýa görnüşine getireliň.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad -1 \quad -4 \quad -1 \quad = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -19 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -19 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad -4 \quad -1 \quad = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Şeýlelikde, matrisanyň rangy 3-e deň.

Matrisanyň rangyny tapyň:

145. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -5 \\ -39 & 13 & 26 & 65 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 2.

146. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & -5 \\ -1 & 8 & 15 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 2.

147. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 4.

148. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 3.

149. $\begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -10 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 2.

150. $\begin{pmatrix} 25 & 17 & -10 \\ 10 & 12 & -44 \\ -10 & 6 & 20 \\ 10 & 3 & 24 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: 3.

151. $a_1, a_2, \ldots, a_7$ sanlara görä

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangyny tapyň.

Jogaby: Eger $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_7 = 0$ bolsa, onda $r(A) = 0$; eger birinji setirde noldan tapawutly elementler bar we $a_5 = a_6 = a_7 = 0$ bolsa ýa-da soňky sütünde noldan tapawutly elementler bar we $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ bolsa, onda $r(A) = 1$; eger birinji setirde we soňky sütünde noldan we a_4 - den tapawutly elementler bolsa, onda $r(A) = 2$.

152. m sana görä $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ matrisanyň rangyny tapyň.

Jogaby: Eger $m = 1$ bolsa, onda $r(A)=1$; eger $m = -2$ bolsa, onda $r(A) = 2$; eger $m \neq 1$ we $m \neq -2$ bolsa, onda $r(A) = 3$.

153. Eger matrisa bir setir (ýa-da bir sütün) goşulsa, onda onuň rangy üýtgemeýändigini ýa-da 1-e üýtgeýändigini subut ediň.

154. Eger A matrisanyň gapdalyndan A matrisanyň setirleriniň sany bilen deň B matrisanyň her bir sütüni ýazylanda A matrisanyň rangy üýtgemese, onda A matrisa B matrisanyň ähli sütünleri gapdalynda ýazylanda A matrisanyň rangynyň üýtgemeýändigini subut etmeli.

155. Eger A matrisanyň gapdalyndan A matrisanyň setiri bilen deň B matrisanyň ähli sütünlerini ýazylanda A matrisanyň rangy üýtgemese, onda A matrisanyň rangy B matrisanyň rangyndan uly ýa-da deňdigini subut ediň.

§ 6. Çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözülişi

6.1. *n* üýtgeýän ululykly *n* çyzykly deňlemeleriň sistemalary. Krameriň formulalary

Iki näbellili iki deňlemeler sistemanyň çözüwini tapalyň:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Bu sistemany toždestwa öwürýän (x,y) jübüte (1) sistemanyň çözüwi diýilýär (1) sistemanyň 1-nji deňlemesini b_2, ikinji deňlemesini b_1 köpeldip goşmaly

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Edil şonuň ýaly edip $(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1$.

Bu ýerden (1) sistemanyň çözüwi:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

(1) sistemanyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýjini:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

bellesek, goşmaça kesgitleýjileri:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

diýip belgilesek, onda (1) sistemanyň çözüwi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{2}$$

görnüşde bolar.

Eger-de $\Delta \neq 0$ bolsa, onda (1) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bolar. Eger-de $\Delta = 0$ bolsa, onda (1) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bolmagy mümkin ýa-da çözüwiniň bolmazlygy hem mümkin. (2) formula Krameriň formulasy diýilýär.

Birjynsly üç näbellili iki deňleme sistemanyň çözülişine seredeliň:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(2) sistemanyň elmydama $x = y = z = 0$ çözüwi bar. (3) sistemanyň noldan başga çözüwlerini tapalyň. Goý, $z \neq 0$.

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{x}{z} + b_1 \dfrac{y}{z} = -c_1 \\ a_2 \dfrac{x}{z} + b_2 \dfrac{y}{z} = -c_2 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

diýip

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -b_1 & c_1 \\ -b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -a_1 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c_1 & a_1 \\ -c_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

(3) sistemanyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen matrisa

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & c_1 \\ -b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_1 & c_1 \\ -a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\Delta = \Delta_3$, onda

$$\frac{x}{z} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \qquad \frac{y}{z} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3}$$

Diýmek,

$$\frac{x}{\Delta_1} = -\frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3}$$

ýa-da $x = \Delta_1 t$, $y = -\Delta_2 t$, $z = \Delta_3 t$ $(-\infty < t < \infty)$. Biz $\Delta \neq 0$ diýip kabul etsek, $(\Delta_3 \neq 0)$. Bu çözüw iň bolmanda Δ_1, Δ_2, Δ_3-iň birisi noldan tapawutly bolsa hem dogrudyr.

156.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y - 6z = 0. \end{cases}$$

Sistemanyň matrisasy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13,$$

onda

$$\begin{cases} x = \Delta_1 t = -3t \\ y = \Delta_2 t = 18t \\ z = \Delta_3 t = 13t. \end{cases}$$

Sistemanyň noldan tapawutly çözüwleriniň birini $t = 1$ diýip alarys:

$$x = -3; \qquad y = 18; \qquad z = 13.$$

Üç näbellili deňlemeler sistemanyň çözüwini tapalyň

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{4}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

diýip bellesek, (4) sistemanyň çözüwi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad \Delta \neq 0.$$

görnüşde bolar. Eger $\Delta = 0$ bolsa, onda (4) sistemanyň çözüwi ýok ýa-da tükeniksiz köp bolar.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \quad (5)$$

(5) sistemanyň elmydama nol çözüwi bar, ýagny $x = y = z = 0$.

Teorema. (5) sistemanyň noldan tapawutly çözüwi bolmagy üçin näbellileriň koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýjisi nola deň bolmaly

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6.2. Çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözüwi. Bazis çözüwleri

Goý, bize çyzykly deňlemeler sistemasy berlen bolsun

$$\begin{cases} a_{11} & x_1 + a_{12} & x_2 + \ldots + a_{1n} & x_n = b_1 \\ a_{21} & x_1 + a_{22} & x_2 + \ldots + a_{2n} & x_n = b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & x_1 + a_{2m} & x_2 + \ldots + a_{mn} & x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Eger-de sistemanyň ýeke-täk çözüwi bar bolsa, (1) sistema kesgitli diýilýär. Eger-de birden köp çözüwi bar bolsa, onda oňa kesgitsiz diýilýär.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matrisa (1) sistemanyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen esasy matrisa, B matrisa giňeldilen matrisa diýilýär.

Kroneker – Kopelliniň teoremasyna görä $r_A = r_B$ bolanda (1) sistema kökdeş (çözüwi bar). Eger-de (1) sistemada $r_A \neq r_B$ bolsa, onda kökdeş däl. Eger-de $r_A = r_B = n$ bolsa, onda sistema kesgitli (ýeke-täk köki bar). Eger-de $r < n$ bolsa, sistema kesgitsiz (köp köki bar).

Sistemanyň rangy (1) sistemadaky çyzykly bagly däl deňlemeleriň sanyny görkezýär. Eger (1) sistemada $r_A = n$ bolsa onda çyzykly bagly däl deňlemeleriň sany näbellileriň sany bilen gabat gelýär. $r_A = n$ bolanda (1) sistemadaky artykmaç deňlemeleri taşlasak (çyzykly kombinasiýadan durýan deňlemeler), (1) sistema aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} a_{11} \quad x_1 + a_{12} \quad x_2 + \ldots + a_{1n} \quad x_n = b_1 \\ a_{21} \quad x_1 + a_{22} \quad x_2 + \ldots + a_{2n} \quad x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \quad x_1 + a_{2m} \quad x_2 + \ldots + a_{mn} \quad x_n = b_n . \end{cases} \qquad (2)$$

$r_A = n$ bolanda ýeke-täk çözüwi bar. $r_A = n$ bolanda (2) sistemadan çyzykly bagly däl deňlemeleriň sany näbellileriň sanyndan kiçi. Bu ýagdaýda sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bar, ýagny $n - r_A$ sany näbelli erkin üýtgeýän, galanlary bolsa bazis üýtgeýän ululyklar bolar. Elmydama bazis ululyklary erkin ululyklaryň üsti bilen aňlatmak bolar.

157. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + a_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

$r = 2$. Onda iki näbelli erkin, ikisi hem bazis ululyklar bolar. Baziz ululyklary erkin ululyklar bilen aňladalyň, ýagny:

$$\begin{cases} \quad 2x_1 - x_2 + a_3 - x_4 = 1 \\ + \\ \quad -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Soňra ikinji deňlemäni 2-ä köpeldip x_2-i taparys:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 \\ x_2 = 5 + 3x_3 - x_4 . \end{cases}$$

Erkin ululyklara islendik baha bersek, bazis ululyklaryň dürli bahalaryny alarys. Bu bahalaryň hemmesi hem berlen sistemanyň çözüwi bolar.

158. Sistemany derňemeli we çözmeli

$$A = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11_{x_2} + 12x_3 + 25x_4 + 22x = 4 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

A we B matrisalaryň rangyny hasaplalyň, ikinji setiriň üstüne 3-nji setiri goşup 3-e bölsek

$$B \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

Diýmek, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \qquad r_A = 2, \qquad r_B = 3.$

$r_A \neq r_B$ deňlemeler sistemasy kökdeş däl.

Deňlemeler sistemasyny çözüň:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Çözülişi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -16 & 3 & -5 \\ 12 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -16 & -5 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -48 + 60 = 12;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & -4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -14 \\ -3 & 3-6 \end{vmatrix} = -6 + 45 = 36.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1; \quad x_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2; \quad x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3.$$

Deňlemeler sistemasyny çözüň**:**

159. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ *Jogaby*:(1; –1; 1).

160. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ *Jogaby*: (1; 0; 2).

161. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ *Jogaby*: (0; 1; 3).

162. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ *Jogaby*: (3; 2; 1).

163. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$ *Jogaby*: (2; 0; 1; 3).

164. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$ *Jogaby*: (1; 2; 3; 4).

165. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$ *Jogaby*: (1; 9; 5; 6).

166. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ *Jogaby*: (2; 0; 0; 2).

Goý, bize rangy $r = n$ bolan deňlemeler sistema berlen bolsun

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(1) sistemanyň çözüliş düzgünlerine seredeliň.

6.3. Krameriň düzgüni

(1) sistemanyň çözüwi Krameriň düzgüni boýunça aşakdaky ýa-ly gözlenilýär.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

bu ýerde Δ_i ($i = 1.2, \ldots, n$). kesgitleýjiniň i-nji sütünini azat agzalaryň sütüni bilen çalşylyp alnan kesgitleýjidir.

Mysal üçin, Δ_2

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_1\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, b_2\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, b_n\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

167. Berlen sistemany Krameriň düzgüni boýunça çözmeli:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 3 + 24 - 12 = -6 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -18 + 112 - 144 - 64 + 108 - 42 = -12$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 28 + 32 - 81 - 84 + 96 - 9 = -18$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 36 + 126 - 54 - 112 - 48 = 12$$

Onda sistemanyň çözüwi:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{-12}{-6} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{-18}{-6} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = -2.$$

(1) sistemany matrisanyň kömegi bilen çözeliň. Onda sistemany matrisa görnüşinde ýazalyň:

$$AX = B \tag{2}$$

Bu ýerde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & A_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & A_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

(2) sistemanyň çözüwi

$$X = A^{-1}B; \qquad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Delta = \det A \neq 0$ bolmaly.

168. Matrisa görnüşinde çözeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} matrisany hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Onda A^{-1} matrisa bar.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13; \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Onda $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

A^{-1} matrisany dogry hasapladykmy? Ony barlamak üçin $AA^{-1} = E$ bolýandygyny barlamak kyn däl:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 \cdot 9 + 5 \cdot 14 - 13 \cdot 16 \\ -10 \cdot 9 - 4 \cdot 14 + 8 \cdot 16 \\ -2 \cdot 9 + 14 \cdot 1 + 16 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sistemanyň çözüwi: $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$.

6.4. Gaussyň usuly

Indi (1) sistemany Gaussyň usuly bilen çözeliň. Gaussyň usulyna näbellileri deňlemeden yzygider ýok etmek usuly hem diýilýär. Goý, $a_{11} \neq 0$ bolsun, sistemadaky birinji deňlemäni a_{11}-e bölsek

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1. \qquad (3)$$

Bu ýerde $\alpha_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$

(1) sistemanyň i-nji deňlemesine seredeliň

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i. \qquad (4)$$

Bu deňlemeden x_1 – i ýok etmek üçin (3) deňlemäni a_{ij}-e köpeldip (4) deňlemeden aýyrsak, (4) deňleme aşakdaky görnüşe geler:

$$a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{i2} + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \qquad (5)$$

bu ýerde

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\alpha_{1j}, \quad b_{ij}^{(1)} = b_i - b_1\alpha_{1j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \qquad (6)$$

(1) sistemanyň beýleki deňlemelerinden x_1 näbellini (1) sistemanyň i-nji deňlemesinden aýrylyşy ýaly edip aýyrsak, onda (1) deňleme birinji ädimden soň aşakdaky görnüşi emele getirer:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{2n}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases} \qquad (7)$$

(7) sistemanyň koeffisiýentleri (6) deňleme boýunça hasaplanýar. (7) sistemada $a_{22}^{(1)} \neq 0$ diýip ýokarky düzgün boýunça birinji we ikinji deňlemelerden başgasynda x_2 näbellini ýok edýäris. Bu näbellileri yzygider ýok etmek usulyny n – 1 gezek ýerine ýetirsek, onda (7) sistema aşakdaky görnüşi emele getirer.

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \quad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (8)$$

(8) sistemanyň soňky deňlemesinden x_n taparys. Soňra bu deňlemäniň ýokarysyndaky deňlemeden x_{n-1} taparys we (8) sistemanyň beýleki deňlemelerinden tersligine hereket edip, galan näbellileriň bahalaryny hasaplaýarys.

169. Gaussyň düzgüni boýunça çözmeli. Sistemany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 14 \\ 2x + 3y + 2z = 9 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

Birinji deňlemeden başga deňlemelerden *x-i* ýok edeliň. Birinji deňlemäni 2-ä köpeldip ikinji deňlemeden aýyrýarys. Soňra birinji deňlemäni 3-e köpeldip 3-nji deňlemeden aýyrsak sistema aşakdaky görnüşe geler.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 14 \\ -y + 8z = -19 \\ 2y + 10z = -26 \end{cases}$$

Bu sistemanyň birinji we ikinji deňlemelerini öňküsi ýaly ýazyp 3-nji deňlemeden y näbellini ýok edeliň. Onuň üçin 2-nji deňlemäni 2-ä köpeldip 3-nji deňlemä goşýarys:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 14 \\ -y + 8z = -19 \\ -6z = 12 \end{cases}$$

Sistema 2-nji ädimden soň ýokarky görnüşi aldy. Soňky deňlemeden $z = -2$ diýip, bu bahany ýokarsyndaky deňlemede goýup tapýarys:

$$-y + 8 \cdot (-2) = -19; \quad y = 3$$

z we y-iň bahasyny birinji deňlemä goýup x näbellini taparys: $x + 2(3) - 3(-2) = 14;$

Sistemanyň çözüwi: $x = 2; \quad y = 3; \quad y = -2.$

170. Deňlemeler sistemasynyň kökdeşligini derňäň, umumy çözüwini we bir hususy çözüwini tapyň:

7. sargyt № 1573

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5. \end{cases}$$

Çözülişi: Giňeldilen matrisany ýazyp, sistemanyň rangyny tapalyň:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \end{array} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Şeýlelikde, matrisanyň we giňeldilen matrisanyň ranglary 2-ä deň. Diýmek, berlen sistema kökdeşdir. Birinji we üçünji deňlemeleriň x_1 we x_2 näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen minor $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ we onuň tertibi sistemanyň rangyna deň. M minoryň setirlerini saklaýan sistemanyň birinji we üçünji deňlemelerini ýazalyň:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Bu deňlemeleriň çep tarapynda x_1 we x_2 näbellileri goýup, galanlaryny sag tarapa geçireliň:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 = 5 - 3x_3 = 5x_4. \end{cases}$$

Bu deňlemeler sistemany Kramerriň usuly bilen çözeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 - 3x_3 - 4x_4 & 2 \\ 5 - 5x_3 - 5x_4 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 9x_3 - 12x_4 10 + 10x|3| + 10x_4 =$$

$$= 2 + x_3 - 2x_4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 - 3x_3 - 4x_4 \\ 1 & 5 - 5x_3 - 5x_4 \end{vmatrix} = 5 - 5x_3 - 5x_4 - 4 + 3x_3 + 4x_4 =$$

$$= 1 - 2x_3 - x_4 .$$

Diýmek,

$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 . \end{cases}$ – berlen sistemanyň umumy çözüwi. x_3 we x_4 näbelliler – azat näbellilerdir. Eger $x_3 = x_4 = 0$ bolsa, onda $x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$ – berlen sistemanyň hususy çözüwi.

171. Aşakdaky deňlemeler sistemasynyň umumy we bir hususy çözüwini tapyň:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$$

Çözülişi: Deňlemeler sistemasyny tablisa görnüşinde ýazalyň:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	2	1	4	1	– 4	– 3 – 5
3	2	1	1	– 3	1	
0	1	2	2	6	– 1	
5	6	3	9	– 1	– 7	

Gaussyň usuly bilen sistemanyň umumy çözüwini tapalyň:

1-nji ädim. Berlen deňlemeler sistemasy triwial we garşydaş deňlemeleri saklamaýar. Bu sistemanyň birinji deňlemesine näbelli x_1-iň koeffisiýenti 1-e deň. Beýleki deňlemelerden x_1 näbellini elementar özgertmeleriň kömegi bilen ýoklalyň:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	2	1	4	1	– 4
0	– 4	– 2	– 11	– 6	13
0	1	2	2	6	– 1
0	– 4	– 2	– 11	– 6	12

4   – 2   4

2-nji ädim. Birinji ädimden soň alnan sistemada triwial we garşydaş deňlemeler ýok. Üçünji deňlemede x_2 näbelliniň koeffisiýenti 1-e deň. x_2 näbellini galan deňlemelerden ýoklalyň:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	– 3	0	– 11	– 2
0	0	6	– 3	18	9
0	1	2	2	6	– 1
0	0	6	– 3	18	9

3-nji ädim. Ikinji ädimden soň alnan sistemada triwial we garşydaş deňlemeler ýok. Ikinji deňlemäni 3-e bölüp, alarys:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	– 3	0	– 11	– 2
0	0	– 2	1	-6	– 3
0	1	2	2	6	– 1
0	0	6	– 3	18	9

– 2   3

Indi elementar özgertmeleriň kömegi bilen üçünji we dördünji deňlemelerden x_4 näbellini ýoklalyň:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	– 3	0	– 11	– 2
0	0	– 2	1	– 6	– 3
0	1	6	0	18	5
0	0	0	0	0	0

Şeýlelikde, aşakdaky sistema alynýar:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_5 = -2 \\ -2x_3 + x_4 - 6x_5 = -3 \\ x_2 + 6x_3 + 18x_5 = 5 \end{cases}$$

Bu sistemadan

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 3x_3 + 11x_5 \\ x_4 = -3 + 2x_3 + 6x_5 \\ x_2 = 5 - 6x_3 + 18x_5 \end{cases}$$

bu ýerde x_3 we x_5 – azat näbelliler.

Eger $x_3 = x_5 = 0$ bolsa, onda $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = -3$, $x_5 = 0$ – sistemanyň hususy çözüwi.

Aşakdaky deňlemeler sistemany kökdeşligine derňäň we umumy hem-de bir hususy çözüwlerini tapyň:

172. $x_1 - x_2 + x_3 = 2.$ *Jogaby*: $x_1 = x_2 - x_3 + 2.$

173. $2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 3.$ *Jogaby*: $x_3 = 2x_1 - 3x_2 + x_4 - 3.$

174. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_2 = 1 + 4x_3 - 7x_4 \\ x_1 = -1 - 3x_3 + 5x_4. \end{cases}$

175. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = x_1 + x_2. \end{cases}$

176. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$

Jogaby: $\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 13x_3 + 18x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Jogaby: $\begin{cases} x_3 = 11x_1 - 11x_2 - 11 \\ x_4 = -8x_1 + 8x_2 + 8. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$ *Jogaby*: kökdeş däl.

179. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$ *Jogaby*: kökdeş däl.

180. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_1 = x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$

182. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_1 = 2 + x_4 \\ x_2 = -1 - 2x_4 \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$

183. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$ *Jogaby*: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1.$

184. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$ *Jogaby*: kökdeş däl.

185. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}(7 - 5x_3) \\ x_3 = \frac{1}{3}(4 - 5x_3). \end{cases}$

186. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 - 12x_5 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 21x_5 = 0. \end{cases}$

Jogaby: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = -x_2 - x_4 \\ x_5 = 0. \end{cases}$

187. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 19. \end{cases}$ *Jogaby*: kökdeş däl.

188. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 5. \end{cases}$

Jogaby: $\begin{cases} x_5 = -1 + x_1 \\ x_3 = -6 + 5x_1 + x_2 - x_4. \end{cases}$

189. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 7x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 10x_3 + 4x_4 - 6x_5 = -3 \\ -3x_1 + 6x_3 + x_4 + 4x_5 = -3. \end{cases}$ *Jogaby*: kökdeş däl.

190. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$ *Jogaby*: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0. \end{cases}$

6.5. Matrisanyň hususy wektorlary we hususy bahalary

Kesgitleme. $Ax = \lambda x$ (1) deňlemäniň $x \neq 0$ noldan tapawutly çözüwine A matrisanyň hususy wektory, oňa degişli sana hususy bahasy diýilýär.

(1) deňligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{11}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

ýa-da matrisa görnüşinde

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Alnan birjynsly sistemanyň nol çözüwi $x = 0 = (0; 0;\dots 0)$ bar. Noldan tapawutly çözüwi bolar ýaly, sistemanyň kesgitleýjisi nola deň bolmaly.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - \lambda & a_{n2} - \lambda & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

$|A-\lambda E|$ kesgitleýji λ görä n-nji derejeli köpagzadyr. (2) deňlemä A matrisanyň harakteristik deňlemesi diýilýär.

191. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisanyň hususy bahalaryny we hususy funksiýalaryny tapmaly.

Çözülüşi: harakteristik deňlemäni guralyň:

$$|A\text{-}\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ýa-da } \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0, \quad \lambda = -5$$

hususy baha degişli $x^{(1)} = (x_1, x_2)$ hususy wektory tapalyň:

$$(A-\lambda^1 E) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}\begin{vmatrix} -6 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} -36x_1 - 24x_2 = 0 \\ +36x_1 - 24x_2 = 0 \end{cases}$$

$6x_1 + 4x_2 = 0$ onda $x_2 = \dfrac{-6}{4}x_1 = -1,5x_1$ – husysy wektor

$x_1 = C \neq 0$ $\quad x^{(1)} = (C; -1,5C)$

$\lambda_2 = 7$ hususy baha degişli $x^{(2)} = (x_1, x_2)$ hususy wektory tapalyň:

$$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}\Bigg|_{4}^{-6} \qquad \begin{cases} -36x_1 - 24x_2 = 0 \\ +36x_1 - 24x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-6x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{4}x_1$$

Eger $x_1 = C \neq 0$ bolsa, onda $x_2 = 1,5$ C.

Diýmek $x^{(2)} = (C; -1,5C)$ – hususy wektor.

6.6. Çalyşmanyň çyzykly modeli

Matrisanyň hususy bahasy we hususy wektory düşünjelerine getirýän ykdysady prosesiň matematiki modeli hökmünde çalyşmanyň çyzykly modeline (halkara söwda modeline) garalyň.

Goý, n sany ýurduň, her biriniň milli girdejisine laýyklykda $x_1, x_2,...,x_n$-e deň bolsun.

S_j ýurt öz milli girdejisiniň bölegini S_i ýurtdan haryt satyn almaga harçlaýan puluny a_{ij} koeffisiýent bilen belgiläliň.

Goý, ähli milli girdeji haryt almaga ýurduň içinde ýa-da beýleki ýurtlardan import edilmegi bilen harçlanýar ýa-da

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \ (j = 1,2,...,n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa garalyň. Oňa söwda gurluş matrisa diýip atlandyrylýar. (3) deňlige laýyklykda A matrisanyň islendik sütüniniň elementleriniň jemi 1-e deň, islendik S_i $(i = 1,2,...,n)$ ýurduň içerki we daşarky söwdanyň netijesinde girdeji

$$P_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n$$

bolar.

Balansirlenen her bir söwda üçin S_i ýurduň söwdasynyň defesitsizligi zerurdyr ýa-da her bir ýurduň söwdadan alan gerdejisi onuň milli girdejisinden kiçi bolmaly däldir.

$$p_i \geq x_i, \qquad (i = 1,2,...,n)$$

Eger $p_i > x_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ bolýar diýip guman etsek, onda deňsizlikler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} x_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n > x_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \tag{4}$$

(4) deňsizlikleriň ählisini goşup we toparlap, alarys:

$$x_1 (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) + x_2 (a_{12} + a_{22} + \cdots + an_2) + \cdots +$$

$$+ x_n (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \cdots x_n.$$

(3) deňlik ýaýlardaky aňlatmalar 1-e deňdigini görkezýär. Onda nädogry deňsizlige gelýäris:

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n > x_1 + x_2 + \cdots + xn.$$

Şeýlelikde $p_i > x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ deňsizlikler mümkin däl we $p_i \geq x_i$ şert $p_i = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ görnüşini alýar. (Ykdysady manysynda bu düşnüklidir, sebäbi bir wagtda ähli ýurtlar peýda alyp bilmeýär). Ýurtlaryň $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ milli girdejileriniň wektoryny girizip

$$AX = X \tag{5}$$

matrisalaýyn deňlemäni alarys. Bu ýerde $X - x$ wektoryň koordinatalaryndan ybarat bolan matrisa-sütün ýa-da berlen mesele $\lambda = 1$ hususy baha laýyk gelýän A matrisanyň hususy wektoryny tapmaklyk meselesine getirildi.

192. S_1, S_2, S_3 – üç ýurduň söwda gurluş matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

görnüşde berilýär. Balansirlenen söwda bolar ýaly, olaryň milli girdejilerini tapmaly.

Çözülişi: $\lambda = 1$ hususy baha jogap berýän x hususy wektory $(A - E)X = 0$ deňlemäni ýa-da

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemany Gaussyň usuly bilen çözüp taparys:

$$x_1 = \frac{3}{2}C; \qquad x_2 = 2C; \qquad x_3 = C$$

ýa-da $x = \left(\frac{3}{2}C;\ 2C;\ C\right)$. Alnan wektor üç ýurduň balansirlenen söwdasy bolar ýaly milli girdejileri $x = \left(\frac{3}{2}C; 2C; C\right)$ wektorda maksada ýetýär ýa-da olaryň milli girdejileri $\frac{3}{2}:2:1$ ýa-da 3 : 4 : 2 gatnaşykda bolmaly.

Matrisanyň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapyň:

193. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 3;$ $(c; -4c);\ (c; c)$.

194. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;$ $(c; 0);\ (c; -c)$.

195. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\lambda_1 = 0;\ \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $(c; c; -c)\ \left(c; \frac{2c}{3 \pm \sqrt{5}}; -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}c\right);$

196. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Jogaby*: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = 2$ $(c; -c; 0);\ (c; c; -2c);\ (c; c; c)$

197. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **198.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **199.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

200. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.   **201.** $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.   **202.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

203. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.   **204.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.7. Köppudakly önümçilige degişli Leontýewiň modeli (balans seljermesi)

Balans seljermäniň analizi – köppudakly hojalygy işjeň ýöretmegi: her bir n pudagyň önüminiň göwrimi beýleki pudagyň ähli islegini kanagatlandyrar ýaly nähili bolmaly? Bu ýagdaýda bir tarapdan her bir pudak käbir önümi öndüriji hökmünde, beýleki tarapdan bolsa, ol öz önümini we beýleki pudaklar bilen öndürilýän önümleriň ulanyjysy bolup çykyş edýär.

Pudaklaryň arasyndaky baglanyşyk pudaklara balans tablisadan görünýär we oňa seljerme bermek üçin matematiki modeli 1936-njy ýylda amerikan ykdysatçysy B. Leontýew döredipdir.

Goý, senagatyň n pudagy goralýan bolsun, olaryň her biri öz önümini öndürýän bolsun. Önümleriň bellibir bölegini, öndürýän pudagyň özi we beýleki pudaklar ulanýarlar, beýleki bölegi bolsa jemgyýetiň islegini kanagatlandyrýar.

Önümçilik prosesine käbir wagt periodynda (mysal üçin bir ýyl) garalyň.

Aşakdaky belgileri girizeli: x – i-nji pudagyň ($i = 1,2,...n$) önüminiň umumy göwrüminiň, x_{ij} – önümçilik prosesinde i-nji pudagyň öndürýän önüminiň j-njy pudagyň ulanýan göwrümi ($i, j = 1,2,...n$), y_j – i-nji pudagyň öndürýän önüminiň göwrümi *önümçilik daşynda ulanylýan* i-nji pudagyň önüminiň umumy göwrümi n pudagyň ulanylýan göwrüminiň we ahyrky önüminiň jemine deň bolany üçin.

$$x_0 = \sum_{j=0}^{n} x_{ij} + y_i, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1}$$

(1) Deňlemä balans gatnaşyklar deňlemesi diýilýär. Pully pudaklara balansa garalyň: bu ýagdaýda (1) deňlige girýän ululyklaryň hemmesi nyrhyň üsti bilen aňladylýar.

Göni çykdajy koeffisiýentlerini girizeliň:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \qquad (i,j = 1,2,...,n). \tag{2}$$

Bu görkeziji j pudagyň önüminiň birligini öndürmek üçin i pudagyň önüminiň çykdajylaryny görkezýär.

Käbir wagt aralykda a_{ij} koeffisiýentleri hemişelik diýip hasaplasaň, olar önümçiligiň tehnologiýasyna bagly bolar. Bu bolsa material çykdajylaryň umumy öndürmä deň çyzykly baglydygyny aňladýar ýa-da

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \qquad (i, j = 1,2,...,n). \tag{3}$$

Şu çyzykly baglanyşyk sebäpli pudakara balans modeline çyzykly diýlip aýdylýar.

Indi (2) balans gatnaşygy aşakdaky görnüşi alýar:

$$x_1 = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad (i = 1,2, ..., n). \tag{4}$$

Belgiläliň:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Bu ýerde X – umumy öndürilýän önümiň wektory, Y ahyrky önümiň wektory, A göni çykdajylaryň matrisasy (tehnologiki ýa-da gurluş matrisasy). Onda (4) sistemany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$X = AX + Y. \tag{5}$$

Pudakara balansyň esasy meselesi belli göni çykdajylar matrisasy we ahyrky önümi Y üpjün eder ýaly umumy önümiň çykdajylaryny X tapmaly.

(5) deňlemäni:

$$(E - A)X = Y \qquad (6)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Eger $E - A$ matrisanyň kesgitleýjisi $|E - A| \neq 0$ bolsa, onda

$$X = (E - A)^{-1}\, Y \qquad (7)$$

$S = (E - A)^{-1}$ matrisa doly çykdajylar matrisasy diýilýär.

S = (s_{ij}) matrisanyň elementleriniň ykdysady manysyny düşündirmek üçin ahyrky önümi birlik wektorlar hökmünde alalyň:

$Y_1 = (1,0,\dots,0)'$, $Y_2 = (0,1,\dots,0)',\dots,$ $Y_n = (0,0,\dots,1)'$ (ştrih wektoryň transponirlenenini aňladýar), onda (7) deňlemäniň esasynda olara laýyklykda umumy öndürme wektorlary aşakdaky görnüşi alýar:

$$X_1 = (S_{11}, S_{21},\dots, S_{n1})'\text{: } X_2 = (S_{12}, S_{22},\dots, S_{n2})',\dots,X_n=(S_{1n},S_{2n},\dots, S_{nn})'.$$

Diýmek, S matrisanyň her bir S_{ij} elementi j-niň pudagyň ahyrky önüminiň birligini öndürmek üçin zerur bolan i-nji pudagyň umumy öndürmekligiň ululygydyr.

Meseläniň ykdysady manysy boýunça $y_i \geq 0$ we $a_{ij} \geq 0$ (bu ýerde $i,j = 1,2,...,n$) bolanda x_i otrisatel bolmaly däldir.

Eger islendik wektor $Y \geq 0$ üçin (7) deňlemäniň $X \geq 0$ çözüwi bar bolsa, onda $A \geq 0$ matrisa öndürüjili matrisa diýilýär. Bu ýagdaýda Leontýewiň modeli hem öndürijili diýilýär.

A matrisanyň öndürijiligi barada birnäçe düzgünler bar. Olaryň biri: eger A matrisanyň sütünleriniň jemi birden uly we iň bolmanda bir sütüniň elementleriniň jemi birden kiçi bolsa, onda A – öndürüjili ýa-da $a_{ij} \geq 0$ $i,$ $j = 1,2,\dots,n$ we $\max a_{ij} \leq 1$ we $\sum a_{ij} < 1$ bolar ýaly j nomer bar bolsa, $j = 1,2,...,n$ onda A – öndürijili.

205. Hasap period üçin balansyň ýerine ýetirilişi tablisa girizilen (şertli pul birligi)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Pudak</td><td colspan="2">Sarp edilme</td><td rowspan="2">Ahyrky önüm</td><td rowspan="2">Umumy öndürme</td></tr>
<tr><td>energetika</td><td>maşyn gurluşyk</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Önümçilik</td><td>Energetike</td><td>7</td><td>21</td><td>72</td><td>100</td></tr>
<tr><td>maşyn gurluşyk</td><td>12</td><td>15</td><td>123</td><td>150</td></tr>
</table>

Çözülişi:

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 150, \quad x_{11} = 7, \quad x_{12} = 21, \quad x_{21} = 12,$$
$$x_{22} = 15, \quad y_1 = 72, \quad y_2 = 123.$$

(2) formulalary ulanyp göni çykdajylaryň koeffisiýentlerini tapýarys:

$a_{11} = 0{,}07$ $a_{12} = 0.14$; $a_{21} = 0.12$; $a_{22} = 0.10$ ýa-da göni çykdajylaryň matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.14 \\ 0.12 & 0.10 \end{pmatrix}$$

bu matrisanyň elementleri otrisatel däl, we öndürijilikli düzgüni kanagatlandyrýar:

Max $\{0{,}07 + 0{,}12; 0{,}14 + 0{,}10\} = \max\{0{,}19; 0{,}24\} = 0{,}24 < 1$, onda islendik ahyrky önüm Y wektor üçin umumy öndürmäniň göwrümini:

$$X = (E - A)^{-1}Y$$

formula arkaly tapmak bolýar.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}24 \\ -0{,}12 & 0{,}90 \end{pmatrix}; \qquad |E - A| = 0{,}8202 \neq 0$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

Meseläniň şertinden $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix}$. Onda

$$X = \frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179{,}0 \\ 160{,}5 \end{pmatrix}$$

ýa-da energetika pudagynda umumy çykaryşy 179.0 ş.p.b we maşyngurluşyk pudagynda – 160.5 ş.p.b çenli galdyrmaly.

II bap
ANALITIKI GEOMETRIÝA

§ 1. Wektorlaryň üstünde çyzykly amallar

Ugrukdyrylan kesime geometriki wektor ýa-da ýöne wektor diýilýär.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ bilen belgilenýär, bu ýerde A wektoryň başlangyjy, B bolsa onuň ahyrky nokady. Wektor $\vec{a}$ görnüşde hem belgilenýär.

Wektoryň uzynlygy ýa-da moduly $|\overrightarrow{AB}|$ we $|\vec{a}|$ görnüşde belgilenýär.

Parallel gönülerde (ýa-da bir gönüde) ýatýan wektorlara kollinear wektorlar diýilýär.

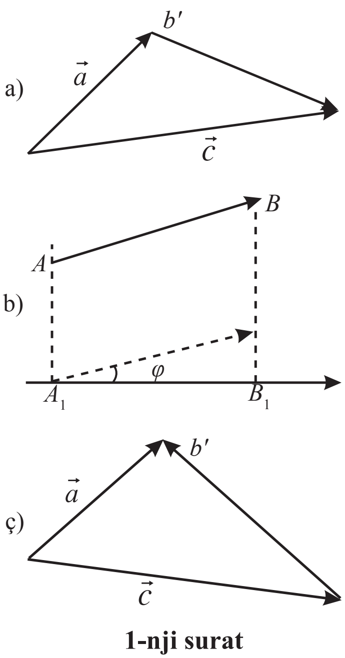
$\vec{a}$ wektoryň hakyky sana köpeltmek hasyly diýlip, birinjiden $\vec{a}$ wektor bilen kollinear bolan, ikinjiden uzynlygy $\lambda|\vec{a}|$ – a deň bolan, üçünjiden $\lambda > 0$ bolanda, $\vec{a}$ wektor bilen bir ugra ugrukdyrylan, $\lambda < 0$ bolanda, $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugra ugrukdyrylan wektora diýilýär.

$\vec{a}$ wektoryň ahyry $\vec{b}$ wektoryň başlangyjy bolan iki wektoryň jemi diýip, başlangyjy $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy bilen, ahyrky nokady $\vec{b}$ wektoryň ahyry bilen gabat gelýän üçünji $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ wektora aýdylýar.

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň başlangyç A nokadyndan we ahyrky B nokadyndan l oka geçirlen perpendikulýarlaryň esaslarynyň arasyndaky $A_1 B_1$ kesime $\overrightarrow{AB}$ wektoryň l oka bolan ortogonal proýeksiýasy diýilýär.

$$pr_l \overrightarrow{AB} = A_1 B_1.$$

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň tapawudy diýlip, kemeldiji $\vec{b}$ wektor bilen goşulanda kemeliji $\vec{a}$ wektory berýän üçünji $\vec{c}$ wektora aýdylýar we $\vec{a} - \vec{b}$ bilen $(\vec{c} = \vec{a} - \vec{b})$ belgilenýär.



1-nji surat

$\vec{a}$ wektoryň l oka bolan $A_1\ B_1$ proýeksiýasy $\overrightarrow{AB}$ wektoryň uzynlygynyň $\vec{a}$ wektoryň l ok bilen emele getirýän burçunyň kosinusyna köpeldilmegine deňdir, ýagny

$$pr_l\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Giňişlikde $\vec{a}$ wektory aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

bu ýerde $\vec{i}$, $\vec{j}$ we $\vec{k}$ birlik wektorlar, x, y, z – $\vec{a}$ wektoryň koordinata oklaryna proýeksiýalary.

$\vec{a}$ wektoryň uzynlygy $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\vec{a}$ wektoryň we koordinata oklarynyň arasyndaky α, β, γ burçlarynyň kosinuslary

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\lambda}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

formulalar arkaly tapylýar.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ we $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ wektorlaryň kollinearlyk şerti $\vec{a} = \vec{b} \cdot \lambda$, λ – hakyky san, ýa-da koordinata görnüşinde

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

ýazmak bolar.

1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ wektorlaryň uzynlygyny we ugrukdyryjy kosinuslaryny tapyň.

Jogaby: $|\vec{a}| = 7$; $\cos\alpha = 1/3$; $\cos\beta = -2/3$; $\cos\gamma = -2/3$.

2. $M_1(4; -2; 6)$ we $M_2(1; 4; 0)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektoryň uzynlygyny we ugruny tapyň.

Jogaby: $|\overrightarrow{M_1M_2}| = 9$; $\cos\alpha = 1/3$; $\cos\beta = -2/3$; $\cos\gamma = 2/3$.

3. $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ deň bolan we $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ wektorlar bilen deň ýiti burçlary emele getirýän $\vec{a}$ wektory tapyň.

Jogaby: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

4. *ABCD* parallelogramyň üç depesi berlen: $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$ dordünji *D* depesini tapmaly.

Jogaby: $D(9;-5;6)$.

5. Üçburçlugyň depeleri berlen: $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$, *A* depesinden geçirilen mediýananyň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: 7.

6. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ we b = $\vec{k} - 3\vec{j}$ wektorlarda parellelogram guruň we onuň dioganallarynyň uzynlyklaryny tapyň.

Jogaby: 3; $\sqrt{21}$.

7. Parallelogramyň diagonallary bolup $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ we $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ wektorlar hyzmat edýär. Parallelogramyň taraplarynyň uzynlyklaryny tapmaly.

Jogaby: $\sqrt{34}/2$; $\sqrt{42}/2$.

8. Wektorlaryň modullary berlen: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$. $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ hasaplamaly.

Jogaby: 22.

9. Parallelogramyň diagonallary bolup $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{d} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ wektorlar hyzmat edýärler. Şol parallelogramyň taraplary bolup hyzmat edýän wektorlaryň uzynlyklaryny tapyň.

Jogaby: $\sqrt{14}/2$; $\sqrt{26}/2$.

10. Wektorlaryň modullary berlen: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ hasaplamaly.

Jogaby: 20.

11. Eger $|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 8$ $|\vec{a}|$ we $|\vec{b}|$ wektorlaryň arasyndaky burç $\beta = 60°$-a deň bolsa, onda $|\vec{a} + \vec{b}|$ we $|\vec{a} - \vec{b}|$ ululyklary tapyň.

Jogaby: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{97}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

12. λ we β-niň haýsy bahalarynda $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ we $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ wektorlar kollineardyr?

Jogaby: $\lambda = 4$; $\beta = -1$.

13. Tekizlikde üç wektor berlen: $|\vec{a}| = 2\vec{i}$, $|\vec{b}| = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $|\vec{c}| = 2\vec{i} + 6\vec{j}$.

$\vec{c}$ wektory $\vec{a}$ we $\vec{b}$ buýunça dagadyň.

Çözülişi: Goý, $\vec{c}$ wektoryň dagatmasy $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, bu ýerde ($m$, n-näbelli koeffisiýentler) görnüşde ýazylan bolsun. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlary birlik wektorlaryň üsti bilen aňladalyň.

$2\vec{i} + 6\vec{j} = m2\vec{i} + n(3\vec{i} + 3\vec{j}) = (2m + 3n)\vec{i} + 3n\vec{j}$ bu ýerden:
$2 = 2m + 3n$, $6 = 3n$ onda $n = 2$, $m = -2$ bolar.

Diýmek: $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b})$.

14. Tekizlikde üç wektor berlen: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{c}$ wektory $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar boýunça dagadyň.

Jogaby: $\vec{c} = \frac{1}{4}(5\vec{b} - 2\vec{a})$

15. $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$, $\vec{d} = (3; 7; -7)$ wektorlar berlen, $\vec{d}$ wektory $\vec{a}, \vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar boýunça dagadyň.

Jogaby: $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

16. Öňki meseläniň şertinde $\vec{a}$ wektory $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, wektorlar boýunça dagadyň.

Jogaby: $\vec{a} = \frac{1}{2}(3\vec{b} - \vec{c} + \vec{d})$.

1.1. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Geometrik görnüşde berlen $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde φ burç $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç. Wektoryň proýeksiýasynyň kesgitlemesine görä

$$pr_a b = |\vec{b}|\cos\varphi.$$

Şol sebäpli, $(a,\ b) = |\vec{a}|pr_a b$, ýagny iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly olaryň biriniň modulynyň beýlekisiniň birinji wektora proýeksiýasyna köpeldilmegine deňdir.

Kesgitlemeden:

1. Eger$a \perp b \Leftrightarrow (a,\ b) = 0$

2. $(a,\ a) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ bolýandygy gelip çykýar.

Bu kesgitlemä görä bir-birine jübüt-jübütden perpendikulýar bolan i, j, k ortlar üçin:

$$ii = jj = kk = 1; \qquad ij = ik = jk = 0$$

deňlikleri alarys. $x,y \in R^3$ wektorlary bu ortlaryň emele getirýän bazisinde

$$x = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k, \qquad y = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

görnüşde ýazylar. Olary skalýar köpeldip alarys:

$$(x,\ y)=\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3.$$

Şol sebäpli:

$$(x,\ y) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\ \alpha_2+\lambda_3\alpha_3.$$

Ahyrky deňlikden iki wektoryň arasyndaky φ burçy tapmagyň formulasyny alarys:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|a|\cdot|y|} = \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3}{\sqrt{\lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\cdot\sqrt{\alpha_2^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Bu formuladan, eger: $x = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$, $y = \alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$ wektorlar perpendikulýar bolsalar, onda:

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3 = 0$$

bolýandygyny alarys.

17. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}+7\vec{k}$ we $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyň.

Jogaby:8.

18. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ we $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapmaly.

Jogaby: $\cos\varphi = 2/7$.

19. $O(0;0;0)$, $M_1(2;0;0)$, $M_2(0;0;4)$, $M_3(2;0;2)$ nokatlar berlen. $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, wektorlary guruň we olaryň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: $\cos\varphi = 1/\sqrt{10}$.

20. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ depeli üçburçlugyň taraplarynyň uzynlyklaryny we taraplarynyň arasyndaky burçlary tapyň.

Jogaby: $|AB| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{2}$, $|AC| = 5$, $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$.

21. $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$, wektorlarda gurlan parallelogramyň taraplarynyň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: $\varphi = 90°$.

22. Parallelogramyň $A(2;1;3)$, $B(5;2;-1)$, $C(-3;3;-3)$ üç depesi berlen. Parallelogramyň diagonallarynyň arasyndaky burçy tapmaly.

Jogaby: $\cos\varphi = (-43)\left(25\sqrt{13}\right)$.

23. $\vec{a} = (6;-1;1)$, $\vec{b} = (2;3;1)$ wektorlarda gurlan parallelogramyň diagonallarynyň arasyndaky burçy tapmaly.

Jogaby: $\cos\varphi = 1/2$, $\varphi = 60°$.

24. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ we $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ (m, n – birlik wektorlar we olar 120° burç emele getirýär) berlen $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: $\varphi = 120°$.

25. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ wektoryň $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ wektora proýeksiýasyny tapyň.

Jogaby: $pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = 8/3\sqrt{2}$.

26. Tekizlikde $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlar ýerleşen. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| =3$, $|\vec{b}| = 5$ wektorlaryň arasyndaky burçlar: $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right) = 60°$, $\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right) = 60°$. $\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ wektorlaryň modulyny tapyň.

Jogaby: $\sqrt{7}$.

27. Tekizlikde $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar ýerleşýär. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ we olaryň arasyndaky burç $\lambda = 60°$ berlen, $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c}$ wektoryň modulyny tapyň.

Jogaby: $2\sqrt{7}$.

28. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç $\frac{\pi}{6}$ deň. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| =1$ berlen. $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçy kesgitlemeli.

Jogaby: $\cos\varphi = 2\sqrt{7}$.

29. $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ we $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ wektorlar özara perpendikulýar bolar ýaly m-iň bahasyny tapyň.

30. $A(1;2;1)$, $B(3; -1;7)$, $C(7;4; -2)$ depeli üçburçlugyň deňýanlydygyny subut ediň.

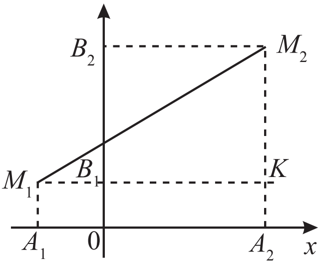
Jogaby: $m = -6$.

31. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ wektoryň koordinata oklar bilen deň ýiti burçlary emele getirýän oka proýeksiýasyny tapyň.

Jogaby: $1/\sqrt{3}$.

32. $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ we $D(-5;-5;3)$ depeli dörtburçluk berlen, onuň diagonallarynyň özara perpendikulýardygyny subut ediň.

§ 2. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri



2-nji surat

1. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk Tekizligiň islendik $M_1(x_1, y_1)$ we $M_2(x_2, y_2)$ iki nokadynyň arasyndaky $d = d(M_1\ M_2\ )$ uzaklyk

$$d = \sqrt{(x_2 + x_1)^1 + (y_2 + y_1)^2} \qquad (1)$$

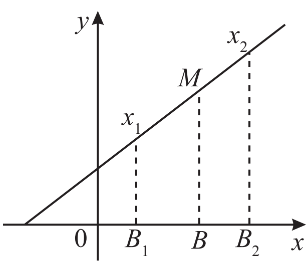
formula bilen kesgitlenýär.

33. $A(4,-2)$, $B(7,-6)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Çözülişi: Berlen nokatlar üçin $x_1 = 4$, $y_1 = -2$,

$x_2 = 7$, $y_2 = -6$ bolýandygy sebäpli, (1) formula esasynda taparys:

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + (-6+2)^2)} = \sqrt{(9+16)} = 5.$$



3-nji surat

3. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek

Eger $M(x,y)$ nokat $M_1(x_1,y_1)$ we $M_2(x_2, y_2)$ nokatlar bilen çäklenen M_1M_2 kesimi λ gatnaşykda bölýän bolsa, onda ol nokadyň koordinatalary

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Eger M nokat M_1M_2 kesimiň ortasynda ýerleşýän bolsa, onda $\lambda = 1$ bolar we bu halda (2) formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (3)$$

görnüsi alar.

34. $A(2,5)$ we $B(4,9)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimi 1:3 gatnaşykda bölýän C nokadyň koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi: Berlen nokatlar üçin: $x_1 = 2, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = 9$ we $\lambda = \frac{1}{3}$ bolýandygy sebäpli, (2) formula esasynda taparys:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2} = 2,5;$$

$$y = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot 9}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5 + 3}{\frac{4}{3}} = 6.$$

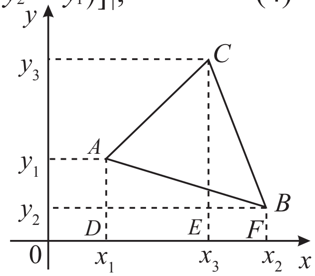
Şeýlelikde $C(2,5; 6)$.

2.1. Üçburçlugyň meýdany

Bir göni çyzykda ýatmaýan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ depeleri bolan üçburçlugyň S meýdany

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right]\right|, \qquad (4)$$

formula boýunça tapylýar.



4-nji surat

35. Depeleri $A(1;1)$, $B(6;4)$, $C(8;2)$ nokatlarda bolan ABC üçburçlugyň S meýdanyny tapmaly.

Çözülişi: Üçburçlugyň meýdanyny (4) formulany ulanyp taparys:

$$S = \frac{1}{2}[(6-1)(2-1) - (8-1)(4-1)] = \frac{1}{2}|[-16]| = 8 \text{ (kw.birlik).}$$

36. $A(4; -5)$ we $B(7, -1)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Jogaby: 5.

37. $A(-11;5)$ we $B(1;0)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Jogaby: 13.

38. $A(-1;3)$ we $B(7;-3)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimiň uzynlygyny we onuň Ox okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçuny tapmaly.

Çözülişi: $|AB| = \sqrt{(7+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{64+36} = 10$

$$\text{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-3}{7+1} = -\frac{3}{4}; \qquad \varphi \approx 180° - 36°52' = 143°08'.$$

39. $A(-6;7)$ we $B(1;-2)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimiň uzynlygyny we onuň Ox okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçuny tapmaly.

Jogaby: $|AB| \approx 11{,}4$; $\varphi \approx 127°\ 52'$.

40. $A(-4;5)$ we $B(-6;7)$ nokatlary birleşdirýän AB kesimiň uzynlygyny we onuň Ox okuň položitel ugry bilen emele getirýän burçuny tapmaly.

Jogaby: $|AB| = \sqrt{8}$; $\varphi \approx 135°$.

41. Eger üçburçlugyň depeleri berlen: $A(-3;-6)$, $B(4;-1)$, $C(5;-2)$ bolsa, onuň perimetrini tapyň.

Jogaby: $|AB| \approx 8{,}6$; $|AC| \approx 8{,}9$; $BC| \approx 1{,}4$; $P \approx 18{,}9$.

42. Eger üçburçlugyň depeleri $A(1;3)$, $B(4;5)$, $C(-5;-7)$ berlen bolsa, onuň perimetrini tapyň.

Jogaby: $P \approx 30{,}3$.

43. $A(2;3)$, $B(6;7)$, $C(-7;2)$ depeli üçburçlugyň kütek burçludygyny subut ediň.

Subudy: $|AB| = \sqrt{32}$, $|\mathrm{AC}| = \sqrt{82}$, $|\mathrm{BC}| = \sqrt{194}$.

$|BC|^2 > |AC|^2 + |BC|^2$ $(194 > 32 + 82)$, onda berlen üçburçluk hakykatdan hem kütek burçludyr.

44. $A(2;-5)$, $B(-7;-4)$, $C(-1;6)$ depeli üçburçlugyň görnüşini kesgitläň.

Jogaby: ýiti burçly.

45. $A(0;0)$, $B(4;2)$, $C(-2;4)$ depeli üçburçlugyň gönüburçludygyny subut ediň.

46. $A(-2,4)$ we $B(-4,10)$ nokatlar bilen çäklenen kesimiň ortasynda ýatan C nokadyň koordinatalaryny tapyň.

Jogaby: $C(-3;7)$.

47. $A(-7;5)$ we $B(11;-9)$ nokatlar bilen çäklenen kesimiň ortasynda ýatan C nokadyň koordinatalaryny tapyň.

Jogaby: $C(2;-2)$.

48. Eger AB kesimiň bir ujunyň $A(-5;-7)$ we kesimiň ortasyndaky nokadyň $C(-9;-12)$ koordinatalary belli bolsa, onda ol kesimiň B ujunyň koordinatalaryny tapyň.

Çözülişi: $-9=\dfrac{-5+x^2}{2}$; $-12=\dfrac{-7+y^2}{2}$ deňliklerden taparys: $x_2=-13$; $y_2=-17$.

Jogaby: $B(-13;-17)$.

49. Eger AB kesimiň bir ujunyň $A(-4;2)$ we kesimiň ortasyndaky nokadyň $C(-6;5)$ koordinatalary belli bolsa, onda ol kesimiň B ujunyň koordinatalaryny tapyň.

Jogaby: $B(-8;8)$.

50. Üçburçlugyň üç depesi berlen: $A(-7;4)$, $B(-5;2)$, $C(-6;5)$. Onuň taraplarynyň ortalaryny tapmaly.

Jogaby: $(-6;3)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

51. Üçburçlugyň üç depesi berlen: $A(-4;6)$, $B(-8;9)$, $C(5;-6)$. Onuň taraplarynyň ortalaryny tapmaly.

Jogaby: $\left(-6;\frac{15}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2};0\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

52. Üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynyň koordinatalary berlen: $E(7;8)$, $F(-4;5)$, $K(1;-4)$. Üçburçlugyň depeleriniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi: Goý, A, B, C – üçburçlugyň depeleri, E – AB tarapynyň ortasy, E – AC tarapynyň ortasy, K – BC tarapynyň ortasy bolsun. (2) formula boýunça:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad (*)$$

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2}; \qquad y_E = \frac{y_A + y_C}{2}; \qquad (**)$$

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2}; \qquad y_K = \frac{y_B + y_C}{2}. \qquad (***)$$

$E(7;8)$, $F(-4;5)$, $K(1;-4)$ nokatalaryň koordinatalaryny formulalara goýup, alarys:

$$7 = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad 8 = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad x_A + x_B = 14; \qquad y_A + y_B = 16;$$

$$-4 = \frac{x_A + x_C}{2}; \qquad 5 = \frac{y_A + y_C}{2}; \qquad x_A + x_C = -8; \qquad y_A + y_C = 10;$$

$$1 = \frac{x_B + x_C}{2}; \qquad -4 = \frac{y_B + y_C}{2}. \qquad x_B + x_C = 2; \qquad y_B + y_C = -8.$$

6 sany näbellini kesgitlemek üçin iki sistema alarys:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 14 \\ x_A + x_C = -8 \\ x_B + x_C = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_A + y_B = 16 \\ y_A + y_C = 10 \\ y_B + y_C = -8. \end{cases}$$

Birinji sistemanyň deňlemelerini agzamy-agza goşsak, onda alarys:

$2x_A + 2x_B + 2x_c = 8$ ýa-da $x_A + x_B + x_C = 4$.

Sistemanyň üçünji deňlemesi esasynda $x_B + x_C = 2$, onda $x_A + 2 = 4$. Bu deňlemeden $x_A = 2$. Sistemanyň ikinji deňlemesi esasynda $x_A + x_C = -8$, onda $x_B + (-8) = 4$. $x_B = 12$. Sistemanyň birinji deňlemesi esasynda $x_A + x_B = 14$, onda $x_C + 14 = 4$ bu deňlemeden $x_C = -10$.

Şuňa meňzeş ikinji sistemadan: $y_A = 17$; $y_B = -1$; $y_C = -7$.

Diýmek, berlen üçburçlugyň depeleri: $A(2;17)$, $B(12;-1)$, $C(-10;-7)$.

53. Üçburçlugyň taraplarynyň ortalarynyň koordinatalary berlen: $E(-4;6)$, $F(2;-6)$, $K(0;-4)$. Üçburçlugyň depeleriniň koordinatalaryny tapmaly.

Jogaby: $A(-2;4)$, $B(-6;8)$, $C(6;-16)$.

54. $A(2;4)$, $B(-3;7)$, $C(-6;6)$ – parallelogramyň üç depesi (A we C – garşylykly depeler). Dördünji depäniň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi: Goý, E – parallelogramyň kesişme nokady bolsun. Onda parallelogramyň diagonallary kesişme nokatda deň ýarpa bölünýändigi sebäpli:

$$x_E = \frac{2 + (-6)}{2}; \qquad x_E = -2; \qquad y_E = \frac{4+6}{2}; \qquad y_E = 5.$$

BD diagonal üçin:

$$-2 = \frac{-3 + x_D}{2}; \qquad -4 = -3 + x_D; \qquad x_D = -1,$$

$$5 = \frac{7 + y_D}{2}; \qquad 10 = 7 + y_D; \qquad y_D = 3.$$

Şeýlelikde, $D = (-1;3)$.

55. $A(-6;-4)$, $B(-4;8)$,$C(-1;5)$ – parallelogramyň üç depesi (A we C – garşylykly depeler). Dördünji depäniň koordinatalaryny tapmaly.

Jogaby: $D = (-3;-7)$.

56. Eger $A(2;5)$ we $B(4;9)$ berlen bolsa, onda AB kesimi 1:3 gatnaňykda bölýän nokady tapmaly.

Çözülişi: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + \lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{1 + \lambda}$ formulalar boýunça

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2}, \quad \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot 9}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5 + 3}{\frac{4}{3}} = 6.$$

Diýmek, $C\left(\frac{5}{2};6\right)$.

57. AB kesimiň uçlarynyň koordinatalary $A(-4;8)$ we $B(6;-2)$ berlen. AB kesimi deň üç bölege bölýän nokatalaryň koordinatalaryny tapyň.

Görkezme. C nokat üçin $\lambda = 1/2$; D nokat üçin $\lambda = 2$.

Jogaby: $C\left(-\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$, $D\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$.

58. AB kesimiň uçlarynyň koordinatalary $A(-6;10)$ we $B(-2;-6)$ berlen. AB kesimi 1) $\lambda = \frac{1}{2}$; 2) $\lambda = 2$; 3) $\lambda = \frac{1}{3}$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$ gatnaşykda bölýän nokatlaryň koordinatalaryny tapmaly.

Jogaby: 1) $\left(-\frac{14}{3};\frac{14}{3}\right)$, 2) $\left(-\frac{14}{3};\frac{14}{3}\right)$, 3) $(-5;6)$, 4) $\left(-\frac{22}{5};\frac{18}{5}\right)$.

59. $A(2;-3)$, $B(1;1)$, $C(-6;5)$ depeli üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Görkezme. (4) formulany peýdalanmaly.

Jogaby: $S = 12$ kw. b.

60. $A(-2;4)$, $B(-6;8)$, $C(5;-6)$ üç depesi berlen, üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Jogaby: $S = 6$ kw. b.

61. a) $A(1;8)$, $B(-2;-7)$, $C(-4;-17)$ nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatandygyny görkezmeli.

b) $A(1;5)$, $B(-5;-1)$, $C(-8;-4)$ nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatandygyny görkezmeli.

Görkezme. ABC üçburçlugyň meýdanynyň nola deňdigini görkezmeli.

§ 3. Tekizlikde göni çyzyk

Göni çyzygyň üstünde ýatýan bir $M_0(x_0,y_0)$ nokady alalyň. Şol nokatdan göni çyzyga perpendikulýar $\vec{n}=(A,B)$ wektory geçireliň. Oňa göni çyzygyň **normal wektory**, ýa-da **normaly** diýilýär. Goý, $M(x,y)$ nokat göni çyzygyň islendik nokady bolsun. Onda $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ wektor $\vec{n}=(A,B)$ wektora perpendikulýardyr, ýagny $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$. Bu ýerden:

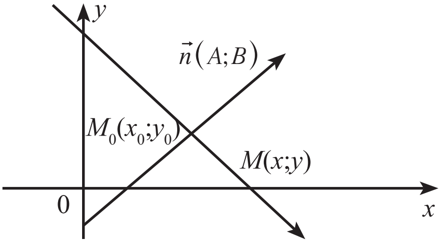
$$(x-x_0)A+(y-y_0)B=0$$

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0$$

deňligi alarys. Bu deňlemäni ýönekeýleşdirip we $C=-x_0A-y_0B$ belgini girizip,

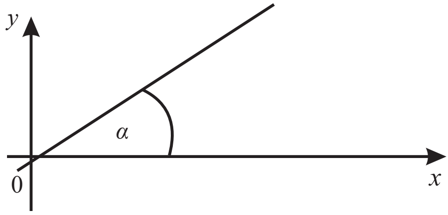
$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

deňlemäni alarys. (1) deňlemä **göni çyzygyň umumy deňlemesi** diýilýär.



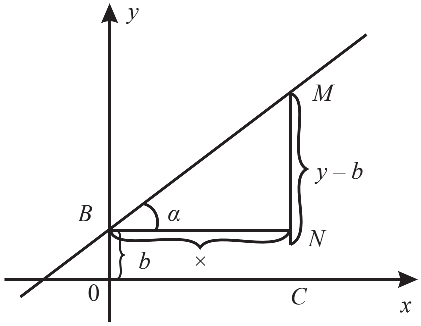
5-nji surat

Goý, käbir göni çyzyk berlen bolsun. Ox okunyň položitel ugry bilen göni çyzygyň arasyndaky α burça göni çyzygyň **ýapgyt burçy** diýilýär.



6-njy surat

$0 \le \alpha \le \pi$ diýip kabul edeliň. $k = \mathrm{tg}\alpha$ ululyga göni çyzygyň **burç koeffisiýenti** diýilýär. Eger $\alpha = 0$ bolsa, onda göni çyzyk Ox okuna parallel bolar, bu ýagdaýda $k = 0$. Eger $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda göni çyzyk Ox okuna perpendikulýar bolar, bu ýagdaýda $k = \mathrm{tg}\alpha$ ululyk manysyny ýitirýär. Şeýle ýagdaýlarda göni çyzygyň burç koeffisiýenti tükeniksizlige deň diýlip kabul edilýär. Goý, $M(x,y)$ nokat göni çyzygyň üstünde ýatan islendik nokat bolsun we $k \ne 0$.



7-nji surat

ΔBNM gönüburçly üçburçlugy guralyň. $0B = b$ bolsun, onda şol üçburçlukdan şeýle ululyklary taparys:

$$\mathrm{tg}a = \frac{|MN|}{|BN|},\ |MN| = |CM| - |CN| = y - b, \quad |BN| = x.$$

Şeýlelikde, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y-b}{x}$ ýa-da $k = \dfrac{y-b}{x} \Rightarrow$

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Şu deňlemä **göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi** diýilýär.

Eger $k = 0$ bolsa, onda $y = b$ bolar, ol Ox okuna parallel göni çyzygyň deňlemesidir. Käbir ýagdaýlarda göni çyzygyň burç koeffisiýenti we onuň üstünde ýatýan bir nokat belli bolýar. M nokadyň koordinatalary göni çyzygyň deňlemesini kanagatlandyrýar. Olary şol deňlemä goýup alarys:

$$y_0 = kx_0 + b,\ \ y - y_0, \text{ tapalyň:}$$

$$y - y_0 = kx + b - kx_0 - b \Rightarrow y - y_0 = (x - x_0). \qquad (3)$$

Getirip çykarylan deňlemä k burç koeffisiýentli we berlen $M(x_0, y_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi diýilýär. Eger (2) deňlemede k burç koeffisiýenti üýtgeýän ululyk hasap edilse, onda biz $M(x_0,y_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzyklaryň dessesiniň deňlemesini alarys.

Eger göni çyzyk iki $M_1(x_1,y_1)$ we $M_2(x_2,y_2)$ nokatlaryň üstünden geçýän bolsa, onda bir nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini ulanalyň we berlen nokatlaryň koordinatalaryny şol deňlemede goýalyň:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad \text{we} \quad y_2 - y_1 = \mathrm{k}(x_2 - x_1).$$

k burçuň koeffisiýentini tapalyň:

$$k = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}.$$

k burçuň koeffisiýentiniň bahasyny göni çyzygyň deňlemesinde ornunda goýsak

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{4}$$

berlen iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini alarys.

(1) deňlemedäki gatnaşyklary t bilen belgiläp alarys:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t, \;\; y - y_1 = (y_2 - y_1)t, \;\; x - x_1 = (x_1 - x_1)t$$

bu ýerden:

$$\begin{cases} y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ x = x_1 + (x_2 - x_1)t \end{cases} \tag{5}$$

alarys. (4) deňlemelere göni çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär.

Goý, indi göni çyzyk koordinata oklaryndan degişlilikde a we b uzynlykly kesimleri kesip alýan bolsun. Onda $M_1(O,b)$ we $M_2(a,O)$ nokatlaryň üstünden geçýän gönüniň deňlemesini (3) formula görä gurup,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{6}$$

9. sargyt № 1573

görnüşli deňlemäni alarys. Bu deňlemä göni çyzygyň koordinata oklaryndaky kesimler arkaly deňlemesi dýilýär.

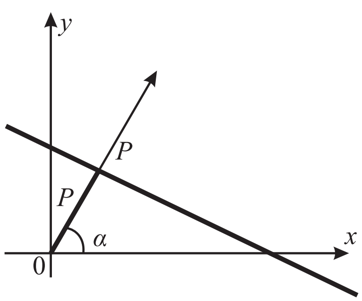
Eger $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ göni çyzyklar berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky burç aşakdaky formula bilen kesgitlenýär

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (7)$$

Eger göni çyzyklaryň deňlemeleri umumy deňlemeler boýunça berlen bolsa, onda olaryň arasyndaky burç aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_2^1 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (8)$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (9)$$



8-nji surat

deňlemä göni çyzygyň normal deňlemesi diýilýär. Bu deňlemede p – koordinatalaryň başlangyjyndan göni çyzyga inderilen perpendikulýaryň (normalyň) uzynlygy, α – $\overrightarrow{OP}$ perpendikulýaryň we Ox okuň položitel ugrunyň arasyndaky burç. Göni çyzygyň (1) umumy deňlemesini normal deňlemesine geçirmek üçin (1) deňlemäniň ähli agzalaryny

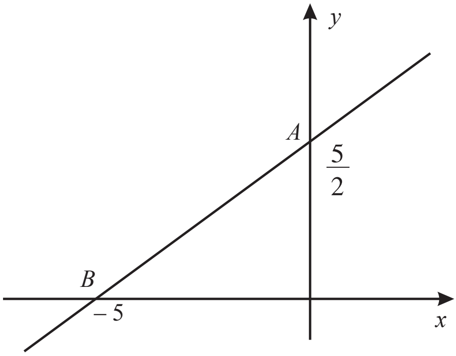
$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normirlenen köpeldijä köpeltmeli (alamaty C-niň alamatyna garşy alynýar. Eger $C = 0$ bolsa, onda islendik alamaty almak bolýar) .

62. Göni çyzyklary guruň:

a) $x - 2y + 5 = 0$, b) $2x + 3y = 0$, ç)$5x - 2 = 0$, d) $2y + 7 = 0$.

Çözülişi: a) eger $x = 0$ bolsa, diýmek $y = 5/2$, eger-de $y = 0$ bolsa, $x = -5$ alarys. Diýmek gözlenýän göni çyzyk $A\left(0;\frac{5}{2}\right)$ we $B(5;0)$ nokatlardan geçýär. A we B nokatlardan göni çyzygy geçirýäris.



9-njy surat

$2x + 3y = 0$ göni çyzyk $O(0;0)$ nokatdan geçýär. Goý, $x = 3$ bolsun. Onda $6 + 3y = 0$ ýa-da $y = -2$;

$M(3;-2)$ nokadyny alýarys, O we M nokatlardan göni çyzyk geçirýäris.

x – görä göni çyzygyň deňlemesinden çözüp alarys $x = \frac{2}{5}$. Bu göni çyzyk ordinata okuna parelleldir we abssissa okundan $\frac{2}{5}$-ä deň kesimi kesýär.

Göni çyzygyň deňlemesini $y = -\frac{7}{2}$ görnüşinde ýazalyň. Bu göni çyzyk abssissa okuna paralleldir.

63. Göni çyzyklary guruň: a) $3x - y + 6 = 0$, b) $5x + 7y = 0$, ç) $3x - 4 = 0$, d)$5y + 4 = 0$.

64. a) $2x - 5y - 10 = 0$, b) $2x + 5y = 0$, ç) $y = 7$, d) 5)$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$. Göni çyzyklaryň her biriniň $y = kx + b$ deňlemesinde k we b parametrlerini tapmaly.

65. a) $3x - 5y = 15$, b) $5x - 3y + 10 = 0$, göni çyzyklaryň deňlemelerini oklardaky kesimler arkaly deňlemelerine geçiriň.

Çözülişi: a) $3x - 5y = 15 \rightarrow \frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} = 1;\ \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1.$

Jogaby: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{3}{10}} = 1.$

66. $12x - 5y - 60 = 0$ umumy görnüşindäki deňleme bilen berlipdir. Onuň

a) burç koeffisiýentli deňlemesini;
b) oklardaky kesimler bilen berlen deňlemesini ýazyň.

Jogaby: a) $y = \frac{12}{5}x - 12$, b) $\frac{x}{5} - \frac{y}{12} = 1$.

67. $20x + 12y = 0$ göni çyzygyň deňlemesini oklardaky kesimler görnüşli deňleme bilen ýazyp bolarmy?

68. $5x + 5y - 7 = 0$ göni çyzyk abssissa okuň položitel ugry bilen nähili burç emele getirýär?

69. $2x + 5y - 20 = 0$ göni çyzyk we koordinata oklar üçburçluk emele getirýärler. Şol üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Jogaby: 20.

70. Käbir harydyň 100 sanysyny öndürmek üçin önümçiligiň çykdajysy 300 manada deň, 500 sanysyny öndürmek üçin 600 manada deň. Eger çykdajylaryň funksiýasy çyzykly bolsa, onda 400 sanysyny ondürmek üçin önümçiligiň çykdajylaryny hasaplamaly.

Çözülişi: Göni çyzygyň iki nokady berlen: $M_1(100;300)$, $M_2(500;600)$, iki nokatdan geçýän göni çyzygyň formulasyny ulanyp:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \rightarrow \frac{x - 100}{500 - 100} = \frac{y - 300}{600 - 300},$$

$$300(x - 100) = 400(y - 300), \quad 400y - 120000 = 300x - 30000;$$

$$400y = 300x + 90000; \quad y = \frac{3}{4}x + 225.$$

Eger $x = 400$ bolsa, onda $y = 3/4 \cdot 400 + 225 = 525$ ýa-da gözlenýän ululyk 525-e deň.

71. Käbir harydyň 50 sanysyny satyp 50 manat girdeji alynýar, 100 sanysyny satyp 200 manat girdeji alynýar, eger girdejiniň funksiýasy çyzykly bolsa, onda 500 sany harydyň satylmagyndan näçe girdeji alyp bolar?

Jogaby: 1400.

72. Eger rombuň uly diagonaly hökmünde Ox oky, kiçi diagonaly hökmünde Oy oky alynsa, diagonallary 10 *sm* we 6 *sm* bolan rombuň taraplarynyň deňlemesini düzüň.

Jogaby: $3x - 5y + 15 = 0$; $3x + 5y - 15 = 0$;
$3x - 5y - 15 = 0$; $3x + 5y + 15 = 0$.

73. $M(-4;3)$ nokatdan geçýän we koordinata burçundan meýdany 3-e deň bolan üçburçlugy kesýän göni çyzygyň deňlemesini guruň.

Görkezme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ deňlemäni we $S_\Delta = \frac{|ab|}{2}$ formulany peýdalanmaly.

Jogaby: $3x + 2y + 6 = 0$; $3x + 8y - 12 = 0$.

74. $O(0;0)$ we $A(-3;0)$ nokatlar berlipdir, OA kesimli parallelogram gurlupdyr. Onuň diagonallary $B(0;2)$ nokatda kesişýärler. Parallelogramyň taraplarynyň we diagonallarynyň deňlemesini düzüň.

Jogaby: $y = 0$; $y = 4$; $4x - 3y = 0$; $4x - 3y + 12 = 0$.
$2x - 3y + 6 = 0$; $x = 0$.

75. $M(4; 6)$ nokatdan geçýän we koordinata oklaryndan, meýdany 6 deň üçburçlugy kesýän göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $3x - y + 6 = 0$; $3x - 4y - 12 = 0$.

76. $M(4;-5)$ nokatdan geçýän we koordinata oklaryna parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $y - 4 = 0$ we $x + 5 = 0$.

77. Koordinata başlangyjyndan geçýän we Ox oky bilen $60°$ burç emele getirýän göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: Gözlenýän göni çyzygy $y = kx + b$ görnüşde ýazalyň. $O(0;0)$ nokadyň koordinatalaryny deňlemede goýup alarys: $0 = k \cdot 0 + b$; $b = 0$;

emma $k = \text{tg } 60^0 = \sqrt{3}$, diýmek gözlenýän göni çyzygyň deňlemesi $y = \sqrt{3}x$.

78. $M(7;5)$ nokatdan geçýän we Ox oky bilen 45° burç emele getirýän $y = kx + b$ göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $y = x - 2$.

79. $y = -5x + 3$ we $y = \frac{-2}{3}x + 7$ deňlemeler bilen berlen göni çyzyklaryň arasyndaky ýiti burçy tapyň.

Çözülişi: $k_1 = -5$, $k_2 = \frac{-2}{3}$,

$$\text{tg}\gamma = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{\frac{-2}{3} - (5)}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)\cdot(-5)}\right| = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{10}{3}} = 1$$

ýa-da $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

80. $2x - 3y + 5 = 0$ we $14x - 21y - 13 = 0$ göni çyzyklaryň paralleldigini görkeziň.

Çözülişi: göni çyzyklaryň burç koeffisiýentli deňlemesini ýazalyň.

$y = \frac{2}{3}x + 5$ we $y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{21}$; $k_1 = \frac{2}{3}$; $k_2 = \frac{2}{3} \to k_1 = k_2$ göni çyzyklar paralleldir.

81. $2x - 7y + 5 = 0$ we $21x + 6y - 2 = 0$ göni çyzyklaryň perpendikulýardyklaryny görkeziň.

Çözülişi: $y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$ we $y = -\frac{7}{2}x + 1/3$, $k_1 = \frac{2}{7}$;

$$k_2 = -\frac{7}{2} \to k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

göni çyzyklar perpendikulýardyr.

82. Berlen göni çyzyklaryň arasyndaky ýiti burçy kesgitläň.

1) $y = 1/2x - 3$ we $y = 3x + 4$;

2) $y = 3x - 2$ we $y = 3x + 2$;

3) $y = 2x - 2$ we $y = -1/2\,x + 1$;

4) $2x + 3y + 1 = 0$ we $4x + 6y + 1 = 0$;

5) $2x - y + 3 = 0$ we $x + 3y + 1 = 0$;

6) $x + 3y = 0$ we $4x + 3y - 3 = 0$;

7) $5y + 1 = 0$ we $x + 4y + 7 = 0$;

8) $x = 4$; $y = 2x - 3$.

Jogaplary: 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 0; 5) π – arctg 7; 6) arctg 0,5; 7) arctg 0,25; 8) $\frac{\pi}{2}$ – arctg 2.

83. Göni çyzyklaryň arasynda haýsylary parallel ýa-da perpendikulýar?

$$3x - 2y + 7 = 0; \quad 6x - 4y - 9 = 0; \quad 6x + 4y - 5 = 0;$$
$$2x + 3y - 16 = 0.$$

84. $2x + 5y - 10 = 0$ göni çyzygyň koordinata oklar bilen kesişýän nokatlaryndan bu göni çyzyga perpendikulýar dikeldilipdir. Bu perpendikulýarlaryň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: Berlen göni çyzyk Ox we Oy oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmak üçin aşakdaky sistemalary çözmeli:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Bu sistemalardan $A(5;0)$, $B(0;2)$. Berlen göni çyzygyň deňlemesini burç koeffisiýenti görnüşine özgerdeliň: $y = -\frac{2}{5}x + 2$. Bu deňlemäniň burç koeffisiýenti $k_1 = -\frac{2}{5}$. Goý, $y = kx + b$ göni çyzyk berlen göni çyzyga perpendikulýar bolsun. Onda $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$.

Eger $y = \frac{2}{5}x + b$ perpendikulýar $A(5;0)$ nokatda dikeldilen bolsa, onda $0 = \frac{2}{5} \cdot 5 + b$; $b = -\frac{25}{5}$. Diýmek perpendikulýaryň deňlemesi

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{25}{5}.$$

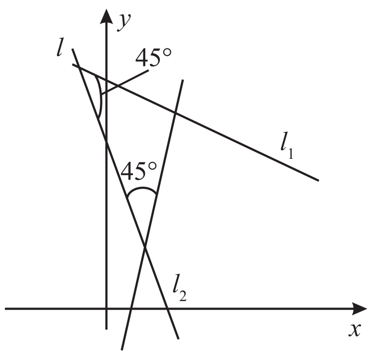
Eger $y = \frac{5}{2}x + b$ perpendikulýar $B(0;2)$ nokatda dikeldilen bolsa, onda

$$2 = \frac{5}{2} \cdot 0 + b; \quad b = 2.$$

Diýmek perpendikulýaryň deňlemesi $y = 5/2\,x + 2$.

85. $5x + 2y = 4$ göni çyzyk bilen 45^0 burç emele getirýän we $M(2;3)$ nokatdan geçýän göni çyzyklaryň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: Gözlenýän göni çyzyklar iki sanydyr. Suratda berlen l göni çyzyk we gözlenýän l_1 we l_2 göni çyzyklar görkezilen. Bir nokatdan geçýän göni çyzyklaryň dessesiniň deňlemesini ulanalyň.



10-njy surat

$y - y_0 = k(x - x_0)$ meseläniň şerti boýunça $y - 3 = k(x - 2)$

indi diňe k-ny tapmaly. $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

formulany peýdalanyp alarys:

$$\mathrm{tg}\,45^0 = \left(k + \frac{5}{2}\right)/\left(1 - \frac{5}{2}x\right).$$

Iki ýagdaýa seretmeli

$$1)\ 1 = \left(k + \frac{5}{2}\right)/\left(1 - \frac{5}{2}\right), \quad 1 - \frac{5}{2}k = k = \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}k = -\frac{3}{2}, \quad k = \frac{7}{3}$$

$$y - 3 = 7(x + 2)/3$$

$$2)\ 1 = -\left(k + \frac{5}{2}\right)/\left(1 - \frac{5}{2}\right), \quad 1 - \frac{5}{2}k = -k - \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2} = \frac{3}{2}k, \quad k = \frac{7}{3}$$

$$y - 3 = 7(x - 2)/3, \quad 3y - 9 = 7x - 14, 7x - 3y - 5 = 0$$

gözlenýän deňleme: $3x + 7y - 27 = 0$ we $7x - 3y - 5 = 0$.

86. $y = 14 - 2x$ göni çyzyk bilen $45°$ burç emele getirýän we koordinata başlangyjy nokatdan geçýän göni çyzyklaryň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $y = -\frac{1}{3}x$.

87. $3x - 2y + 1 = 0$ we $2x + 5y - 12 = 0$ göni çyzyklaryň kesişýändigini görkeziň we kesişme nokadyny tapyň.

Jogaby: $(11; -2)$.

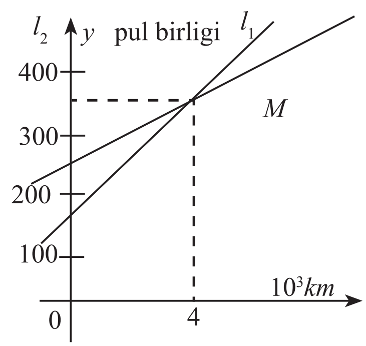
88. Iki görnüşli ulag bilen çekilýän ýük üçin çykdajylar $y = 150 + 50x$ we $y = 250 + 25x$ funksiýalar bilen aňladylýar.

Bu ýerde ((x ýüküň uzaklyga akitmelidigi (ýüz kilometr), pul birliginde ulag çykdajylar). Haýsy uzaklykdan başlap ikinji ulagy ulanmaga tygşytly bolar?

Çözülişi: $\begin{cases} y = 150 + 50x \\ y = 250 + 25x \end{cases}$

Deňlemeler sistemasyny çözüp alarys. Kesişme nokatlaryny tapalyň.

Suratda görünýär: aralyk 400 *km* uly bolsa ulagyň ikinji görnüşini ulanmak tygşytlydyr.



11-nji surat

89. Iki dükanda käbir haryt satylanda girdeji $y = -2 + 3x$ we $y = -3 + \frac{16}{5}x$ funksiýalar bilen aňladylýar. Bu ýerde x – harydyň sany (birligi), y – müň manatda girdeji.

Harydyň haýsy sanyndan başlap ikinji dükanda satmak amatly bolýar?

90. $M(2;1)$ nokatdan $3x + 4y - 98 = 0$ göni çyzyga çenli uzaklygy tapyň.

Çözülişi: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|32 + 41 - 98|}{9 + 16} = 17{,}6.$

91. Üçburçlugyň taraplary $x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC), deňlemeler bilen berlipdir. B depeden geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyny tapyň.

Çözülişi: B nokadyň koordinatalaryny kesgitläliň:

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 4x - y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{onda } B(1;2)$$

B nokatdan AC göni çyzyga çenli uzaklygy tapylýan formulany peýdalanyp BD beýikligiň uzynlygyny tapalyň.

$$|BD| = \frac{|6\cdot 1 + 8\cdot 2 - 35|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1{,}3.$$

92. $3x - 4y - 6 = 0$ we $6x - 8y + 28 = 0$ iki parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

Çözülişi: Meseläni bir göni çyzygyň islendik nokadyndan beýleki göni çyzyga çenli uzaklygy tapmaklyga getirilýär. Goý, mysal üçin, birinji göni çyzygyň deňlemesinde $y = 0$ bolsa, onda $x = 2$. Bu ýerden $M(2;0)$ birinji göni çyzygyň nokadydyr. Bu nokatdan ikinji göni çyzyga çenli uzaklyk,

$$d = \frac{|62 - 80 + 28|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{40}{10} = 4 \text{ deňdir.}$$

93. $15x + 36y - 105 = 0$ we $5x + 12y + 30 = 0$ göni çyzyklaryň paralleldiklerini görkeziň, we olaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

Jogaby: $d = 5$.

94. $A(5;2)$, $B(2;3)$, we $C(0; -3)$ depeli üçburçlugyň AD beýikliginiň uzynlygyny tapyň.

Jogaby: $\sqrt{10}$.

95. Göni çyzyklaryň deňlemelerini normal görnüşinde ýazmaly:

1) $5x - 12y - 10 = 0$;

2) $3x + 4y = 0$.

Çözülişi: 1) Birinji deňlemede $C = -10$, onda M normirlenen köpeldiji «+» alamatly alynýar.

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Berlen deňlemäniň iki tarapyny hem $\frac{1}{13}$ – e köpeldip göni çyzygyň normal deňlemesini alarys:

$$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{10}{13} = 0.$$

2) Ikinji deňlemede $C = 0$, onda M normirlenen köpeldiji islendik alamatly alynýar.

$$M = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}.$$

Berlen deňlemäniň iki tarapyny hem $\frac{1}{5}$-e köpeldip göni çyzygyň normal deňlemesini alarys:

$$\frac{5}{13}x - \frac{4}{5}y = 0.$$

96. Göni çyzyklaryň deňlemelerini normal görnüşinde ýazmaly:

1) $2x - 3y - 5 = 0$; 2) $x + y + 1 = 0$;

3) $y = 2x + 5$; 4) $y = -3x + 2$;

5) $3x - 4y - 15 = 0$.

Jogaplary: 1) $\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$;

2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$;

4) $\frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y - \frac{2}{\sqrt{10}} = 0$; 5) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 1 = 0$.

97. Göni çyzyklaryň deňlemeleri berlen:

1) $2x - 3y + 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0$;

3) $-\frac{3}{\sqrt{5}}x + 4/5\ y - 2 = 0$; 4) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 1 = 0$;

5) $x - 5 = 0$; 6) $y - 7 = 0$;

Deňlemeleriň haýsylary normal görnüşde ýazylan?

Görkezme. $ax + by + c = 0$ normal deňleme bolar ýaly $a^2 + b^2 = 1$ we c otrisatel bolmaly.

Jogaby: 3, 4, 5, 6 deňlemeler normal görnüşde ýazylan.

Amortizasiýanyň hasaplanyşy

Edaranyň satyn alan enjamlary üçin amortizasiýany birnäçe usul bilen hasaplap bolýar. Olaryň iň ýönekeýi çyzykly modeli. Bu modeli ulanyp, edaranyň satyn alan enjamlarynyň bahasyny deň bölekler bilen önümçiligiň çykdajylaryna salýar. Eger enjamlaryň başlangyç bahasy P we galyndy bahasy S we ulanuş wagty T belli bolsa, onda her ýyldaky amortizasiýa

$$a = \frac{P - S}{T}$$

formula arkaly hasaplanýar.

Enjamy t ýyl ulanylan soň onuň bahasy

$$V = P - \frac{P - S}{T}t = P - at.$$

Soňky formula göni çyzygy kesgitleýär.

Çykdajylaryň çyzykly modeli. Çykdajysyz nokat

Islendik önümiň x birligi öndürilende önümçiligiň ähli çykdajylary $C(x)$ iki goşulyjydan ybarat.

1. Hemişelik (fiksirlenen) çykdajylar.

2. Üýtgeýän çykdajylar.

Bu çykdajylar: $C(x) = F + V$

Hemişelik çykdajylar F – bu çykdajylar önümiň näçe birliginiň öndürlenine bagly däldir. Oňa amortizasiýa, jaýyň arendasy, kreditiň göterimi we ş.m degişlidir.

Üýtgeýän çykdajylar F – bu çykdajylar gös-göni önümiň näçe birliginiň bardygyna bagly. Ol çig malyň, işçi güýjüň bahasyny we ş.m saklaýar.

Ýönekeý halda üýtgeýän çykdajylar öndürilen x sanyna göni proporsionaldyr. Proporsionallyk koeffisiýenti a –önümiň bir birligini öndürmek üçin üýtgeýän çykdajydyr.

Eger b bilen hemişelik çykdajylary belgilesek, onda çykdajylaryň çyzykly modeli diýip atlandyrylan deňlemäni alarys:

$$C(x) = b + ax,$$

x – öndürende edaranyň ähli girdejisi:

$$R(x) = px$$

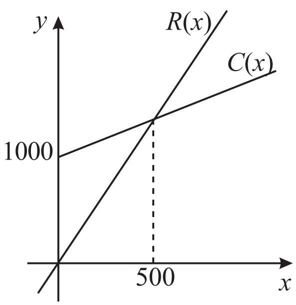
formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde p – harydyň birliginiň bahasy. Bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $\{x: x \geq 0\}$ we $R(0) = 0$ bolýandygy anykdyr.

Eger harydyň x birligi öndürilen we satylan bolsa, onda girdeji $P(x)$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

98. Edaranyň hemişelik çykdajylary aýda 10 müň manat, harydyň birine üýtgeýän çykdajylary – 30 manat, harydyň birinden gelýän girdejisi 50 manat bolsun. Girdeji funksiýany düzmeli we onuň grafigini gurmaly.



12-nji surat

Çözülişi: $C(x) = F + V$; $F = 10000$, $V = 30x$

$$C(x) = 10000 + 30x; \; R(x) = 50x.$$

Şeýlelikde,

$$P(x) = 50x - 30x - 10000 = 20x - 10000.$$

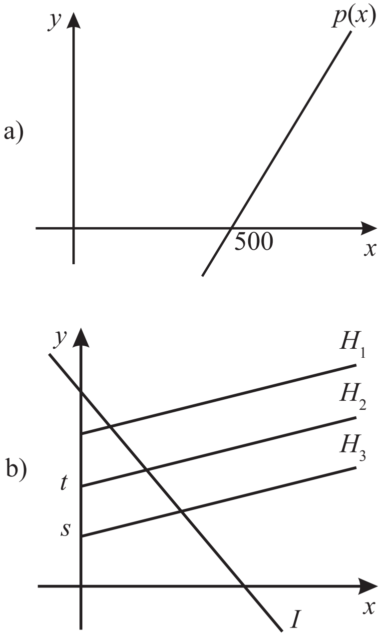
x-iň kiçi bahalarynda girdeji otrisatel bolýar ýa-da önümçilik çykdajylydyr.

x-iň artany bilen girdeji hem artýar, $x = 500$ bolanda funksiýa nola deň bolýar we ondan soň funksiýa položitel bahalara eýe bolýar.

Girdeji nola owrülýän nokada çykdajysyz nokat diýilýär.

Isleg we hödürleme kanunlary

Satuw bazarda alyjylaryň satyn alýan harydynyň sany ol harydyň bahasyna baglydyr. Satyn alnan harydyň sanynyň we onuň bahasynyň gatnaşygyna isleg kanuny (funksiýasy) diýilýär.



13-nji surat

Öndürijileriň satmaga goýlan harydynyň sany şol harydyň bahasyna baglydyr. Satmaga goýlan harydyň mukdarynyň we onuň bahasynyň gatnaşygyna hödürleme kanuny (funksiýasy) diýilýär.

Ýönekeý halda bu funksiýalar çyzyklydyr. Isleg kanuny I, hödürleme kanuny H bilen belgilenen, x – harydyň mukdary, p – harydyň bahasy.

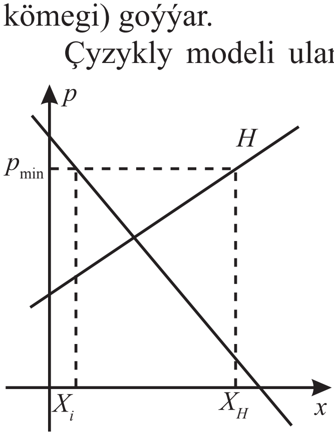
Islegiň deňlemesini onuň grafiginda ýatan iki nokat boýunça düzüp bolar. Şonuň üçin iki nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ulanmaly.

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Isleg we hödürleme göni çyzyklaryň kesişme (x_0, y_0) nokadyna bazar deňagramlylyk (durnuklylyk) nokady diýilýär. p_0– deň agramly baha, x_0 – deň agramly mukdary (satmagyň göwrümi). Eger isleg kanuny $P(x)$ belli bolsa onda ähli girdejiler $R = xpx$-iň üsti bilen aňladyp bolýar.

Köplenç, döwlet tarapyndan haryda salgyt t ýa-da supsidiýa (pul kömegi) goýýar.

Çyzykly modeli ulanylanda isleg diňe bazardaky harydyň bahasyny p-i kesgitlenýär we hödürleme-diňe üpjün edijileriň bahasy P_H bilen kesgitlenýär. Bu bahalar bir-biri bilen aşakdaky deňlemeler bilen bagly:



14-nji surat

$$P_i = P_H + t$$

$$P_i = P_H - S,$$

bu ýerde t we S – harydyň birliginde salgyt we subsidiýa.

Şeýlelik-de salgyt we subsidiýa girizilende islegiň I deňlemesi üýtgemeýär, hödürleme funksiýanyň grafigi t birlik ýokary galar (H_1) ýa-da S birlik aşaklanar (H_2).

Käwagt subsidiýanyň ýerine döwlet minimal baha girizýär. Bu ýagdaýda döwlet harydyň artykmajyny $x_H - x_i$ özü satyn alýar.

Käbir salgytlar, mysal üçin GGS (goşmaça gymmatlyga salgyt) harydyň bahasyna proporsionaldyr. Bu ýagdaýda hödürlemäniň grafiginiň Ox okuň burç ýapgytlygy üýtgeýär.

99. Käbir harydyň isleg we hödürleme kanunlary

$$P = -2x + 12$$

$$P = x + 3$$

deňleme bilen kesgitlenýär.

a) Bazar deňagramlylygyň nokadyny tapyň.

b) 3-e deň salgydyň girizilenden soň deňagramlylyk nokadyny tapyň.

ç) satma göwrümi 2 birlige galdyrmak üçin nähili subsidiýa bolmaly?

d) proporsional 20%-e deň salgyt girizilýär. Döwlet girdejisini tapyň we täze deňagramlyk nokady tapyň.

e) hökümet 7-ä deň mineral bahany tassyklady artykmaç harydyň satyn almagyna näçe çykdajy çykar?

Çözülişi: a) deňagramlylyk M nokady tapalyň :

$$x + 3 = -2x + 12; \quad x = 3, \quad p = 6.$$

$M(3, 6)$ nokat – deňagramly nokat.

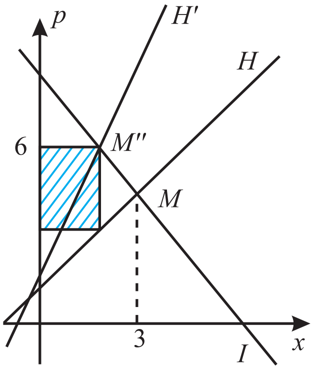
b) Eger $t = 3$ salgyt girizilse, onda deňagramlylyk nokadyny tapmak üçin deňlemeler sistemasy aşakdaky görnüşi alar.

$$\text{I: } P_i = -2x + 12$$

$$\text{H: } P_H = x + 3$$

$$P_i = P_H + 3.$$

Bazar bahasy P_i we üpjün edijileriň bahasy bilen gatnaşygy göz öňüne tutup, bazar deňagramlylyk nokady tapmak üçin aşakdaky sistemany alarys.



15-nji surat

$$\begin{cases} P = -\,2x + 12 \\ P = x + 6 \end{cases}$$

Bu deňlemeler sistemasyny çözüp, täze deňagramlylyk nokady $M(2{,}8)$ alarys. Diýmek, salgyt girizilenden soň, deňagramlylyk baha 2 birlik artdy, emma deňagramly mukdary 1 birlik kemeldi.

ç) Eger subsidiýa goýberilen bolsa, onda deňagramlylyk nokady tapmak üçin aşakdaky görnüşi alar:

$$P_i = -\,2x + 12$$

$$H : P_H = x + 3$$

$$P_i = P_H - S.$$

Söwdanyň täze göwrümi 5 (3 + 2) birlige deň. $x = 5$ sistemada goýup alarys:

$$P_i = 2,\;\; P_H = 5,\;\; S = P_H - P_i = 3$$

d) eger salgyt 20%-e deň bolsa, onda ähli bazar bahasy 120% bolar, onda 100% üpjün edijiler alýar, 20%-ni bolsa döwlet alýar. Şeýlelikde, üpjün edijiler

$$P_H = \frac{100}{120}\,Pi = \frac{5}{6}\,P_i.$$

Isleg deňlemesi üýtgeýär, hödürleme deňleme bolsa: $P_H = \dfrac{5}{6}P_i$

$$\begin{cases} P_i = -\,2x + 12 \\ \dfrac{5}{6}P_i = x + 3. \end{cases}.$$

Bu sistemany çözüp, täze M deňagramlylyk nokady alarys:

$$-\,2x + 12 = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5};\quad x = 2\frac{5}{8}$$

$$P_i = 6\frac{3}{4};\quad M\left(2\frac{5}{8};\;\; 6\frac{3}{4}\right)$$

Hökümediň girdejisi R ştrihlenen gönüburçluguň meýdanyna deň:

$$R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{6} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64}$$

e) Eger minimal baha goýlan bolsa, onda isleg we hödürleme deňlemelerden islegiň we hödürlemäniň göwrümlerini tapmak bolýar. Olaryň tapawudyny hökümet satyn alýar. Eger $p = 7$ bolsa, onda:

$$X_H = P - 3 = 7 - 3 = 4$$

$$X_i = \frac{12 - P}{2} = \frac{12 - 7}{2} = 2,5.$$

Diýmek, hökümediň çykdajylary:

$$(X_H - X_i)P = (4 - 2,5)7 = 10,5.$$

Dürli meseleler

100. $12x + 9y - 17 = 0$ we $3x + 4y + 11 = 0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: $\frac{12x + 9y - 17}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \pm\frac{3x + 4y + 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$.

Ýönekeýleşdirip alarys: $21x + 21y + 16 = 0$ we $3x - 3y - 50 = 0$.

101. $4x + 2y + 7 = 0$ we $2x - 4 + 15 = 0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň bissektrisasynyň deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: $\frac{4x + 2 + 7}{\sqrt{20}} = \pm\frac{2x - 4 + 15 = 0}{\sqrt{20}}$.

Ýönekeýleşdirip alarys: $x + 3y - 4 = 0$ we $3x - y + 11 = 0$.

102. Kwadratyň iki çatyk depesi $A(1;4)$ we $B(4;5)$ berlen. Beýleki iki depesini tapmaly.

Jogaby: $C(5;2)$, $D(0;7)$ ýa-da $C(3;8)$, $D(2;1)$.

103. $2x + 3y + 6 = 0$ göni çyzyga parallel bolan we koordinata burçdan meýdany 3 *kw* birlige deň bolan üçburçluk kesip alýan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $2x + 3y + 6 = 0$ ýa-da $2x + 3y - 6 = 0$.

10. sargyt № 1573

104. Parallelogramyň iki tarapy $x + 2y + 1 = 0$ (AB), $2x + y - 3 = 0$ (AD) we diagonallarynyň kesişýän nokady $N(1;2)$ berlen. Parallelogramyň beýleki iki tarapynyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $2x + y - 5 = 0$ (BC), $x + 2y - 11 = 0$ (CD).

105. M_1 $(4; -3)$ we M_2 $(2; -1)$ nokatlardan deň uzaklykda ýatan we $2x + y - 1 = 0$ göni çyzykdan 2 birlik uzaklykda ýatan P nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

Jogaby: $x_1 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$; $y_1 = -3 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$ ýa-da $x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}$; $y_1 = -3 - \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

106. Üçburçlugyň beýiklikleriniň deňlemesi $2x - 3y + 1 = 0$ we $x + y = 0$ hem-de depeleriniň biri $A(1,2)$ berlen. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $3x + 2y - 7 = 0$ (AC), $x - y + 1 = 0$ (AB),

$$2x + 3y + 7 = 0(BC).$$

107. Üçburçlugyň taraplarynyň ortalary $A(1;2)$, $B(7;4)$, $C(3;-4)$. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $2x - y = 0$; $3x + y - 25 = 0$; $x - 3y - 15 = 0$.

108. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemeleri $x + y - 1 = 0$ (AB) we $y + 1 = 0$ (BC) we onuň medianalarynyň kesişme $N(-1;0)$ nokady berlen. Üçünji AC tarapynyň meýdanyny tapmaly.

Jogaby: $x - y + 3 = 0$.

109. $x - y - 1 = 0$ we $x + 2y - 2 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan we $M(-1;1)$ nokatdan geçýän berlen göni çyzyklaryň kesişme nokadyny tapmazdan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

110. $x + y - 1 = 0$ we $x + 2y + 1 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan geçýän we Oy okunyň otrisatel tarapyndan 2 birlik kesip alýan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $y + 2 = 0$.

111. $x + 2y - 11 = 0$ we $2x + y - 2 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan geçýän we koordinatalar başlangyjyndan 5 birlik uzakda ýerleşen göni çyzygyň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $3x + 4y - 25 = 0$.

112. $2x + 5y + 8 = 0$ we $3x - 4y - 7 = 0$ göni çyzyklaryň kesişme nokadyndan geçýän we $y = 4x + 3$ göni çyzyk bilen 45° burç emele getirýän göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $69x - 115y - 199 = 0$ we $115x + 69y + 99 = 0$.

113. Ýagtylygyň şöhlesi $C(2;3)$ nokatdan geçip, $x + y + 1 = 0$ göni çyzykdan serpilýär we (1;1) nokatdan geçýär. Gaçýan we serpigýän şöhleleriň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $5x - 4y + 2 = 0$ – gaçýan şöhle, $4x - 5y + 1 = 0$ – serpigýän şöhle.

§ 4. Ikinji tertipli egri çyzyklar

Töwerek.

Berlen nokatdan deň uzaklykda ýatan geometrik nokatlaryň köplügine *töwerek* diýilýär. Berlen nokada töweregiň merkezi we deň uzaklyga töweregiň radiusy diýilýär.

Töweregiň normal deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

Bu ýerde x_0, y_0 – töweregiň merkeziniň koordinatalary, R – töweregiň radiusy.

Bu deňlemede ýaýlary açyp, töweregiň umumy deňlemesini alýarys:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

bu ýerde $D = -2x_0$, $E = -2y_0$, $F = -x_0^2 - y_0^2 - R$.

114. Merkezi $C(-2; 3)$ nokatda we radiusy 5-e deň bolan töweregiň deňlemesini ýazyň. Töweregi guruň. M_1 (2; 6), M_2 (1; 7), M_3 (0; 4) nokatlaryň töwerege degişlidigini kesgitläň.

Jogaby: M_1, M_2 nokatlar töweregiň üstünde ýatýar, M_3 nokat ýatmaýar.

115. $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny tapmaly. Töweregi gurmaly.

Çözülişi: x we y üýtgeýän ululyklary saklaýan agzalary toparlalyň, olary doly jemiň we tapawudyň kwadratlaryna dolduralyň:

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 11 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Bu ýerden töweregiň merkeziniň koordinatalary C(4; -3) we radiusy 6-a deň. Indi töweregi gurmak bolar.

116. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ töweregiň merkeziniň koordinatalaryny we radiusyny tapmaly.

Jogaby: $C(-2; 2)$, R = 3.

117. Töwerekleri guruň:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$; *Jogaby*: $C(-1; 0)$, R = 2.

b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; *Jogaby*: $C(4; -3)$, R = 5.

ç) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$, *Jogaby*: $C(-5; 2)$, R = 4.

118. Koordinata oklara galtaşýan we $M(2; 1)$ nokatdan geçýän töweregiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ýa-da $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

119. $M_1(1;2)$, $M_2(0; -1)$, $M_3(-3;0)$ nokatlardan geçýän töweregiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

120. Eger töweregiň merkezi $2x - y - 2 = 0$ göni çyzykda ýatan bolsa, onda M_1 (7;7), M_2 (– 2;4) nokatlardan geçýän töweregiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

121. $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ töweregiň we $y = -x$ göni çyzygyň kesişme nokatlaryndan we $M_1(4;4)$ nokatdan geçýän töweregiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x^2 + y^2 - 8y = 0$.

122. *Oy* okuna koordinatalaryň başlangyjynda galtaşýan we *Ox* okuny $M(6;0)$ nokatda kesýän töweregiň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $(x-3)^2+y^2=9$.

123. M_1 $(-3;0)$, M_2 $(0;3)$, M_3 $(3;0)$ nokatlardan $M(x,y)$ nokada çenli uzaklyklaryň kwadratlarynyň jemi hemişe 27-ä deň. $M(x,y)$ nokadyň hereketiniň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $x^2+(y-1)^2=1$.

124. Koordinatalaryň başlangyç nokadyndan $x+y+2=0$ göni çyzygyň we $x^2+y^2=4$ töweregiň kesişme nokadyndan geçýän egriniň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x^2+y^2+2x+2y=0$.

125. Egri çyzygyň her bir nokady M_1 $(-3;0)$, M_2 $(0;3)$ nokatlardan uzaklyklarynyň kwadratlarynyň jemi 50-ä deň bolan deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: $x^2+y^2=16$.

Ellips

Fokuslar diýlip atlandyrylýan iki nokadyň uzaklyklarynyň jemi hemişelik bolup $2a$ deň we fokuslaryň arasyndaky $2c$ uzaklykdan uly bolan nokatlaryň geometrik köplügine *ellips* diýilýär.

Ellipsiň kanonik deňlemesi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýerde eger $a>b$ fokuslary *Ox* okunda ýerleşse, onda $b^2=a^2-c^2$. a we b parametrlere ellipsiň ýarym oklary diýilýär.

$\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ gatnaşyga ellipsiň ekssentrisiteti diýilýär.

Ellipsiň $M(x,y)$ nokadyndan fokuslara çenli uzaklyklara fokal radiuslar diýilýär we aşakdaky formulalar arkaly hasaplanýar:

$$r_1=a-\varepsilon x,\ r_2=a+\varepsilon x.$$

126. $M_1\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $M_2\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ nokatlardan geçýän ellipsiň kanonik deňlemesini guruň.

Jogaby: $\frac{x^2}{10}+y^2=1.$

127. Koordinatalar oklaryna görä simmetrik we $M_1\left(\frac{5}{4};1\right)$ nokatdan geçýän hem-de ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{3}{5}$-e deň bolan ellipsiň kanonik deňlemesini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{25/8}+\frac{y^2}{2}=1.$

128. Uly ýarymoky 6-a we ekssentrisiteti $\frac{1}{2}$-e deň bolan ellipsiň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$

129. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsiň ekssentrisitetini tapyň.

Jogaby: $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

130. Eger ellipsiň uly ýarymoky kiçi ýarymokundan 3 esse kiçi bolsa, onda onuň ekssentrisitetini tapyň.

Jogaby: $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

131. Koordinatalar oklaryna görä simmetrik bolan ellipsiň üstünde M_1 $(2;\sqrt{3})$, M_2 $(0;2)$ nokatlar berlipdir. Ellipsiň deňlemesini ýazmaly we M_1 nokatdan fokuslara çenli uzaklyklary tapmaly.

Jogaby: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1, r_1=4-\sqrt{3}, r_2=4+\sqrt{3}.$

132. Eger fokuslaryň arasyndaky uzaklyk uly we kiçi ýarym oklarynyň uçlarynyň arasyndaky uzaklyga deň bolsa, onda ellipsiň deňlemesini ýazyň. Onuň ekssentrisitetini kesgitläň.

Jogaby: $\frac{x^2}{5/3} + \frac{y^2}{1} = 1, \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

133. M nokat $M_1(1;\ 0)$ nokatdan $x = 9$ göni çyzyga çenli uzaklygyndan 3 esse ýakyn hereket edýär. M nokadyň traýektoriýasyny tapmaly.

Jogaby: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

134. M nokadyň $A(0;\ 1)$ nokatdan $y - 4 = 0$ göni çyzyga çenli uzaklygy iki esse kiçidir. M nokadyň traýektoriýasyny kesgitläň.

Jogaby: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

135. Eger fokal radiuslaryň jemi $2\sqrt{5}$ -e deň, fokuslar $F_1\,(-2;0)$, $F_2\,(2;0)$ nokatlarda ýerleşen bolsa, onda ellipsiň deňlemesini ýazmaly.

Jogaby: $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

136. Egrileri guruň:

a) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$; *Jogaby*: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

b) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$. *Jogaby*: $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$.

137. Eger kiçi ýarymoky 5, ekssentrisitet $\frac{12}{13}$ – ä deň bolsa, ellipsiň kanonik deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{69} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Giperbola

Fokuslar diýlip atlandyrylýan iki nokatdan uzaklyklarynyň tapawudy hemişelik bolup 2a deň we fokuslaryň arasyndaky $2c$ uzaklykdan kiçi bolan nokatlaryň geometrik köplügine *giperbola* diýilýär.

Giperbolanyň kanonik deňlemesi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýerde eger $a > b$ we fokuslary Ox okunda ýerleşse, onda $b^2 = c^2 - a^2$. a we b parametrlere giperbolanyň ýarymoklary diýilýär.

$\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ gatnaşyga giperbolanyň ekssentrisiteti diýilýär.

Giperbolanyň $M(x,y)$ nokadyndan fokuslara çenli uzaklyklara fokal radiuslar diýilýär we aşakdaky formulalar arkaly hasaplanýar:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|,\ r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

$y = \pm\frac{b}{a}x$, deňleme bilen berlen göni çyzyklara giperbolanyň asimptotalary diýilýär.

138. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, giperbolanyň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygy we ekssentrisitetini tapmaly.

Jogaby: $2c = 4\sqrt{5}, \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

139. $c = 5$, $a = 4$ bolan giperbolanyň kanonik deňlemesini tapyň. Bu giperbolanyň ekssentrisitetini kesgitläň.

Jogaby: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; \varepsilon = \frac{5}{4}$.

140. Koordinatalar oklaryna görä simmetrik we $M_1(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nokatdan geçýän hem-de ekssentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{2}$ – ä deň bolan giperbolanyň kanonik deňlemesini tapyň.

Jogaby: $x^2 - y^2=1$.

141. Aşakdaky giperbolalaryň grafiklerini guruň:

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0.$

Jogaby: $\frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$

b) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$

Jogaby: $\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1.$

ç) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0.$

Jogaby: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$

142. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellips berlipdir. Depeleri berlen ellipsiň fokuslarynda we fokuslary ellipsiň depelerinde ýerleşen giperbolanyň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1.$

143. $M(x,y)$ nokatdan $x = 1$ göni çyzykdan $F(4;0)$ nokada çenli uzaklyk iki esse kiçidir. $M(x,y)$ nokatlaryň geometrik köplügini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

144. Koordinatalar oklaryna görä simmetrik we $M_1(2\sqrt{7};-3)$, $M_2(-7;-6\sqrt{2})$ nokatlardan geçýän giperbolanyň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1.$

145. Giperbolanyň grafigi $M(10;-3\sqrt{3})$ nokatdan geçýär. Onuň asimptotalary $y = \pm\frac{3}{5}x$ deňlemeler bilen berlipdir. Şol giperbolanyň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Parabola

Berlen nokatdan (fokusdan) we berlen göni çyzykdan (direktrisadan) deň uzaklykda ýatan geometriki nokatlaryň köplügine *parabola* diýilýär. Ox okuna simmetrik bolan we koordinatalaryň başlangyç nokadyndan geçýän parabolanyň kanonik deňlemesi:

$$y^2 = 2px$$

görnüşde ýazylýar.

$M(x,y)$ nokadyň fokal radiusy ýa-da onuň Ox okundaky fokusyna çenli uzaklyk

$$r = x + \frac{p}{2}$$

formula arkaly tapylýar.

Oy oka parallel bolan parabolanyň simmetrik oky $y = ax^2 + bx + c$ deňleme bilen berilýär.

146. Depesi koordinatalar başlangyjynda bolan we Ox simmetriýa okly, $F(2; -4)$ nokatdan geçýän parabolanyň kanonik deňlemesini tapyň.

Jogaby: $y^2 = 8x$.

147. $F\,(2;0)$ nokatdan we $y = 2$ göni çyzykdan deň uzaklykda ýatan geometrik nokatlar köplüginiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $y = x - x^2/4$.

148. Eger parabolanyň fokusy $4x - 3y - 4 = 0$ göni çyzygyň we Ox okunyň kesişme nokadynda ýatan bolsa, onda bu parabolanyň kanonik deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $y^2 = 4x$

149. $y^2 = 4x$ parabolada fokal radiusy 4-e deň bolan nokady tapmaly.

Jogaby: $M_1\,(3;2\sqrt{3})$, $M_2\,(3;-2\sqrt{3})$.

150. Koordinata başlangyjyndan we $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ parabolanyň oklar bilen kesişme nokatlaryndan geçýän töweregiň deňlemesini tapyň.

151. Parabolalaryň grafiklerini guruň:

a) $y^2 - 8y = 4x$; b) $x^2 + 6x + 5 = 2y$; ç) $x^2 + 4x + 2y + 4 = 0$.

152. Diametri 80 *m* we çuňlygy 10 *m* bolan parabolik görnüşde kotlawan gazylypdyr. Iň aşakdaky nokatdan merkez boýunça parabolanyň fokusy nirede ýerleşipdir?

Jogaby: $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

153. $x + y = 0$ göni çyzygyň we $x^2 + y^2 + 4y = 0$ töweregiň kesişme nokatlaryndan geçýän hem-de Oy oka görä simmetrik bolan parabolanyň deňlemesini tapyň.

Jogaby: $x^2 = -2y$.

§ 5. Giňişlikde tekizlik

Giňişlikdäki tekizligiň deňlemeleri

Giňişlikdäki tekizligiň ýagdaýy onuň üstünde ýatan bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň we oňa perpendikulýar $\vec{n} = (A,B,C)$ wektoryň (tekizligiň normal wektory) berilmegi bilen doly we birbelgili kesgitlenýär. Goý, $M(x,y,z)$ berlen tekizligiň üstünde ýatan islendik bir nokat bolsun. Bu ýagdaýda $(\overrightarrow{M_0M}) = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ wektor $\vec{n}$ wektora perpendikulýar bolar. Iki wektoryň perpendikulýarlyk nyşanyndan:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ deňlemäni alarys.

Deňlemedäki ýaýlary açyp:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

bu ýerde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, *tekizligiň giňişlikdäki umumy deňlemesini* alarys. $D = 0$ bolanda tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçer. $A = B = 0$ bolanda xOy koordinata tekizligine parallel, $B = C = 0$ bolanda yOz koordinata tekizligine parallel, $A = C = 0$ bolanda xOz

koordinata tekizligine parallel tekizlik alarys. Eger $A = 0$ bolsa tekizlik Ox koordinata okuna parallel, $B = 0$ bolsa tekizlik Oy koordinata okuna parallel, $C = 0$ bolsa tekizlik Oz koordinata okuna parallel bolar. Eger tekizlik Ox, Oy, Oz oklaryna parallel bolmasa, onda (1) deňlemäni $-D$ bölüp, alarys:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{x}{-\frac{D}{B}} + \frac{x}{-\frac{D}{C}} = 1 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2)$$

(2) – tekizligiň kesimlerde deňlemesi.

Iki tekizligiň parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlary

Goý, iki tekizlik umumy deňlemeleriniň üsti bilen berlen bolsun:

$$A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2 = 0. \qquad (2)$$

Eger bu tekizlikler parallel bolsalar, onda olaryň normal wektorlary $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ we $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ hem paralleldirler. Şol sebäpli, iki wektoryň parallellik nyşanyndan:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (3)$$

– iki tekizligiň parallellik nyşany (şerti).

Eger bu tekizlikler perpendikulýar bolsalar, onda olaryň normal wektorlary $n_1=(A_1, B_1, C_1)$ we $n_2=(A_2, B_2, C_2)$ hem perpendikulýardyrlar. Şol sebäpli:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (4)$$

– iki tekizligiň perpendikulýarlyk nyşany (şerti).

Iki tekizligiň arasyndaky burç

Goý, iki tekizlik umumy deňlemeleriniň üsti bilen berlen bolsun:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 =0, \qquad (1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 =0. \qquad (2)$$

Olar dört sany jübüt-jübütden deň burçlary emele getirýär.Ol burçlaryň biri $\vec{n_1}(A_1;\ B_1;\ C_1)$ we $\vec{n_2}(A_2;\ B_2;\ C_2)$ normal wektorlaryň emele getirýän burçuna deňdir.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Berlen nokatdan berlen tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesi

Berlen $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ nokatdan berlen $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesi aşakdaky formula arkaly ýazylýar:

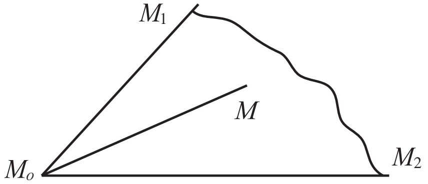
$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0.$$

Berlen üç nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesi

Eger $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan bolsa, onda olaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

deňleme görnüşinde ýazylýar.



16-njy surat

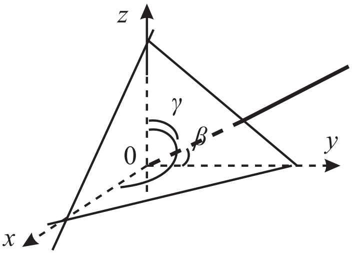
Bu deňleme $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ we $\overrightarrow{M_0M_2}$ wektorlaryň komplanarlyk şertini aňladýar.

Giňişlikde tekizligiň normal görnüşi. Koordinatalaryň başlangyjyndan berlen UVW tekizlige geçirilen p perpendikulýaryň uzynlygyna polýar uzynlyk diýilýär. Eger UVW tekizlik koordinatalaryň başlangyjyndan geçmeýän bolsa, onda OK perpendikulýarda položitel ugry diýlip $\overrightarrow{OK}$ wektoryň ugry alynýar. Eger-de UVW tekizlik koordinatalaryň başlangyjyndan geçýän bolsa, onda perpendikulýarda položitel ugry diýip islendik ugry alyp bolar.

UVW tekizligiň polýar burçlary diýip $\alpha = \angle XOK;\ \beta = \angle YOK;$ $\gamma = \angle ZOK$

OK göni çyzygyň položitel ugry bilen koordinata oklarynyň arasyndaky α, β, γ burçlar:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



17-nji surat

gatnaşyk bilen baglydyr. p polýar uzynlyk we α, β, γ polýar burçlar bilelikde UVW tekizligiň polýar parametrleri diýilýär. Eger UVW tekizlik $Ax + By + Cz + D = 0$ deňleme bilen berlen bolsa, onda onuň polýar parametrleri aşakdaky formulalar bilen kesgitlenýär:

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta &= \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma &= \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}\right\},$$

bu ýerde ýokarky alamatlar $D < 0$ bolanda we aşakdaky alamatlar $D > 0$ bolanda alynýar. Eger-de $D = 0$ bolsa, onda formulalarda diňe ýokarky ýa-da aşaky alamatlar alynýar.

154. $x - 2y + 2z - 3 = 0$ deňleme bilen tekizligiň polýar parametrlerini tapyň.

Çözülişi: $A = 1$; $B = -2$; $C = 2$; $D = -3$. Onda

$$p = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1;$$

$D = -3 < 0$, onda formulalarda «+» alarys:

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Onda $\alpha = 70°\ 32'$; $\beta = 131°\ 40'$; $\gamma = 48°\ 11'$.

155. $x - 2y + 2z = 0$ deňleme bilen tekizligiň polýar parametrlerini tapyň.

Çözülişi: $A = 1$; $B = -2$; $C = 2$; $D = 0$. Onda

$$p = \frac{|0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 0;$$

$D = 0$ onda formulalarda diňe « – » ýa-da «+» alýarys:

1-nji halda:

$$\cos a = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = -\frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Onda $\alpha = 109°\ 28'$; $\beta = 48°\ 11'$; $\gamma = 131°\ 40'$.

2-nji halda:

$$\cos a = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = -\frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Onda $\alpha = 70°\ 32'$; $\beta = 131°\ 40'$; $\gamma = 48°\ 11'$.

Goý, tekizlik $Ax + By + Cz + D = 0$ deňleme bilen berlen bolsun. Onuň iki tarapyny $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ köpeldip we tekizligiň polýar parametrlerini göz öňünde tutup alarys:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

156. Polýar uzynlygy $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ we polýar burçlary kütek we özara deň bolan tekizligiň normal görnüşini ýazyň.

Çözülişi: Eger $\alpha = \beta = \gamma$ bolsa, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ şertden

$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ we burçlar kütek bolany üçin « – » alarys, onda gözlenýän deňleme

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

bolar.

157. $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}x + 5 = 0$ deňleme normal däl, sebäbi

$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$, emma azat agza položitel ($p = -5 < 0$ bolup bilmeýär).

158. $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$ deňleme normal, sebäbi $\cos a = -\frac{1}{3}$,

$$\cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}, \quad p = 5.$$

159. $x - 2y + 2z - 6 = 0$ deňlemäni normal görnüşine getiriň.

Çözülişi: Deňlemäniň iki tarapyny $+\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ (+ sebäbi azat agza $D = -6 < 0$) bölýäris:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - z = 0.$$

Onda $p = 2$; $\cos a = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$

$$\alpha = 70°\ 32';\ \beta = 131°\ 49';\ \gamma = 48°\ 11'.$$

160. $x - 2y + 2z + 6 = 0$ deňlemäni normal görnüşine getiriň.

Çözülişi: Deňlemäniň iki tarapyny $-\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = -3$ (– sebäbi azat agza $D = 6 > 0$) bölýäris:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - z = 0.$$

Onda $p = 2$; $\cos a = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$, $\alpha = 109° 28'$; $\beta = 48° 11'$; $\gamma = 131° 49'$.

161. $x - 2y + 2z = 0$ deňlemäni normal görnüşine getiriň.

Çözülişi: Deňlemäniň iki tarapyny 3-e ýa-da – 3-e (sebäbi azat agza $D = 0$) bölýäris. 1-nji halda polýar burçlar mesele 6 ýaly, ikinji halda bolsa olar mesele 7- däki ýaly. Iki halda hem $p = 0$.

Bellik. Eger $Ax + By + Cz + D = 0$ deňlemede $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ we 3 azat agza D otrisatel bolsa, onda ol deňleme normal görnüşdedir we onuň geregi ýok.

Giňişlikde nokatdan tekizlige çenli aralyk

Eger $M_0(x_0, y_0, z_0)$ berlen tekizlikde ýatmaýan nokat bolsa, onda nokatdan gönä çenli aralygyň formulasy getirilip çykarylandaky pikir ýöretmäni gaýtalap, bu nokatdan tekizlige çenli uzynlygyň formulasyny alarys:

$$d = |M_0M_1| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

162. $M(5;5;0)$ nokatdan geçýän we $\vec{N}(4;3;2)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ deňlemäni ulanyp taparys:

$$4(x - 5) + 3(y - 5) + 2(z - 0) = 0 \quad \text{ýa-da} \quad 4x + 3y + 2z - 35 = 0.$$

163. $M(1;2;3)$ nokatdan geçýän we $\overrightarrow{OM}$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

164. $M_1(0;1;3)$ we $M_2(2;4;5)$ nokatlardan geçýän we Ox okuna parellel bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: $A(x - x0) + B(y - y0) + C(z - z0) = 0$ formulany ulanyp alarys.

$A(x-0)+B(y-1)+C(z-3)=0$ gözlenýän tekizlik Ox okuna parallel bolany üçin $a=0$ onda gözlenýän deňleme $B(y-1)+C(z-3)=0$ görnüşini alýar. Soňky deňlemä M_2 nokadyň koordinatalaryny goýup alarys: $B(4-1)+C(5-3)=0$ ýa-da $3B+2C=0$; $B=B=\frac{-2C}{3}$.

Onda $\frac{-2(y-1)}{3}+(z-3)=0$;

$-2(y-1)+3z-9=0$; $-2y+2+3z-9=0$; $3z-2y-7=0$.

165. Oz okuna parallel bolan we $M_1(3;1;0)$ we $M_2(1;3;0)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x+y-4=0$.

166. Oy okuna parallel bolan, $M_1(3;1;3)$ we $M_2(5;0;0;)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $3x+2z-15=0$.

167. Oz okundan we $N(2;-4;3)$ nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: Bu halda tekizligiň deňlemesi $Ax+By=0$, görnüşinde ýazylýar. N nokadyň koordinatalaryny goýup alarys:

$2A-4B=0$, $A=2B$, onda gözlenýän deňleme $2Bx+By=0$, görnüşini alýar. B bölüp alarys, $2x+y=0$.

168. Ox okundan we $M(0;5;6)$ nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $6y-5z=0$.

169. Oy okundan we $M(6;0;4)$ nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $4x-6z=0$.

170. $M(5;4;3)$ nokatdan geçýän we koordinata oklardan deň kesimleri kesýän tizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ formulany ulanyp alarys:

$$x/a + y/a + z/a = 1 \quad \text{ýa-da} \quad x + y + z = 0$$

M koordinatalary gözlenýän tizligiň deňlemesini kanagatlandyrýar. Şol sebäpli $5 + 4 + 3 = a$, bu ýerden $a = 12$, şeýlelikde $x + y + z - 12 = 0$ deňlemäni alarys.

171. $M(2;-3;3)$ nokatdan geçýän we Oy we Oz oklarda kesýän kesimleri Ox okunda kesýän kesimlerinden iki esse uly bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 0.$

172. $M(2;3;-1)$ nokatdan geçýän we $5y - 3y + 2z - 10 = 0$ tekizlige parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Tekizlikleriň parallellik şertini ulanyp,ýazarys. $A(x - 2) + B(y - 3) + C(z + 1) = 0$ gözlenýän tekizligiň normal wektory berlen tekizligiň $\vec{N} = (5; -3;2)$ normal wektory bilen gabat gelýär. Diýmek: $A = 5$; $b = -3$; $C = 2$, we gözlenýän deňleme aşakdaky görnişi alýar:

$$5(x - 2) - 3(y - 3) + 2(z + 1) = 0 \text{ ýa-da } 5x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

173. $M(14;2;2)$ nokatdan geçýän we $x - 2y - 3z = 0$ tekizlige parallel bolan tekizligi ýazyň.

Jogaby: $x - 2y - 3z - 4 = 0.$

174. $M_1(0;2;0)$, $M_2(2;0;0)$, nokatdan geçýän we $x = 0$ tekizlik bilen $60°$ burç emele getirýän tekizligi tapyň.

Çözülişi: $x = 0$ tekizligiň $\vec{N}(1;0;0)$ normal wektorydyr. M_1 nokady we $A(x - x_0)+B(y - y_0) + C(z - z_0)$ deňlemäni ulanyp ýazarys.

$Ax + B(y - 2) + Cz = 0$ ol tekizligiň normal wektory.

$\vec{N_2} = (A;B;C)$ – normal wektor. Bu deňlemede M_2 nokatlaryň koordinatalaryny goýalyň: $2A - 2B + 0C = 0$ ýa-da $A = B$ goý, $A = 1$, $B = 1$, bolsun onda $\vec{M_2} = (1;1;c)$

$\cos\gamma = \pm\frac{\overrightarrow{N_1 \cdot N_2}}{(\vec{N_1} \cdot \vec{N_2})}$ formulany ulanyp alarys:

$$\cos 60° = \pm\frac{\overrightarrow{N_1 \cdot N_2}}{(\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2})};\ \frac{1}{2} = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1+1+C^2}};\ 1 + 1 + C^2 = 4;$$

$C^2 = 2$, $C = \pm\sqrt{2}$, netijede gözlenýän tekizligi alarys:

$$x + y + \sqrt{2}\ x - 2 = 0 \text{ ýa-da } x + y - \sqrt{2}\ x - 2 = 0.$$

175. Tekizlikleriň jübüti kesişende ikigranly burçlary kesgitläň:

a) $x - y\sqrt{2} + 7 - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$

Jogaby: $\frac{\pi}{3}$ we $\frac{2\pi}{3}$.

b) $3y - ž = 0$, $2y + z = 0$. *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}$ we $\frac{3\pi}{4}$.

ç) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$. *Jogaby*: $\frac{\pi}{2}$.

d) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

Jogaby: arccos 2/15 we π – arccos 2/15.

176. Iki tekizlik hem $M(-1; -1;2)$ nokatdan geçýär. Eger tekizligiň biri Ox okundan, beýleki tekizlik Oz okundan geçýän bolsa, onda ol tekizlikleriň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: 60°.

177. $M(-1; -1;2)$ nokatdan geçýän $x - 2y + z - 4 = 0$ we $x + 2y - 2z + 4 = 0$ tekizliklere perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ deňlemäni ulanyp alarys:

$$a(x + 1) + b(y + 1) + c\ (ž - 2) = 0,$$

bu ýerde $\overrightarrow{N} = \{a,b,c\}$. a,b,c ululyklary tapmaly. Berlen iki tekizligiň normal wektorlary $\overrightarrow{N_1} = \{1;-2;1\}$ we $\overrightarrow{N_2} = \{1;2;-2\}$.

Meseläniň şertinden alarys: $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{N_1} = 0$ we $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{N_2} = 0$ deňlemeler sistemany çözeliň:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a + 2b - 2c = 0 \end{cases} \rightarrow 2a - c = 0$$

Goý, $a = 2$ bolsun, onda $c = 4$ we sistemanyň birinji deňlemesinden $b = 3$. Şeýlelikde a, b, c bahalar tapyldy. Onda gözlenýän deňleme

$$2x + 3y + 4z - 3 = 0.$$

178. $M(3; -1; -5)$ nokatdan geçýän $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ we $5x - 4y + 3z + 1 = 0$ tekizlikere perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $2x + y - 2z - 15 = 0$.

179. $M_1(-1; -2; 0)$, $M_2(1; 1; 2)$ nokatlardan geçýän we $x + 2y + 2z - 8 = 0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $2x - 2y + z - 2 = 0$.

180. Oz okundan geçýän we $2x + y - \sqrt{5}z + 3 = 0$ tekizlikler bilen 60° burç emele getirýän tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $3x - y = 0$ we $x + 3y = 0$.

181. $M(5; -1; -1)$ nokatdan $x - 2y - 2z + 4 = 0$ tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

Çözülişi:

$$d = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

182. $M(1; 3; -2)$ nokatdan $2x - 3y + 4z + 28 = 0$ tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

Jogaby: $\sqrt{29}$.

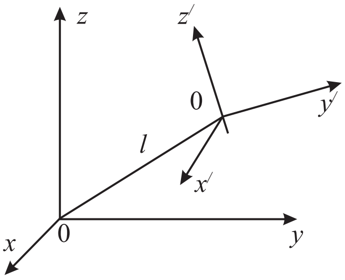
183. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ we $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ parallel tekizlikleriň arasyndaky uzaklygy tapyň.

Jogaby: $2\sqrt{2}$.

Giňişlikdäki göni çyzygyň deňlemeleri

Giňişlikde haýsy-da bolsa bir göni çyzyk hem-de $Oxyz$ dekart koordinata sistemasy berlip, bu göni çyzygyň $Oxyz$ koordinata sistemasyna görä deňlemesini çykarmak talap edilsin.

Goý, M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ göni çyzygyň bir nokady diýeliň. Koordinata başlangyjyny M_0 nokada göçüreliň hem-de onuň haýsy-da bolsa bir oky, meselem Oy oky, l göni çyzygyň ugry bilen gider ýaly edip ony käbir burça öwreliň. Şonda göni çyzygyň islendik nokadynyň täze koordinata sistemasyna görä abssissasy we aplikatasy nol bolar:



18-nji surat

$$\begin{cases} x' = 0 \\ z' = 0. \end{cases}$$

$Oxyz$ koordinata sistemasyndan $Ox'y'z'$ sistemasyna geçsek ýokardaky sistema aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Bu sistemanyň iki deňlemesi hem tekizligiň deňlemesidir. Diýmek, giňişlikde göni çyzyga iki tekizligiň kesişme çyzygy hökmünde garamak gerek. (1) sistema **göni çyzygyň umumy deňlemesi** diýilýär.

Giňişlikdäki göni çyzygyň ýagdaýy onuň üstünde ýatan bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň we oňa parallel $\vec{a} = (m,n,p)$ wektoryň berilmegi bilen ýeketäk kesgitlenýär. Goý, $M(x,y,z)$ berlen göniniň üstünde ýatan islendik bir nokat bolsun. Bu ýagdaýda $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ wektor $\vec{a}$ wektora parallel bolar. Iki wektoryň parallellik nyşanyndan deňlemäni alarys.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2}$$

Bu deňlemä giňişlikdäki berlen nokatdan berlen ugur boýunça geçýän göni çyzygyň deňlemesi, kähalatda bolsa giňişlikdäki göni çyzygyň kanonik deňlemesi diýilýär. Deňlemäniň taraplaryny t parametre deňläp:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \qquad t \in R \end{cases} \tag{3}$$

göni çyzygyň **parametrik** deňlemesini alarys.

Eger göni çyzyk berlen iki $M_1(x_1,y_1,z_1)$ we $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nokatlaryň üstünden geçýän bolsa, onda $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ we $\overrightarrow{M_2M} = (x_2 - x_1, y_2 - y_{10}, z_2 - z_1)$ wektorlaryň parallellik nyşanyndan deňlemäni alarys:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4}$$

Bu deňlemä berlen **iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi** diýilýär.

Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek

Göni çyzygyň umumy deňlemesini ýazalyň:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek üçin ýokardaky sistemada üýtgeýän ululyklaryň birini, meselem z-i, t bilen belläp galan x we y üýtgeýän ululyklary şol iki deňlemeden t-niň üsti bilen aňladýarlar:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = t. \end{cases}$$

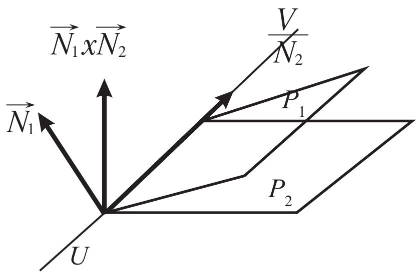
Bu bolsa göni çyzygyň parametrik deňlemesidir. Bu sistemadan t-ni ýok edip gözlenýän kanonik deňlemäni alarys:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z}{1}.$$

Ugrukdyryjy wektor

Islendik noldan tapawutly $\vec{a}$ $(m;n;p)$ wektor UV göni çyzykda ýatan (ýa-da oňa parallel bolan) ugrukdyryjy wektor diýilýär. Ugrukdyryjy wektoryň $m;n;p$ koordinatalary göni çyzygyň ugrukdyryjy koordinatalary diýilýär.

Bellik. Ugrukdyryjy koeffisiýentleri $m;n;p$ noldan tapawutly k sana köpeltsek, onda $km;kn;kp$ sanlary alarys.



19-njy surat

Bu sanlar hem ugrukdyryjy koeffisiýentler hökmünde almak bolýar, sebäbi olar $k\vec{a}$ wektoryň ugrukdyryjy koeffisiýentleri we $\vec{a}$ wektor $k\vec{a}$ wektor kollineardyrlar.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0 \end{cases}$$

UV göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory hökmünde $\vec{N_1} \times \vec{N_2}$ wektor köpeltmek hasyly almak bolar, bu ýerde $\vec{N_1} = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ we $\vec{N_2} = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ – P_1 we P_2 tekizlikleriň normal wektorlary. Hakykatdan hem UV göni çyzyk $\vec{N_1}$ we $\vec{N_2}$ normal wektorlara perpendikulýardyr.

184. $2x - 2y - z + 8 = 0$, $x + 2y - 2z + 1 = 0$ göni çyzygyň ugrukdyryjy koeffisiýentlerini tapyň.

Çözülişi: $\vec{N_1}=\{2; -2; -1\}$ we $\vec{N_2}=\{1; 2; -2\}$ berlen. $\vec{a} = \vec{N_1} \times \vec{N_2}$ wektory berlen göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory diýip kabul edeliň:

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{6, 3, 6\}.$$

Diýmek ugrukdyryjy koeffisiýentler $m = 6;\ n = 3;\ p = 6.$

Bellik. Bu sanlary $\frac{1}{3}$-e köpeldip alarys: $m = 2;\ n = 1;\ p = 2$, bu sanlary ugrukdyryjy koeffisiýentler alyp bolar.

Iki göni çyzygyň arasyndaky burç

Giňişlikdäki göni çyzygyň ugry oňa parallel $\vec{a}=(m,n,p)$ wektoryň kömegi bilen kesgitlenýär. Şol sebäpli, iki sany göni çyzyklaryň arasyndaky burç hem olar bilen parallel $\vec{a}_1 = (m_1,n_1,p_1)$ $\vec{a}_2 = (m_2,n_2,p_2)$ wektorlaryň arasyndaky burça deň bolar we

$$\cos a = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (5)$$

formula bilen hasaplanar.

185. $\begin{cases} 2x = 2y - z + 8 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases}$

göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

Çözülişi: Birinji göni çyzygyň ugrukdyryjy koeffisiýentleri $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, $p_1 = 2$. Ikinji göni çyzygyň ugrukdyryjy koeffisiýentleri

$$\{4;1;3\} \times \{2;2;-3\} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-9, 18, 6\}.$$

Bu sanlary $\frac{1}{3}$-e köpeldip alarys: $m_2 = -3$, $n_2 = 6$, $p_2 = 2$.

$$\cos a = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2}}} = \frac{4}{21}.$$

Bu ýerden $\alpha = 79° \, 01'$.

Göni çyzyklaryň parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlary

$\vec{a}_1$ we $\vec{a}_2$ wektorlaryň parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlaryndan olara parallel bolan göni çyzyklaryň degişlilikde parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlaryny alarys:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{we} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (6)$$

degişlilikde giňişlikde berlen ugurlar boýunça geçýän göni çyzyklaryň parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlary.

186. $M(4;3;2)$ nokatdan geçýän we $\vec{R} = (-1;1;1)$ wektora parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Görkezme: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ we

$\begin{cases} x = m + tx_0 \\ y = n + ty_0 \\ z = p + tz_0 \end{cases}$ ulanmaly.

Jogaby: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} . \frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}.$

187. $M(-1;2;3)$ we $M_2(2;6;-2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini we ugrukdyryjy kosinuslaryny tapyň.

Çözülişi: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ deňlemäni ulanyp alarys: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3}$. Bu ýagdaýda ugrukdyryjy $\vec{R}(3;4;-5)$ wektor ugrukdyryjy $\cos\alpha=\frac{m}{|\vec{R}|}$; $\cos\beta=\frac{n}{|\vec{R}^2|}$; $\cos=\frac{p}{|\vec{R}|}$; formula arkaly tapylýar. Bu ýerden:

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{50}}=0,3\sqrt{2},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{50}}=0,8\sqrt{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{-5}{\sqrt{50}}=-\sqrt{2}.$$

188. a) Eger göni çyzyk $M(2;1;-1)$ nokatdan geçýän we $\vec{R}=(1;-2;3)$ wektora parallel bolan;

b) $M_1\ (3;-1;4)$ we $M_2(1;3;2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň parametrik deňlemesini ýazyň.

Jogaby: a) $x=t+2;\quad y=-2t+1;\quad z=3t+2.$

b) $x=2t+1;\quad y=-4t+3;\quad z=2t+2.$

189. $x=2z-1, y=-2z+1$ göni çyzygyň deňlemesini parametrik görnüşine geçiriň.

Çözülişi: $t=z$ parametr girizilýär. Onda, göni çyzygyň parametrik deňlemesini alarys.

$x=2t-1,\quad y=-2t+1,\quad z=t.$

190. $\begin{cases}x-2y-5=0\\x-32+8=0\end{cases}$ göni çyzygyň koordinata oklar bilen getirýän burçlaryny tapyň.

Görkezme: 59 we 57 meseleleriň cözülişini ulanmaly.

Jogaby: $\cos\alpha=\frac{6}{7};\quad \cos\beta=\frac{3}{7};\quad \cos\gamma=\frac{2}{7}.$

191. $x = 2z - 1$, $y = -2z + 1$ göni çyzygyň we koordinata başlangyjyndan hem-de $M(1; -1; -1)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

192. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ göni çyzyk $y = x + 1$, $z = 1$ göni çyzyga perpendikulýardygyny subut ediň.

193. $M(1;4; -4)$ nokatdan geçýän $x - y = 2$, $y = 2z + 1$. Göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x = 2t + 1$, $y = 2t + 4$, $z = t - 1$.

194. $M(2;-8;4)$ nokatdan Oz okuna indirilen perpendikulýaryň deňlemesini ýazyň.

Görkezme: gözlenilýän deňleme $A(0;0;4)$ nokatdan hem geçýär.

Jogaby: $x = 2t$, $y = -8t$, $z = 4$.

195. $B(2 - 3;5)$ nokatdan Oy okuna indirilen perpendikulýaryň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $x = 2t$, $y = -3$, $z = 5t$.

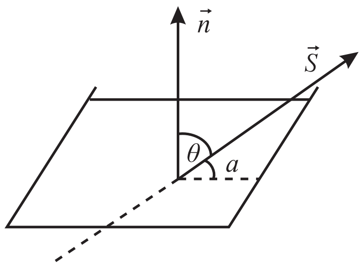
§ 6. Giňişlikde tekizlik we göni çyzyk

Göni çyzygyň we tekizligiň arasyndaky burç

Kesgitleme. Göni çyzygyň we onuň tekizlige proýeksiýasynyň arasyndaky $\frac{\pi}{2}$- den kiçi bolan θ burça göni çyzygyň tekizlik bilen emele getirýän burçy diýilýär.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

göni çyzyk bilen $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizligiň arasyndaky burçy θ, göni çyzyk bilen tekizligiň normal $\vec{n}(A,B,C)$ wektorynyň



20-njy surat

arasyndaky burçy α bilen belgiläp alarys: $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. α burçy kesgitlemegi biz bilýäris:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$$

Emma $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\theta$. Diýmek,

$$\sin\theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Göni çyzyk bilen tekizligiň parallellik we perpendikulýarlyk nyşanlary

Goý, bize göni çyzyk

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

bilen $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizlik umumy deňlemesi bilen berilsin. Eger olar parallel bolsalar, onda gönüniň ugrukdyryjy $\vec{n} = (m,n,p)$ wektory tekizligiň $\vec{n} = (A,B,C)$ normal wektoryna perpendikulýar bolar. Iki wektoryň perpendikulýarlyk şertinden:

$$Am + Bn + Cp = 0$$

berlen *göni çyzyk bilen tekizligiň parallellik nyşany (şerti).*

Eger berlen göni çyzyk bilen tekizlik perpendikulýar bolsalar, onda gönüniň ugrukdyryjy wektory bilen tekizligiň normal wektory parallel bolar. Şol sebäpli:

$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ berlen *göni çyzyk bilen tekizligiň perpendikulýarlyk nyşany (şerti).*

196. $M(1; -2; 3)$ nokatdan geçýän we $3x + 2y - z + 5 = 0$ tekizlige: a) parallel, b) perpendikulýär bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi: Goý, $\vec{S} = \{m,n,p\}$ wektor göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory bolsun.

Göni çyzygyň tekizlige parallellik şertini formula boýunça alarys:

$$3m - 2n - p = 0$$

$n = 2$, $p = 1$ erkin bahalary berip $m = -1$ taparys.

$3x + 2y - z + 5 = 0$ tekizlige parallel bolan we $M(1; -2; 3)$ nokadyň üstünden geçýän tükeniksiz köp göni çyzyklaryň biriniň deňlemesi

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

b) Göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şertini ulanyp taparys:

$$\frac{m}{3} = \frac{n}{2} = \frac{p}{-1}$$

diýmek, göni çyzygyň deňlemesi

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokady

Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmak üçin, göni çyzygyň parametrik deňlemesini we tekizligiň deňlemesini bilelikde çözmek gerek, ýagny aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Bu sistemanyň 2-nji, 3-nji we 4-nji deňlemelerinden x,y we z-iň bahalaryny 1-nji deňlemede goýup alarys:

$$t = \frac{Ac_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Bu deňlikden $Am + Bn + Cp \neq 0$ bolanda t-niň ýeke-täk kesgitli bahasyny taparys. Ony göni çyzygyň parametrik deňlemesine goýup, göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokatlaryny taparys.

Eger bu deňlemede $Am + Bn + Cp = 0$ bolsa, onda t-niň bahasy kesgitsiz bolar. $Am + Bn + Cp = 0$ göni çyzygyň we tekizligiň parallellik şertidir.

197. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$, göni çyzygyň $5x + 3y - 2z + 2 = 0$ tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi: Göni çyzygyň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyp tekizligiň deňlemesi bilen bilelikde çözeliň:

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2x + 2 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$$

Bu ýerden

$$t = \frac{5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 2}{5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5} = 2\frac{2}{3},$$

t-niň bahasyny göni çyzygyň parametrik deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$x = \frac{25}{3}; \quad y = -\frac{11}{3}; \quad z = \frac{49}{2}.$$

Berlen nokatdan berlen tekizlige perpendikulýar geçýän tekizligiň deňlemesi.

$M_0\,(x_0;y_0;z_0)$ nokatdan geçýän we $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizligiň normal wektory $\{m_1;n_1;\, p_1\}$ bolar. Diýmek ol tekizligiň deňlemesi

$$m_1(x - x_0) + n_1(y - y_0) + p_1(z - z_0) = 0.$$

198. (– 1; – 5; 8) nokatdan geçýän we $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$ göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$2(y + 5) + 5(z - 8) = 0 \quad \text{ýa-da} \quad 2y + 5z - 30 = 0.$$

Berlen nokatdan berlen tekizlige perpendikulýar geçýän gönüniň deňlemesi

$M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ nokatdan geçýän we $Ax + By + Cz + D = 0$ tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory $\{A;B;C\}$ deň, onda ol göni çyzygyň deňlemesi:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

bolar.

199. Koordinatalar başlangyjyndan geçýän we $3x + 5z - 5 = 0$ tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z}{5}$$

ýa-da parametrik görnüşinde: $x = 3t; \quad y = 0; \quad z = 5t.$

200. $y = 3x - 1,\ z = -\frac{3}{2}x + 1$ göni çyzygyň we $2x + y + z - 4 = 0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapyň.

Jogaby: $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

201. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$ göni çyzygyň $2x + y - z = 0$ tekizlige paralleldigini we $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{5}$ göni çyzygyň bu tekizlikde ýatandygyny görkeziň.

Görkezme: Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda göni çyzygyň bir nokady hem tekizlige degişli däldir. Eger-de göni çyzyk tekizlikde ýatan bolsa, onda göni çyzygyň her bir nokady tekizlige degişlidir. Şu ýagdaýy mesele çözülende ulanmak bolar.

202. $M(2;\ 3;\ -4)$ nokatdan geçýän we $x = 2,\ y - z = 1$ göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Görkezme: Gözlenýän tekizligiň $\vec{N}$ normal wektory hökmünde berlen göni çyzygyň $\vec{R}$ ugrukdyryjy wektoryny almaly.

Jogaby: $y + z + 1 = 0$.

203. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ göni çyzykdan we $M\,(3;\ 4;\ 5)$ nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Çözülişi: M nokat gözlenýän tekizligiň üstünde ýatyr, onda gözlenýän tekizligiň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$$a(x-3) + b(y-4) + c(z-5) = 0.$$

$\vec{N}\,(a,b,c)$ normal wektory tapmak galdy. $A(2,3,4)$ nokat göni çyzygyň üstünde ýatyr, onda ol tekizligiň hem üstünde ýatmaly.

A nokadyň koordinatalaryny tekizligiň deňlemesine goýalyň:

$-a-b-c=0$. Başga tarapdan, göni çyzygyň $\vec{R}\,(1;2;3)$ ugrukdyryjy wektor $\vec{N}\,(a,b,c)$ wektora perpendikulýardyr, çunki göni çyzyk tekizlikde ýatyr. Diýmek $\vec{R}\cdot\vec{N} = 0$

1. $a + 2\cdot b + 3\cdot c = 0$. Onda aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -a - b - c = 0. \end{cases}$$

Alarys: $b + 2c = 0$. Goý, $c = 1$ bolsun, onda $b = -2$. Sistemanyň ikinji deňlemesinden alarys: $a = 1$. a,b,c ululyklaryň tapylan bahalaryny tekizligiň deňlemesine goýup, alarys:

$$1\cdot(x-3) - 2\cdot(y-4) + 1\cdot(z-5) = 0$$

ýa-da $x - 2y + z = 0$.

204. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$ göni çyzykdan geçýän we $2x + 3y - z + 7 = 0$ tekizlige perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.

Jogaby: $8x - 5y + z - 11 = 0$.

205. $x = 2t - 1, y = t + 2, z = 1 - t$ göni çyzygyň we $3x - 2y + z = 0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapyň.

Görkezme: Deňlemeler sistemasyny ornuna goýmak usuly bilen çözmeli.

Jogaby: (3;4; – 1).

206. $\frac{x}{2} - \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ göni çyzygyň we $x + 2y + 3z - 19 = 0$ tekizligiň kesişme nokadyny tapyň.

Jogaby: (4;3;3).

207. $x + 2y + 3z - 30 = 0$ tekizlige $M(3, 1, -1)$ nokadyň proýeksiýasyny tapmaly.

Çözülişi: M_0 nokadyň koordinatalaryny ýa-da M nokatdan α tekizlige goýberilen perpendikulýaryň esasyny tapmaly. Bir göni çyzygyň parametrik deňlemesini düzeliň (meseläniň şerti boýunça $l \perp \alpha$). Şonuň üçin $\vec{R} = \vec{N}$ =(1;2;3) alarys we M nokadyň koordinatalaryny ulanalyň:

$$x = t + 3, y = 2t + 1, z = 3t - 1.$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 39 = 0 \\ x = t + 3 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t - 1. \end{cases}$$

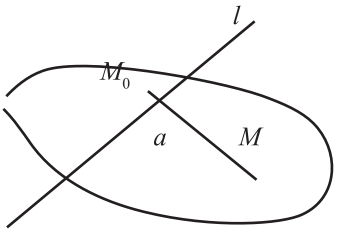
deňlemeler sistemany çözüp alarys:

$t + 3 + 4t + 2 + 9t - 3 - 30 = 0,\ 14t = 28,\ t = 2$. Onda

$x = 2 + 3 = 5, y = 2 \cdot 2 + t = 5, z = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ ýa-da M_0 (5;5;5).

208. $3x + y + z + 8 = 0$ tekizlige $M(1, 1, -1)$ nokadyň proýeksiýasyny tapmaly.

Jogaby: (– 2;0;– 2).



21-nji surat

Öň seredilen meselä getirmek üçin M nokatdan geçýän we berlen göni çyzyga perpendikulýar bolan tekizlik gurmaly. Berlen göni çyzygyň parametrik deňlemesini guralyň: $x = t, \;\; y = t, \;\; z = t$. Göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory $\vec{R}=(1;1;1)$. α tekizligiň normal wektoryny alalyň:

$\vec{R}=\vec{N}=(1;1;1)$.

209. $M(2;\, 3;\, 4)$

1. $(x-2)+1\cdot(y-3)+1\cdot(z-4)=0$ ýa-da $x+y+z-9=0$. M_0 nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin: $x+y+z-9=0$, $x=t$, $y=t$, $z=t$ deňlemeler sistemasyny alarys. Bu sistemany çözüp, taparys: $3t-9=0$, $t=3$ ýa-da $x=3$, $y=3$, $z=3$. Onda gözlenýän nokadyň koordinatalary $M_0\,(3;3;3)$ deň.

210. $M(1;\, 2;8)$ nokadyň $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ göni çyzyga proýeksiýasyny tapyň.

Jogaby: $(3;-1;1)$.

211. $M(\,2;\,1;0)$ nokatdan $x=3z-1, \;\; y=2z$ göni çyzyga goýberilen perpendikulýaryň deňlemesini tapyň.

Görkezme: Ilki bilen M nokadyň berlen göni çyzyga proýeksiýasyny tapmaly *(205-nji meselä seret).*

Jogaby: $x=9t+2, \quad y=-8t+1, \quad z=-11t.$

212. $M(1;\, 0;\, -1)$ nokatdan $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-3}$ göni çyzyga goýberilen perpendikulýaryň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: $x=5t+1, \qquad y=-4t, \qquad z=-t-1.$

213. $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ we $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$ göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandyklaryny subut ediň.

III Bap
MATEMATIKI ANALIZ

§ 1. Funksiýa. Funksiýanyň predeli. Funksiýanyň üznüksizligi

Eger M köplükden her bir x sana ýeke-täk y san degişlilikde goýlan bolsa, onda M köplükde $y = f(x)$ **funksiýa** berlipdir diýip aýdylýar. M köplüge şol funksiýanyň **kesgitleniş oblasty** diýilýär.

Eger (a,b) interwaldan islendik x_1 we x_2 $(x_2 > x_1)$ sanlar üçin:

$$f(x) > f(x)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda şol (a,b) interwalda $y = f(x)$ funksiýa **monoton artýar.**

Eger (a,b) interwaldan islendik x_1 we $x_2(x_1 > x_2)$ sanlar üçin:

$$f(x_2) < f(x_1)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda şol (a,b) interwalda $y = f(x)$ funksiýa **monoton kemelýär.**

Eger islendik položitel kiçi ε san üçin položitel kiçi δ san tapylyp $|x - a| < \delta$ bolanda

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda b sana $y = f(x)$ funksiýanyň $x \to a$ bolandaky predeli diýilýär

Eger

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{we} \quad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

bar bolsalar, onda

1. $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x),$ $\qquad$ (k – hemişelik san).

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x).$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, eger $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, onda $f(x)$ funksiýa **tükeniksiz kiçi** diýlip aýdylýar.

Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, onda $f(x)$ funksiýa **tükeniksiz uly** diýlip aýdylýar.

Ajaýyp predeller:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Eger $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ deňlik ýerine ýetse, onda $x = a$ nokatda $f(x)$ funksiýa üznüksizdir.

Eger $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ deňlik ýerine ýetse, onda $x = a$ nokatda $f(x)$ funksiýa sag tarapdan üznüksiz diýlip aýdylýar.

Eger $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ deňlik ýerine ýetse, onda $x = a$ nokatda $f(x)$ funksiýa çep tarapdan üznüksizdir.

Bir faktorly önümçilik funksiýalar

Islendik önümçiligiň mümkinçilikleri çykarylýan önümiň göwrümi we oňa laýyklykda çig malyň, energiýanyň, maliýe goýumlarynyň, zähmetiň we şuňa meňzeş çykdajylaryň baglanyşygy bilen häsiýetlendirilýär. Mümkin bolan ähli çykdajylary önümçiligiň resurslary diýlip atlandyrylýar. Önümçiligiň resurslary dürli ölçegleri (tonna, metr, kilometr, sagat we ş.m.) bardyr, ähli resurslaryň umumy birlik ölçegi bolup manat ýa-da başga bir pul birligi hyzmat edýär. Şol sebäpli önümçiligiň resurslaryny we çykarylýan önümi pul birliginde hasaplansa gowy bolýar.

Kesgitleme. Önümçiligiň çykarýan önüminiň bahasyna ony öndürmek üçin çykdajylaryny baglanyşdyrýan funksiýa bir faktorly **önümçilik funksiýasy** diýilýär.

Eger funksiýada bagly däl üýtgeýän ululygy çykdajylar we bagly üýtgeýän ululygy öndürmäniň derejesi kesgitleýän bolsa, onda ol funksiýa **öndürme funksiýasy** diýilýär. Çykdajy funksiýada *b/a* tersine, bagly däl üýtgeýän ululyk öndürme, bagly üýtgeýän ululyk bolsa, çykdajylar.

1-nji mysal. Eger y çykdajylar harydyň çykmagyna x göni proporsional bolsa, onda ol çykdajylar funksiýasy:

$$y = a_0 + a_1 x; \quad (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x \geq 0)$$

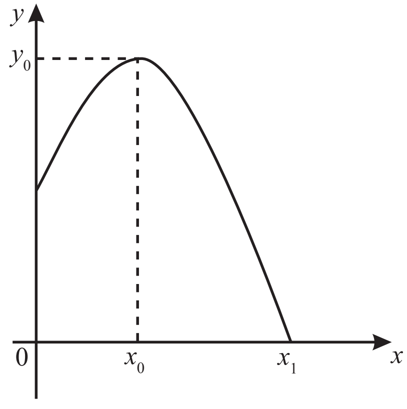
görnüşi alýar.

Bir faktorly önümçilik funksiýanyň köpelmegi bilen harydyň çykýan göwrümini käbir aýratyn resursy (zähmet resursy, esasy önümçilik fontlar, maýa goýumyň göwrümi, çig malyň dürli görnüşleri we başgalar) bilen baglanyşygyny hem ýazmak bolar. Bu ýagdaýda önümçilikde gatnaşýan galan resurslar hemişelik diýlip hasap edilýär.

2-nji mysal. $y = a_0 + a_1 x - a_2\, x_2$; $(a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ x \geq 0)$ funksiýanyň kömegi bilen oba hojalyk önüminiň hasyl getirişiniň döküniň mukdaryna baglydygyny häsiýetlendirip bolar.

Dökünleriň ýoklugynda hasyllylyk a_0 birlige deň. Ulanylýan dökünleriň mukdaryny köpeltsek, onda hasyllylyk ilki artýar we $x = x_0$ bolanda iň uly baha eýe bolýar. Soňky dökünleriň ulanylyşynyň artdyrylmagy akylsyzlykdyr, sebäbi ol hasyllylygyň kemelmegine getirýär we $x = x_1$ bolanda hasyl doly ýitirilýär.

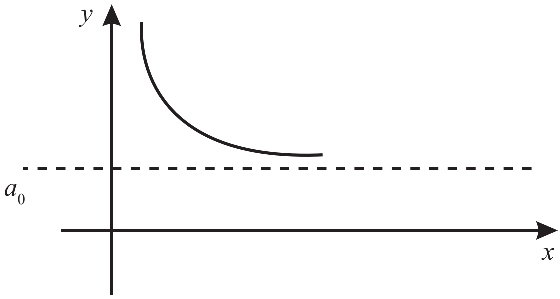
Suratda $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$ funksiýanyň grafigi



1-nji surat

3-nji mysal. $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$, $(a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ x > 0)$ giperbolik baglanyşyk mysal üçin, önümiň birliginiň çykarylmagynda y çykdajylaryň we önümiň x göwrümi bilen baglanyşygy modelirlenmeginde ulanmak bolar. x-iň artmagy bilen $\frac{a_1}{x}$ ululyk kemelýär. Diýmek, önümiň mukdary artdyrylanda, çykdajylar tükeniksiz kemelýär. Önümçiligiň uly göwrüminde $(x \to \infty)$ çykdajylar a_0 ululykdan tapawutlanýar. $(y \to a_0)$

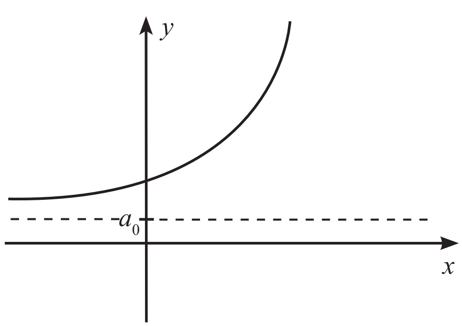
$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ funksiýanyň grafigi



2-nji surat

4-nji mysal. $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$; $(a_0 > 0,\ a_1 > o,\ x \geq 0)$ eksponemsial önümçilik funksiýa, mysal üçin, wagta görä önümiň mukdarynyň dinamiki üýtgemesini derňemek üçin ulanylýar *(3-nji surat)*.

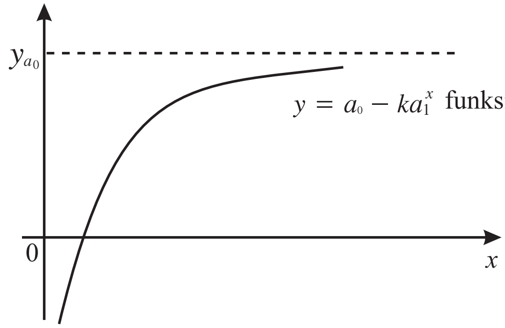
$y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$ funksiýanyň grafigi



3-nji surat

Wagtyň başlangyjynda ($x = 0$) önümiň öndüriş mukdary $y = a_0$ deň. Egriniň dikligi a_0 we a_1 koeffisiýentlere baglydyr. $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$, ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $x \geq 0$) baglanyşyk aşaky ýagdaýda hem ulanylýar. Eger bank goýuma ýyllyk a_1% berýän bolsa, onda a_0 goýum x ýyldan jemi y goýum goýar.

5-nji mysal. $y = a_0 - ka_1^x$, ($a_0 > 0$, $1 > a_1 > 0$, $k > 0$, $x \geq 0$,) görkeziji funksiýa önümiň y çykarylyşyna üýtgeýän resurslaryň çykdajysyna täsirini modelirleýär. Bu ýagdaýda çykaryşyň derejesi käbir a_0 predel ululykdan uly bolup bilmeýär. $a_1 < 1$ onda x-iň artmagy bilen a_1^x tükeniksiz kemelýär, emma y artýar. Eger $x \to \infty$ bolanda, onda $y \to a_0$, $x = 0$ bolanda çykaryş $a_0 - k$ deňdir *(4-nji surat)*.



4-nji surat

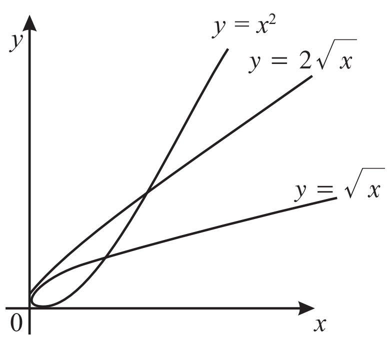
6-njy mysal. $y = a_0 x^{a_1}$, ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $x \geq 0$) derejeli önümçilik funksiýa käbir R resursyň x çykdajylaryň artmagy bilen çäksiz y çykaryşyň artmagyna getirýän ýagdaýy görkezýär. y-iň artmagy a_0, a_1 parametrlere baglydyr *(5-nji surat)*.

Berlen funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1. a) $y = \sqrt{x - 2}$,

b) $y = \sqrt{16 - x^2}$,

ç) $y = \sqrt{9x - x^2}$.



5-nji surat

2. a) $y = \lg(x^2 - 4)$, b) $y = \log_a \frac{x+1}{x-1}$, ç) $y = \arcsin \frac{1-x}{2}$.

3. a) $y = \sqrt{2+x} - \sqrt{-x}$, b) $y = \log_a \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

ç) $y = \arccos \frac{x-1}{3}$.

4. $y = \log_3 \frac{x-1}{x^2-5x+6}$. **5.** $y = \sqrt{1 - \log_2(-x)}$.

6. $y = \arccos a = \frac{1}{3^n}$,

7. $n = 0,1,2,3,...$ bolanda, yzygiderligiň agzalaryny tapyň:

Haýsy nomerinden başlap üýtgeýän ululyk 0,001-den hemişe kiçidir.

$$a = \frac{1}{3^n}, \qquad a = -\frac{1}{3}, \qquad a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

8. Yzygedirligiň agzalaryny ýazyň, eger $x_n = \frac{1+n}{1-n}$. Haýsy agzalaryndan başlap $|x_n - 1| < 0{,}001$ bolar.

9. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 9$ subut ediň, x we x^2 bahalaryny tablisalarynyň üsti bilen düşündiriň.

10. Subut ediň:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 8$, b) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x) = -2$, ç) $\lim\limits_{x \to 1}(x + 2x^2) = 3$.

11. Yzygiderlikleri ýazyň:

1) $x_n = \frac{n+1}{n}$, 2) $x_n = -\frac{n+1}{n}$, 3) $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$,

4) $x_n = -\frac{4\cos\frac{\pi n}{2}}{n+2}$, 5) $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{n+1}$, 6) $x_n = 3^{-n} \cos \pi n$

12. «Şertli» ýazgylaryň manysyny düşündiriň:

1) $\frac{1}{\infty} = 0,$ 2) $\frac{1}{0} = \pm\infty,$ 3) $2^{\infty} = \infty,$ 4) $2^{-\infty} = 0,$

5) $\lg 0 = -\infty,$ 6) $\mathrm{tg}90^\circ = \pm\infty,$ 7) $\mathrm{ctg}\pi = \pm\infty.$

13. Predelleri tapyň:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x + 5),$ 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2},$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 1}{x + 3},$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x - 8},$ 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin 5x\cos x - \sin x\cos 5x).$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 9}{x - 3}.$ *Jogaby*: 6.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$ *Jogaby*: – 2.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin 4x}.$ *Jogaby*: $-\frac{1}{2}.$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}.$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x - 1}{\sqrt{3x - 2} - 1}.$ *Jogaby*: $\frac{2}{3}.$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$ *Jogaby*: $\frac{3}{2}.$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}{x}.$ *Jogaby*: $-\frac{1}{\sqrt{2}}.$

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2 + 1}{5x^2 - 3x}.$ *Jogaby:* $\frac{3}{5}.$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3 - 5x}{1 - 3x^3},$ *Jogaby*: $-\frac{1}{3}.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$. *Jogaby*: 0.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Jogaby*: ∞.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3...+n}{\sqrt{4n^4+1}}$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{8}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$. *Jogaby*: $\dfrac{4}{3}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{1+4+9+...+n^2}$.

Görkezme: $1+2+3+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ we $1+4+9+\dots+n^2=$ $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ formulalary ulanmaly. *Jogaby*: 0.

29. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-4}{\sqrt{x}-2}$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{4}$.

30. $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}$. *Jogaby*: $\dfrac{7}{54}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. *Jogaby*: 3.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{2}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{2x}$. *Jogaby*: 2.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$. *Jogaby*: *k*.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta k}{\sin\alpha x},\ \alpha\neq 0.$ *Jogaby*: $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.$ *Jogaby*: $\dfrac{1}{2}$.

37. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}.$ *Jogaby*: $\cos\alpha$.

38. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}.$ *Jogaby*: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}.$ *Jogaby*: 0.

40. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right).$ *Jogaby*: $\dfrac{1}{6}$.

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$ *Jogaby*: 0.

42. $\lim\limits_{x\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}.$ *Jogaby*: x.

43. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x.$ *Jogaby*: $\dfrac{2}{\pi}$.

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x.$ *Jogaby*: α.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}.$ *Jogaby*: -6.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}.$ *Jogaby*: e^3.

47. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$ *Jogaby*: e^{-2}.

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^{2n+1}.$ *Jogaby*: $-e^{-4}$.

49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-3x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}.$ *Jogaby*: e^{-1}.

50. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x}}$. *Jogaby*: *e*.

51. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\cos x}}$. *Jogaby*: *e*.

Funksiýalaryň bir taraply predellerini tapyň:

52. a) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x}{|x|}$. *Jogaby*:1. b) $\lim\limits_{x\to -0}\frac{x}{|x|}$. *Jogaby*: – 1.

53. a) $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}$. *Jogaby*: ∞. b) $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}$. *Jogaby*: 0.

54. a) $\lim\limits_{x\to -0}\sqrt{\sin x}$. *Jogaby*: Predeli ýok.

b) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sqrt{\sin x}$. *Jogaby*: 0.

55. Funksiýanyň üznüksizlik kesgitlemesini peýdalanyp:

a) $f(x) = x^3 + 3x - 5$, b) $f(x) = x^2\cos x - \frac{1}{x^2-1}$,

funksiýalaryň üznüksizligini subut ediň.

56. Aşakdaky funksiýalaryň üznüksizligini derňäň we olaryň grafiklerini guruň:

1) $y = \frac{1}{x^2+1}$, 2) $y = \frac{1}{x^2-1}$, 3) $y = \frac{x-2}{x+2}$,

4) $y = \cos 2x$, 5) $y = \frac{x^2-4}{x^2-6x+9}$,

6) $y = \begin{cases} 3x, & \text{eger } x \neq 2 \\ 1, & \text{eger } x = 2, \end{cases}$ 7) $y = \begin{cases} x^2, & \text{eger } x \leq 0 \\ x+1, & \text{eger } x \leq 0, \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{eger } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x, & \text{eger } x > 0, \end{cases}$ 9) $y = |x-2|$,

10) $y = \begin{cases} -x, & \text{eger } x < -1 \\ x, & \text{eger } x \geq -1, \end{cases}$ 11) $y = \lg|x|$.

§ 2. Funksiýanyň önümi

$x = x_0$ nokatda aşakdaky predeliň manysy bar bolsa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

onda şol predeliň bahasyna $y = f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümi diýilýär. Funksiýanyň önümini tapmaklygyna **differensirleme** diýilýär.

Önumleriň jedweli

Eger x – bagly däl üýtgeýän ululyk bolsa, onda

1. $c' = 0$, (c = const); 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ($\alpha$ – hemişelik san)

3. $(\sin x)' = \cos x$; 4. $(\cos x)' = -\sin x$;

5. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 10. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

11. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0)$; 12. $(e^x)' = e^x$;

13. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(a > 0,\ a \neq 1)$; 14. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Differensirlemegiň esasy düzgünleri. Eger $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ funksiýalar x_0 nokatda differensirlenýän bolsalar, onda

1. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$,
2. $(uv)' = u'v + uv'$,
3. $(cu)' = cu'$, (c = const),
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \neq 0)$,

5. $\left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{cu'}{u^2}$.

6. Eger $y = f(u)$ we $u = \varphi(x)$ funksiýalar differensirlenýän bolsalar, onda

$$y_x' = y_u' u_x'.$$

Önümiň ykdysady manysy

Goý, $U = U(t)$ funksiýa t wagtda U öndürilen önümiň mukdaryny aňladýan bolsun, t_0 – dan $t_0 + \Delta t$ wagt aralygynda öndürilen önümiň mukdary $U_0 = U(t_0)$ bahadan $U_0 + \Delta U = U(t_0 + \Delta t)$ baha çenli üýtgeýär. Onda şol wagtda zähmetiň orta öndürijiligi $\frac{\Delta U}{\Delta t}$-e deň. Zähmetiň öndürijiligini t_0 wagtda t_0-dan $t_0 + \Delta t$ wagta çenli aralykdaky öndürijileriň orta bahasynyň $\Delta t \to 0$ ymtylanda predeli hökmünde kesgitlenýär, ýa-da

$$U' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Wagt boýunça öndürilýän harydyň mukdaryndan önüm zähmetiň öndürijiligidir.

logarifm funksiýanyň önümi $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ funksiýanyň otnositel tizliginiň üýtgemesi ýa-da funksiýanyň üýtgemesiniň depgini diýilýär.

1-nji mysal. Işçileriň topary bilen U öndürilen harydyň mukdaryny aşakdaky deňleme bilen ýazmak bolar:

$$U = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50, \ 1 \le t \le 8$$

bu ýerde t – sagatda iş wagty.

Zähmetiň öndürijiligini, iş başlandan soň 1 sagatdan we iş gutarmaga 1 sagat galanda onuň üýtgemesiniň tizligini we depginini hasaplaň.

Çözülişi: Zähmetiň öndürijiligi önüm bilen aňladylýar:

$$U'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$$

Öndürijiligiň üýtgemesiniň tizligi $Z'(t) = -5t + 15$ we öndürijiligiň depgini:

$$[\ln(Z(t))]' = \frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t}{t^2 - 6t - 40}.$$

(birlik/sag)

Berlen $t_1 = 1$ we $t_2 = 8 - 1 = 7$ wagtlarda alarys:

$Z(1) = 112{,}5$ (birlik/sag), $Z'(1) = 10$ (birlik/sag^2), $T_Z(t) = 0{,}09$ (birlik/sag) we $Z(7) = 82{,}5$ (birlik/sag), $Z'(7) = -20$ (birlik/sag^2), $T_Z = -0{,}24$ (birlik/sag).

Şeýlelik-de, iş wagtyň ahyrynda zähmetiň öndürijiligi has kemelýär: $Z'(t)$ we funksiýanyň otnositel tizliginiň üýtgemesiniň alamatynyň «+» - dan «–»-*a* üýtgemesi işiň başlan pursadyndaky zähmetiň öndürijiligiň artdyrmasy iş wagtyň ahyryna onuň kemelmegini aňladýar. Önümiň ykdysady manysyny görkezmek üçin ýene bir düşünjä garalyň: Käbir önümiň öndürmeginiň mukdaryny x bilen belläliň, K bilen jemi çykdajylaryň ýa-da önümçiligiň çykdajylaryny belläliň. Önümçilik funksiýa (çykdajylar funksiýa) önümçiligiň çykdajylarynyň K çykarylýan önümiň x mukdary bilen baglydygyny görkezýär: $K = f(x)$. Eger önümçiligiň mukdaryny Δx birlik artdyrsak, onda çykdajylar $\Delta K = f(x + \Delta x) - f(x)$ birlik artýar. Çykdajylaryň orta artdyrmasy $\Delta K/\Delta x$ gatnaşyk bilen aňladylýar.

Önümçiligiň predel çykdajylary,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

formula arkaly tapylýar.

Eger başlangyç önümçilikde x birlik öndürilýän bolsa, onda önümçiligiň mukdaryny kiçi ululyk artdyrylanda (1) predel goşmaça çykdajylary aňladýar.

2-nji mysal. Goý, çykdajylar funksiýasy $k = 2x + \ln(x + 1)$ görnüşde berlen bolsun. Önümiň berlen mukdarynda $x_1 = 2$, $x_2 = 9$ önümçiligiň predel çykdajylaryny tapmaly.

Çözülişi: $K' = 2 + \frac{1}{x+1}$, onda $K'(2) = 2\frac{1}{3}$, $K'(9) = 2{,}1$ $K'(9) < K'(2)$ we umumy $x_2 > x_1$ bolsa, onda $K'(x_2) < K'(x_1)$.

Diýmek, önümçiligiň predel çykdajylary (x-dan soň çykarylan kiçi birligine goşmaça çykdajylar) kemelýär, önümiň öndürmegini kiçi birlige artdyrma kiçelýän goşmaça çykdajylary talap edýär?

3-nji mysal. Goý, haryda isleg onuň bahasyndan $d = \dfrac{100}{p+1}$ formula bilen bagly bolsun. Eger harydyň bahasy 1 pul birligine; 4 pul birligine deň bolsa, onda islegiň üýtgemesiniň tizligini tapyň.

Çözülişi: Islendik funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi onuň önümine deňdir. Bu ýagdaýda:

$$d'(p) = -\frac{100}{(p+1)^2}.$$

Bu ýerden $d(1) = -25$; $d'(4) = -4$ «–» alamat bahasy galan haryda isleg gaçýandygyny aňladýar.

57. Önümiň kesgitlemesi bilen peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapyň:

1) $y = 2x - 5$, 2) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 2$,

3) $y = \sin(3x - 2)$, $x = 1$ nokatda.

58. Eger a) $\Delta x = 1$, b) $\Delta x = -0,5$ bolsa,

$x_0 = \pi$ nokatda funksiýanyň artmasyny tapyň.

59. Eger a) $\Delta x = \pi$ b) $\Delta x = \dfrac{\pi}{2}$ ç) $\Delta x = \dfrac{\pi}{4}$ bolsa,

$x_0 = \pi$ nokatda $y = \sin x$ funksiýanyň artmasyny tapyň.

60. Eger

a) $y = x^2$, $x_0 = 1$ we $\Delta x = 1;\ 0,1;\ 0,001$

b) $y = 6x + 5$, $x_0 = 1$ we $\Delta x = 1;\ 0,1;\ 0,001$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gatnaşygy tapyň.

Önümiň jedwelini peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapyň.

67. $y = x^3 - 3x^2 + 5.$ *Jogaby*: $3x^2 - 6x.$

68. $y = \frac{x^4 - x^3 + 2}{4}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{4}(4x^3 - 3x^2).$

69. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} - 2x.$ *Jogaby*: $42x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} - 2.$

70. $y = \sqrt{2x} - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2}.$

71. $y = \frac{(x+1)^2}{x}.$ *Jogaby*: $1 - \frac{1}{x^2}.$

72. $y = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[4]{x}.$ *Jogaby*: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}}.$

73. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$

74. $y = x(\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2}).$ *Jogaby*: $\frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{2}.$

75. $y = \sin x - \cos x.$ *Jogaby*: $\cos x + \sin x.$

76. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$ *Jogaby*: $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$

77. $y = x\sin x.$ *Jogaby*: $\sin x + x\cos x.$

78. $y = \frac{x}{\cos x}.$ *Jogaby*: $\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}.$

79. $y = \frac{\cos x}{x}.$ *Jogaby*: $\frac{\cos x - x\sin x}{x^2}.$

80. $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}.$ *Jogaby*: $-\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}.$

81. $y = \sqrt{x}\sin x.$ *Jogaby*: $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x.$

82. $y = x \operatorname{ctg} x$. *Jogaby*: $\operatorname{ctg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

83. $y = \dfrac{x^2 - \operatorname{tg} x}{x^2 + \operatorname{tg} x}$. *Jogaby*: $\dfrac{4x\operatorname{tg}x}{(x^2 + \operatorname{tg}x)^2}$.

84. $y = \arcsin x - \arccos x$. *Jogaby*: $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

85. $y = \sqrt{x} \arcsin x$. *Jogaby*: $\dfrac{\arcsin x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2}}$.

86. $y = x \arccos x$. *Jogaby*: $\arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

87. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$. *Jogaby*: $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$.

88. $y = x \operatorname{arcctg} x$ *Jogaby*: $\operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

89. $y = \cos x \arcsin x$ *Jogaby*: $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} - \sin x \arcsin x$.

90. $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x + 1}$. *Jogaby*: $\dfrac{\arcsin x + \arccos x + 1}{\sqrt{1 - x^2}\,(\arccos x + 1)^2}$.

91. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{\operatorname{arctg} x}$. *Jogaby*: $-\dfrac{\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x}{(1 + x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}$.

92. $y = \log_5 x$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{x \ln 5}$.

93. $y = \lg x$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{x \ln 10}$.

94. $y = x \ln x$. *Jogaby*: $\ln x + 1$.

95. $y = 5^x$ *Jogaby*: $5^x \ln 5$.

96. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. *Jogaby*: $\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

97. $y = 3^x \ln x$. *Jogaby*: $3^x\left(\ln 3 \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$.

98. $y = e^x \sin x$. *Jogaby*: $e^x (\sin x + \cos x)$.

99. $y = e^x \cos x$. *Jogaby*: $e^x (\cos x - \sin x)$.

100. $y = \dfrac{e^x + \ln x}{e^x - \ln x}$. *Jogaby*: $\dfrac{e^x \ln x}{(e^x - \ln x)^2}$.

Aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapyň.

101. $y = \sin(3x + 2)$. *Jogaby*: $3\cos(3x + 2)$.

102. $y = (1 + 3x)^5$. *Jogaby*: $15(1 + 3x)^4$.

103. $y = \cos ax$. *Jogaby*: $-a \sin ax$.

104. $y = \sin x^3$. *Jogaby*: $3x^2 \cos x^3$.

105. $y = \operatorname{tg}(\sin x)$. *Jogaby*: $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$.

106. $y = \arcsin x$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

107. $y = \sin^2 x$. *Jogaby*: $\sin 2x$.

108. $y = \ln^2 x$. *Jogaby*: $\dfrac{2\ln x}{x}$.

109. $y = e^{-x^3}$. *Jogaby*: $-3x^2 e^{-x^3}$.

110. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. *Jogaby*: 1.

111. $y = \arcsin(\sin x)$. *Jogaby*: 1.

112. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$. *Jogaby*: 0.

113. $y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x$. *Jogaby*: $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

114. $y = \arcsin^2 x$. *Jogaby*: $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

115. $y = 5\sin 2x$. *Jogaby*: $2 \cdot 5^{\sin 2x} \ln 5 \cdot \cos 2x$.

116. $y = 3^{\cos x^2}$. *Jogaby*: $-2x \cdot 3^{\cos x^2} \ln 3 \cdot \sin x^2$.

117. $y = \ln \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. *Jogaby*: $\dfrac{4x}{1-x^4}$.

118. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.

Jogaby: $\dfrac{x^3 + x^2 + 2a^2}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}$.

119. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$. *Jogaby*: $\operatorname{tg}^3 x$.

120. $y = \cos^2 x + \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{\sin x} - \sin 2x$.

Logarifmik önüm bilen peýdalanyp, aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapyň.

121. $y = x^{\sin x}$.

Çözülişi:

$\ln y = \ln x^{\sin x}$, $\ln y = \sin x \ln x$

$(\ln y)' = (\sin x \ln x)'$, $\dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$,

$y' = y\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$, $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$.

122. $y = x^x$. *Jogaby*: $x^x(\ln x + 1)$.

123. $y = \sqrt[x]{x}$. *Jogaby*: $x^{\frac{1}{x}+2}(1-\ln x)$

124. $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+4)^4}$. *Jogaby*: $-\dfrac{(x+1)(5x^2+15x+4)}{(x+2)^4(x+4)^5}$.

125. $y = \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. *Jogaby*: $\dfrac{1+3x^2}{1-x^2} + \dfrac{(1+x^2)x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

126. $y = (\sin x)^x$. *Jogaby*: $(\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg}x)$.

127. $y = x^{x^x}$. *Jogaby*: $x^{x^x}(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1})$.

128. $y = (\cos x)^{\ln x}$. *Jogaby*: $(\cos x)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln\cos x}{x} - \ln x\operatorname{tg}x\right)$.

Aýdyň däl funksiýanyň önümini tapyň.

129. $x^2 + y^2 = a^2$.

Çözülişi: $(x^2)' + (y^2)' = (a^2)'$; $2x + 2yy' = 0,\ y' = -\dfrac{x}{y}$.

130. $3x - 2y + 1 = 0$. *Jogaby*: $-\dfrac{3}{2}$.

131. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *Jogaby*: $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

132. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Jogaby*: $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

133. $y = \sin(x + y)$. *Jogaby*: $\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$.

134. $y = \cos(x + 2y)$. *Jogaby*: $-\dfrac{\sin(x+2y)}{1+2\sin(x+2y)}$.

135. $\sin(xy) = x$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{x\cos(xy)} - \dfrac{y}{x}$.

136. $y = \sin(2x + y)$. *Jogaby*: $-\dfrac{4\cos(2x+y)}{1-2\cos(2x+y)}$.

Berlen funksiýalaryň görkezilen tertipli önümini tapyň.

137. y''', eger $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.

Çozülişi: $y' = 3x^2 - 6x + 5$, $y'' = (y')'6x - 6$, $y''' = (y'')' = 6$.

138. y''', eger $y = 2x^2 - 3x + 7$. *Jogaby*: 0.

139. $y^{(6)}$, eger $y = x^6$. *Jogaby*: 6!.

140. $f'''(1)$, eger $f(x) = x^7$. *Jogaby*: 210.

141. $y^{(5)}$, eger $y = \sin x$. *Jogaby*: $\cos x$.

142. $y^{(4)}$, eger $y = \cos x$. *Jogaby*: $\cos x$.

143. $y^{(4)}$, eger $y = \sin 2x$. *Jogaby*: $16\sin 2x$.

144. $y^{(n)}(0)$, eger $y = e^{3x+5}$. *Jogaby*: $3^n e^{3x+5}$.

145. $y^{(n)}$, eger $y = e^x$. *Jogaby*: e^x.

146. $y^{(''')}$, eger $y = \cos x^2$. *Jogaby*: $12x + \cos x^2 + 8x^3 \sin x^2 \cos x^2$.

147. $y^{(6)}$, eger $y = \cos^2 x$. *Jogaby*: $32\sin 2x$.

148. $y^{(n)}$, eger $y = 2^{3x+1}$. *Jogaby*: $2^{3x-1} \cdot 3^n \ln^n x$

149. $y^{(n)}$, eger $y = \log_5 x$. *Jogaby*: $(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{x^n \ln 5}$.

150. $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, $(A, \omega, \varphi_0$ – hemişelik sanlar) funksiýa $y'' + \omega^2 y = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

151. $y = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$ (A,B we λ hemişelik sanlar) funksiýa $y'' - \lambda^2 y = 0$ deňlemäniň çözüwidigini subut ediň.

Önümiň geometriýada we fizikada peýdalynylyşy

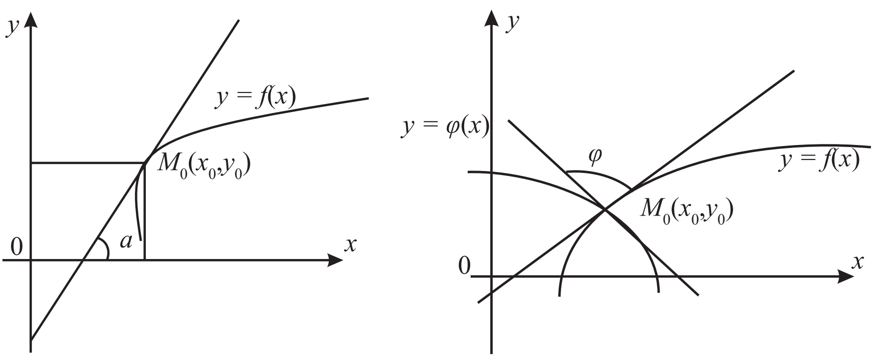
Goý, egri çyzyk $y = f(x)$ deňleme bilen berlen bolsun we x_o nokatda önüm $f'(x_o)$ bar bolsun. Onda şol egri çyzyga $M_0(x_o,y_o)$ nokatdaky galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (1)$$

bu ýerde $f'(x_0) = \text{tg}\alpha$

Galtaşýan nokatdan geçýän we galtaşýan göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzyga egri çyzygyň **normaly** diýilýär. Onuň deňlemesi:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (2)$$



6-njy surat

Iki egri çyzygyň arasyndaky burç

$$\text{tg}\varphi = \frac{\varphi'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)\varphi'(x_0)} \qquad (3)$$

formula bilen tapylýar.

Goý, nokat $S = f(t)$ kanun boýunça çyzygyň üstünde hereket edýär. Onda S-den birinji tertipli önüm şol nokadyň tizligine deňdir. $V = \dfrac{dS}{dt}$. Tizliginden önüm onuň tizlenmesine deňdir. Diýmek tizlenme

$$a = \frac{dV}{dt} \quad \text{ýa-da} \quad a = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

152. $x = 1$ nokatda $f(x) = x^2 + 4x - 3$ parabola galtaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemelerini guruň.

Çözülişi: $y_o = f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 2, \quad f'(x) = 2x + 4,$

$f'(1) = 6$

Diýmek (1) we (2) formulalara goýup galtaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemelerini taparys:

$$y - 2 = 6(x - 1) \quad \text{we} \quad y - 2 = -\frac{1}{6}(x - 1),$$

$$y = 6x - 4, \; y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}.$$

153. Berlen nokatlarda egri çyzyklara galtaşýan göni çyzygyň we normalyň deňlemelerini ýazyň.

1. $y = x^2 + 4x - 3,$ $(1;2)$ nokatda.
2. $y = \frac{x^3}{3},$ $x = -1$ nokatda.
3. $y = -2x^2 + 3x,$ $x = 2$ nokatda.
4. $y = x^2 + 3$ nokadyň koordinatasy 4-e deň.
5. $y = \mathrm{tg}x$ nokadyň abssissasy $\frac{\pi}{4}$-e deň.
6. $y = \ln x$, Ox oky kesýän nokatda.
7. $x^2 + y^2 - 3 = 0,$ $(2;-1)$ nokatda.
8. $x^4 + y^4 - 2xy = 0,$ $(1;1)$ nokatda.

154. $y = 2x^2$ we $y = x^3 + 2x^2 - 1$ egri çyzyklaryň kesişme nokadynda ikisiniň arasyndaky burçuň bahasyny tapyň.

Çözülişi: Iki egri çyzygyň kesişme nokadyny tapalyň:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 + 2x^2 - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Egri çyzyklaryň önümini hasaplalyň:

$$\begin{matrix} y' = 4x & \Rightarrow & y'(1) = 4 & \Rightarrow & k_1 = 4 \\ y' = 3x^2 + 4x, & & y'(1) = 7, & & k_2 = 7. \end{matrix}$$

(3) formula boýunça alarys:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{7-4}{1+4\cdot 7} = \frac{3}{29} \approx 0,1034 \Rightarrow \varphi \approx 5^\circ 54'.$$

155 Haýsy burç boýunça $2y = x^2$ we $2y = 8 - x^2$ egri çyzyklar kesişýärler.

156. Çyzyklar haýsy burçlar boýunça kesişýärler.

1) $y = x^2$ we $y = x^3$

2) $y = x^2$ we $y = kx$

3) $x + y^2 = 4$ we $x + 2y = 2$.

157. Jisim Ox göni çyzyk boýunça $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3$ kanuny bilen hereket edýär. Onuň tizligini we tizlenmesini tapyň.

Çözülişi: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3\right)' = t^2 - 4t,$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = (t^2 - 4t) = 2t - 4.$$

158. Nokat $S = 3t^2 + t - 1$ kanun boýunça göni çyzygyň üstünde hereket edýär. $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (S-iň ölçegi – metr, t-iň – sekuntda) wagtda nokadyň tizligini we tizlenmesini tapyň.

159. $t = 0$ wagtdan başlap geçirijiden geçýän elektrigiň mukdary $Q = 2t^2 + 3t + 1$ formula bilen kesgitlenýär. 10 sekunda geçen soň toguň güýjüni tapyň.

§ 3. Funksiýanyň differensialy

1. Differensial düşünjesi. Eger $y = f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda (19) deňlikden görnüşi ýaly, onuň şol nokatdaky artmasy

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{1}$$

görnüşde aňladylýar. Şunlukda, bu deňligiň sag bölegindäki goşulyjylaryň ikisi hem $\Delta x \to 0$ bolanda tükeniksiz kiçidir, ýöne

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)} = 0$$

deňlikden görnüşi ýaly, ikinji goşulyjy birinjä görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr. Şol sebäpli $f'(x)\Delta x$ goşulyja differensirlenýän funksiýanyň Δy artmasynyň baş bölegi diýilýär.

Kesgitleme. $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky artmasynyň baş bölegine şol funksiýanyň x nokatdaky differensialy diýilýär we dy ýa-da $df(x)$ bilen belgilenýär.

Şeýlelik-de,

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

2. Differensialyň formulasy we düzgünleri. Eger $y = x$ bolsa, onda $dy = dx$ we (2) deňlik esasynda $dy = x'\Delta x = \Delta x$, ýagny $\Delta x = dx$ bolar. Şonuň üçin (2) formula

$$dy = dy = f'(x)dx. \tag{3}$$

görnüşde ýazylar we ol funksiýanyň differensialyny tapmak üçin esasy formuladyr.

Differensialy tapmaklygyň esasy düzgünleri:

$$d(u \pm v)' = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx = (u'v \pm uv')dx = vu'dx \pm uv'dx = vdu \pm udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

$$d(cv) = cdv, \qquad d\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{cdv}{v^2}.$$

1-nji mysal. $y = \sqrt{x}\sin x$ funksiýanyň differensialyny tapmaly.

$$dy = \sqrt{x}\,d(\sin x) + \sin x d(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sin x)'dx + \sin x(\sqrt{x})'dx =$$

$$= \sqrt{x}\cos x dx + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}dx.$$

3. Çylşyrymly funksiýanyň differensialy. Eger, $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ özleriniň üýtgeýänlerine görä differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda

$$dy = f'(\varphi)\varphi'(t)dt \tag{4}$$

deňligi alarys.

2-nji mysal. $y = \mathrm{arctg}^2\sqrt{x^2-1}$ funksiýanyň differensialyny tapmaly.

$$d\left(\mathrm{arctg}^2\sqrt{x^2-1}\right) = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\,d\left(\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\right) =$$

$$= 2\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2}d\sqrt{x^2-1} =$$

$$= 2\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2}\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}d(x^2-1) =$$

$$= \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}}2xdx = \frac{2\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$$

4. Takmyn hasaplamalarda differensialyň ulanylyşy.

$$f(x+\Delta x) \backsimeq f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{5}$$

3-nji mysal. $f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiýanyň $x = 0$ nokadyň etrabyndaky takmyn bahasyny tapmaly.

(5) formulany $f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiýa we $x = 0$ üçin ulanalyň:

$$(1+x)^\alpha \backsimeq f(0) + f'(0)x,$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0) = \alpha \qquad f(0) = 1$$

Şeýlelikde,

$$(1+x)^\alpha \backsimeq 1 + ax. \tag{6}$$

4-nji mysal. $\sqrt[3]{27,027}$ aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

Ilki bilen ony $\sqrt[3]{27,027} = \sqrt[3]{27+0,027} = 3\sqrt[3]{1+0,001}$

görnüşde ýazyp, soňra $\sqrt[3]{1+0,001} = (1+0.001)^{1/3}$ aňlatmany hasaplalyň. Onuň üçin (5) formulada $x = 0{,}001$, $\alpha = 1/3$ goýup, $(1+0.001)^{1/3} \approx 1+\frac{1}{3}\cdot 0,001 = \frac{3,001}{3}$ takmyn deňligi alarys. Şonuň üçin $\sqrt[3]{27,027} = 3(1+0.001)^{1/3} \approx 3,001.$

5-nji mysal. sin $29^0 57'$ aňlatmanyň takmyn bahasyny tapmaly.

Bu aňlatmany tapmak üçin (43) formulany ulanarys. Onuň üçin şol formulada $f(x)$ funksiýanyň ornunda $\sin x$ goýup,

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x,$$

formulany alarys. Bu formulada $x = 30^0$, $\Delta x = -\,3^\circ = -\frac{\pi}{3600}$ alsak, onda

$$\sin 29^\circ 57' = \sin\left(30^\circ - \frac{\pi}{3600}\right) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{3600} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3600} = 0,5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{7200} = 0,499237.$$

5. Ýokary tertipli differensiallar. Mälim bolşy ýaly, eger $y = y(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň differensialy:

$$dy = f'(x)dx$$

formula boýunça kesgitlenilýär we oňa funksiýanyň x nokatdaky birinji differensialy ýa-da birinji tertipli differensialy diýilýär. Ol differensial x-a görä funksiýadyr. Eger onuň hem x nokatda differensialy bar bolsa, onda şol differensiala $y = y(x)$ funksiýanyň x nokatdaky ikinji differensialy diýilýär we ol d^2y ýa-da $d^2 f(x)$ bilen belgilenýär.

Şeýlelikde,

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{ýa-da} \quad d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Şunlukda,

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'df = f''(x)dx^2 \quad (dx^2 = (dx)^2).$$

Şuňa meňzeşlikde, $y = f(x)$ funksiýanyň x nokatdaky n tertipli differensialy d^ny differensialyň $d^{n-1}y$ differensialyna deňdir, ýagny:

$$d^ny\ d(d^{n-1}y).$$

$y = f(x)$ funksiýanyň n tertipli d^ny differensialy üçin:

$$d^ny = y^{(n)}dx^n \qquad (7)$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar.

Funksiýalaryň differensiallaryny tapyň:

160. $y = x^5$

Çözülişi: $dy = y'dx = (x^5)'dx = 5x^4dx.$

161. $y = \sqrt{1+x}.$

162. $y = x^4 - 3x^2 + 2x.$

163. $y = 2\cos x.$

164. $y = \mathrm{tg}3x.$

165. $y = \sin(x^2 + 3x + 1).$

166. $y = \mathrm{tg}x^2$

167. $y = \ln\cos(1 + x).$

168. $y = 3^{\arcsin x}$

169. $y = xe^x.$

170. $y = \dfrac{x\ln x}{1-x} + \ln(1-x).$

171. $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3x + \mathrm{tg}x.$

Takmyny hasaplaň.

172. a) $\sqrt{26}$, b) $\sin 60^\circ 6'$, ç) $\ln 1{,}05$.

Çözülişi: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ formulany ulanýarys.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(25) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{10}$,

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{10}\cdot 1 = 5{,}1.$$

b) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $(f'60^\circ) = \cos 60^0 = 0{,}5$,

$$\sin 60^\circ 6' = \sin\left(60^\circ + \frac{\pi\cdot 6}{60\cdot 180}\right) \approx \sin 60^\circ + 0{,}5\cdot\frac{\pi}{1800} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{0{,}5\cdot 3{,}1416}{1800} \approx 0{,}8660 + 0{,}0009 = 0{,}8669.$$

ç) $f(x) = \ln x$, $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f'(1) = 1$, $\quad f1 = \ln 1 = 0$,

$\ln 1{,}05 \approx \ln 1 + 1 \cdot 0{,}05 = 0 + 0{,}005 = 0{,}005$.

Takmyny hasaplaň.

1) $\sqrt[3]{26}$, 2) $\sqrt{24}$, 3) $\sqrt{124}$, 4) $\sqrt[5]{33}$,

5) $\sqrt[4]{82}$, 6) $\cos 91^0$, 7) $\mathrm{tg}\, 44^0$, 8) $\mathrm{ctg}\, 29^0 30'$,

9) $\ln(e + 0{,}1)$, 10) $\mathrm{arcctg}\, 0{,}98$.

173. Awtomobil x *km/sag* tizlik bilen 100 *km* ýol geçende

$$y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003\, x^2 \tag{1}$$

ýangyç ýakýar. 5% ýalňyşlyk bilen ölçenen tizlik 90 *km/sag* bolsa ýangyjyň harç edilişiniň otnositel ýalňyşlygyny tapyň.

Çözülişi: Absolýut ululygy boýunça funksiýanyň çeýelikligini tapalyň.

$$|E_x(y)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x(-0{,}3 + 0{,}06x)}{18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2}\right|,$$

$x = 90$ bolanda $|E_{x=90}(y)| = 1{,}41$. Onda $\delta y = |E_x(y)|\, \delta_x$ formula boýunça ýangyjyň harçlanýandygynyň otnositel ýalňyşlygy

$$\delta_y = 1{,}41 \cdot 5 \approx 7{,}1\%.$$

Rollyň we Lagranžyň teoremalary

Teorema (Roll). Eger $f(x)$ funksiýa
1) $[a;b]$ kesimde üznüksiz,
2) şol kesimde differensirlenýän,
3) $f(a) = f(b)$ bolsa, onda a we b sanlaryň arasynda $x = c$ nokat tapylýar we şol nokatda

$$f'(c) = 0$$

deňlik ýerine ýetýär.

Teorema (Lagranž). Eger $f(x)$ funksiýa

1) kesimde üznüksiz,

2) şol kesimiň içinde differensirlenýän bolsa, onda şol kesimde $x = c$ nokat tapylar we şol nokatda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

deňlik ýerine ýetýär.

Fermanyň teoremasynyň ykdysady manysy

Teorema (Ferma). Eger x aralykda differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýa iň uly ýa-da iň kiçi bahasyny bu aralygyň x_0 nokadynda alýan bolsa, onda bu nokatda funksýanyň önümi nola deň, ýagny $f'(x_0) = 0$.

Önümçilik teoriýasynyň esasy kanunlaryň biri aşakdaky ýaly aýdylýar: Harydyň çykarylmagynyň derejesi predel çykdajylaryň we predel girdejileriň deňligi bilen aňladylýar.

Peýda funksiýany $C(x) = D(x) - S(x)$, görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde $D(x)$ – girdeji funksiýasy, $S(x)$ – çykdajy funksiýasy. Önümçiligiň optimal derejesi onuň maksimal girdejisi bilen kesgitlenýär, ýa-da x_0 çykyşyň bahasynda $C(x)$ funksiýa ekstremuma (maksimuma) eýe bolmalydyr. Fermanyň teoremasy boýunça bu nokatda $C'(x) = 0$. Emma $C'(x) = D'(x) – S'(x)$, onda $D'(x_0) = S'(x_0)$ ýa-da $S'(x_0)$ predel çykdajylar we predel girdejiler $D'(x_0)$, harydyň optimaly x_0 çykarmasyna deň bolmalydyr.

Önümçilik teoremasyndan başga wajyp düşünjesi – bu önümçiligiň iň tygşytly derejesi. Bu ýagdaýda önümçilikde orta çykdajylar iň kiçidir, degişli ykdysady kanuny artýar: Önümçiligine iň tygşytly derejesi onuň orta we predel çykdajylaryň deňligi bilen artýar.

Bu deňligi Fermanyň teoremasynyň deňligi bilen alarys. Orta çykdajylar $\frac{S(x)}{x}$ formula üsti bilen aňladylýar ýa-da harydyň öndürmegine çykdajylary harydyň öndürilen mukdaryna gatnaşyk ýaly kesgitlenýär. Bu ululygyň minimumy $y = \frac{S(x)}{x}$ funksiýanyň kritiki nokadynda bolar ýa-da $y' = \frac{S'x - S}{x^2}$ şert ýerine ýetende, bu ýerden $S'x – S = 0$ ýa-da $S' = \frac{S}{x}$ delil subut edildi.

Lagranžyň teoremasynyň ykdysady manysy

Teorema (Lagranž). Eger $y = f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde üznüksiz we (a,b) aralykda differensirlenýän bolsa, onda $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ deňlik ýerine ýeter ýaly (a,b) aralykda iň bolmanda bir C nokat tapylar.

Goý, $y = f(x)$ funksiýa y önüm çykarmanyň käbir mahsus bolan resursyň x çykdajylaryny baglanyşdyrýan bolsun. Eger çykdajylaryň göwrümini a-dan b birlige çenli artdyrylan b/a, onda $f(b) - f(a)$ tapawut öndürmäniň degişli üýtgemesini aňladýar.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2}$$

Gatnaşyk çykdajylar bir birlige artdyrylsa önümiň öndürilmeginiň üýtgemesi ortaça birlige üýtgetýändigini görkezýär. Başgaça, ýagny (2) – $[a,b]$ aralykda resursyň orta öndüriljekdigi.

Lagranžyň teoremasynyň esasynda aşakdakyny tassyklamak bolýar:

$[a,b]$-de üznüksiz we (a,b)-de differensirlenýän $y = f(x)$ öndürme funksiýa bilen önümçilik proses üçin degişli resursyň predel öndürijiligi we (a,b)-de orta öndürijiligi bilen deň bolar ýaly iň bolmanda c çykdajylaryň bir derejesi bardyr.

Funksiýanyň güberçekliginiň ykdysady manysy

Kemelýän girdejiligiň kanuny: öndürilmegi artdyryp her bir täze resursyň birligine (zähmet, tehnologiýa we ş.m.) goşmaça önüm käbir wagtdan başlap kemelýär. Başgaça aýdylanda, x-iň artmagy bilen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kemelýär, bu ýerde Δx – resursyň artdyrmasy Δy – önümiň öndürülmeginiň artdyrmasy.

Önümiň çykarmasy we goýlan resurslary bilen baglanyşdyrýan $y = f(x)$ funksiýa güberçek ýokarky funksiýadyr.

Kemelýän ýaramlylygyň kanuny: Harydyň sanynyň artmagy bilen her bir täze birliginiň goşmaça ýaramlylygy käbir wagtdan başlap kemelýär.

$U = U(x)$ ýaramlylyk funksiýa, (bu ýerde x – haryt U – ýaramlylyk) her bir alyjy üçin subýektiwdir emma, ol ähli jemgyýete obýetiw ululykdyr. Kemelýän ýaramlylygyň kanunyny başgaça aýtmak bolar: ýaramlylyk. Funksiýa güberçek ýokary funksiýadyr.

174. $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ funksiýa Rollyň teoremasynyň şertlerini $[-1;1]$ kesimde kanagatlandyrýarmy?

Çözülişi: Berlen funksiýa üznüksiz we $f(-1) = f(1) = 0$, ýöne $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$, $x = 0$ nokatda $f(x)$ funksiýanyň önümi ýok.

175. $f(x) = x^2 + 4$ funksiýa Lagranžyň teoremasynyň şertini $[-1;2]$ kesimde kanagatlandyrýarmy? Eger teoremany peýdalanyp bolsa, $x = c$ nokady tapyň.

Çözülişi: Berlen funksiýa üznüksiz. $f'(x) = 2x$, $(-1;2)$ aralykda önümi bar. Teoremanyň şerti ýerine ýetýär. Diýmek:

$$f(2) - f(-1) = f'(c)[2 - (-1)], \quad 8 - 5 = 2c \cdot 3, \quad c = \frac{1}{2}.$$

176. Rollyň teoremasynyň dogrulygyny barlaň.

1) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $[-1;1]$ kesimde.
2) $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $[-1;2]$ kesimde.
3) $y = 4^{\sin x}$, $[0;\pi]$ kesimde.

177. Lagranžyň teoremasyndan c-iň bahasyny aşakdaky funksiýalar üçin tapyň.

1) $y = \arcsin x$, $[0;1;1]$ kesimde.
2) $y = \ln x$, $[1;2]$ kesimde.
3) $y = 4x^2 - 5x + 1$, $[0;2]$ kesimde.

178. 1) Eger çykarma funksiýa

$$x = 20 + 8r - r^2$$

görnüşinde berlen bolsa we resursyň çykdajylary 1) 2 şertli birlik 2) şertli birlik bolsa, onda resursyň predel öndürijiligini (funksiýanyň üýtgemesiniň tizligini) tapmaly.

Haýsy pursatdan başlap berlen resursyň çykdajylaryny artdyrmagy ykdysady tarapdan peýdaly bolmaýar?

Berlen çykarma funksiýa bilen ýazylan ykdysady ýagdaýynyň mysallaryny görkeziň.

2) Harydyň bahasy 1) 1 pul birligi 2) 3 pul birligi 3) 10 pul birligi bolanda we haryda bahasyna görä isleg

$$d = 200 + \frac{p-1}{p^2+3}$$

formula arkaly tapylanda islegiň üýtgemesiniň tizligini (predeli, islegi) kesgitläň, jogaplary deňeşdiriň we netijeleri düşündiriň.

Kesgitsizlikleri açmak üçin Lopitalyň kadasy

1) $\frac{0}{0}$ kesgitsizlik. Eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ we $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bar bolsa, onda

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) $\frac{\infty}{\infty}$ kesgitsizlik. Eger $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ we $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bar bolsa, onda

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3) $\infty - \infty$, 1^∞, $0\cdot\infty$ görnüşli kesgitsizlikleri algebraik özgertmeleriniň kömegi bilen, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ kesgitsizlekleriň çözülişine getirip bolýar.

179. Predelleri tapyň:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

Çözülişi: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{1} = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Çözülişi: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 3c}{3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \cdot 2\cos 3x \cdot \sin 3x}{-3 \cdot 2\cos x \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Predelleri tapyň:

180. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$. *Jogaby*: 3α.

181. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. *Jogaby*: 2.

182. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{1+x} + x}$. *Jogaby*: $\frac{4}{9}$.

183. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$. *Jogaby*: 0.

184. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)}$. *Jogaby*: -6.

185. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\mathrm{arctg}x^2 - \pi}$. *Jogaby*: $-\frac{1}{2}$.

186. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$. *Jogaby*: $\frac{1}{2}$.

187. $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x, \ (n > 0)$. *Jogaby*: 0.

188. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\mathrm{ctg}x - \frac{1}{x}\right)$; **Görkezme.** $\mathrm{ctg}x - \frac{1}{x} = {(x - \mathrm{tg}x)}/{x\mathrm{tg}x}$.

Jogaby: 0.

189. $\lim\limits_{x \to 0} [\ln(1 + \sin^2 x)\mathrm{ctg}\ln^2(1+x)]$. *Jogaby*: 1.

190. $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Çözülişi: ∞^0 görnüşli kesgitsiz berlen. Goý, $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ onda

$$\ln y = \sin x \cdot \ln\frac{1}{x}. \lim_{x\to+0}\sin x \cdot \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = 0. \text{ Diýmek, } \lim_{x\to+0} y = e^0 = 1.$$

191. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$. *Jogaby*: 0.   **192.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$. *Jogaby*: 1.

193. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; *Jogaby*: 1.   **194.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$; *Jogaby*: $\frac{4}{7}$

195. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$;   *Jogaby*: $\ln a - 1$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-4\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$; *Jogaby*: $\ln a - 1$ ç) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x-\sin x}$; *Jogaby*: 2.

§ 4. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklary

Eger aralykda (a,b) differensirlenýän f funksiýa üçin şol aralykda $f'(x) \geq 0$ $f'(x) \leq 0$ bolsa, onda (a,b) aralykda ol funksiýa kemelmeýändir (artmaýandyr). Eger-de $f'(x) > 0$ ($f'(x) \leq 0$) bolsa, onda funksiýa aralykda artýandyr (kemelýändir).

196. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

$$f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

Çözülişi: bu funksiýanyň kesgitleniş oblastynyň ähli hakyky sanlary $D(f) = R$. Onuň önümi

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4).$$

Funksiýanyň artýan aralygyny tapmak üçin $x^2 - 4 > 0$ deňsizligi çözmeli:

7-nji surat

$$(x-2)(x+2) > 0$$

$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ aralykda berlen funksiýa artýar.

Funksiýanyň kemelýän aralygyny tapmak üçin $x^2 - 4 < 0$ deňsizligi çözmeli. Bu deňsizligiň çözüwi $x \in (-2;2)$. Şonuň üçin $(-2;2)$ aralykda berlen funksiýa kemelýär.

197. $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Jogaby: $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ aralykda funksiýa artýar, $(-1;1)$ aralykda kemelýär.

198. $f(x) = x^3$. funksiýa $(-\infty;+\infty)$ aralykda artýandygyny subut ediň.

199. $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

Çözülişi: berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Funksiýanyň önümini tapalyň:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x(1-x^2) + x^2 \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = 2 \cdot \frac{2x(1-x^2+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$$\frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0, \qquad 4x > 0, \qquad x > 0,$$

$$\frac{4x}{(1-x^2)^2} < 0, \qquad 4x < 0, \qquad x < 0.$$

Berlen funksiýanyň $(-\infty;0)$ aralykda kemelýär, $(0;+\infty)$ aralykda artýar.

200. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Jogaby: $(-1;1)$ artýar, $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ kemelýär.

201. $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$. *Jogaby*: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (3;+\infty)$ artýar, $\frac{1}{2} < x < 3$ kemelýär.

202. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

Görkezme: $y' = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$. $x^2 > 0$, onda $x^2 - 4x + 3 > 0$ bolanda $y' > 0$ we $x^2 - 4x + 3 < 0$ bolanda $y' < 0$. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

Jogaby: $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ aralykda artýar, $(1;3)$ aralykda kemelýär.

203. $y = 2x^2 - \ln x$.

Jogaby: $\left(-\infty; \frac{-1}{2}\right)$ aralykda kemelýär, $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ aralykda artýar.

204. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$.

Jogaby:$(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ aralykda artýar, $(1;4)$ aralykda kemelýär.

205. $y = x^2 e^{-x}$.

Jogaby: $(-\infty;0) \cup (2; +\infty)$ aralykda kemelýär, $(0;2)$ aralykda artýar.

206. $y = \ln|x|$.

Jogaby: $(-\infty;0)$aralykda kemelýär, $(0;\infty)$ aralykda artýar.

207. $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$.

Jogaby: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3;+\infty)$ aralykda artýar, $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ aralykda kemelýär.

208. $y = e^x + 5x$. *Jogaby*: ähli ýerde artýar.

§ 5. Funksiýanyň ekstremumy

209. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ funksiýanyň ekstremumyny tapyň.

Çözülişi: 1-nji usul. Berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty; +\infty)$.

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 0 \qquad x(x^2 - 2x - 3) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$
		$\frac{17}{12}$		2		$-\frac{37}{4}$	

2-nji usul. $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 3$ – kritiki nokatlar.

$$y'' = (f'(x))' = 3x^2 - 4x - 3.$$

$f''(-1) = 4 > 0$. $x = -1$ nokatda funksiýa minimuma eýedir.
$f''(0) = -3 < 0$. $x = 0$ nokatda funksiýa maksimuma eýedir.
$f''(3) = 12 > 0$. $x = 3$ nokatda funksiýa minimuma eýedir.

210. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

Çözülişi: $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0$.
Berlen funksiýa hemişe artýar. $x = 1$ nokatda ekstremum ýok.

$$y'' = 6(x - 1), \quad y''(-1) = 0.$$

Şol sebäpli 2-nji usul bilen meseläni çözüp bolmaýar.

211. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$.

Görkezme. $x^3 - x^2 + 14x + 24 = 0$, deňleme $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ köklere eýedir.

Jogaby: $y_{\min} = f(-4) = -\frac{365}{3}$; $\quad y_{\max} = f(2) = \frac{67}{3}$;

$$y_{\min} = f(3) = \frac{85}{4}.$$

212. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

Görkezme. $x3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$ ýa-da

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Jogaby: $y_{\min} = f(1) = 3$, $\quad y_{\max} = f(2) = 4$, $\quad y_{\min} = f(3) = 3$.

213. $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2$.

Jogaby: $y_{\min} = f(-4) = 0$, $\quad y_{\max} = f(-2) = 16$, $\quad y_{\min} = f(0) = 0$.

214. $y = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$ funksiýanyň ekstremumyny 2-nji usul bilen tapyň.

Jogaby: $y_{\min} = f(0) = 0$, $\quad y_{\max} = f(1) = \frac{7}{3}$, $\quad y_{\min} = f(4) = \frac{256}{3}$.

215. $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20.$

Jogaby: $y_{max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{97}{4}, \qquad y_{min} = f(3) = -7.$

216. $y = (x - 1)^3 (x + 1)^2.$

Jogaby: $y_{max} = f(-1) = 0, \quad y_{min} = f\left(-\frac{1}{5}\right) = -1\frac{331}{3125},$

$x = 1$ nokatda ekstremum ýok.

217. $y = \sin^3 x + \cos^3 x.$

Görkezme. 1. $f(x)$ funksiýanyň periody 2π-e deň. Şonuň üçin funksiýany $[0;2\pi]$ aralykda garamak ýeterlikdir.

$y' = (\sin^3 x + \cos 3x)' = 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x)$. $[0;\ 2\pi]$ kesimde $3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = 0$ deňleme $0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$ köklere eýedir.

3. Ekstremumy 2-nji önümiň üsti bilen tapmak amatlydyr.

Jogaby: $0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{4};\ 2\pi$ – maksimum nokatlar, $\frac{\pi}{4};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}$ – minimum nokatlar.

218. $y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$

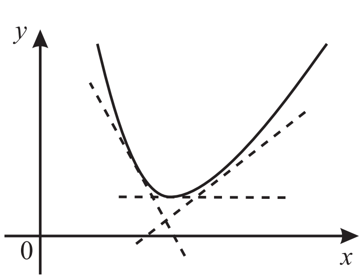
Görkezme. 1) funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $(-\infty;\ +\infty)$.

2) $y'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

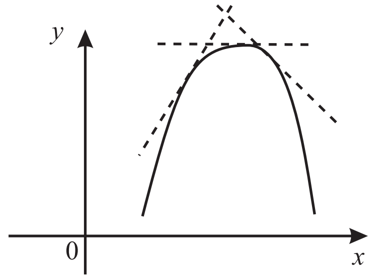
Jogaby: $x = 0$ – minimum; $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ – maksimum; $x = \pm 1$ nokatlarda ekstremum ýok.

§ 6. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligi we epin nokatlary

1. Funksiýanyň grafiginiň güberçeklik ugurlary. Eger käbir aralykda funksiýanyň grafigi oňa geçirilen islendik galtaşmadan ýokarda (aşakda) ýerleşýän bolsa, onda onuň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçek diýilýär. Aşak güberçek grafige oýuk *(7-nji surat)* we ýokaryk güberçek grafige bolsa ýöne güberçek grafik *(8-nji surat)* hem diýilýär.



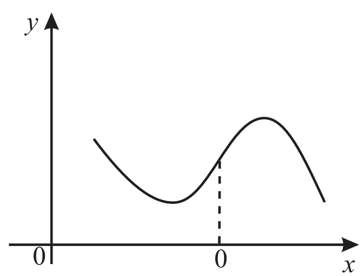
7-nji surat



8-nji surat

Eger (f) funksiýanyň (a,b) aralykda ikinji önümi bar bolup, $f''(x) < 0$ ($f''(x) < 0$) bolsa, onda $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi şol aralykda aşak (ýokaryk) güberçekdir.

2. Funksiýanyň grafiginiň epin nokady. Eger a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen f üçin $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň şol etrapda nokadyň çepinde we sagynda güberçeklik ugurlary dürli-dürli bolsa, onda nokada onuň grafiginiň epin nokady *(9-njy surat)*, a nokada bolsa f funksiýanyň epin nokady diýilýär.



9-njy surat

Funksiýanyň epin nokatlaryny hem-de onuň aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny kesgitlemek üçin aşakdaky düzgünden peýdalanmak bolar.

1. Funksiýanyň ikinji önüminiň nola deň hem-de ikinji önüminiň ýok (ýa-da tükeniksizlide deň) nokatlaryny tapmaly.

2. Funksiýanyň kesgitleniş oblastyny şol nokatlar hem-de funksiýanyň üzülme nokatlary arkaly aralyklara bölmeli we alnan aralyklaryň her birinde funksiýanyň ikinji önüminiň alamatlaryny kesgitlemeli.

219. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4x^2$ funksiýanyň epin nokatlaryny, aşak we ýokaryk güberçek aralyklaryny tapmaly.

Çözülişi: Funksiýanyň ikinji önümin tapalyň:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 8x, \qquad f'(x) = \frac{2}{x^3} + 8 = 8\frac{x^3 + 1/4}{x^3}.$$

Diýmek, funksiýanyň ikinji önümi $x = 0$ nokatda tükeniksizlige deňdir we $x = -1/\sqrt[3]{4}$ nokatda nola deňdir. Şonuň üçin hem funksiýanyň kesgitleniş oblastyny $(-\infty, -1/\sqrt[3]{4})$, $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$, $(0, \infty)$ aralyklara bölüp, olaryň her birinde ikinji önümiň alamatyny kesgitläliň.

1) Eger $x \in (-\infty, -1/\sqrt[3]{4})$ bolsa, onda $f''(x) > 0$ we funksiýa aşak güberçekdir.

2) Eger $x \in (-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ bolsa, onda $f''(x) > 0$ we funksiýa ýokaryk güberçekdir.

3) Eger $x \in (0, +\infty)$ bolsa, onda $f''(x) > 0$ we funksiýa aşak güberçekdir.

Şeýlelikde, ikinji önüm $x = -1/\sqrt[3]{4}$ we $x = 0$ nokatlardan geçende alamatyny üýtgedýär. Şunlukda, $x = -1/\sqrt[3]{4}$ funksiýanyň epin nokady bolup, $x = 0$ epin nokady däldir, çünki ol nokatda funksiýa kesgitlenmedikdir.

220. Aşakdaky funksiýalaryň güberçek interwallaryny tapyň:

a) $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12;$

b) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12;$

ç) $y = \dfrac{x}{1 + x^2};$

d) $y = x^{5/3};$

e) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}, \ (x \geq 1);$

ä) $y = \dfrac{(\ln^2 x)}{x}, \quad (x > 0);$

f) $y = x\sin(\ln x), \ (x > 0);$

g) $y = 2 - |x^5 - 1|;$

Çözülişi: a) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24;$

$$y'' = 12x^2 + 6x - 36 = 12\left(x^2 + \frac{x}{2} - 3\right);$$

x	$(-\infty;-2)$	-2	$\left(-2;\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$
y''	+	∞	–	∞	+
y	$\cup$	epin	$\cap$	epin	$\cup$

d) $y' = 1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$; $\quad y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$;

x	$(-\infty;-2)$	0	$(-\infty;-2)$
y''	+	∞	+
y	$\cup$	in	$\cup$

f) $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$;

$$y'' = \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] = \frac{\sqrt{2}}{x}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right). \; x_k = e^{\pi/4+k\pi},$$

$$k = 0 \pm 1, \pm 2,...$$

x	$(-\infty;-e^{2k\pi+\pi/4})$	$e^{2k\pi+\pi/4}$	$(e^{2k\pi+\pi/4;}+\infty)$
y''	+	–	–
y	$\cup$	epin	$\cap$

$y = (x+1)/(x^2+1)$ funksiýanyň güberçek interwallaryny tapyň.

Çözülişi: $y' = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^1}$; $\quad y'' = \frac{2x^3+6x^2-6x-2}{(x^2+1)^3}$.

$$x^3+3x^2-3x-1=0,$$

$$x_1 = -2-\sqrt{3}; \qquad x_2 = -2+\sqrt{3}; \qquad x_3 = 1.$$

x	$(-\infty;-2-\sqrt{3})$	$-2-\sqrt{3}$	$\left(\begin{matrix}-2-\sqrt{3};\\-2+\sqrt{3}\end{matrix}\right)$	$-2+\sqrt{3}$	$(-2+\sqrt{3};1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	∞	+	∞	–	∞	+
y	$\cap$	epin	$\cup$	epin	$\cap$	epin	$\cup$

221. Aşakdaky funksiýalaryň güberçek interwallaryny tapyň:

$$y = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}. \qquad \textit{Jogaby}: f(3) = 3$$

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;+\infty)$
y	$\cup$	epin	$\cap$

$$y = e^{\sin x};\ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

x	$\left(-\infty; \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$
y	$\cap$	epin	$\cup$

§ 7. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary

1. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary. Eger $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, predelleriň iň bolmanda birisi $+\infty$ ýa-da $-\infty$ deň bolsa, onda $x = a$ göni çyzyga $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasy diýilýär. Eger f funksiýa

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0 \tag{1}$$

görnüşde aňladylýan $y = kx + b$ bolsa, onda göni çyzyga $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasy diýilýär.

Teorema. $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginiň $x\to+\infty$ bolanda $y = kx + b$ ýapgyt asimptotasynyň bolmagy üçin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b \tag{2}$$

predelleriň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

222. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$ funksiýanyň grafiginiň asimptotalaryny tapmaly.

Çözülişi: $x = 1$ göni çyzyk funksiýanyň grafiginiň dik asimptotasydyr, çünki: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

Funksiýany

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2 - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2) - 2}{x - 1} = x + 2 - \frac{2}{x - 1}$$

görnüşde ýazyp, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x - 1} = 0$ deňligiň esasynda $y = x + 2$ göni çyzygyň funksiýanyň grafiginiň ýapgyt asimptotasydygyny alarys.

223. Egrileriň asimptotalaryny tapyň:

a) $y = \frac{5x}{x - 3}$;

b) $y = \frac{3x}{x - 1} + 3x$;

ç) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

d) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$;

e) $y = xe^{\frac{1}{x}}$;

ä) $y = \frac{3x}{2} \ln\left(e - \frac{1}{3x}\right)$;

f) $y = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$;

g) $y = \sqrt{x^2 + 1} \sin\frac{1}{x}$;

h) $y = 2\sqrt{x^2 + 4}$;

Çözülişi: a) $x = 3$ – dik asimptota:

$$\lim_{x \to 3+0} y = \lim_{x \to 3+0} \frac{5x}{x - 3} = \mp\infty.$$

Gorizontal asimptota:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x}{x - 3} = 5.$$

b) $x = 1$ – dik asimptota:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} \left(\frac{3x}{x - 1} + 3x\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} \left(\frac{3x}{x - 1} + 3x\right) = +\infty.$$

Ýapgyt asimptotasyny tapalyň:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1} + 3\right) = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1} + 3\right) = 3.$$

$y = 3x + 3$ – ýapgyt asimptota.

e) $x = 0$ – dik asimptota:

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{t=\frac{1}{x}\to=\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$$

Ýapgyt asimptotasyny tapalyň:

$$k = \lim_{k\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1;$$

$$b = \lim_{k\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{k\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}=z\to 0}\frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

$y = x + 1$ – ýapgyt asimptota.

f) $y = \sqrt{x^2+1} + 2x$, bu funksiýanyň grafiginiň dik asimptotalary ýok, sebäbi bu funksiýa üznüksiz. $x \to +\infty$ we $x \to -\infty$ ymtylanda dürli predelleri alarys. Şonuň üçin sag ($x \to +\infty$) we çep ($x \to -\infty$) ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2} + 2x}{x} = \lim_{x\to+8}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + 2}{1} = 3,$$

$$b_1 = \lim_{z\to+8}\left(\sqrt{1+x^2} + 2x - 3x\right) = \lim_{z\to+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2} + 2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + 2}{1} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2} + 2x - 3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0.$$

Şeýlelikde $y = 3x$ we $y = x$ – çep we sag ýapgyt asimptotalar.

g) $y = \sqrt{x^2 + 1}\,\sin\frac{1}{x}$. Funksiýa $x \neq 0$ bolanda üznüksiz we $x = 0$ nokadyň etrabynda çäklenen. Onda bu egriniň dik asimptotasy ýok. Ýapgyt asimptotalary tapalyň:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2\sin(1/x)}}}{x} = \pm 1\cdot 0 = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\sin(1/x) = \begin{cases}1, \textit{ eger } x\to+\infty\\ -1, \textit{ eger } x\to-\infty.\end{cases}$$

Şeýlelikde egriniň iki gorizontal asimptotasy bar: $y = 1$ we $y = -1$.

Jogaplar: ç) $y = 0$; d) $x = 0$; h) eger $x \to +\infty$, $y = 2x$, eger $x \to -\infty$, $y = -2x$.

§ 8. Önümleri peýdalanyp funksiýalary derňemeli

Funksiýany aşakdaky tertip boýunça derňeýäler:

1. Funksiýanyň kesgitleniş oblasty.
2. Funksiýanyň jübütligi (täkligi), periodikligi.
3. Funksiýanyň grafiginiň koordinata oklar bilen kesişme nokatlary.
4. Funksiýanyň üznüksizligi.Üzülme nokatlary.
5. Ekstremum nokatlary kesgitlemek we funksiýanyň şol nokatlarda bahalaryny tapmak.
6. Epin nokatlar. Güberçeklik interwallar.
7. Asimptotalary kesgitlemek.
8. Grafigini gurmak.

224. $y = 2 + \frac{12}{x2 - 4}$ funksiýany derňäň we grafigini guruň.

Çözülişi: Kesgitleniş ýaýlasy $D(f) = (-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. Berlen funksiýa jübütdir, çünki $y(-x) = 2 + \frac{12}{(-x)^2 - 4} =$

$$= 2 + \frac{12}{x^2 - 4} = y(x).$$

a) Ox oky bilen grafiginiň kesişme nokatlary ýok, sebäbi

$$2+\frac{12}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{2x^2-8+12}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{2x^2+4}{x^2-4}=$$

$$=0\Rightarrow\begin{cases}2x^2+4=0\\x^2-4\neq0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing.$$

b) Oy oky bilen grafigiň kesişme nokady $A(0,-1)$, sebäbi

$$y(0)=2+\frac{12}{0-4}=2+(-3)=-1.$$

Berlen funksiýa öz kesgitleniş ýaýlasynda üznüksizdir, çünki $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$, $x_0\in D(f)$ şert ýerine ýetýär. Berlen funksiýanyň önümini tapalyň: $y'=\left(2+\dfrac{12}{x^2-4}\right)'=\dfrac{24x}{(x^2-4)^2}$.

Ekstremumyň zerur şerti: $y'=0$. Şol sebäpli $-\dfrac{24x}{(x^2-4)^2}=0\Rightarrow x=0.$

$x=\pm2$ nokatlarda berlen funksiýanyň önümi ýok. Diýmek $x=0$ $x=\pm2$ kritiki nokatlar. Jetweli dolduralyň.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$-$
y	$\nearrow$		$\nearrow$	$\max y_{\max}=-1$	$\nearrow$		$\nearrow$

Berlen funksiýanyň ikinji tertipli önümini tapalyň. Epin nokatlaryny tapmak üçin, deňlemäni işläliň. Şeýlelikde ikinji tertipli önüm $x=\pm2$ nokatlarda ýok. Aşakdaky jetweli dolduralyň.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	$+$	∞	$-$	∞	$+$
y	$\cup$	epin	$\cap$	epin	$\cup$

$x=\pm2$ göni çyzyklar berlen funksiýanyň grafiginiň dik asimptotalary, eger.

$$y\to\infty,\text{ onda } x\to\pm2$$

Goý, $y=kx+b$ – ýapgyt ($k=0$ bolanda-gorizontal) asimtotasy.

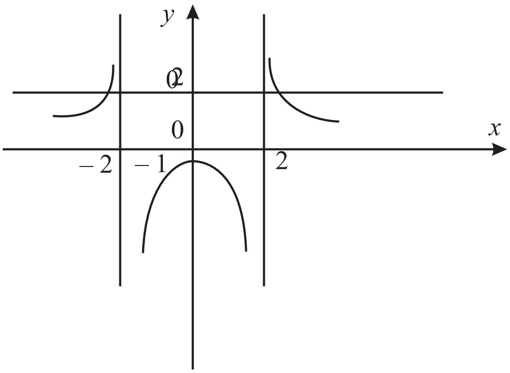
Bu ýerde

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \dfrac{12}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x} + \frac{12}{x(x^2-4)}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\left(2 + \frac{12}{x^2-4}\right) - 0\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{12}{x^2-4}\right) = 2.$$

Onda $y = 2$ – gorizontal asimptotasy.

Ýokardaky derňemäni ulanyp, berlen funksiýanyň grafigini guralyň:



10-njy surat

Aşakdaky funksiýalary derňemeli we grafiklerini gurmaly.

225. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$

226. $y = 4x - \frac{x^3}{3}.$

227. $y = \frac{x^4}{4} - x^3.$

228. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{4}{x}.$

229. $y = \frac{x}{x^2-9}.$

230. $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}.$

231. $y = \frac{x-4}{x^2-1}.$

232. $y = \frac{1}{x} + x.$

233. $y = x + \sin x.$

234. $y = \frac{2^x}{x}.$

235. $y = \sqrt[3]{3x - x^3}.$

236. $y = x^2 \cdot e^{-x}.$

237. $y = x^3 - 5x^2 + 8x.$

238. $y = x(2-x)^2.$

239. $y = 2x^3 - 3x + 1.$

240. $y = x^x.$

Önüm düşünjäniň ykdysadyýetde ulanylyşy

Önümçiligiň y çykdajylaryny harydyň öndürmekliginiň x mukdaryna bagly funksiýa diýip hasaplalyň. Goý, Δx – harydyň sanynyň artdyrmasy, onda Δy – önümçiligiň çykdajylarynyň artdyrmasy, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – harydyň birligine önümçilik çykdajylarynyň orta artdyrmasy. $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – önümçiligiň predel çykdajylaryny aňladýar we goşmaça harydyň birligini öndürmek üçin goşmaça çykdajylary takmyn häsiýetlendirýär. Predel çykdajylar önümçiligiň derejesinden (öndürilen harydyň mukdaryndan) x we önümçilik çykdajylar bilen dälde diňe üýtgeýän çykdajylar (çig mal, ýangyç we ş.m.) bilen kesgitlenýär. Şuňa meňzeş predel satuwdan gelen pul, predel peýdalylyk, predel öndürijilik we başga predel ululyklar kesgitlenýär.

Predel ululyklar ykdysady obýektiň üýtgemesiniň prosesini häsiýetlendirýär. Şeýlelikde, önüm ykdysady obýektiň wagt ýa-da başga derňelýän şert boýunça üýtgemesiniň tizligini aňladýar.

Mysal hökmünde orta we predel girdejileriň gatnaşygyny monopoliýa we konkurent (bäsdeş) bazar şertlerinde garalyň.

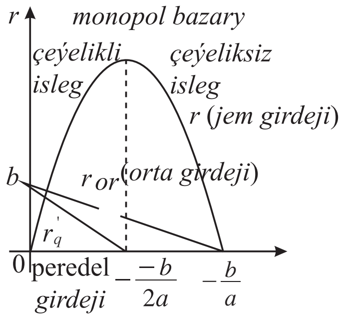
Harydy satyp r jemi girdeji (satuwdan gelen pul) almagy harydyň birliginiň p bahasyny onuň q mukdaryna köpeltmek hasylyna deň ýa-da $r = pq$. Monopoliýa şertinde bir ýa-da birnäçe firma doly, bellibir harydyň hödürlemesini, hem bahasyny gözegçilikde saklaýar. Harydyň bahasy galdyrylsa, onda oňa islegiň gaçýandygy mälimdir. Goý, $p(q)$ islegiň egrisi – çyzykly kemelýän funksiýa $p = aq + b$, $a > 0$, $b > 0$ bolsun. Onda harydyň satylmasyndan jemi girdeji

$$r = (aq + b)q = aq^2 + bq,$$

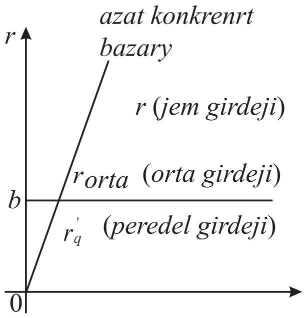
bu ýagdaýda harydyň birligine orta girdeji, $r_{\text{orta}} = \frac{r}{q} = aq + b$, we predel girdeji, ýa-da goşmaça harydyň birligi satylanda goşmaça girdeji $r'_q = 2aq + b$. Diýmek monopoliýa bazar şertinde satylan harydyň artmasy bilen predel girdeji kemelýär, bu bolsa orta girdejiniň kemelmegine getirýär *(1-nji surat)*.

Kämil konkurensiýa şertlerinde bazarda köp firmalar harydyny satýar we her bir firma harydyň bahasynyň derejesini gözegçilikde saklap bilmeýär, harytlaryň durnukly satylmagy bazardaky baha boýunça satylmaly, mysal üçin $p = b$. Onda bu ýagdaýda jemi girdeji $r = bq$.

Orta girdeji $r_{orta} = bq$ we predel girdeji $r_q' = b$ *(2-nji surat)*. Şeýlelik-de, kämil konkurent bazar şertlerde orta we predel girdejilere deň.



11-nji surat



12-nji surat

241. Çykdajy funksiya $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 10x + 2000$. Predel çykdajylary tapmaly we onuň bahasyny $x = 10$ nokatda hasaplamaly.

Çözülişi:

$$C'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}4x + 10,$$

$$C'(10) = 3 - 4 + 10 = 9.$$

Funksiyanyň artdyrmasyny takmyn tapmak üçin

$$\Delta C = dC - C'(x)\Delta x.$$

Formulany peýdalanyp $C'(10)$ bahanyň manysyny düşündirip bolýar: eger 10 sany önüm öndürilen bolsa, onda 11-nji harydy öndürmek üçin goşmaça çykdajylar ΔC takmyn $C'(10) = 9$ deň.

Şuňa meňzeşlikde predel girdeji $R'(x)$ we predel peýda $P'(x)$ tapylýar.

Ulanylma we aýama funksiyalar

Salgyt tölenenden soň ilatda galýan girdejini J bilen belgiläris. Bu girdeji iki goşulyjydan ybarat. Girdejiniň käbir bölegini ilat ulanýar. Bu bölek ulanylma funksiýany düzýär we $C(y)$ bilen belgilenýär. Ikinji goşulyjy $S(y)$ ilatyň aýamasyny (saklamasyny) düzýär.

Onda

$$y = C(y) + S(y).$$

Ulanylma we aýama funksiýalar gysga wagt aralykda çyzykly hasaplanýar. Wagtyň uly interwallarynda bu funksiýalar çyzykly däldir.

Eger milli girdeji J ΔJ artdyrma bolsa, onda ulanylma we aýama funksiýalar hem ΔC we ΔJ artdyrmalary alarlar:

$$\Delta y = \Delta C + \Delta S.$$

Soňky deňligi $\Delta y \neq 0$ ululuga bölsek we $\Delta y \to 0$ bolanda predele geçsek, onda alarys:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta j} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta j} = 1$$

ýa-da

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1.$$

Alnan $\frac{dC}{dy}$ we $\frac{dS}{dy}$ önümlere laýyklykda predel ulanylma meýilliligi we predel aýama meýilliligi diýilýär.

Saklama çykdajylary. Hasabyň öndürmeginiň ähli çykdajylary önümçiligiň çykdajylarynda we saklama çykdajylaryndan ybaratdyr, Goý, haryt ambara x sany saklaýan toplum görnüşde getirilýän we hemişelik tizlik bilen harçlanýan bolsun, onda ambaryň dolulugy t wagta bagly we suratda görkezilen grafige eýedir. Bu ýerde V – ambardaky harydyň birlik sany, $\frac{x}{y}$ ambaryň ortaça dolulygy t_0 hasabyň toplumynyň harçlanýan wagty.

242. Kärhana bir ýylda käbir harydyň görnüşinden müň birligini öndürmeli. Bir toplumyny harydyň öndürmekligine taýýarlygyň çykdajylary 320 manada deň. Harydyň öndürmekliginiň çykdajylary önümiň her birligine 8 manada deň saklama çykdajylar, her birligine 1 manat. Ähli çykdajylar minimal bolar ýaly harydyň toplumyndaky önümiň birligi x näçä deň bolmaly.

Çözülişi: Önümçiligiň çykdajylaryny taparys:

$$\frac{1000}{x} \cdot 320 + 1000 \cdot 8.$$

Bu ýerde $\frac{1000}{x}$ – bir ýyldaky harydyň toplumynyň sany.

Saklama çykdajylary $\frac{x}{2} \cdot 1$ -e deň.

Şeýlelikde, ähli çykdajylar:

$$\frac{1000}{x} + 800 + \frac{x}{2}.$$

Minimal bahany tapalyň.

$$C'(x) = -\frac{320000}{x^2} + \frac{1}{2}; \quad C'(x) = 0$$

$$-\frac{320000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0; \quad x = 0$$

$$C(x) = \frac{640000}{x^3}; \quad C(800) = \frac{640000}{800^3} > 0.$$

Diýmek, $x = 800$ bolanda funksiýa minimuma eýedir, Şeýlelikde toplumda harydyň 800 birligi bolmaly.

Çeýeliklik. Differensirlemegi ýönekeýleşdirmek üçin logarifmik önüm (logarifm funksiýanyň önümi) ulanylýar:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1dy}{ydx}.$$

Bu düşünje bilen funksiýanyň çeýelikligi baglydyr. Funksiýanyň çeýelikligi aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$E_x(y) = \eta = \frac{xdy}{ydx}.$$

Eger bagly däl üýtgeýän x ululyk Δx artdyrma bolsa, onda y funksiýa Δy artdyrma eýe bolýar, x we y ululyklaryň göterim üýtgemesi $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$ we $\frac{\Delta y}{xy}$ – 100% laýyklykda deň, bu ýagdaýda $\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{100x}{100\Delta x}$ – y funksiýanyň göterim üýtgemesiniň x argumentiniň göterim üýtgemesiniň gatnaşygy.

Eger $\Delta x \to 0$, onda

$$\frac{\Delta y \cdot x}{y \Delta x} \to \frac{xdy}{ydx} = \eta$$

ýa-da Δx – iň bahalaryň kiçi üýtgemelerinde funksiýanyň göterim üýtgemesi takmyn çeýelikligi deňdir,

Eger $\eta < -1$ bolsa, onda funksiýa çeýelikli.

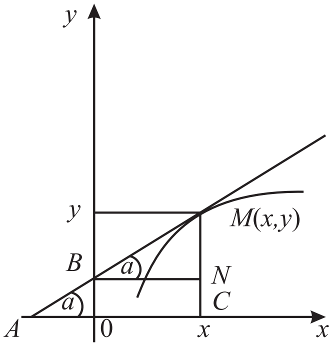
Eger $-1 < \eta < 0$ – çeýelikli däl

Eger $\eta = -1$ bolsa, funksiýanyň birlik çeýelikli diýilýär.

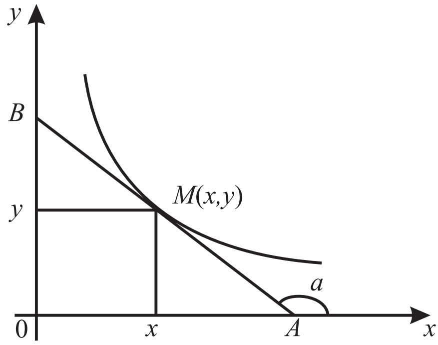
Çeýeligiň geometrik manysyny düşündireliň. Kesgitleme boýunça

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\text{tg}\alpha \qquad (1)$$

Bu ýerde tgα – $M(x,y)$ nokatda galtaşýanyň burçunyň tangensi.



13-nji surat



14-nji surat

MBN üçburçlukdan alarys: $MN = x\text{tg}\alpha$, $MC = y$. MBN we AMC üçburçlukdan alarys: $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$. Onda $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$ ýa-da absolýut ululygy boýunça funksiýanyň çeýeligi berlen nokatdan galtaşýan boýunça onuň Ox we Oy oklar bilen kesişýän nokatlara çenli uzaklyklaryň gatnaşygyna deňdir. Eger funksiýanyň grafigine galtaşýanyň oklar bilen kesişýän A we B nokatlar M nokadyň bir tarapynda ýatýan bolsa, onda $E_x(y)$ položitel, eger-de dürli taraplarda ýatan bolsa, onda $E_x(y)$ otrisateldir.

Logarifmik önüm düşünjelerde:

$$\eta = \frac{\frac{d}{dx}(\ln y)}{\frac{d}{dx}(\ln x)}$$

ýa-da x-a görä y funksiýanyň çeýelikligi – y-iň logarifmik önüminiň gatnaşygy.

Funksiýanyň çeýeliginiň häsiýetleri

Funksiýanyň çeýeligi x-a bagly däl üýtgeýän ululygyň we funksiýanyň depgininiň üýtgemesiniň $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$ köpeltmek hasylyna deň, ýa-da $E_x(y) = xT_y$.

Iki funksiýanyň köpeltmek hasylynyň (paýyň) çeýeligi olaryň çeýelikleriniň jemine (tapawudyna) deň:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v),$$

$$E_x\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = E_x(u) - E_x(\upsilon).$$

Özara ters funksiýalaryň çeýelikleri – özara ters ululyklar:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Funksiýanyň çeýelikligi islege we ulanylma seljerme berlende ulanylýar. Mysal üçin, y islegiň çeýelikligi x baha (ýa-da girdejä) görä $E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha$ formula arkaly kesgitlenýär. Bu formula bahanyň 1% üýtgedilse, isleg näçe göterime üýtgeýändigini görkezýär. Eger $|E_x(y)| > 1$ bolsa, onda isleg çeýelikli, eger $|E_x(y)| < 1$ – çeýelikli däl. Eger $|E_x(y)| = 1$ bolsa, onda isleg birlik çeýelikli diýilýär.

Eger $x = x(t)$ isleg funksiýa belli bolsa, onda p harydyň bahasyna görä predel girdejini tapmak bolar:

$$\frac{dr}{dp} = \frac{d}{dp}(xp) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{pdx}{xdp}\right) = x(1 + \eta\eta).$$

Eger isleg çeýelikli bolsa, onda $1 + \eta < 0$, $\frac{dR}{dp} < 0$ we r girdeji baha funksiýa kemelýär.

Eger isleg çeýelikli däl bolsa, onda $1 + \eta < 0$, $\frac{dR}{dp} > 0$ we R bolsa funksiýa görä artýar.

Eger isleg birligi çeýelikli bolsa, onda $1 + \eta = 0$ we harydyň bahasy üýtgedilse girdeji üýtgetmeýär.

243. Önümçiligiň çykdajylarynyň y we harydyň öndürme mukdarynyň x baglylygy formula bilen aňladylýar: $y = 50x - 0{,}95x^3$ (pul birligi). Önümçiligiň orta we predel çykdajylaryny tapmaly.

Çözülişi: Harydyň birligine orta çykdajylar $y_{or} = \frac{y}{x} = 50 - 0,05x^2$ funksiýany aňladýar; $x = 10$ bolanda: $y_{or}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10x^2 = 45$ (pul birligi).

Predel çykdajylar funksiýasy $y' = 50 - 0,15x^2$ önüm bilen aňladylýar; $x = 10$ bolanda predel çykdajylar $y'(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35$ (pul birligi).

Şeýlelik-de, eger harydyň birligini öndürmek üçin orta çykdajylar 45 pul birligine deň bolsa, onda predel çykdajylar, ýa-da önümçiligiň berlen derejesinde (öndürilýän harydyň, ýa-da önümçiligiň berlen derejesinde (öndürilýän harydyň göwrümi 10 pul birligine deň) harydyň goşmaça birini öndürmek üçin goşmaça çykdajylar 35 pul birliginden ybaratdyr.

244. Birlik önümiň özüne düşýän gymmaty y (müň manat) bilen baglyşygy $y = -0,0x + 80$. Harydy 60 *mln* manatlyk öndürilende özüne düşýän gymmatlyk öndürilende özüne düşýän gymmatlygyň çeýeligini tapyň.

Çözülişi: $E_x(y) = \frac{x}{y}y'$ formuladan özüne düşýän gymmatyň çeýeligi:

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

$x = 60$ bolanda $E_{x=60}(y) = -0,6$ ýa-da 60 *mln* manatlyk haryt öndürilende, onuň özüne düşýän gymmaty 0,6% kemelmegine getirýär.

245. Işçiler toparynyň u göwrümli harydyň öndürmesi:

$u = -\frac{5}{6}t^3 + + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (birlik) deňleme bilen berilýär. $0 \le t \le 8$, t – iş wagty (sagatda). Iş başlan soň 1 sagatdan we iş tamamlanmaga 1 sagat galanda zähmet öndürijiliginiň üýtgemesiniň tizligini we depginini tapyň.

Çözülişi: Zähmet öndürijiligi önümiň üsti bilen tapylýar:

$z(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ (birlik/sagat)

Öndürijiligiň üýtgemesiniň tizligi:

$$z'(t) = -5t + 15 \text{ (birlik/sag}^2\text{)}$$

we öndürijiligiň üýtgemesiniň depgini:

$$T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}.$$

$t_1 = 1$ we $t_2 = 8 - 1 = 7$ sagatlarda $z(1) = 112{,}5$ (birlik/sag), $z'(1) = 10$ (birlik/sag^2), $T_z(1) = 0{,}09$ (birlik/sag), $z(7) = 82{,}5$ (birlik/sag), $z'(7) = -20$ (birlik/sag^2), $T_z(7) = -0{,}24$ (birlik/sag). Şeýlelikde, işiň ahyryna çenli zähmet öndürijiligi örän peselýär, bu ýagdaýda $z'(t)$ we $T_z(t)$ ululyklaryň alamaty «+»-dan «–»-a üýtgemesi iş wagtyň birinji sagatlaryndaky zähmet öndürijiliginiň artdyrmasy işiň soňky sagadynda onuň peselmegi bilen düşündirilýär.

246. Tejribe arkaly $q = \frac{p+8}{p+2}$ isleg funksiýa we $s = p + 0{,}5$ hödürleme funksiýa kesgitlenipdir. Bu ýerde q – harydyň satyn alynýan mukdary, s – harydyň hödürlenýän mukdary, p – harydyň bahasy. a) harydyň deňagramly bahasyny ýa-da isleg we hödürleme deň bolanda harydyň bahasyny; b) bu bahada islegiň we hödürlemäniň çeýeliklerini; ç) deňagramly bahadan 5% galdyrylan bahada girdejiniň üýtgemesini tapmaly.

Çözülişi: a) Harydyň deňagramly bahasy $q = s$ şertden tapylýar:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5;\;\; 2p^2 + 3p - 14 = 0;\;\; p_1 = -3{,}5 \text{ we } p_2 = 2$$

Deňagramly baha $p = 2$ (pul birligi).

b) $E_x(y) = \frac{x}{y}y'$ formuladan islegiň we hödürlemegiň çeýeliklerini taparys:

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)};\quad E_p(s) = -\frac{2p}{2p+1}.$$

Deňagramly $p = 2$ baha üçin $E_{p=2}(q) = -0{,}3$; $E_{p=2}(q) = 0{,}8$.

Alnan çeýelikleriň ululyklary absolýut ululyklary boýunça 1-den kiçi, onda berlen harydyň islegi we hödürlemesi bahasyna görä çeýelikli däl. Bu bolsa harydyň bahasy üýtgände islegiň we hödürlemäniň güýçli üýtgemesine getirmeýär. Meselede bahanyň 1% galdyrylanda isleg 0,3% gaçýar, hödürleme bolsa 0,8% galýar.

ç) Deňagramly bahadan p baha 5% galdyrylsa, onda isleg $5 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\%$ kemelýär, diýmek, girdeji 3,5% galýar.

247. Eger kärhananyň doly çykdajylarynyň çeýeligi 1-e deň bolsa, onda predel we orta çykdajylaryň çeýelikleriniň baglylygyny tapyň.

Çözülişi: Goý, kärhananyň doly çykdajylary $y = f(x)$ funksiýa arkaly berlen bolsun. Bu ýerde x – öndürilen harydyň göwrümi. Onda harydyň birligine önümçiligiň orta çykdajysy $y_{\text{orta}} = \dfrac{y}{x}$. Kärhananyň predel çykdajylaryny tapmak üçin y' önümi tapmaly. Meseläniň şerti boýunça $E_x(y) = 1$, onda $\dfrac{x}{y} y' = 1$, bu ýerden $y' = \dfrac{y}{x}$. Şeýlelikde $y' = y_{\text{orta}}$, ýa-da predel çykdajylar orta çykdajylara deňdir.

248. a) Iş günüň dowamynda kärhananyň öndürýän harydynyň göwrümi

$u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$ (şertli birlik) formula bilen berilýär. Bu ýerde t – wagt (sagatda). Iş başlandan 2 sagat soň zähmetiň öndürijiligini tapmaly.

b) Önümçiligiň çykdajylary y (pul birligi) we harydyň öndürilýän mukdary (birlik) $y = 10x - 0{,}04x^3$ formula bilen kesgitlenýär. Harydyň göwrümi 5 (birlik) bolanda orta we predel çykdajylary hasaplamaly.

249. q isleg funksiýasy we s hödürleme funksiýasy p baha görä aşakdaky görnüşde berilýär: $q = 7 - p$ we $s = p + 1$. Tapmaly: a) harydyň deňagramly bahasyny ýa-da isleg we hödürleme deň bolanda harydyň bahasyny; b) bu bahada islegiň we hödürlemäniň çeýeliklerini; ç) deňagramly bahadan 5% galdyrylan bahada girdejiniň üýtgemesini.

250. Döwletiň salgytdan alýan iň uly girdejisini tapmak üçin funksiýanyň ekstremumyny tapylýar. Isleg we hödürlemek kanunlar aşakdaky görnüşi alýar:

$$p = -3x + 12, \quad p = 2x + 2.$$

Döwletiň girdejisi iň uly bolar ýaly l salgydyň ululygyny tapmaly.

Çözülişi: l salgydy girizilenden soň aşakdaky sistemany alarys:

$$\begin{cases} P_j = -\,3x + 12 \\ P_H = 2x + 2 \\ P_j = P_j + l \end{cases}$$

L ululugy x-iň üsti bilen aňladyp, L döwletiň girdejisini aňladýan formula goýup, alarys:

$$-\,3x + 12 = 2x + 2 + 1,$$

$$l = 10 - 5x,$$

$$L = xl = x(10 - 5x) = 10x - 5x^2.$$

L funksiýanyň maksimumyny taparys:

$$L' = 10 - 10x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$L = -\,10 < 0$. Diýmek, $x = 1$ – maksimum nokady, $x = 1$ nokatda taparys

$L = 5$, $L = 5$, diýmek, l = 5 bolanda döwlet girdejisi iň uly bolýar.

251. Milli peýniriň satylyşynyň göwrümi

$$V(t) = 5000 + 1000t - 100t^2$$

formula arkaly berilýär. Bu ýerde t – gije-gündizde ölçenýän wagt, V – bir gije-gündizde satylan peýniriň mukdary (kg). Peýniriň satylyş tizliginiň üýtgemesini a) $t = 0$; b) $t = 3$; ç) $t = 6$ wagt pursatlarynda tapyň.

Jogaby: a) 1000; b) 400; ç) – 200.

252. Käbir şäheriň ilaty

$$P(t) = 100000\,(1 + t)^2$$

kanun boýunça artýar. Ilatyň artýan tizliginiň üýtgemesini a) $t = 0$; b) $t = 2$; ç) $t = 5$ ýylda tapyň.

Jogaby: a) 200 000; b) 600 000 ; ç) 1200 000.

253. Kesel epidemiýasy ilatyň arasynda haýal ýaýraýar. Syrkawlaryň sany

$$P(t) = 200(t^{\frac{5}{2}} + t^2)$$

formula arkaly kesgitlenýär. Bu ýerde t – epidemiýanyň başlanyndan soň geçen hepdäniň sany. Syrkawlaryň sanynyň tizliginiň üýtgemesini a) $t = 1$; b) $t = 4$; ç) $t = 9$ hepde kesel epidemiýasy başlandan soň geçende tapyň.

Jogaby: a) 900; b) 5600; ç) 17100.

254. Agyz suw taýýarlamagyň çykdajylary $C = \frac{10000}{p} - 100$, bu ýerde p – suwy hapalaýan garyndylary saklamasynyň göterimi. Eger garyndylar 5% bolsa, önümçiligiň çykdajylaryň üýtgemesiniň tizligini tapyň.

Jogaby: – 400.

255. Goý, käbir önümiň bahasyna görä islegi $D(p) = \frac{25000}{p^2} - \frac{1}{5}$ formula arkaly kesgitlenýän bolsun. Eger harydyň bahasy a) 10; b) 25 deň bolsa, onda islegiň üýtgemesiniň tizligini tapyň.

Jogaby: a) – 50; b) – 3,2.

256. Peýdalanan suwy p göterim hapadan arassalamagyň çykdajysy $C = \frac{7600p}{105 - p}$ deň. $p = 52{,}5$ nokatda çykdajylaryň üýtgemesiniň tizligini tapyň.

Jogaby: 0.

257. Goý, käbir önümiň bahasyna görä islegi $D(p) = \frac{100}{\sqrt{p}} - \frac{1}{4}$ formula arkaly kesgitlenýän bolsun. Eger harydyň bahasy a) 100; b) 16 deň bolsa, onda islegiň üýtgemesiniň tizligini tapyň.

Jogaby: a) – 0,05; b) – 0,78125.

258. Radiotehnikanyň lomaý söwdasynyň girdejesi:

$$R(x) = 75x - 0{,}05x^2, \qquad 0 \le x \le 750,$$

bu ýerde x – radiotehnikanyň satylan sany. Eger a) 100 sany; b) 200 sany radiotehnika satylan bolsa, onda predel girdejini hasaplaň.

Jogaby: a) 65; b) 55.

259. Aşakdaky funksiýalar üçin predel girdejini hasaplaň:

a) $R(x) = 2x - 0{,}01x^2$;

b) $R(x) = 4x - 0{,}05x^{\frac{3}{2}}$;

ç) $R(x) = 0{,}2x - 0{,}01x^2 - 0{,}0001x^{\frac{5}{2}}$;

d) $R(x) = 50x - 2x^3(\sqrt{x} + 1)$;

260. Eger käbir harydyň isleg deňlemesi we bahasy berlen bolsa, onda predel girdejini tapyň:

a) $10x + p = 100, \quad p = 80$; b) $\sqrt{x} + 3p = 50, \quad p = 10$;

ç) $x^{\frac{3}{2}} + 10p = 94, \; p = 38{,}6$; d) $2p + x + 0{,}02x^2 = 1000, \quad p = 494$.

Jogaby: a) 60; b) $\frac{20}{3}$; ç) 7,4; d) 497.

261. Öňki meselede goşmaça çykdajylaryň funksiýasy we nokat berlipdir:

a) $C(x) = 50 + 3x, \quad x = 3$; b) $C(x) = 40 + x, \quad x = 6$;

ç) $C(x) = 100 + x^{\frac{3}{2}},, \quad x = 4$; d) $C(x) = 70 + 0{,}1x^2, \quad x = 25$.

Predel peýdany we onuň bahasyny berlen nokatda tapmaly.

Jogaby: a) 37; b) $\frac{38}{3}$; ç) 4,4; d) 451,25.

262. Öňki meseläniň a), b) we d) bölümçelerde iň uly peýdany tapmaly. Harydyň haýsy p bahasynda peýda iň uly bahasyny alýar.

Jogaby: a) $p = 51{,}5$ bolanda $P = 185{,}23$; b) $p = 14{,}8$ bolanda $P = 392{,}42$; d) $p = 322{,}27$ bolanda $P = 34361{,}6$.

263. Bir günde öndürilen $Q(x)$ harydyň mukdary kärhanada işleýän işçileriniň sanyna $Q(x) = 100x + 3x^2$ kanun boýunca baglydyr, bu ýerde x – işçileriň sany. a) Eger kärhanada 70 adam işleýän bolsa, bir işçi goşulanda hepdäniň dowamynda harydyň öndürijiligine nähili täsir eder. b) Bir işçi goşulanda hepde-de çykarylýan önümiň takyk artdyrmasyny tapyň.

Jogaby: a) 520; b) 523.

264. Käbir önümiň bir aýda çykarylan sany $Q(x)$ maýa goýumlardan aşakdaky ýaly baglydyr:

$$Q(x) = 500x^{\frac{3}{2}},$$

bu ýerde x – maýa goýum müň manatda.

Eger başda 100 müň manat maýa goýlan önümçilige goşmaça 1müň manat goýulsa, önümçiligiň takyk we takmyn artdyrmasyny tapyň.

Jogaby: 7518,72; 7500.

265. Goý, käbir haryda isleg q we onuň bahasy p bilen aşakdaky görnüşde:

$$q = \frac{40000}{p^2} - 1, \quad p > 0$$

baglydyr. Eger harydyň bahasy a) 50-den 51-e ; b) 100-den 101-e galanda islegiň takyk we takmynan üýtgemesini tapyň.

Jogaby: a) – 0,62; – 0,64; b) – 0,079; – 0,08.

266. Käbir harydyň önümçiliginiň çykdajylary

$$C(x) = 100 + 3x + x^2$$

görnüşde berilýär, bu ýerde x – önümiň birlik sany. Predel peýda funksiýany we onuň $x = 30$ nokatda bahasyny tapyň. $P'(30)$ bahanyň ykdysady manysyny düşündiriň. $P(31) - P(30)$ ululygy tapyň we onuň manysyny düşündiriň.

Jogaby: – 43; – 44.

267. Käbir harydyň önümçiliginiň çykdajylary

$$C(x) = 150 + 10x + 0{,}01x^2$$

görnüşde berilýär, bu ýerde x – önümiň birlik sany. Harydyň bahasy 36 manada deň. Peýda funksiýany we predel peýda funksiýany tapyň. $P'(15)$ bahanyň ykdysady manysyny düşündiriň. $P(16) - P(15)$ ululygy tapyň we onuň manysyny düşündiriň.

Jogaby: 25,69; 25,7.

268. Käbir harydyň önümçiliginiň çykdajylary aşakdaky görnüşde berilýär:

a) $C(x) = 2000 + 100x + 0,1x^2;$ b) $C(x) = 3500 + 150x + 0,2x^2,$

bu ýerde x – önümiň birlik sany. Predel çykdajylar funksiýasyny, x sany önümiň öndürmek üçin orta çykdajylary tapyň. Harydyň näçe sanysy öndürilende orta çykdajylaryň üýtgemesi nola deň bolar.

Jogaby: a) 200; b) 135.

269. Suratçynyň fotosuratynyň bir toplumynyň bahasy 110 manat bolsa, onda bir günde surata düşýänleriň sany 45-e deň. Eger fotosuratlaryň bir toplumynyň bahasyny 120 manat etseň, onda müşderiniň sany 40-a çenli kemelýär. Suratyň bahasynyň we islegiň baglaşygyny çyzykly hasap edip, girdeji funksiýany tapyň. Suratyň haýsy bahasynda girdeji iň uly bahasyny alar?

Jogaby: 100.

270. Tehniki serişdäni öndürýän kärhana bir hepde-de 100 sanysyny öndürip, her birini 1800 manatdan satýar. Eger bu enjamyň bahasyny 1900 manada çenli galdyrylsa, onda satylýan enjamlaryň sany 80-e çenli kemelýär. Goý, enjamyň bir hepde-de fiksirlenen önümçilik çykdajylary 50 manat we üýtgeýän çykdajylar – bir enjam üçin 800 manada deň bolsun. Isleg kanuny çyzykly diýip hasap edilse, girdeji funksiýasyny tapyň. Iň uly girdeji näçä deň we ol haýsy baha ýeter.

Jogaby: $p = 1550$ bolanda $P = 62500$.

271. Myhmanhanada 60 otag bar. Bir sutkada bir otagyň bahasy 30 manat bolsa, onda bir sutkada 50 otag eýelenýär. Eger-de baha 28-e çenli peselse, onda 55 otag eýelenýär. Isleg kanuny çyzykly diýlip hasaplansa, girdejiniň iň uly bahasyny tapyň. Iň uly girdeji haýsy baha ýeter.

Jogaby: $p = 26$ bolanda $R = 1560$.

272. Restorana bir wagtda 100 adamy kabul edip bolýar. Agşamky naharyň bahasy 120 manat bolanda restorana nahar iýmäge 70 adam gelýär, eger-de baha 100 manat bolsa, onda restorana gelýänleriň sany 80-e deň bolýar. Goý, nahary taýýarlamagynyň fiksirlenen çykdajylary bir günde 900 manat we üýtgeýän çykdajylar – bir nahara 1 manat bolsun. Gelýänleriň sany we naharyň bahasy bilen baglaşygy çyzykly diýip hasaplansa, girdeji funksiýany tapyň. Iň kiçi girdejiniň bahasyny tapyň.

Jogaby: $P = 5150$.

273. Käbir harydyň bahasy 250 manada deň. Bu harydyň önümçilik çykdajysy $120x + x^2$ formula arkaly kesgitlenýär. Bu ýerde x – bir aýda öndürilen harydyň sany. Girdejiniň maksimal bahasyny tapyň.

Jogaby: $P = 4225$.

274. Käbir harydyň önümçilik çykdajysy $x^2 + 80x$ formula arkaly kesgitlenýär. Bu ýerde x – bir aýda öndürilen harydyň sany. Bu harydyň birliginiň bahasy 280 manada deň. Harytdan girdeji iň uly bolar ýaly, näçesini öndürmeli.

Jogaby: $P = 60$.

275. Käbir haryda bazarda isleg we hödürleme funksiýalary

$$p = 2x + 50,$$

$$p = -x + 200$$

görnüşde berilýär. Bu ýerde x – harydyň birlik sany. Goý, önümçiligiň orta çykdajylary harydyň birine aşakdaky formula arkaly berilýär:

$$\overline{C}(x) = \frac{500}{x} + 70 + 2x.$$

Peýdanyň iň uly bahasyny tapyň. *Jogaby*: $P = 300$.

Predel öndürijiligi, isleg we hödürleme

Önümiň ykdysady manysyna we differensial hasaplamalaryň apparatyna görä funksiýany derňemek bilen bagly ykdysady meseleleriň toplumy ýüze çykýar. Hususan hem, ykdysady düşünjeleri we resurslaryň predel öndürijiligi, harydyň bahasyna görä predel islegi barada meseleler has gyzyklydyr.

Kesgitlemeleri we şolar ýaly meseleleriň mysallaryny görkezeliň.

276. Edara bir ýa-da käbir birjynsly harydyň x birligini öndürýär. Eger edaranyň maliýe toplanmasy onuň önüm öndürmesi bilen baglylygy $F = -0,02x^3 + 600x - 1000$ formula arkaly berlen bolsa, onda ol edaranyň maliýe toplanmasyny derňäň.

Üýtgeýän ululygyň ykdysady manysyndan onuň otrisatel däldigi gelip çykýar. Onda

$$D_F = [0; \infty).$$

$F' = -0,06x^2 + 600$. $x = -100$ we $x = 100$ bolanda $F' = 0$.

(0;100) aralykda funksiýanyň önümi položitel, (100;∞) aralykda bolsa otrisateldir. $x = 100$ nokatda berlen funksiýa maksimuma eýedir: $F_{\max} = F(100) = 39000$.

Netije. Eger önüm çykarmasy 100 birlige cenli artýan bolsa, onda edaranyň maliýe toplanmasy hem artýar, $x = 100$ bolanda maliýe toplanmasy maksimal 39000 pul birligine eýe bolýar. Eger edarada harydyň öndürmesini 100 birlige çenli artdyrylsa, onda ol edaranyň maliýe toplanmasy artýar, $x = 100$ bolanda edaranyň maliýe toplanmasy maksimal 39000 pul birligine deň bolýar, we önümçiligiň geljekki ösüşi maliýe toplanmanyň gysgaltmasyna getirýär.

277. Sement kärhanasy bir günde x tonna sement öndürýär. Şertnama boýunça ol gurluşyk firmany her gün 20 t-dan az bolmadyk sement bilen üpjün etmelidi. Kärhananyň kuwwatlygyna görä ol bir günde 90 t çenli sement öndürüp bilýär. Eger kärhananyň çykdajylar funksiýasy $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$ görnüşde berlen bolsa, onda önümçiligiň haýsy göwrüminde udel çykdajylaryň maksimal (minimal) boljakdygyny kesgitlemeli:

Önümçiligiň göwrümi x bolanda udel çykdajylar

$$\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200$$

deň bolar. Mesele [20,90] aralykda $y = -x^2 + 98x + 200$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaklyga getirildi.

Jogaby: $\max\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(49) = 2601$, $\min\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(90) = 320$.

16. sargyt № 1573

278. Meýdany 294 m^2 bolan gönüburçluk görnüşindäki ýer meýdançanyň daşyndan haýat ýasamaly we ony diwar bilen deň ikä bölmeli. Haýadyň we diwaryň salynmagyna çykdajy iň az bolar ýaly meýdançanyň ölçegleri nähili bolmaly?

Çözülişi: Gönüburçluk görnüşindäki meýdançanyň inini x bilen, uzynlygyny bolsa y bilen belgiläliň. Meseläniň şerti boýunça $x \in (0;\infty)$. Meýdançanyň meýdany 294 m^2 bolany üçin $S = x \cdot y$. Onda bu ýerden $y = \frac{S}{x}$ alarys. Haýadyň we diwaryň umumy uzynlygy

$$P(x) = 3x + 2y = 3x + 2 \cdot \frac{294}{x}.$$

Şeýlelikde, umumy uzynlygy x üýtgeýän ululyga görä funksiýadyr. Mesele bu funksiýanyň $(0;\infty)$ aralykda iň kiçi bahasyny tapmaklyga getirildi.

Jogaby: $x = 14m$, $y = 21m$.

Resursyň predel öndürijiliginiň üýtgemesi

Goý, önüm öndürmekde çig malyň birnäçe görnüşi ulanylýan bolsun. Emma ähli resurslaryň çykdajylary önümçiligiň tehnologiýasy bilen reglamentirlenendir. Diňe bir resurs (mysal üçin, zähmet çykdajylary) üýtgeme bilen önümçiligiň göwrümine täsir edip bilýär. x önümiň çykarmasy r aýratyn resurs bilen baglanyşygy:

$$x = f(r)$$

formula arkaly kesgitlenýär. Bu funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi onuň önümi bilen aňladylýar we resursyň predel öndürijiligi diýilýär. Eger zähmet çykdajylar barada gürrüň gidýän bolsa onda $f'(r)$ – zähmet predel öndürijiligi aňladýar. $f'(r)$ funksiýanyň bahasy r ululyga baglydyr ýa-da r argumentli täze $V = f'(r)$ funksiýa barada gürrüň gidýär.

Elbetde, V funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi barada sorag ýüze çykýar. Islendik funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi onuň önümi bilen beýän edilýär. Eger $V = f'(r)$ funksiýa differensirlenýän bolsa, onda $V' = (f'(r))'$ bar.

Resursyň predel öndürijiligiň tizliginiň üýtgemesine bu resursyň çykdajylarynyň üýtgemesindäki çykarmanyň üýtgemesiniň depgini diýilýär. Şuňa meňzeşlikde harydyň p bahasyna görä islegiň üýtgemesiniň depgini $d''(p)$ kesgitlenýär.

279. Eger

$$d = \frac{100}{p+1},$$

formula harydyň bahasyndan islegiň baglylygyny aňladýan bolsa, onda

$$d' = -\frac{100}{(p+1)^2},$$

formula islegiň üýtgemesiniň tizligi ýa-da predel islegi bolup durýar.

Isleg baha görä kemelýän funksiýadyr, sebäbi islendik p-niň bahasynda $d' < 0$. Islegiň üýtgemesiniň depgini:

$$d'' = \frac{200}{(p+1)^3} > 0.$$

Başgaça aýdanymyzda, isleg artýan tizlik bilen kemelýär. Harydyň bahasy näçe uly bolsa, şonçada çalt ol haryda isleg gaçýar. Eger $p_2 > p_1$ bolsa, onda $d'(p_2) > d'(p_1)$.

Kesgitleme. Eger f monoton funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi artýan funksiýa bolsa, onda f funksiýa $[a,b]$ aralykda barha çalt artýar (kemelýär). Eger-de f monoton funksiýanyň üýtgemesiniň tizligi kemelýän funksiýa bolsa, onda f funksiýa $[a,b]$ aralykda ýuwaş-ýuwaşdan artýar (kemelýär).

Teorema. $[a,b]$ aralykda birinji we ikinji önümi bar bolan funksiýa barha artar (kemeler) ýaly islendik $x[a,b]$ bolanda $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ şertleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

280. Goý, kärhanada önümçiligiň çykdajylary

$$K = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 80x + 300$$

formula bilen kesgitlenýän bolsun.

Önümçiligiň islendik x göwrüminde predel cykdajylar

$$K' = x^2 + 10x + 80$$

položiteldir. Bu delil $x^2 + 10x + 8$ üçagzanyň diskrimenantyň otrisatelliginden we birinji koeffisiýentiň položitelliginden gelip çykýar. Şeýle üçagza diňe položitel bahalary alyp bilýär.

Hasaplalyň: $K'' = 2x + 10$. Eger $x > 5$ *b/a*, onda $K'' > 0$, eger-de $x < 5$ *b/a*, onda $K'' < 0$ bolar. Diýmek, eger önümiň çykarylmagy 5 şertli birlikden uly bolmasa, onda önümçiligiň çykdajylary ýuwaş-ýuwaşdan artýarlar. Eger-de $x > 5$, onda çykdajylar barha çalt artýarlar.

Akseleratoryň düzgüni

Goý, önümçiligiň prosesiniň tehnologiýasy üýtgemeýän we esasy önümçilik fondlary doly peýdalanýan bolsun. Aşakdaky belgileri girizeliň:

F – wagtyň t pursadyndaky esasy önümçilik fondlaryň ölçegi.

Q – F esasy önümçilik fondlaryň kömegi bilen ulanylma zatlaryň öndürmekligiň göwrümi.

Goý, esasy fondlaryň massasy önümçiligiň göwrümine proporsional bolsun: $F = qQ$, bu ýerde q – proporsionallygyň hemişelik koeffisiýenti ($q > 0$). Diýmek, $\frac{dF}{dt} = q\frac{dQ}{dt}$.

Bu wagtyň birliginde esasy önümçilik fondlaryň artdyrmagy wagtyň birliginde ulanylma harytlaryň öndürmekligiň göwrüminiň artdyrmagyna proporsionaldygyny aňladýar.

Wagtyň birliginde esasy fondlaryň artdyrmasy K düýpli maýa goýmalaryň netijesidir. Diýmek, wagtyň t pursadynda:

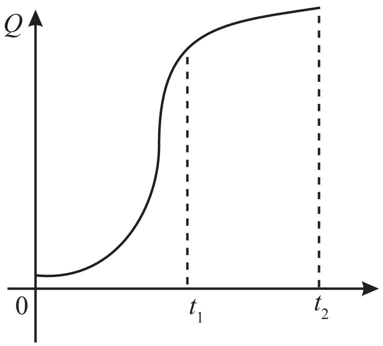
$$K = q\frac{dQ}{dt} \tag{3}$$

deňligi ýazmak bolar ýa-da düýpli maýa goýmalar önümçiligiň göwrüminiň artdyrmasyna deň.

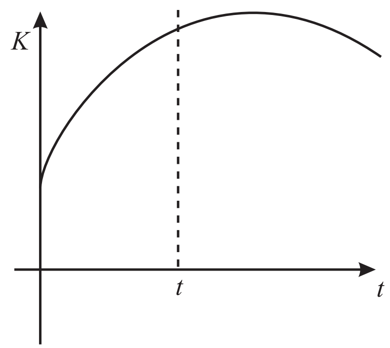
281. Ulanylma harytlaryň öndürmekligiň göwrümi $[0; t_1]$ aralykda has çalt artýar, we t_1-den t_2 wagta çenli örän haýal artýar. Ulanylma harytlaryň islegi we düýpli maýa goýmalaryň baglanyşygynyň häsiýetnamasyny bermeli.

Ulanylma harytlaryň isleginiň egrisi 6-njy suratda şekillendirilendir.

$t \in (0;\, t_1)$ bolanda $Q'' > 0$ we $t \in (t_1; t_2)$ bolanda $Q'' < 0$ bolar. Bu bolsa $\frac{dQ}{dt}$ funksiýanyň (0; t_1) aralykda artýandygyny we $t(t_1;\, t_2)$ bolanda kemelýändigini aňladýar. (3) we $q > 0$ şertden K-nyň üýtgeme häsiýeti $\frac{dQ}{dt}$ ululygyňka meňzeş. Şol sebäpli $K = \tilde{K}(t)$ funksiýany 16-njy suratdaky egri çyzyk ýaly şekillendirmek bolar.



15-njy surat. *Q* funksiýanyň grafigi



16-nji surat. *K* funksiýanyň grafigi

$Q = \tilde{Q}(t)$ we $K = \tilde{K}(t)$ funksiýalaryň grafikleriniň görnüşinden aşakdaky netijeleri aýdyp bileris.

Eger ulanylma harytlara isleg (ýa-da harydyň öndürmeligi) käbir wagt aralykda (0; t_1) aralykda) barha çalt artýan bolsa, onda düýpli maýa goýmalar hem artýar. Diýmek, ulanylma zatlaryň çykarmaklygyny artdyrmagy zerur bolan ulanylma harytlaryň önümçiligine isleg artýar.

Eger ulanylma harytlara isleg (ýa-da harydyň öndürmekligi) käbir wagt aralykda ((t_1;t_2) aralykda) barha haýal artýan bolsa, onda düýpli maýa goýmalar hem kemelýär ýa-da önümçilik serişdelere isleg gaçýar.

Wagtyň t_1 pursadyndaky iň uly depgine ýeten ulanylma harytlara islegi hemişelik depgin bilen artdyrsak, onda wagtyň t_1 pursadynda iň uly derejesine ýeten düýpli maýa goýmalary şol derejede saklamak mümkinçiligi döreýär.

Getirilen düzgünnama tizlenme düzgüni ýa-da akseleratoryň düzgüni diýilýär.

278. Islegiň baha bilen baglaşygy:

$$d(p) = e^{-2p^2} \quad (p \geq 0)$$

funksiýa bilen berilýär. Baha görä isleg we girdeji funksiýalary derňäň, olaryň grafiklerini guruň.

Bahanyň artmagy bilen isleg kemelýär, sebäbi:

$$d'(p) = -4pe^{-2p^2} < 0.$$

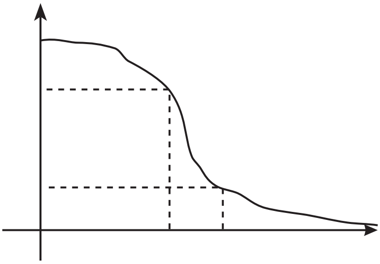
Eger $p < \frac{1}{2}$ bolsa, onda funksiýanyň üýtgemesiniň depgini:

$$d''(p) = -4e^{-2p^2}(4p^2 - 1)$$

otrisatel we eger baha $\frac{1}{2}$-den uly bolanda ol položiteldir. Onuň grafigi 7-nji suratda şekillendirilendir. p baha bilen haryt satylanda alnan girdeji

$$U(p) = pd(p) = pe^{-2p^2} \textit{pul birl.}$$

Bu funksiýanyň önümi



17-nji surat

$$U(p) = e^{-2p^2}(1 - 4p^2)$$

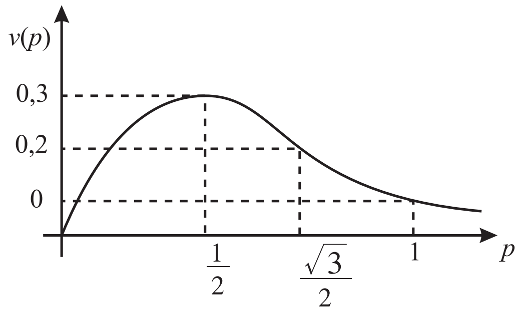
$p < \frac{1}{2}$ bolanda položitel we $p > \frac{1}{2}$ bolanda otrisatel. Bu aýdanlarymyz bahanyň artmagy bilen ilki isleg kemelýän hem bolsa girdeji artýar we $p = \frac{1}{2}$ bolanda iň uly $U_{\max} = U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0,3.$ Soňra harydyň bahasyny artdyrmak manysy ýok, çünki ol girdejiniň peselmegine getirýär.

$p > \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolanda girdejiniň üýtgemesiniň depgini

$$U''^{(p)} = 4pe^{-2p^2}(4p^2 - 3) \text{ deň bolar.}$$

Položitel we $p < \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolýança ol otrisatel. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ aralykda funksiýa barha haýal artýar. Oňa degişli grafigiň bölegi güberçek ýokary. Öň belleýşimizden, gelejekde baha galdyrmak peýdasyzdyr.

$p < \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolanda girdeji barha çalt kemelýär we bahanyň tükeniksiz galmagy bilen nola ymtylýar. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\infty\right)$ aralykda $U(p)$ funksiýa güberçek aşak. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0,2\right)$ nokat grafigiň epin nokadydyr *(18-nji surata seret)*.



18-njy surat. Girdeji funksiýanyň grafigi

283. Kärhananyň çykaran harydynyň göwrümi x-a deň, ony satyp alýan z girdejisi aşakdaky baglaşyk bilen berilýär:

$$z = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3.$$

Predel girdejini tapmaly we onuň grafigini gurmaly. Bu grafigiň kömegi bilen girdeji iň uly (kiçi) bolar ýaly önümçiligiň göwrümini tapmaly. Bu ýagdaýda predel girdeji näçä deň bolar? Bu nämäni aňladýar?

Bellik. Predel girdejiler önümçiligiň predel çykdajylarynyň tapylyşy bilen birmeňzeşdir.

284. Kärhana her aýda x birlik haryt öndürýär we ony

$$p = 25 - \frac{1}{30}x$$

baha bilen satýar. Önümçiligiň umumy çykdajylary:

$$K = \frac{1}{25}x^2 + 5x + 300.$$

Kärhananyň girdejisi iň uly bolar ýaly önümçiligiň göwrümi näçe bolmaly?

285. Üçburç görnüşli faneriň böleklerinden parallelogram görnüşli taýýarlamany ýasamak zerurdyr. Taýýarlamalaryň maksimal meýdanlary bolar ýaly näme etmeli?

286. Bahasy C manat bolan ary baly bar. Wagt geçeni bilen balyň gymmatlygy $V = Ce^{\frac{\sqrt{t}}{2}}$ kanun boýunça galýar, balyň saklanmaga çykdajylary hasaplamasaň hem bolýar, sebäbi olar V görä örän pes. Başga tarapdan, eger baly satyp puly banka goýulsa, onda oňa her ýyl jeminden 10% üznüksiz üstüne mündürilýär ýa-da $t = 0$ bolan wagtda banka goýlan V_0 mukdardaky pul t ýyldan soň:

$$V_1 = V_0 e^{\frac{t}{10}} \left(10\% = \frac{1}{10}\right) \text{ deň bolar.}$$

t ýyldan soň baly satyp banka goýlan pul iň köp bolar ýaly balyň ätiýaçlygyny wagtyň haýsy t_0 pursadynda peýdaly satmaly ?

287. Önümçiligiň doly K çykdajylary önümçiligiň x göwrümine baglylygy

$$K = x^3 - 4x^2 + 9x$$

formula arkaly berilýär. Önümçiligiň haýsy göwrüminde onuň orta çykdajylary $\left(K_{or} = \frac{K}{x}\right)$ iň az bolar?

288. Göwheriň bahasy onuň massasynyň kwadratyna proporsionaldyr. Eger göwheri iki bölege böleniňde haýsy halda ol bölekleriň jeminiň gymmatlygy iň az bolar?

289. Goý, çykdajylar funksiýasy $y = 2x + ln(x + 1)$ görnüşde berlen bolsun. Önümiň mukdary $x_1 = 2$, $x_2 = 9$ bolanda önümçiligiň predel çykdajylaryny tapmaly. x-iň haýsy bahalarynda berlen funksiýa barha çalt artýar (kemelýär)?

290. Bellibir harydyň hödürlenmesi $x = e^p - 1$ formula arkaly berilýändigi takyklanandyr, bu ýerde p – harydyň bahasy, predel hödürlemäniň (hödürlemäniň üýtgemesiniň tizligini) we hödürlemäniň üýtgemesiniň depginini harydyň bahasyna baglylygynyň görnüşini tapmaly. Bu parametrleriň üýtgemesi hödürlemäniň dinamikasyny nähili häsiýetlendirýär.

291. Harydyň isleg funksiýasy

$$d = 80 + 16p - p^2$$

görnüşde berlen. Haryda maksimal isleg bolanda we oňa isleg ýitmeginiň wagtynda harydyň bahasyny kesgitläň. Predel islegi (islegiň üýtgemesiniň tizligi) nola, ikä, ona deň bolanda harydyň bahasy näçä deň bolmaly? Islegiň üýtgemeginiň depgini näçä deň?

292. Islegiň baha baglylygy aşakdaky formula arkaly berilýär

$$d(p) = 10 - 2p,$$

$$d(p) = \frac{100}{p+1},$$

$$d(p) = 15 + 2p - p^2.$$

Haryda islegiň üýtgemesiniň we harydy satyp girdejiniň dinamikasyny görkeziň, bu funksiýalaryň grafiklerini guruň.

Çeýelik we onuň häsiýetleri
Elementar funksiýalaryň çeýeligi

Harydyň bahasy üýtgeme bilen ýa-da ilatyň girdejisiniň üýtgemesi bilen berlen haryda ilatyň isleginiň dinamikasyny kesgitleme, önümçiligiň resurslaryň biri-biriniň deregini tutujylygynyň interwalyny derňeme, ol ýa-da başga çykdaýjylaryň netijeliliginiň kesgitlemesi, dürli şertlere görä kärhananyň ýa-da firmanyň girdejisiniň we başga köp meseleleriň çözülişi aşakdaky meselä getirýär: eger bir ululygy 1% artdyrylsa beýleki ululyk näçe göterime üýtgeýändiginiň öwrenmek.

Goýlan soraga jogap berýän häsiýetnama degişli funksiýanyň çeýeligi diýilýär. Bu görkezijiniň gurluşyna başlalyň. Goý, funksiýanyň x argumenti Δx artdyrma alýan bolsun. Onda funksiýanyň bahasy $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artdyrma alar.

$\Delta x, \Delta y$ artdyrmalara laýyklykda absolýut argumentiň we funksiýanyň artdyrmalary diýilýär. Üýtgeýänleriň $\frac{\Delta x}{x}$ we $\frac{\Delta y}{y}$ otnositel artdyrmalaryny guralyň we olary göterimde aňladalyň.

$\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$ ululyk argumentiň bahasynyň näçe göterime üýtgeýändigini,

$\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%$ ululyk funksiýanyň bahasynyň näçe göterime üýtgeýändigini aňladýar.

$\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\%\right)$ gatnaşyk argumentiň bahasy 1% artanda (x ululykdan $x + 0{,}01x$ ululyga artýar) ortaça näçe göterime üýtgär (artar ýa-da kemeler). Bu gatnaşyk Δx näçe kiçi bolsa, şonça hem bu gatnaşyk $y = f(x)$ funksiýany berlen nokatda takyk häsiýetlendirýär. Goý, Δx tükeniksiz kiçelýän bolsun. $\Delta x \to 0$ bolanda bu gatnaşygyň predelini tapalyň:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$

$\frac{x}{y}$ gatnaşyk Δx ululyga bagly däl şol sebäpli ony predeliň daşyna çykarmak bolar.

Kesgitleme. Absolýut artdyrma Δx nola ymtylanda funksiýanyň $\frac{\Delta y}{y}$ otnositel artdyrmasynyň degişli $\frac{\Delta x}{x}$ argumentiniň otnositel artdyrmasy gatnaşygynyň predeline x üýtgeýän ululyga görä $y = f(x)$ funksiýanyň çeýeligi diýilýär we

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad (4)$$

görnüşde kesgitlenilýär.

Eger $y = f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän bolsa, onda

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = f'(x)$$

we (4) formula aşakdaky görnüşi alar.

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x)$$

ýa-da

$$E_x(y) = \frac{xdy}{ydx}. \qquad (5)$$

(3) deňlikden eger üýtgeýän ululyk 1% (x-den $x + 0{,}01x$-a çenli) artdyrylsa, onda $E_x(y)$ çeýelik funksiýanyň bahasynyň näçe göterim üýtgeýändigini görkezýär.

(5) formulany başga görnüşde hem ýazmak bolar:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}.$$

Bu bolsa öndürme funksiýa üçin çeýelik resursyň predel öndürijiliginiň onuň orta öndürijiliginiň gatnaşygyna deňdigini aňladýar.

293. $f(x) = 3x + 4$. Berlen funksiýanyň çeýeligi formula boýunça hasaplanýar:

$$E_x(f(x)) = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{x}{3x+4} \cdot 3 = \frac{3x}{3x+4}.$$

$x = 2$ bolanda çeýeligiň görkezijisi 0,6-a deň. Bu x-si 2-den 2,02-ä çenli artdyrylanda funksiýanyň bahasy takmynan 0,6% artandygyny aňladýar. Eger $x = 0$ bolsa, onda $E_x(f(x)) = 0$. Diýmek, x-si 0-dan 0,01-e çenli artdyrylanda funksiýanyň bahasy üýtgeýänligi bildirmeýär.

294. $y = 1 + 2x - x^2$, bu ýerde

$$E_x(f(x)) = \frac{x}{1 + 2x - x^2} \cdot (2 - 2x) = \frac{2x(1-x)}{1 + x - x^2}.$$

$x = 1$ bolanda çeýeligiň görkezijisi nola deň. x-si 1-den 1,01-e çenli artdyrylanda funksiýanyň bahasy üýtgemeýär diýen ýalydyr. Eger $x = 2$, onda $E_x(y) = -4$. x-si 2-den 2,02-ä çenli artdyrylanda funksiýanyň bahasy 4% kemelýär.

Çeýeligiň häsiýetleri

Çeýelik – ölçegsiz ululyk, x we y ululyklar nähili ölçeg birliginde berlen bolsa-da çeýeligiň bahasy üýtgemeýär. $E_a x(by) = E_x(y)$

$$E_{ax}(by) = \frac{axd(by)}{byd(ax)} = \frac{xdy}{ydx} = E_x(y).$$

Özara ters funksiýalaryň çeýeligi – özara ters ululyklar:

$$E_x(y)=\frac{xdy}{ydx}=\frac{1}{\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dy}}=E_y(x)\Rightarrow E_x(y)=E_y(x).$$

Şol bir x argumente bagly iki $U(x)$ we $V(x)$ funksiýalaryň köpeltmek hasylynyň çeýeligi olaryň çeýelikleriniň jemine deňdir:

$$E_x(UV)=E_x(U)+E_x(V),$$

$$E_x(UV)=\frac{d(UV)}{cx}\frac{x}{UV}=\frac{VdU+UdV}{UVdx}\cdot x=\frac{DU}{dx}\cdot\frac{x}{u}+\frac{dV}{dx}\cdot\frac{x}{V}=$$

$$=E_x(U)+E_x(V).$$

Şol bir x argumente bagly iki $U(x)$ we $V(x)$ funksiýalaryň paýyň çeýeligi olaryň çeýelikleriniň tapawudyna deňdir:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right)=E_x(U)-E_x(V),$$

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{d\frac{U}{V}x}{dx\frac{U}{V}}=\frac{VdU-UdV}{V^2dx}\cdot\frac{xV}{U}=\frac{dU}{dx}\cdot\frac{x}{u}-\frac{dV}{dx}\cdot\frac{x}{V}=$$

$$=E_x(U)-E_x(V).$$

$U(x)$ we $V(x)$ funksiýalaryň jeminiň çeýeligi aşakdaky formula bilen tapylýar:

$$E_x(U+V)=\frac{d(U+V)}{dx}\cdot\frac{x}{U+V}=\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)\cdot\frac{x}{U+V}=$$

$$=\frac{UE_x(U)+VE_x(V)}{U+V}.$$

Elementar funksiýalaryň çeýeligi

1. $y=x^\alpha$ derejeli funksiýanyň çeýeligi hemişelik we derejäniň görkezijisine α deňdir:

$$E_x(x^\alpha)=\alpha,$$

$$E_x(X^\alpha)=\frac{dx^\alpha}{dx}\cdot\frac{x}{x\alpha}=\frac{ax^{\alpha-1}\cdot x}{x^\alpha}=a.$$

2. $y = a^x$ görkeziji funksiýanyň çeýeligi x-a proporsionaldyr:

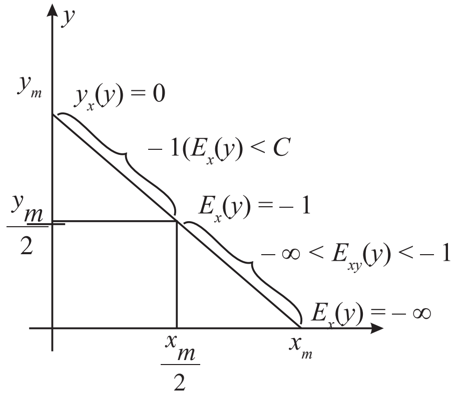
$$E_x(a^x) = x\ln a,$$

$$E_x(X^\alpha) = \frac{dx^\alpha}{dx} \cdot \frac{x}{x\alpha} = \frac{ax^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = a.$$

3. $y = ax + b$ çyzykly funksiýanyň çeýeligi $E_x(ax+b) = \dfrac{ax}{ax+b}$,

$$E_x(ax+b) = \frac{d(ax+b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax+b} = \frac{ax}{ax+b}.$$

Eger çyzykly funksiýanyň grafiginiň otrisatel ýapgytlygy ($a < 0$) bolsa, onda funksiýanyň çeýeligi noldan grafigiň Oy okuny kesýän y_m nokada tarap minus tükeniksize çenli, şu pursatda ol ortaky nokatda – 1 bahany alýar. Şeýlelikde, göni çyzygyň hemişelik ýapgytlygy bolsa-da onuň çeýeligi diňe ýapgytlyga bagly bolýan däldir, ol hem x-iň haýsy nokatda tapylýandygyna baglydyr *(10-njy surat).* Ähli nokatlarda funksiýanyň çeýeligi tükeniksize deň bolsa, onda ol funksiýa düýpgöter çeýelikli diýilýär, eger-de ähli nokatlarda nola deň bolsa, onda düýpgöter çeýelikli däl diýilýär.



19-nji surat

295. Funksiýanyň çeýeliginiň häsiýetlerini peýdalanyp $E_x(f(x))$ tapmaly:

1. $f(x) = x^2 e^x$,
2. $f(x) = 3x\ln x$,
3. $f(x) = \dfrac{x^4}{5e^x}$,

4. $f(x) = 2 + 3x - x^2$,

5. $f(x) = 2^x \ln x$,

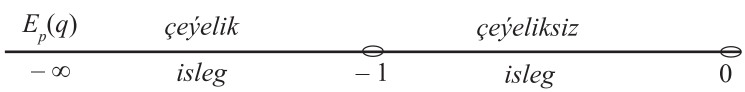
6. $f(x) = \dfrac{4a^x}{x^5}$.

8.1. Ykdysadyýetde çeýeligiň görnüşleri

1. Baha boýunça islegiň çeýeligi (göni çyzyk)

$$E_p(q) = \left(\frac{dq}{q}\right):\left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}.$$

Bu ululyk harydyň bahasy bir göterime üýtgände bu haryda göterim görnüşde islegiň ululygyna täsirini görkezýär we önümiň bahasy üýtgände alyjylaryň duýgurlygyny häsiýetlendirýär.



Eger baha görä islegiň çeýeligi absolýut ululygy boýunça birden uly bolsa, onda isleg çeýelikli (islegiň çeýeliginiň tükeniksiz bahalarynda düýpgöter çeýelikli) diýip aýdylýar. Eger baha görä islegiň çeýeligi absolýut ululygy boýunça birden kiçi bolsa, onda isleg çeýelikli däl (islegiň çeýeligi nola deň bolanda düýpgöter çeýeklikli däl) diýilýär. Iň ahyry, eger baha görä islegiň çeýeligi absolýut ululygy boýunça bire deň bolsa, onda birlik çeýelikli isleg barada diýilýär.

2. Ilatyň girdejisine görä islegiň çeýeligi

$$E_I(q) = \left(\frac{dq}{q}\right):\left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q}.$$

Bu ululyk ilatyň girdejisini bir göterime üýtgände bu haryda göterim görnüşde islegiň ululygyna täsirini häsiýetlendirýär. Ilatyň girdejisine görä islegiň položitel çeýeligi kadaly (hilli) harytlary häsiýetlendirýär we otrisatel ululyk – arzan bahaly (hili pes) harytlary häsiýetlendirýär.

Girdeji boýunça islegiň ýokary položitel koeffisiýenti onuň pudakdaky ykdysady goşandy pudakdaky ykdysady böleginden uludyr, ýagny bu önümçiligiň soňra giňelmäge köp mümkinçiligi bardyr we gelejekde gülläp öser. Tersine, eger girdeji boýunça islegiň koeffisiýenti kiçi položitel ýa-da otrisatel san bolsa onda ony durgunlyk we gelejekde ol önümçiligi gysgaltma garaşylýar.

3. Baha boýunça atanaklaýyn çeýelik

$$E_{p_j}(q_i) = \left(\frac{dq_i}{q_i}\right):\left(\frac{dp_j}{p_j}\right) = \frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_j}{q_i}.$$

By ululyk bir harydy çalyşýan ýa-da doldurýan harydyň bahasyny bir göterim galdyrylanda berlen harydyň isleginiň göterim görnüşinde üýtgemesini häsiýetlendirýär. Položitel atanaklaýyn çeýelik harytlar biri-biriniň ornuny tutyjylyklydygyny, otrisatel bolsa – dolduryjylygyny aňladýar.

4. Baha boýunça resurslaryň çeýeligi

$$E_{p_i}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right):\left(\frac{dp_i}{p_i}\right) = \frac{dR_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{R_i}.$$

Bu ululyk resursyň bahasy (mysal üçin, işgärleriň aýlygy) 1% üýtgedilende beýleki resursyň (laýyklykda zähmetiň) otnositel üýtgemesini häsiýetlendirýär.

5. Bir resursy başga resurs bilen çalşyrmanyň çeýeligi

$$E_{R_j}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right):\left(\frac{dR_j}{R_j}\right) = \frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i}$$

Bu ululyk harydyň çykarylyşy üýtgemezden bir resurs (mysal üçin, zähmet) 1% üýtgedilende beýleki resursyň (mysal üçin, maýa goýmanyň) otnositel üýtgemesini häsiýetlendirýär.

Baha görä islegiň çeýeligine giňişleýin garalyň. Harydyň p bahasyna görä onuň d islegi bilen baglylygyny öwreneliň.

Goý, berlen haryda meňzeş harytlaryň bahasy, alyjylaryň girdejileri we olaryň alyjylygynyň gurluşy – hemişelik ululykdyr. Onda harydyň bahasy bilen onuň islegi

$$d = d(p)$$

formula arkaly baglydyr.

Köp ykdysady meselelerde harydyň bahasynyň belli derejisinden islegiň ululygyny tapmak dälde, bellibir derejede baha üýtgände islegiň üýtgemesiniň häsiýetini anyklamak zerurdyr. Bu halda baha görä islegiň çeýeligini tapmaly. Biziň belgilerimizde

$$E_p(d) = \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p).$$

Baha görä islegiň çeýeligi baha 1% üýtgände harydyň islegi näçe göterim üýtgändigini görkezýär.

Köp halda isleg baha görä kemelýän funksiýa bolýar we

$$d'(p) < 0,$$

onda otrisatel sanlardan dynmak üçin bu halda çeýeligi öwrenilende alýarlar: «–» alamat bahanyň artany bilen isleg kemelýändigini görkezýär.

296. Eger isleg funksiýasy çyzykly $d = 5 - \frac{1}{2}p$ bolsa, onda

$$\tilde{E}_p(d) = \frac{p}{5 - \frac{1}{2}p} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{p}{10 - p}$$

$p = 2$ bolanda $\tilde{E}_p(d) = \frac{1}{4}$. Bu bolsa baha 1% galanda isleg $\frac{1}{4}$% gaçýar. $p = 5$ bolanda çeýelegiň görkezijisi $\tilde{E}_p(d) = 1$-e deň. Baha 5-den 5,05-e galdyrylsa, onda isleg 1% gaçýar. $p = 9$ bolanda isleg 9% gaçýar.

297. $d = \frac{c}{p}$ (c – hemişelik, $c > 0$) funksiýa üçin bahaň islendik derejesinde çeýeligiň görkezijisi 1-*e* deň. Hakykatdan hem,

$$\tilde{E}_p(d) = \frac{p}{\frac{c}{p}} \cdot \left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1.$$

Eger baha islege ters proporsional bolsa, onda islendik bahada ony 1% artdyrylsa isleg hem 1% kemelýär.

Kesgitleme. Eger harydyň bahasy 1% galdyrylsa isleg 1%-den köp kemelýän ýa-da $\tilde{E}_p(d) > 1$ bolsa, onda isleg çeýelikli, eger $\tilde{E}_p(d) = 1$ bolsa, onda isleg bitaraply, eger-de $0 < \tilde{E}_p(d) < 1$ bolsa, onda isleg çeýelikli däl diýilýär.

10-njy mysalda $p = 5$ bolanda haryda isleg bitarap; $p = 2$ – çeýelikli däl we $p = 9$ bolanda çeýelikli. $d = \frac{c}{p}$ funksiýa üçin isleg hemişe bitarapdyr.

Başga sözler bilen, eger harydyň bahasynyň käbir uly däl üýtgemesi onuň isleginiň ululygy has uly üýtgemelere getirýän bolsa, onda haryda isleg çeýeliklidir. Ters ýagdaýda, eger harydyň bahasynyň şähelçe üýtgemesi onuň isleginiň ululygyny hem şähelçe üýtgemesine getirse, onda haryda isleg çeýelikli däldir. Çeýelikli islegi bolan harytlaryň mysallary bolup, mysal üçin: alma, pomidor, şetdaly we ş.m. Olaryň bahalary galsa, satyn alyjylaryň talaby başga gök önümlere we miwelere ugruny üýtgedýär. Miweleriň bellibir bahasynda satyn alyjylar olary doly ret edip, dürli miwe suwlara geçmegi mümkindir. Şol wagtda hem birinji derejede zerur bolan harytlara (dermanlar, aýakgap, elektrik, gaz, telefon), maşgalanyň girdejisine (býujetine) täsir etmeýän harytlaryň (galam, diş ýuwulýan sereşdeler, aýakgap üçin kremler) we çalşyryp bolmaýan harytlara (elektrik çyralar, çörek, benzin) talaby çeýelikli däldir.

Islegiň dürli görnüşlerinde girdejiniň dinamikasyny derňäliň.

Harydyň bahasy p deň bolanda ilatyň şol haryda umumy çykdajylary (harydyň satylandan soň gazanylan pul)

$$u = p \cdot d(p)$$

formula arkaly tapylýar. Predel girdeji

$$\frac{du}{dp} = d(p) + pd'(p)$$

ýa-da

$$\frac{du}{dp} = d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p)\right) = d(p)(1 - E_p(d))$$

deňdir.

Eger isleg çeýelikli ýa-da $E_p(d) > 1$ bolsa, onda $\frac{du}{dp} < 0$ we harydyň bahasy galany bilen satuwdan düşen pul kemelýär.

Bitarap islegde $(E_p(d) = 1)\frac{du}{dp} = 0$ we düşen pul baha bagly däl.

Bu ýagdaýda $u = c$ (c – hemişelik san) we $d(p) = \frac{c}{p}$· Diýmek, bitarap islegde girdeji harydyň bahasyna proporsionaldyr *(11-nji mysala seret)*.

ç) Eger isleg çeýelikli däl ýa-da $0 < E_p(d) < 1$ bolsa, onda $\frac{du}{dp} > 0$ bolar we harydyň bahasy galany bilen satuwdan düşen pul artýar.

Ýokarda aýdylanlardan gelip çykýar: Islegiň çeýeligini bilmeklik ol harydyň bahasyny prognozirläp girdejini ulaldyp bolýar. Her bir firma öz önümine islegiň çeýelikligi mümkin bolan ýokary bolmaklygyny isleýär, çünki bu halda harydyň bahasyny ýokary belläp bolýar. Diýmek, firma öz harydynyň ilat isleginiň ýokary derejede bolmaklygyny saklamagyna ymtylmaly. Bu maksada ýetmek üçin önümiň hilini gowulandyrmaly, satyn alyjylara guramaçylykly hyzmat etmeli, mahabat ýokary hilli bolmaly.

298. Harydyň isleginiň çeýeligi 0,4-e deň. Eger harydyň bahasyny 5% galdyrylsa, onda ol satylanda girdeji nähili üýtgeýändigini kesgitlemeli.

Çeýelikligi $E_p(d) = 0,4$ bolanda harydyň bahasyny 1% galdyrylsa, onda harydy satyn almaga isleg bildirýänleriň sany 0,4% azalýar. Eger baha 5% galdyrylsa, onda isleg $5 \cdot 0,4\% = 2\%$. Baha 5% galdy we $1.05p$ deň boldy, bu ýerde p – köne baha. Eger $d(p)$ – p baha görä isleg bolsa, onda baha $1,05p$-*e* deň bolanda isleg $0,98 \cdot d(p)$ deň bolar.

Haryt p baha bilen satylsa, onda girdeji $p \cdot d(p)$ pul birligi bolar. Harydyň bahasy galdyrylanda girdeji takmyn 3% galdy. Isleg çeýelikli däl ($0,4 < 1$) bolanda baha galdyrylanda girdeji hem artýar.

Hödürlemäniň çeýelikligi islegiň çeýelikligi ýaly kesgitlenýär:

$$E_p(s) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta s}{s} \cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%\right) = \frac{p}{s}\lim_{\Delta p \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta p}. \qquad (6)$$

$s = s(p)$ differensirlenýän funksiýa üçin (6) formula aşakdaky görnüşi alar:

$$E_p(s) = \frac{pds}{sdp} \qquad (7)$$

ýa-da

$$E_p(s) = \frac{ds}{dp} : \frac{s}{p}. \qquad (8)$$

Islegiň çeýeligini aňladýan (5) formula bilen (7) we (8) formulalar tapawut berýär. Bu formulalarda «–» alamat ýok. Harydyň bazar nyrhy galýan wagty ol harydyň hödürlemesi hem artýar. Her bir telekeçi üçin öz harydyny ýokary baha boýunça satmak peýdalydyr. Şol sebäpli $s = s(p)$ artýan funksiýa we $\frac{ds}{dp} > 0$.

(8) deňlik hödürlemäniň çeýelikligi predel hödürlemäniň we orta hödürlemäniň ululyklarynyň gatnaşygyna deňdir. Hödürleme hem çeýelikli we çeýeklikli däl bolup bilýär.

Kesgitleme. Eger hödürlemäniň çeýelikligi $E_p(s) > 1$ bolsa, onda hödürleme çeýeklikli, eger $0 < E_p(s) < 1$, onda hödürleme çeýelikli däl we eger $E_p(s) = 1$ bolsa, onda hödürleme çeýelikligi bitarapdyr.

Mysal üçin, firma täze awtomat hatary gurmak üçin işe goşmaça işgär we kwalifikasiýasy uly işgär almaly bolýar. Firmanyň ýolbaşçylary hyzmatlaryň hödürlemesini artdyrmak üçin işgärleriň aýlyklaryny 200 manat galdyrýandygyny beýan etdi. Eger şäherde işlemeýänler ýa-da aýlyk haklary az zähmetkeşler köp bolsa, onda şeýle goşmaça pul maşgalanyň býujetine gowy peýda bererdi we ýöne işgär hökmünde hödürleme baha boýunça çeýelikli bolar. Emma kwalifisirli işgär, ýokary tölenilýän işgär, öz iş ornuny şol goşmaça aýlyk haky üçin çalşyp durmaz, sebäbi transport çykdajylar, täze enjamlary öwrenmek üçin wagt moral çykdajylar şol goşmaça berilýän iş hakyna degmeýär. Bu ýerde hyzmatlaryň hödürlemesi baha boýunça çeýelikli däl.

299. p bahadan hödürleme aşakdaky formula bagly:

Çözülişi: $s = 0{,}05p^2 + p$ funksiýanyň çeýeligini tapmaly.

$\frac{ds}{dp} = 0,1p + 1$ ýa-da s funksiýa baha görä artýan funksiýadyr.

$\frac{d^1 s}{dp^2} = 0,1 > 0$, funksiýa güberçek aşak, hödürlemäniň depgini hemişelikdir.

$E_p(s) = \frac{(0,1p + 1)p}{0,05p^2 + p} = \frac{0,1p + 1}{0,05p + 1} > 1$, Hödürleme baha görä çeýeliklidir.

Haryda isleg we harydyň bahasy bilen baglanyşyk örän uly derejede, harydyň peýdalygy bilen kesgitlenýär. Daşyndan göreniňde hödürleme funksiýa birinji nobatda önümçiligiň çykdajylary täsir edýär.

Kesgitleme. Islegiň we hödürlemäniň ululyklary deň bolanda baha deňagramly baha diýilýär.

300. Isleg funksiýasy – $d(p) = e^{-p^2}$, hödürleme funksiýasy – $s(p) = e^{p^2-8}$. $d(p) = s(p)$ deňlemeden deňagramlyk bahany tapalyň:

$$e^{-p^2} = e^{p^2-8}$$

Bu ýerden

$$-p^2 = p^2 - 8$$

ýa-da $2p^2 = 8$; $p^2 = 4$; $p = 2$. Diýmek, $p = 2$ – bahanyň deňagramlygy.

301. d isleg we s hödürleme aşakdaky kanunlar bilen berlen:

$$d(p) = \frac{100}{2p+1},$$

$$s(p) = \frac{p^2}{2p+1}.$$

Harydyň haýsy bahasynda isleg we hödürleme deň bolar (deňagramlyk bahany)? Bu bahada islegiň çeýelikligini hasaplaň. Islegiň we hödürlemäniň grafiklerini guruň.

302. Islegiň bahadan baglanyşygy $d(p) = e^{-p^2}$ formula arkaly berilýär. Harydyň haýsy bahalarynda isleg çeýelikli, bitarap, çeýelikli däl? Bahanyň üýtgemegi girdejä nähili täsir edýär? Olary çeýelik kriteriýalary bilen deňeşdiriň.

303. Isleg funksiýasy

$$d = \frac{400}{p^2 - 4p + 8}.$$

Bu funksiýanyň grafigini guruň. Harydyň haýsy bahalarynda isleg çeýelikli, bitarap, çeýelikli däl?

304. Eger harydyň isleginiň çeýelikligi α deň, harydyň bahasy β% galdyrylan bolsa, onda harydy satylanda näçe % girdeji üýtgär?

$$\alpha = 0{,}2; \quad \beta = 20\%$$

$$\alpha = 4; \quad \beta = 5\%$$

$$\alpha = 1; \quad \beta = 20\%.$$

IV bap
KÖP ARGUMENTLI FUNKSIÝALAR

§ 1. Köp argumentli funksiýanyň kesgitlemesi. Funksiýanyň predeli. Üznüksiz funksiýa

$M \subset R^n$ köplügiň her bir $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nokadyna U hakyky sana degişli edýän f düzgüne M köplükde kesgitlenen **köp argumentli funksiýa** diýilýär. köplükde kesgitlenýän köp argumentli funksiýa

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ýazgy bilen belgilenýär. Şunlukda kesgitlenen M köplügine funksiýanyň kesgitleniş oblasty, sana f funksiýanyň x_0 **nokatdaky bahasy** diýilýär. F funksiýanyň bahalarynyň köplügine bolsa, onuň **bahalar oblasty** diýilýär.

Goý, f funksiýa köplükde kesgitlenen we M_0 köplük M köplügiň bölegi hem-de $a \in R^n$ nokat M_0 köplügiň predel nokady bolsun. Eger her-bir $\varepsilon > 0$ san üçin şeýle $\delta > 0$ san bar bolsa we islendik $x \in M_0$ üçin $0 < q(x, a) < \delta$ bolanda $\lfloor f(x) - A \rfloor < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda A sana f funksiýanyň M_0 köplük boýunça a nokatdaky predeli diýilýär, ýagny:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ ýa-da } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_n \to a_n \\ (x_1, x_2, \ldots, s_n) \in M_0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A,$$

şeýle ýazgy bilen belgilenýär.

Eger f funksiýanyň $a \in M$ nokatda predeli bar bolsa, şol predel funksiýanyň a nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

onda f funksiýa ***a* nokatda üznüksiz funksiýa** diýilýär.

1. Funksiýanyň berlen nokatda bahasyny tapyň:

1. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, eger $x = 4, y = 3$. *Jogaby*: $f(4, 3) = \dfrac{1}{5}$.

2. $f(x,y,z) = 2x + 1g\dfrac{x-2y}{\sqrt[3]{x^2+z}}$, eger $x = 3,\quad y = -1,\quad z = 116.$

Jogaby: 6.

3. $f(x,y) = \dfrac{2x-3y}{x+y}$, eger $x = 3,\quad y = 1.$ *Jogaby*: 0,75.

4. $y = \sqrt{x^2+y^2}$, eger $x = 3,\quad y = -4$ *Jogaby*: 5.

5. $\varphi(x,y,z) = xyz - \dfrac{x+y}{z}$ eger $x = y = 1,\quad z = 2.$ *Jogaby*: 1.

2. Aşakdaky funksiýalaryň kesgitleniş oblastyny tapyň:

1) $f(x,y) = 2x - y + 1.$

Çözülişi: Funksiýa xOy tekizligiň ähli nokatlarynda kesgitlenen. Berlen funksiýanyň geometriýa şekili bolup giňişlikde tekizlikdir.

2) $f(x,y) = \dfrac{1-x}{x^2+y^2}.$

Çözülişi: Funksiýa xOy tekizligiň ähli nokatlarynda kesgitlenen, diňe O (0,0) nokatda kesgitsiz, çünki funksiýanyň maýdalawjysy şol nokatda nola deňdir.

3) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}.$ *Jogaby*: $x^2 + y^2 \leq 9.$

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{4-x^2-y^2}.$ *Jogaby*: $x^2 + y^2 \neq 4.$

5) $f(x,y) = 2x + \arcsin y.$ *Jogaby*: $\infty < x < +\infty,\quad -1 \leq y \leq 1$

6) $f(x,y) = \sqrt{x-2y}.$ *Jogaby*: $x - 2y \geq 0.$

7) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y-1}.$ *Jogaby*: $x + y - 1 \neq 0.$

8) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-2)(y-1)}.$ *Jogaby*: $x \neq 2,\quad y \neq -1.$

9) $f(x,y) = \sqrt{x} + \ln y.$ *Jogaby*: $x \geq 2,\quad y > 0.$

10) $f(x,y) = x + \arccos(y+1).$ *Jogaby*: $\infty < x < +\infty,\quad -2 \leq y \leq 0.$

3. Aşakdaky predelleri tapyň:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x\\ y\to 3}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Çözülişi: $\lim\limits_{\substack{x\to x\\ y\to 3}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to x\\ y\to 3}} y \cdot \dfrac{\sin xy}{xy} = 3 \cdot 1 = 3.$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x\\ y\to 3}} \dfrac{x+y}{y}$.

Çözülişi: (0,0) nokada ýygnalýan iki sany nokatlaryň yzygiderliklerini alalyň:

$M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ we $M_n^1\left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ onda

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{1} = 2 \text{ we } \lim_{n\to\infty} f(M_n^1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 3.$$

(0,0) nokada ýygnanylýan dürli yzygiderlikleriň predelleriniň bahalary üýtgeşik bolýar. Şol sebäpli (0,0) nokatda berlen funksiýanyň predeli ýok.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + y^2)$. *Jogaby*: 5.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sqrt{x-y}$.

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to -1}} (x^2 - y^2)$. *Jogaby*: 8.

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 8}} \lg(x+y)$. *Jogaby*: 1.

7) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$. *Jogaby*: 0.

8) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 1}} \dfrac{x-1}{y+1}$. *Jogaby*: – 1.

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\mathrm{tg} xy}{y}$. *Jogaby*: 2.

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{1+xy}{x^2+y^2}$. *Jogaby*: 1.

4. Berlen nokatlarda funksiýalaryň üznüksizdiklerini subut ediň:

1) $f(x,y) = x + y$, (x,y) nokatda.

2) $f(x,y) = |x| + |y|$, (0,0) nokatda.

3) $f(x,y) = |x + y|$, (0,0) nokatda.

4) $f(x,y) = x \cos y$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ nokatda.

5) $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$, (1,1) nokatda.

§ 2. Köp argumentli funksiýanyň hususy önümleri we differensialy

Goý, $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýa $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun. Eger

$$\frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta_{x_i}} = \frac{j(x_1, ...x_i + \Delta_{x_i}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta_{x_i}}$$

gatnaşygyň $\Delta x_i \to 0$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele $z = (x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiýanyň $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ nokatdaky $x_i (i = 1, ..., n)$ argument boýunça hususy önümi diýilýär. Şol hususy önümi belgilemek üçin aşakdaky simwollaryň haýsyda bolsa birisi ulanylýarlar

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \quad z_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0),$$

$$f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \quad z'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \quad f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Köp argumentli funksiýanyň differensialy $dz(x^0)$ nokatda aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$dz(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i.$$

Eger önümçilik funksiýasy y çykarmany we $(x_1, x_2, ... x_n)$ önümçilik faktorlar bilen $y = f(x_1, x_2, ... x_n)$ görnüşinde baglaşdyrýan bolsa, onda funksiýanyň häsiýetnamalary

1) $\frac{\partial y_i}{\partial x_i} - x_i$ faktoryň çäkli täsirligi;

2) $\frac{\partial y}{dx_i} \cdot \frac{x_i}{y}$, x_i faktora görä y çykarmanyň maýyşgaklygyny;

3) $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}:\dfrac{\partial y}{\partial x_j}$, x_i we x_j faktorlaryň çäkli norma çalşyrmasyny;

4) $\dfrac{d\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)}{d\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_i}:\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\right)}\cdot\dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial x_i}:\dfrac{\partial y}{\partial x_j}}{\dfrac{x_i}{x_j}}$;

x_i we x_j faktorlaryň çalşyrmasynyň maýyşgaklygyny aňladýarlar.

5. Funksiýalaryň hususy önümlerini tapyň:

1) $z = x^3 + x^2y^2 + y$.

Çözülişi: Ilki bilen y ululygy hemişelik diýip hasaplalyň we x görä önüm tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + x^2y^2 + y)'_x = 3x^2 + 2xy^2 + 0 = 3x^2 + 2xy^2.$$

Indi bolsa x ululygy hemişelik diýip hasaplalyň we y görä önümi tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + x^2y^2 + y)'_y = 2x^2y + 1.$$

2) $z = x^2y + xy^2$, (0,0) nokatda.

Çöžülişi: $z'_x = (x^2y + xy^2)'_x = 2xy + y^2,$

$$z'_y = (x^2y + xy^2)'_y = x^2 + 2xy,$$

$$z_x'(0,0) = 0, \quad z_y'(0,0) = 0.$$

3) $z = x^2 - xy + y^2$, (2,1) nokatda.

Jogaby: $z_x'(2,1) = 3,\ z_y'(2,1) = 0.$

4) $z = x - \cos(1 - y)$, (2,1) nokatda.

Jogaby: $z_x'(-2,1) = 1,\ z_y'(-2,1) = 0.$

5) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, (2,2) nokatda.

Jogaby: $z_x'(2,2) = z_y'(2,2) = -\dfrac{1}{16}.$

6) $z = \dfrac{y}{\sin x}$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ nokatda.

Jogaby: $z_x'\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right) = 0$, $z_y'\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right) = 1$.

7) $z = y^x$. *Jogaby*: $z_x' = y^x \ln y$, $z_y' = x \cdot y^{x-1}$.

8) $z = x^{\sin y}$. *Jogaby*: $z_x' = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}$, $z_y' = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x$.

9) $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$.

Jogaby: $f_x' = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{z}$, $f_y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}$, $f_z' = \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}$.

10) $z = \sin^2 x - \sin^2(x + y) + \sin^2 y$.

Jogaby: $z_x' = -2 \sin y \cos(2x + y), z_y' = -2 \sin x \cos(x + 2y)$.

6. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ funksiýa $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

7. Eger $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bolsa, onda $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$ toždestwo ýerine ýetýändigini subut ediň.

8. Funksiýalaryň doly differensiallaryny tapyň:

1) $z = x^3y^2$.

Çözülişi: Ilki bilen hususy önümlerini tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y.$$

Onda

$$dz = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy = x^2y(3ydx + 2xdy).$$

2) $u = x + y + z$. *Jogaby*: $dx + dy + dz$.

3) $u = x^2 + y^2 + z$. *Jogaby*: $2(xdx + ydy + zdz)$.

4) $z = x^y$. *Jogaby*: $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x dy$.

5) $z = \sqrt{x + y}$. *Jogaby*: $\dfrac{dx + dy}{z\sqrt{x + y}}$.

6) $z = y^{2^x}$. *Jogaby*: $2^x(y\ln 2dx + dy)$.

7) $= x^2 + \operatorname{tg} y$. *jogaby*: $2xdx + \dfrac{1}{\cos^2 y}dy$.

8) $z = \ln(x^2 + y^2)$. *Jogaby*: $\dfrac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2}$.

§ 3. Çylşyrymly we anyk däl funksiýalaryň önümleri

1. Eger $z = F(x,y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ bolsa, onda F funksiýa *çylşyrymly funksiýa* diýilýär. Eger funksiýalar differensirlenýän bolsa, onda:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \quad (1)$$

2. Eger $z = F(x,y)$, $x = \varphi(u,v)$, $y = \phi(u,v)$ we F, φ, ϕ funksiýalar differensirlenýän bolsa, onda:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2)$$

3. (x_0,y_0) çözüwi bolan $F(x,y) = 0$ deňleme nokadyň etrabynda x görä y ululygy üznüksiz funksiýa ýaly kesgitlenýär, eger önüm

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

(x_0,y_0) nokadyň etrabynda üznüksiz bolsa. Eger şolardan ýokary, nokadyň etrabynda $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ önüm bar we üznüksiz bolsa, onda anyk däl funksiýanyň $\dfrac{dy}{dx}$ önümi bar we ony

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad (3)$$

formula arkaly tapylýar. $F(x,y) = 0$ deňleme üçünji ýaly şertlerde x we y görä z anyk däl funksiýany kesgitleýär. Onda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (4)$$

9. Aşakdaky deňlemelerden $\frac{dz}{dt}$ tapmaly.

1) $z = x^2 + xy + y^2, \quad x = t, \quad y = t^2.$

Çözülişi: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y,\ \frac{dx}{dt} = 1$, (1) formula görä:

$$\frac{dz}{dt} = (2x + y)\cdot 1 + (x + 2y)\cdot 2t = (2t + t^2) + (t + 2t^2)\cdot 2t =$$

$$= 2t + t^2 + 2t^2 + 4t^3 = t(2 + 3t + 4t^2).$$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ x = \sin t,\ y = \cos t.$ *Jogaby*: 0.

3) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad x = e^{2t+1}, y = e^{2t-1}.$ *Jogaby*: 0.

4) $z = \frac{x}{y},\ x = 1 - e^{2t}, y=e^{t}.$ *Jogaby*: $e^{2t} - 2e^{t} - 1.$

5) $z = u^{v}$, u we $v - t$ görä funksiýalar, $u^{v-1}(vu' - ulnuv')$.

10. Eger $z = \frac{x^2}{y},\ x = u - 2v,\ y = v + 2u$ bolsa, onda $\frac{\partial z}{\partial u}$ we $\frac{\partial z}{\partial v}$ tapyň.

Çözülişi: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2,$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1.$$

(2) formulany peýdalanyp:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{y}\cdot 1 - \frac{x^2}{y^2}\cdot 2 = \frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2} = \frac{2x}{y^2}(x - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y}\cdot(-2) - \frac{x^2}{y^2}\cdot 1 = -\frac{4x}{y} - \frac{x^2}{y^2} = -\frac{x}{y}\left(4 + \frac{x}{y}\right)$$

alýarys.

11. Eger $z = \frac{y}{x^2}$, $x = 2u - v$, $y = 2v + u$ bolsa, onda $\frac{\partial z}{\partial u}$ we $\frac{\partial z}{\partial v}$ tapyň.

Jogaby: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-4y + x}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2(x+y)}{x^2}$.

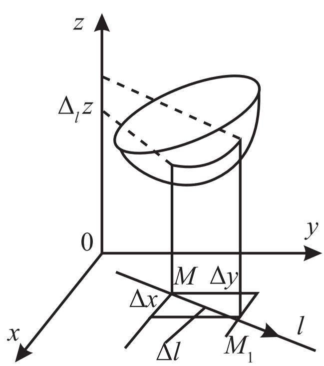
12. Eger $z = \ln xy$, $x = 2u - v$, $y = 2v + u$ bolsa, onda tapyň.

Jogaby: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

§ 4. Ugur boýunça önüm

Goý, $z = f(x,y)$ funksiýa $M(x,y)$ nokadyň etrabynda kesgitlenen bolsun, l $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ birlik wektor bilen kesgitlenen käbir ugur. Bu ýerde $|\vec{e}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, sebäbi $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ýa-da $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$; $\cos\alpha$, $\cos\beta - \vec{e}$ wektor koordinatalar oklar bilen emele getirýän burçlarynyň kosinuslary, olary ugrukdyryjy kosinuslar diýip aýdylýar.

Berlen l ugur boýunça $M(x,y)$ nokat $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nokada geçende z funksiýanyň berlen l ugur boýunça $\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ artymyny alarys *(1-nji surat)*.



1-nji surat

Eger $MM_1 = \Delta l$ bolsa, onda

$\Delta x = \Delta l \cos\alpha$; $\Delta y = \Delta l \cos\beta$, diýmek

$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cos\alpha, y + \Delta l \cos\beta) - f(x,y).$$

Kesgitleme. Δl nola ymtylanda l ugur boýunça $\Delta_l z$ funksiýanyň artymynyň we Δl gatnaşygyň predeline l ugur boýunça $z = f(x,y)$ funksiýanyň önümi z_l' diýilýär, ýagny:

$$z_l' = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}. \qquad (1)$$

z_l' önüm berlen l ugur boýunça funksiýanyň üýtgemesiniň tizligini häsiýetlendirýär.

Öň seredilen z_x' we z_y' hususy önümler Ox we Oy oklara parallel bolan ugur boýunça önümlerdigi anykdyr.

$$z_l' = z_x' \cos\alpha + z_y' \cos\beta \tag{2}$$

formulany görkezmek aňsatdyr.

$z = f(x,y)$ funksiýanyň gradiýenti düşünjäni girizeliň.

Kesgitleme. $(z_x'; z_y')$ koordinataly wektora $z = f(x,y)$ funksiýanyň ∇z gradiýenti diýilýär.

$\nabla z = (z_x'; z_y')$ we birlik $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna garalyň. Alarys:

$$(\nabla z, \vec{e}) = z_x' \cdot \cos\alpha + z_y' \cdot \cos\beta. \tag{3}$$

(2) we (3) deňlikleri deňeşdirip, alarys $z_l' = (\nabla z, \vec{e})$, ýagny ugur boýunça z_l' önüm ∇z gradiýentiň we bu ugry berýän birlik $\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyna deňdir.

Eger wektorlaryň ugry deň bolsa onda olaryň skalýar köpeltmek hasylynyň maksimal bolýandygy mälimdir. Diýmek, berlen nokatda ∇z gradiýent bu nokatdaky funksiýanyň maksimal üýtgemesiniň ugruny kesgitleýär.

$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \cos\beta - l_0$ wektoryň gönükdiriji kosinuslary, formula boýunça hasaplanýar.

$z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2$ funksiýanyň $l = (3,4)$ ugur boýunça $M(1,1)$ nokatda önümini hasaplarys.

Çözülişi: l wektoryň ugry bilen gabat gelýän l0 wektory tapalyň.

$l^0 = \frac{l}{|l|} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ ýa-da $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}$. Hususy önümleri tapalyň

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y + 2$ we olaryň bahasyny $M(1,1)$ nokatda hasaplalyň, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 1 + 1 + 2 = 5$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 2 \cdot 1 + 2 = 5$.

Onda $\frac{\partial z}{\partial e} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 7$.

Gradiýent. M_0 nokatda başlangyjy bolan we koordinatalary $M(x,y)$ nokatda hasaplanan $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ önümleri bolan wektora $M(x,y)$ nokatdaky $z = f(x,y)$ funksiýanyň gradiýenti diýilýär we $\text{grad}\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ arkaly belgilenýär.

Şuňa meňzeş üç argumentli $U = f(x,y,z)$ funsiýanyň $M(x,y,z)$ nokatda ugur boýunça önümi we gradiýenti kesgitlenýär.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\operatorname{grad} U(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

bu ýerde cosα, cosβ, cos γ l^0 birlik wektoryň gönükdiriji kosinuslary.

Gradiýent $U = f(M)$ funksiýanyň iň uly artýan ugruny görkezýär. $M(-2,3,-1)$ nokatda $u = x^2 + 3xy^2 - z^3y$ funksiýanyň gradiýentini tapyň.

Çözülişi: Berlen funksiýanyň hususy önümlerini tapalyň.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - z^3, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}/ = -3z^2y.$$

Bu önümleriň bahalaryny $M(-2,3,-1)$ nokatda hasaplalyň.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x'(-2,3,-1) = 2\cdot(-2) + 3\cdot 32 = 23,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y'(-2,3,-1) = 6\cdot(-2)\cdot 3 - (-1)3 = -35,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_z'(-2,3,-1) = -3\cdot(-1)2\times 3 = -9.$$

Diýmek, grad $u(M) = (23, -35, -9)$.

Berlen nokatda l wektoryň ugry boýunça aşakdaky funksiýalaryň önümlerini tapyň.

13. $z = x^3y - 5xy^2 + 8, l = (1,1), M_0$ (1,1) nokatda.

Jogaby: $-\dfrac{11}{\sqrt{2}}$.

14. $z = \ln\left(\dfrac{x^2 + y}{xy}\right)$, $l(6,8)$, M_0 (1,2) *Jogaby*: $-\dfrac{3}{25}$.

15. $z = \ln(e^x + e^y)$, $l = (1,1)$, $M(x,y)$. *Jogaby*: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

16. $U = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $l = (2,1,2)$, $M_0(1,1,1)$.

Jogaby: $-\frac{1}{6}$.

grad z we |grad z| tapmaly.

17. $z = \frac{xy}{x+y+1}$, $M_0(0,3)$.

Jogaby: $\text{grad}z(M_0) = \left(\frac{3}{10}, 0\right)$; $|\text{grad}z(M_0)| = \frac{3}{10}$

18. $z = (x-y)^2$, $M_0(1,1)$.

Jogaby: gradz $(M_0) = (0,0)$; |grad z $(M_0)| = 0$.

19. $z = e^{\frac{x+y}{2xy}}$, $M_0(1,1)$.

Jogaby: grad $z(M_0) = (0,0)$; |grad $z(M_0)| = 0$.

grad $U(M_0)$ we $|U(M_0)|$ tapmaly.

20. a) $U = x^2 + y^2 - z^2$, $M_0(2,0,3)$. *Jogaby*: (4;0;-6); $2\sqrt{13}$.

b) $U = 4 - x^2 - y^2 - z^2$, $M_0(3,2,1)$. *Jogaby*: $(-6;-4;-2)$; $2\sqrt{14}$.

21. $U = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(3,-1,2)$.

Jogaby: $\left(\frac{6}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{4}{\sqrt{14}}\right)$.

22. $U = -\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, $M_0(a,b,c)$.

Jogaby: $\left(-\frac{2}{a}; -\frac{2}{b}; \frac{1}{c}\right)$ $\frac{abc}{\sqrt{4b^2c^2 + 4a^2c^2 + a^2b^2}}$.

§ 5. Ýokary tertipli hususy önümler

Goý, $z = f(x,y)$ funksiýanyň $M(x,y)$ nokatda we $M(x,y)$ nokadyň etabynyň her bir nokadynda birinji tertipli hususy önümleri bar bolsun. Onda

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial z}$ we $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ hususy önümlerden

$z = f(x,y)$ funksiýanyň $M(x,y)$ nokatdan ikinji tertipli hususy önümleri diýilýär.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(M), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(M),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} = f_{xy}(M), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(M).$$

Şuňa meňzeş üçünji we ondan ýokary tertipli hususy önümler kesgitlenýär. Meselem:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y x^3} = f_{xxx;}(M);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f_{yxx}(M);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = fx^2 y(M).$$

Eger birinji tertipli hususy önümler üznüksiz bolsa, onda garyşyk önümiň bahasy differensirlemegiň tertibine bagly däl, ýagny:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

23. $z = xy \ln\frac{x}{y}$ funksiýanyň ikinji tertipli hususy önümlerini tapyň.

Çözülişi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \ln\frac{x}{y} + xy \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = y \ln\frac{x}{y} + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \ln\frac{x}{y} + xy \cdot \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y}\right) = y \ln\frac{x}{y} - x;$$

$$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \ln\frac{y}{x} + 1 + y \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \ln\frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x \cdot \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y}.$$

24. Eger $z = \sin x \operatorname{tg} y$ bolsa, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} y \cos x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}.$$

Onda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Berlen funksiýalaryň ikinji tertipli önümlerini tapyň:

25. 1) $z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2 y - y^3$.

Jogaby: $z''_{xx} = 6 + 2y$, $z''_{xy} = 2x + 4y - 4$, $z''_{yy} = 4x - 6y$.

2) $u = e^{xyz}$.

Jogaby: $u''_{xx} = y^2 z^2 e^{xyz}$, $u''_{yy} = x^2 z^2 e^{xyz}$, $u''_{zz} = y^2 z^2 e^{xyz}$,

$u''_{xy} = ze^{xyz}(xyz + 1)$, $u''_{xz} = ye^{xyz}(xyz + 1)$, $u''_{yz} = xe^{xyz}(xyz + 1)$.

3) $u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$.

Jogaby: $u''_{xx} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$, $u''_{yy} = -\left(\frac{x}{z}\right)^2 \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$,

$u''_{zz}\left(\frac{xy}{x}\right)^2 \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$, $u''_{xy} = -\left(\frac{y}{z}\right)^2 \sin\left(\frac{xy}{z}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{xy}{z}\right)$,

$$u''_{xz} = -\frac{xy^2}{z^3}\sin\left(\frac{xy}{z}\right) - \frac{y}{z^2}\cos\left(\frac{xy}{z}\right),$$

$$u''_{yz} = -\frac{x^2 y}{z^3}\sin\left(\frac{xy}{z}\right) - \frac{x}{z^2}\cos\left(\frac{xy}{z}\right).$$

4) $z = \arcsin(x + y)$.

Jogaby: $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = \dfrac{x+y}{(1-(x+y)^2)^{\frac{3}{2}}}$.

5) $z = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

Jogaby: $z''_{xx} = \dfrac{8y}{(x-y)^3 \sin 2\dfrac{x+y}{x-y}}\left(\dfrac{2y}{x-y}\operatorname{ctg}\left(2\dfrac{x+y}{x-y}\right)-1\right)$;

$$z''_{yy} = \frac{8y}{(x-y)^3 \sin 2\dfrac{x+y}{x-y}}\left(1-\frac{2y}{x-y}\operatorname{ctg}2\frac{x+y}{x-y}\right);$$

$$z''_{xy} = \frac{8y}{(x-y)^3 \sin 2\dfrac{x+y}{x-y}}\left((3x-y)-\frac{4x^2}{x-y}\operatorname{ctg}2\frac{x+y}{x-y}\right).$$

6) $z = x\sin xy + y\cos xy$.

Jogaby: $z''_{xx} = (2y - y^3)\cos xy - xy^2 \sin xy$;

$z''_{yy} = -(2x - x^3)\sin xy - x^2 y\cos xy$;

$z''_{xy} = (2x - y^2)\cos xy - (2y + x^2 y)\sin xy$.

26. Aşakdaky funksiýalar üçin $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ deňligi barlaň:

1) $z = \dfrac{y^2}{1+x}$; 2) $z = ye^x$; 3) $z = \sin x \cos 2y$; 4) $z = y\ln x$.

27. Aşakdaky funksiýalar üçin $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$ deňligi barlaň:

1) $z = x\sin y$; 2) $z = yx\ln(x+y)$.

28. $z = \dfrac{xy}{x-y}$ funksiýa üçin $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$.

29. $u = f(x)g(y)h(y)$ funksiýanyň $u^2 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \bar{z}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkeziň.

§ 6. Köp argumentli funksiýanyň ekstremumy

1. Ekstremumyň bolmagynyň zerur şerti. Goý, $z = f(x,y)$ funksiýa öz kesgitleniş oblastynda ýeterlik derejede differensirlenýän funksiýa bolsun.

Teorema 1. (Ekstremumyň bolmagynyň zerur şerti). Eger D kesgitleniş oblastynda ýeterlik derejede differensirlenýän $z = f(x,y)$ funksiýa D oblastyň käbir içki nokadynda ekstremuma eýe bolsa, onda

$$\operatorname{grad} f(M_0) = 0 \qquad (1)$$

ýa-da

$$\left.\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

2. Ekstremum bolmagyň ýeterlik şerti. Goý, $M_o(x_o,y_o)$ – ekstremumyň bolup biljek nokady bolsun, ýagny:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Belgileme girizeliň

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

Teorema 2. (Ekstremumyň bolmagynyň ýeterlik şerti). Eger (1) deňlikler ýerine ýetýän we

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0 \text{ bolsa,}$$

onda $M_o(x_o,y_o)$ nokat $z = f(x,y)$ funksiýanyň ekstremum nokadydyr, şunlukda

$$A > 0 \ (A > 0)$$

bolsa, $M_o(x_o,y_o)$ –minimum (maksimum) nokadydyr.

Eger-de $\Delta < 0$ bolsa, onda $M_o(x_o,y_o)$ ekstremum nokat däl, $\Delta = 0$ bolanda $M_o(x_o,y_o)$ nokat barada belli zat aýdyp bolmaýar, ýagny $M_o(x_o,y_o)$ nokadyň ekstremum nokat bolmagy-da mümkin, bolmazlygy-da mümkin. Ony bilmek üçin başga usullary ulanmak gerekdir.

30. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3.$

Ekstremumyň bolup biljek nokatlaryny tapalyň:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = 0, \quad x = 1/3; \; y = 4/3.$$

Diýmek, $\left(1/3, 4/3\right)$ ekstremumyň bolup biljek nokady.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

$\left(1/3, 4/3\right)$ nokatda funksiýanyň ekstremumy bar. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0,$ şonuň üçin hem bu nokat funksiýanyň minimum nokadydyr.

Aşakdaky funksiýalaryň ekstremumlaryny tapyň:

31. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$ *Jogaby*: $z_{\min} = -1, (-4; 1).$

32. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$ *Jogaby*: ekstremumy ýok.

33. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$ *Jogaby*: $z_{\min} = 0, \left(1; -\dfrac{1}{2}\right).$

34. $z = 2xy - 4x - 2y.$ *Jogaby*: ekstremumy ýok.

35. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$ *Jogaby*: $z_{\min} = -\dfrac{2}{e}, (-2; 0).$

3. Şertli ekstremum. Lagranžyň funksiýasy diýilýän aşakdaky funksiýa girizilýär:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

(bu ýerde λ – *Lagranžyň köpeldijisi* diýilýän käbir parametr). Onda $z = f(x,y)$ funksiýa üçin şertli ekstremumy tapmak meselesi $L(x, y \lambda)$

funksiýa üçin şertsiz (adaty) ekstremumy tapmak meselesine getirilýär. Bu funksiýa üçin ekstremumyň bolmagynyň zerur şerti aşkdaky teoremanyň üsti bilen berilýär:

Teorema 3. Goý, $f(x,y)$ we (x,y) funksiýalar $M_o(x_o,y_o)$ nokadyň $(x_0,y_0) = 0)$ käbir golaý töwereginde üznüksiz differensirlenýän bolsun. Eger $M_o(x_o,y_o)$ nokatda $f(x,y)$ funksiýa şertli ekstremuma eýe bolsa we grad $(x_0,y_0) \neq 0$, onda

$$\begin{cases} L_x'(x,y,) = f_x'(x,y) + \lambda\varphi_x'(x,y,) = 0 \\ L_y'(x,y,) = f_y'(x,y) + \lambda\varphi_x'(x,y,) = 0 \\ \lambda\varphi_\lambda'(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Bu şerti kanagatlandyrýan (x_o,y_o,λ_o) nokada *Lagranžyň stasionar nokady* diýilýär.

36. Eger x we y položitel we $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ şerti kanagatlandyrýan $z = xy$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Çözülişi: Lagranjyň funksiýasyny ýazalyň:

$L(x,y,\lambda) = xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$. Onda

$$L_x' = y + \frac{\lambda x}{4} = 0; \quad L_y' = x + \lambda y = 0; \quad L_\lambda' = \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

Birinji we ikinji deňlemelerden λ-ny ýoklamaly.

$$\begin{cases} y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \\ x + \lambda y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{x}{y} = 0 \\ y - \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{4} = 0, \end{cases} \quad 4y^2 - x^2 = 0.$$

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 0 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2} - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2} - 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ y^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Meseläniň şerti boýunça $x > 0, y > 0$. Onda $x = 2, y = 1$.

$z = xy$ funksiýa $x = 2, y = 1$ bolanda $z = 2 \cdot 1 = 2 > 0$ položiteldir we ellipsiň koordinata oklary bilen kesişende $(\sqrt{8};0)$ we $(0;\sqrt{2})$. nokatlarda $z = 0$. Diýmek $P(2;1)$ nokat berlen funksiýanyň şertli maksimumydyr.

Funksiýanyň şertli ekstremumyny tapyň:

37. $x + y = 2$ bolanda $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. *Jogaby*: $Z_{min} = 2,(1;1)$.

38. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ bolanda $z = x + y$.

Jogaby: $Z_{max} = -4; (-2; -2); Z_{min} = 4,(2;2)$.

39. $3x + 2y = 11$ bolanda $z = x^2 + 2y^2$. *Jogaby*: $Z_{min} = 11,(3;1)$.

40. $x^2 + y^2 = 5$ bolanda $z = 2x + y$.

Jogaby: $Z_{min} = -5,(-2; -1); Z_{max} = 5; (2;1)$.

41. $x + y + 3 = 0$ bolanda $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$.

Jogaby: $Z_{min} = -4,75,\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

§ 7. Ykdysadyýetde ekstremum meseleler

Önümçilik kärhanalarynda önümi öndürmeklik üçin ýüze çykýan çykdajylara hem-de önümleri ýerlemekden gelýän girdejilere bagly bolan meseleler ykdysadyýetde esasy orny eýeleýär. Şunuň üçin hem hususy önümleriň ulanylyşy: ekstremuma degişli meselelere seredeliň.

Mysal üçin, bu girdejiniň, peýdanyň maksimumyny ýa-da birnäçe üýtgeýän ululyklar görnüşindäki ýüze çykýan önümçiligiň ähli çykdajylarynyň jeminiň minimumyny hasaplamak ýaly ykdysady meselelere seredeliň.

42. Käbir kiçi kärhana G_1 we G_2 görnüşli önüm öndürip degişlilikde 1000 manatdan we 800 manatdan satýar. Çykdajy funksiýa aşakdaky görnüşde bolar:

$$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2.$$

bu ýerde Q_1 we Q_2– G_1 we G_2 harytlaryň öndürmesiniň göwrümi.

Kärhananyň girdejisi maksimal bolar ýaly Q_1 we Q_2 göwrümleriniň bahalaryny tapmaly.

Çözülişi: Kärhana öndüren önümine özbaşdak bazarda baha goýup bilmeýär we ol isleg we hödürleme kanunlaryna görä bazar nyrhy boýunça satmaly bolýar. Harydyň bazar nyrhy Q_1 we Q_2 göwrümlere bagly däl. Sebäbi olaryň ululygy örän kiçidir. Şonuň üçin G_1 we G_2 harytlaryň satylmasyndan jemi girdeji,

$$R = 1000\, Q_1 + 800\, Q_2.$$

Onda R gerdejiniň we C çykdajylaryň tapawudy P peýda deň.

$$P = R \cdot C = \left(1000Q_1 + 800Q_2\right) \cdot \left(2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2\right)$$

ýa-da $\quad P(Q_1,Q_2) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$

Onda peýda funksiýanyň iki üýtgeýän ululyga maksimumyny tapmaly.

Bu funksiýanyň stasionar nokatlaryny tapmaly. Şunuň üçin birinji tertipli hususy önümlerini tapalyň.

$$P'_{a1}(Q_{1,}Q_2) = 1000 - 4Q_1 - Q_2$$

$$P'_{a2}(Q_1,Q_2) = 800 - 2Q_1 - Q_2.$$

Olary nola deňläp, alarys:

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

Bu deňlemeler sistemanyň çözüwi: birinji deňlemeden ikinji deňlemäni aýryp taparys.

$$200 – 2Q_1 = 0.$$

$Q_1 = 100$ birinji deňlemä goýup alarys: $Q_2 = 300$. Şeýlelikde stasionar nokadyň koordinatalary

$$(Q_1,Q_2) = (100,300).$$

Indi stasionar nokatda maksimuma deňmi, minimuma deňmi ikisi hem bolmaýandygyny tapmak galdy. Bu soraga jogap bermek üçin ikinji tertipli hususy önümleri tapmaly.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Q_1^2} = -\,4, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial Q_2^2} = -\,2, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -\,2.$$

Aňlatmany düzeliň we hasaplalyň:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Q_1^2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial Q_2^2}-\left(\frac{\partial^2 P}{\partial Q_1\partial Q_2}\right)^2=-4(-2)-(-2)^2=4>0;$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Q_1^2}=-4<0,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial Q_2^2}=-2<0.$$

Onda stasionar nokatda maksimum ýerine ýetýär. Stasionar nokadyň koordinatalaryny peýdanyň funksiýasynda goýup alarys:

$P(100, 300)=1000\cdot100+800\cdot300-2\cdot100^2-2\cdot100\cdot00-300^2=170000.$

Şeýlelikde, önümçiligiň göwrümi $Q_1 = 100$ we $Q_2 = 300$ bolanda kärhana iň uly peýda görýär.

43. Kärhana harydyň bir bölegini ýerli bazarda satýar, beýleki bölegini eksporta iberýär. Içki bazarda satylýan harydyň q_1 bahasy we onuň mukdary p_1 isleg egriniň deňlemesi bilen berilýär:

$$q_1 + p_1 = 500.$$

Şoňa meňzeş eksporta gidýän harydyň bahasy p_2 we onuň mukdary q_2

$$2p_2 + 3q_2 = 720$$

islegiň deňlemesi bilen berilýär. Jemi çykdajylar

$$C = 50000 + 20(q_2 + q_1)$$

aňlatma bilen berilýär.

Kärhana baha syýasatynyň haýsy görnüşini durmuşa geçirmeli?

Çözülişi: Ilki bilen kärhananyň girdejisini kesgitläliň. Girdeji iki bölekden ybaratdyr: harydyň içki bazardan satylmagyndan

$$R_1 = p_1q_1 = (500 - q_1)q_1 = 500q_1 - q_1^2.$$

we eksport edilen harytdan

$$R_2 = p_2q_2 = (360 - 1,5q_2)q_2 = 360q_2 - 1,5q_2^2,$$

(iki ýagdaýa laýyklykda hem baha isleg egrilerinden alynýar). Şeýlelikde jemi girdeji

$$R = R_1 + R_2 = 500q_1 - q_1^2 + 360q_2 - 1,5q_2^2.$$

Indi kärhananyň peýdasyny tapmak bolar:

$$P(q_1, q_2) = R - C = (500q_1 - q_1 2 + 360q_2 - 1,5q_2^2) -$$

$$-(50000 + 20(q_2 + q_1)) = 480q_1 - q_1^2 + 340q_2 - 1,5q_2^2 - 50000.$$

Şu funksiýanyň maksimumyny tapalyň.

$$P'_{q_1}(q_1, q_2) = 480 - 2q_1,$$

$$P'_{q_2}(q_1, q_2) = 340 - 3q_2,$$

$$\begin{cases} 480 - 2q_1 = 0 \\ 340 - 3q_2 = 0, \end{cases}$$

$$q_1 = 240,$$

$$q_2 = \frac{340}{3}.$$

$$\frac{Q^2 P}{Qq_1^2} = -2 < 0,$$

$$\frac{Q^2 P}{Qq_2^2} = -3 < 0,$$

$$\frac{Q^2 P}{Qq_1 Qq_2} = 0,$$

$$\frac{Q^2 P}{Qq_1^2} \cdot \frac{Q^2 P}{Qq_2^2} - \frac{Q^2 P}{Qq_1 Qq_2} = -2 \cdot (-3) - 0^2 = 6 > 0.$$

Diýmek, $\left(240, \frac{340}{3}\right)$ ekstremum nokatda peýda funksiýa maksimuma eýedir. Kärhananyň baha syýasatyny bilmek üçin maksimum nokadyny koordinatalarynda isleg egrilere goýmaly.

$$P_1 = 500 - q_1 = 500 - 240 = 260,$$

$$P_2 = 360 - 1,5q_2 = 360 - 1,5 \cdot \frac{340}{3} = 190.$$

Ýokardaky tapylan P_1 we P_2 kärhananyň harydy içki bazarda we eksportda näçeden satmagyny görkezýär.

Alnan q_1 we q_2 ululyklaryň bahalaryny peýda funksiýa goýup, kärhananyň iň uly peýdasyny tapmak bolar.

$$P\left(240, \frac{340}{3}\right) = 480 \cdot 240 - 240^2 + 340 \cdot \left(\frac{340}{3}\right) - 1,5 \cdot \left(\frac{340}{3}\right)^2 -$$

$$- 50000 = 26866,67.$$

44. Monopol kärhana G_1 we G_2 harytlaryň görnüşlerini q_1 we q_2 mukdarda çykarýar. Çykdajy funksiýa

$$C = 10q_1 + q_1 q_2 + 10q_2$$

görnüşde berilýär we isleg funksiýalar her bir haryt üçin:

$$P_1 = 50 - q_1 + q_2,$$

$$P_2 = 30 + 2q_1 - q_2,$$

bu ýerde P_1 we P_2 – G_1 we G_2 harydyň birliginiň bahasy. Şulardan başga kärhana G_1 we G_2 harytlaryň görnüşlerinden jemi 15 birlik öndürmeli şu şertde kärhananyň iň uly peýdasyny tapmaly.

Çözülişi: Meseläniň çözülişini maksat funksiýasyny (peýda funksiýasyny) gurmakdan başlalyň: $P = R - C$.

G_1 harydyň satylmagyndan alynýan girdeji

$$R_1 = p_1 q_1 = (50 - q_1 + q_2)q_1 - q_1^2 + q_2 q_1,$$

bu ýerde p_1 üçin aňlatma G_1 harydyň isleg egrisinden alynýar. Şuňa meňzeşlikde G_2 harytdan alynýan girdejä hasaplanýar:

$$R_2 = p_2 q_2 = (30 + 2q_1 - q_2)q_2 = 30q_2 + 2q_1 q_2 - q_2^2.$$

Elbetde jemi girdeji

$$R = R_1 + R_2 = 50q_1 - q_1^2 + 3q_2 q_1 + 30q_2 = q_2^2.$$

Meseläniň şertinden çykdajylar bellidir. Onda peýda (maksat funksiýa) aşakdaky görnüşi alýar:

$$P(q_1, q_2) = R - C = (50q_1 - q_1^2 + 3q_2 q_1 + 30q_2 - q_2^2) -$$
$$-(10q_1 + q_1 q_2 + 10q_2) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_2 q_1 + 20q_2 - q_2^2.$$

Meseledäki çäklenmäni:

$$g(q_1,q_2) = 15 - q_1 - q_2 = 0$$

görnüşde şertli ekstremumy tapmak meselesine gelýäris. Bu meseläni çözmek üçin Lagranžyň funksiýasyny guralyň:

$$F(q_1, q_2, \alpha)40q_1 - q_1^2 + 2q_2q_1 + 20q_2 - q_2^2 + \alpha(15 - q_1 - q_2).$$

Hususy önümleri tapyp, nola deňläliň:

$$F'_{q_1} = 40 - 2q_1 + 2q_2 - \alpha = 0,$$

$$F'_{q_2} = 2q_1 + 20 - 2q_2 - \alpha = 0,$$

$$F'_{\alpha} = 15 - q_1 - q_2 = 0.$$

Şeýlelikde üç näbellili üç deňlemeleriň sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 - a = -40 \\ 2q_1 - 2q_2 - a = -20 \\ q_1 + q_2 = 15. \end{cases}$$

Sistemany Gausyň usuly bilen çözeliň: birinji we ikinji deňlemeleri goşup alarys:

$$-2\alpha = -60$$

$$\alpha = 30$$

tapylan $\alpha = 30$ sistemanyň birinji deňlemesine goýup alarys:

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 = -10 \\ q_1 + q_2 = 15 \end{cases}$$

bu sistemany çözüp alarys:

$$q_1 = 10,$$

$$q_2 = 5.$$

Bu şertli ekstremumyň nokadynyň koordinatalary ýa-da şular ýaly satuwyň göwrüminde kärhana iň uly peýda görýär. Peýdanyň iň uly bahasy

$$P(10,5) = 40 \cdot 10 - 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 5^2 = 475.$$

45. Telekeçi öz önümçiligini giňeltmek üçin 150 müň manat goşmaça maýa goýýar. Eger täze enjamlary üçin harajatlary x müň manat we täze alnan iş güýjüne harajatlar y müň manada deň bolsa, onda önümiň göwrüminiň artdyrmasy $Q = 0{,}001x^{0{,}6}\, y^{0{,}4}$ deň bolar. Önümiň göwrüminiň artdyrmasy maksimal bolar ýaly goşmaça maýa goýumy nähili paýlamaly? *Jogaby*: (90,60).

46. Önümçiligiň umumy çykdajylary

$$TC = 0{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}4y^2 + 700x + 600y + 2000,$$

funksiýa bilen berilýär. Bu ýerde x we y – A we B görnüşli harytlaryň sany. Öndürilen önümiň umumy sany 500-e deň bolmaly. Çykdajylar iň az bolar ýaly A we B harytdan näçe öndürmeli? *Jogaby*: (0;500).

V bap
INTEGRAL

§ 1. Kesgitsiz integral. Integrirlemegiň esasy usullary

1. Göს-göni integrirlemek we dagatmak usuly

Göს-göni integrirlemek diýmek aşakdaky integrallaryň tablisasyny ulanmak diýmekdir.

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $(n \neq 1)$.

2) $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$.

3) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^n + c$, $\quad \int e^u du = e^u + c$.

4) $\int \sin u du = -\cos u + c$, $\quad \int \cos u du = \sin u + c$.

5) $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + c$, $\quad \int \mathrm{sh} u du = -\mathrm{ch} u + c$.

6) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = -\mathrm{ctg} u + c$, $\quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + c$.

7) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + c = -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{u}{a} + c$, $\quad (a > 0)$.

8) $\int \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c = -\arccos \frac{u}{a} + c$.

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + c$.

10) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + c$.

Bu formulalarda u – üýtgeýän ululyk ýa-da differensirlenýän funksiýa. Eger $\int f(u) du = F(u) + c$, bolsa, onda:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c,$$

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)dx.$$

Formula integrirlemegiň dagatma usuly diýilýär.
Integrallary hasaplaň.

1. $I = \int \frac{x^2 - 5x + 1}{\sqrt{x}} dx = \left(\int x^{\frac{3}{2}} - 5\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$

$= \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c_1 - 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_2 +$

$+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_3 = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c.$

2. $I = \int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx.$

Jogaby: $x^3 + x^2 + 0{,}5\ln|2x - 1| + c.$

3. $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} =$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + c.$

4. $I = \int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$
$= \mathrm{tg}x - x + c.$

5. $I = \int (x^3 + 1)^2 dx = \int (x^6 - 2x^3 + 1)dx = \frac{x^7}{7} - 2\frac{x^2}{4} +$
$+x + c = \frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x + c.$

6. $I = \int (3x - 4)^{15} dx.$

Çözülişi: Bu ýerde iki agzany 15-nji derejä götermek manysy ýok, sebäbi $3x-4$ çyzykly funksiýa integralyň tablisasyndan alarys:

$$\int u^{15}du = \frac{u^{16}}{16} + c;$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-4)^{16}}{16} + c = \frac{(3x-4)^{16}}{48} + c.$$

7. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$

Görkezme: maýdalawjydaky irrasionallykdan boşamaly.

Jogaby: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c.$

8. $I = \int \cos(\pi x + 1)dx.$

Çözülişi: $\int \cos u du = \sin u + c$, integraldan ugur alyp alarys:

$$\int \cos(\pi x+1)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1) + c.$$

9. $I = \int \cos 3x \cos 7x dx.$

Çözülişi: Şular ýaly integrallary tapmak üçin köpeltmek hasyly jeme özgertmek trigonametrik formulalary ulanmak amatlydyr: Bu ýerde $\cos 3x \cos 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 10x)$ onda,

$$I = \int \cos 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \cos 10x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 10x + c = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{20}10x + c.$$

Bellik. Şu integrala meňzeş integrallary çözmek üçin aşakdaky dargatma formulalary ulanmaly:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

$$\cos mn \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

10. $I = \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$

Çözülişi: $(\cos x \cos 2x)\cos 5x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)\cos 5x =$

$= \frac{1}{2}(\cos x \cos 5x + \cos 3x \cos 5x) = \frac{1}{4}(\cos 4x + \cos 6x + \cos 2x +$
$+ \cos 8x);$

Onda, $I = \int \cos x \cos 2x \cos 5x dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x dx +$
$+ \int \cos 6x dx + \int \cos 2x dx + \int \cos 8x dx = \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x +$
$+ \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 6x + c.$

11. $I = \int \sin^2 3x dx.$

Çözülişi: $\sin^2 3x = \frac{1-\cos 6x}{2}$ onda $\int \sin^2 3x dx =$

$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{1}{2}x -$
$-\frac{1}{12}\sin 6x + c;$

12. $I = \int \cos^2 5x dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\sin 10x + c.$

13. $I = \int \frac{1}{x^2+4x+5}dx.$

Çözülişi: $\int \frac{1}{x^2+4x+1+4}dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$

$= \operatorname{arctg}(x+2) + c.$

14. $I = \int \frac{dx}{4x^2+25}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + c.$

15. $I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$. *Jogaby*: $\frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$.

16. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$.

Çözülişi: $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9} - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x + c$.

17. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}$.

Çözülişi: $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x+2)}} = \arcsin\frac{x+2}{3} + c$.

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$. *Jogaby*: $\ln\left| x + 3 + \sqrt{x2 + 6x + 1} \right| + c$.

18. $I = \int \frac{dx}{4 - x^2 - 4x}$.

Çözülişi: $\int \frac{dx}{8 - (x+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{2\sqrt{2} + (x+2)}{2\sqrt{2} - (x+2)} \right| + c$.

19. $I = \int \frac{dx}{10x^2 - 7}$. *Jogaby*: $\frac{1}{2\sqrt{70}} \ln\left| \frac{\sqrt{10}x - 7}{\sqrt{10}x + 7} \right| + c$.

20. $\frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$. *Jogaby*: $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-3}{2} + c$.

21. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. *Jogaby*: $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + c$.

22. $\frac{3 - 2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$. *Jogaby*: $3\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x + c$.

23. $\int \frac{2 + 3x^2}{x^2(1 + x^2)}dx$. *Jogaby*: $-\frac{2}{x} + \mathrm{arctg}x + c$.

24. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Jogaby: $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\arcsin x+c.$

25. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx.$ *Jogaby*: $\sin x - \cos x + c$

26. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10x}dx.$ *Jogaby*: $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}+c.$

27. $\int (\sin 5x-\sin 5\alpha)dx.$ *Jogaby*: $-0{,}2\cos 5x - x\sin 5\alpha + c.$

2. Ornuna goýmak usuly

Ornuna goýmak usuly (ýa-da integrirlemigiň üýtgeýänleri çalşyrmak usuly) x ululygy $\varphi(t)$ (üznüksiz differensirlenýän funksiýa) çalşyrylýar we alynýar:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Integrirlemekden soň $t=\varphi^{-1}(x)$ çalşyrma bilen öňki üýtgeýän ululyga gaýdyp gelinýär.

Görkezilen formulany ters ugry boýunça peýdalanmak bolar.

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx, \text{ bu ýerde } x=\varphi(t).$$

Integrallary tapyň:

28. $I=\int x\sqrt{x-3}\,dx.$

Çözülişi: $\sqrt{x-3}=t$, orun çalşyrmany ulanalyň: bu ýerden,

$$x-3=t^2,\quad x=t^2+3,\quad dx=2tdt.$$

integrala goýup, alarys:

$$\int (t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right)+c =$$
$$=\frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+(x-3)^{\frac{3}{2}}+c.$$

29. $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

Çözülişi: $1 + e^x = t, \quad x = \ln(t-1), \quad dx = \frac{dx}{1-t}$

integraly goýup alarys:

$$\int \frac{1}{1+t-1} \cdot \frac{dt}{t-1} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt =$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t| + c = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + c.$$

Bellik. Şu integraly başga bir aňsat usuly bilen hem çözmek bolýar: sanawjyny we maýdalawjyny e^{-x} köpeldip alarys:

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln|e^{-x}+1| + c =$$
$$= -\ln\frac{e^x+1}{e^x} + c.$$

30. $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx.$

Jogaby: $\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3} + \frac{3}{2}\sqrt{(2x-5)^3} + \frac{5}{2}\sqrt{2x-5} -$
$- \frac{37}{4\sqrt{2x-5}} + c.$

31. $I = \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x+1)\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x}}.$

Çözülişi: Integrallaryň aşagyndaky aňlatmany özgerdeliň.

$$\int \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{((x+1)^2+1)\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}; \quad x + \frac{1}{x} = t \text{ çalşyrma ulanyp;}$$

ony differensirläp, alarys. $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = dt$.

Bu ýerden $\int \frac{dt}{(t^2+1)\text{arctg}t}$ ýene bir çalşyrmany ulanyp, alarys;

$\text{arctg}t = u$; $\frac{dt}{t^2+1} = du$; $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|\text{arctg}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| + c.$

32. $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx.$

Çözülişi: Çalşyrmany ulanyp alarys: $x = \frac{1}{t}$; $dx = -\frac{dt}{t^2}$.

$-\int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}}}{\left(\frac{1}{t^4}\right)t^2} dt = -\int t\sqrt{a^2t^2 - 1}\, dt$, $\sqrt{a^2 t^t - 1} = z$ onuň üçin

çalşyrmany ulanyp alarys: $2a^2\, tdt = 2z\, dz$

$$-\frac{1}{a^2}\int z^2 dz = -\frac{1}{3a^2} z^3 + c = -\frac{(a^2 - 3^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + c.$$

33. $I = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^{2\cos^2} x}.$

Çözülişi: $\frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\text{tg}^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$ $\frac{a}{b}\text{tg}x = t$, çalşyrmany ulana-

lyň onda, $\frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\text{arctg}t + c.$

34. $I = \int \sqrt[3]{1 + 3\sin x}\, \cos x dx.$

Çözülişi: $1 + 3\sin x = t$; $3\cos x\, dx = dt$;

$$\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + c = \frac{(1 + 3\sin x)^{\frac{4}{3}}}{4} + c.$$

35. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$, *Jogaby*: $-2\sqrt{\cos x} + c.$

36. $I = \int \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}.$

Çözülişi: $\arccos x = t;\quad -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt,$

$$-\int \frac{dt}{t^5} = -\int t^{-5}dt = \frac{1}{4}t^{-4} + c = \frac{1}{4\arcsin^4 x} + c.$$

$\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c.$

37. $I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx.$

Çözülişi: $1+\sin^2 x = t,\quad 2\sin x\cos x = dt,\quad \sin 2x = dt$

$$\int \frac{dr}{t} = \ln|\,t\,| + c = \ln|1+\sin^2 x| + c = \ln(1+\sin^2 x) + c.$$

38. $I = \int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx.$

Çözülişi: $3 + x\ln x = t,\ (1+\ln x)dx = dt,$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|\,t\,| + c = \ln|3 + x\ln x| + c.$$

39. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx.$ *Jogaby*: $0{,}75\sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + c.$

40. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ *Jogaby*: $\ln|\ln x| + c.$

41. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}} + c.$

42. $\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+a^2}dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a} + c.$

44. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Jogaby*: $-2\cos\sqrt{x} + c.$

45. $\int \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln|\ln x| + c.$

46. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx.$

Jogaby: $-\frac{3}{140}(35 - 40x + 14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}} + c.$

47. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ *Jogaby*: $\frac{2}{3}(\ln x - 5)\sqrt{1+\ln x} + c.$

48. $\cos^5 x\sqrt{\sin}\,dx.$

Jogaby: $\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x} + c.$

49. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{15}(8 + 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1-x^2} + c.$

3. Bölekleýin integrirleme

Bölekleýin integrirlemäniň formulasy diýip,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

bu ýerde u we $v - x$ görä differensirlenýän funksiýalar.

50. $I = \int \operatorname{arctg} x dx.$

Çözülişi:

$u = \operatorname{arctg}x;\quad dv = dx;\quad du = \frac{dx}{1+x^2};\quad v = x$

$$\int \operatorname{arctg}x dx = x\operatorname{arctg}x = \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

51. $I = \int \arcsin x dx.$ *Jogaby*: $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2 + c}$.

52. $I = \int x \cos x dx.$

Çözülişi: $u = x$; $dv = \cos x\, dx$; $u = dx$; $v = \sin x$.

$$I = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

53. $I = \int x^3 \ln x dx.$

Çözülişi: $u = \ln x$; $dv = x^3 dx$; $du = \frac{dx}{x}$; $v = \frac{1}{4}x^4$;

$$I = \int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$
$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c.$$

54. $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx.$

Çözülişi: $u = x^2 - 2x + 5$; $dv = e^{-x}dx$;

$$du = (2x - 2)dx; \quad v = -e^{-x};$$

$$I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x - 1)e^{-x} dx.$$

Soňra integraly ýene bölekleýin integrirläliň.

$x - 1 = u$; $du = dx$; $2v = e^{-x}dx$; $I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx=$

$$= 2\int (x - 1)e^{-x} dx = -2e^{-x}(x - 1) + 2\int e^{-x} dx = -2xe^{-x} + c -$$
$$-e^{-x}(x^2 - 2x + 5) = -2xe^{-x} + c = -e^{-x}(x^2 + 5) + c.$$

Bellik. $\int Q(x)e^{ax}$ integrallary hasaplananda, netijede $Q(x)e^{ax}$ funksiýa alynýar, bu ýerde $Q(x)$ polinamyň derejesi $P(x)$ polinamyň derejesine deň. Bu ýagdaý integrallaryň görkezilen görnüşlerine näbelli koeffisiýentler *n* usulyny ulanmak mümkinçiligi berilýär.

Näbelli koeffisiýentler usuly bilen tapyň.

55. $I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx.$

Çözülişi: $I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = (Ax^2 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + c.$

Çep we sag taraplaryny differensirläp, alarys:

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx + D)e^{2x},$$

Deňlemäniň iki tarapyny hem e^{2x} gysgaldyp alarys:

$$3x^3 - 17 = 2Ax^3 + 2Bx^2 + + 2Dx + 3E^2 + 3Ax^2 + 2Bx + D.$$

Bu toždestwonyň çep we sag taraplaryndaky x-iň deň derejesiniň koeffisiýentlerini deňeşdirip alarys:

$$\begin{cases} 3 = 2A \\ 0 = 2B + 3A \\ 0 = 2D + 2B \\ -17 = 2E + D \end{cases} \to \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = -\dfrac{9}{4} \\ D = \dfrac{9}{4} \\ E = -\dfrac{77}{8} \end{cases}$$

diýmek,

$$I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{4}\right)e^{2x} + c.$$

56. Integraly hasaplaň. $I = \int (x^3 + 1)\cos x dx.$

Çözülişi: $u = x^3 + 1$; $du = 3x^2\, dx$; $dv = \cos x\, dx$; $v = \sin x$

$$I = \int (x^3 + 1)\cos x dx = (x^3 + 1)\sin x = \int 3x^2 \sin x dx =$$

$$= (x^3 + 1) - 3I_2;$$

$$I_1 = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2 \cos x + 2I_2;$$

$I_2 = \int x\cos x dx$ integraly hem bölekleýin integrirläp, alarys:

$$u = x; \quad du = dx; \quad \cos x dx = dv; \quad v = \sin x$$

$$I_2 = x\sin x - \int \sin dx = x\sin x + \cos x + c$$

diýmek, $I = (x^2 + 1)\sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c =$

$$= (x^2 + 6x + 1) \sin x + (3x^2 - 6)\cos x + c.$$

Bellik. $\int P(x)\sin ax$, $\int P(x)\cos ax$ görnüşli integrallara näbelli koeffisiýentler usulyny hem ulanmak bolar.

57. $I = \int (x^2 + 3x + 5)\cos 2xdx.$

Çözülişi:

$$\int (x^2 + 3x + 5)\cos 2xdx = (A_0x + A_1x + A_2)\cos 2x +$$

$$+ (B_0x + B_1x + B_2) \sin 2x,$$

bu toždestwonyň iki tarapyny differensirläp, alarys:

$$(x^2 + 3x + 5) \cos 2x = -2(A_0x^2 + A_1x + A_2) \sin 2x + (2A_0x + B_1)\sin 2x +$$
$$+ 2(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos 2x + (2B_0x + B_1) \sin 2x = [2B_0x^2 + (B_1x + 2A_0)$$
$$x + (A_1 + 2B_2)]\cos 2x + [-2A_0 x^2 + (2B_0 - 2A_1)x + (B_1 - 2A_2)] \sin 2x$$

x-iň derejeleriniň hem-de $\cos 2x$ we $\sin 2x$ koeffisiýentlerini deňeşdirip alarys:

$$A_0 = 0; \quad B_0 = \frac{1}{2}; \quad B_1 = \frac{3}{2}; \quad A_2 = \frac{3}{4}; \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

Şeýlelikde,

$$\int (x^2 + 3x + 5)\cos 2xdx = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{4}{9}\right)\sin 2x + c.$$

Integrallary hasaplaň.

58. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx.$

Jogaby: $x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c.$

59. $\int \sqrt[3]{x}(\ln x)^2 dx.$ *Jogaby*: $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right] + c.$

60. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$. *Jogaby*: $2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c$.

61. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$. *Jogaby*: $-0,5\left(\frac{x}{\sin^2 x} + ctgx\right) + c$.

62. $\int 3^x \cos x dx$. *Jogaby*: $\frac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1+(\ln 3)^2} + c$.

63. $\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x} dx$.

Jogaby: $\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}\right)e^{3x} + c$.

64. $\int (1+x^2)^2 \cos x dx$.

Jogaby: $(x^4 - 10x^2 + 21)\sin x + x(4x^2 - 20)\cos x + c$.

65. $\int (x^2 + 2x - 1)\sin 3x dx$.

Jogaby: $\frac{9x^2 + 18x - 11}{27}\cos 3x + \frac{2x+2}{9}\sin 3x + c$.

66. $\int (x^2 - 2x + 3)\ln x dx$.

Jogaby: $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\ln x = \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + c$.

67. $\int x^3 \mathrm{arctg} x dx$. *Jogaby*: $\frac{x^4 - 1}{4}\mathrm{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c$.

68. $\int x^2 \arccos x dx$. *Jogaby*: $\frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + c$.

4. Rasional funksiýalary integrirlemek

Eger $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dogry rasional drobuň $Q(x)$ maýdalawjysy aşakdaky görnüşde ýazylsa,

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l \ldots (x^2 + \delta x + \beta)^r (x^2 + jx + i)^s,$$

bu aňlatma girýän üç agzalaryň hakyky kökleri ýok,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{B_t}{(x-a)^t} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+\delta x+\beta} +$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+\delta x+\beta)^2} + ... + \frac{M_4x+N_r}{(x^2+\delta x+\beta)^r} + \frac{R_1x+L_1}{x^2+jx+i} +$$

$$+\frac{R_2x+L_2}{(x^2+jx+i)^2} + ... + \frac{R_Sx+L_S}{(X^2+jx+i)^S} + ...,$$

bu ýerde A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., M_1, M_2, N_1, N_2, ..., R_1, L_1, R_2, L_2, kesgitlenýän käbir hakyky hemişelikler. Olary kesgitlemek üçin soňky toždestwolaryň iki tarapyny hem bitin görnüşine geterilýär we x – näbelliniň deň derejelerindäki koeffisiýentleri deňeşdirilýär, bu bolsa koeffisiýentlere görä çyzykly sistema getirýär. (bu usula koeffisiýentleri deňeşdirme usuly diýilýär.) x-iň bahasyny saýlap goýup koeffisiýentleri kesgitlemek üçin deňlemeler sistemasyny almak bolýar (bu usula hususy bahalar usuly diýilýär). Käbir endiklerde iki usulyň kombinasiýasy koeffisiýentleri tapmaklygy aňsatlaşdyrýar.

Eger, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nädogry drob bolsa, onda ilki bilen onuň bitin bölegini aýry ýazmaly.

69. $I = \int \dfrac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx.$

Çözülişi:

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4} + \frac{D}{x-1},$$

$$15x^2-4x-81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + D(x-3)(x+4),$$

$$15x^2-4x-81 = A(x^2+3x-4) + B(x^2-4x+3) + D(x^2+x-12),$$

$$\begin{cases} A+D+B=15 \\ 3A-4B+D=-4 \\ -4A+3B-12D=-81 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=5 \\ D=7. \end{cases}$$

Diýmek,

$$I = 3\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{x+4} + 7\int \frac{dx}{x-1} = 3\ln|x-3| +$$
$$+ 5\ln|x+4| + 7\ln|x-1| + c.$$

Bellik. Ýokardaky mysalda A,B,D näbelli hemişelikleri kesgitlemek üçin hususy bahalar usulyny ulanalyň. Ýokardaky toždestwoda $x=3$ alyp $A=3$ alarys, $x=-4$, $B=5$, $x=1$ alyp $D=7$ alarys.

70. $I = \int \frac{x^4 dx}{(2+x)(x^2-1)}$.

Jogaby: $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^{2x^2x^2}}\right|$.

71. $I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$.

Çözülişi: Integralyň aşagyndaky aňlatmanyň sanawjysynyň derejesi maýdalawjynyň derejesinden uly. Şonuň üçin bu drobuň nädogry bitin bölegini çykaralyň:

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Diýmek:

$$I = \int (x+1)dx - \int \frac{(x+2)}{x(x-2)(x+1)}dx,$$

$$\frac{(x+2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1},$$

$$x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-2).$$

Bu toždestwolaryň iki tarapyny $x=0$, $x_1=2$, $x_2=-1$ (maýdalawjylaryň kökleri) goýup, alarys: $A=-1$; $B = \frac{2}{3}$; $D = \frac{1}{3}$.

Şeýlelikde

$$I = \int (x+1)dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = x^2 + x +$$
$$+ \ln|x| - \frac{2}{3}\ln|x-2| = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

72. $I = \int \frac{2x^3 - 2x + 3}{x^3 - 2x + x} dx.$

Çözülişi: Bu ýerde integralyň aşagynda dogry rasional drob dur. Onuň maýdalawjysynyň hakyky we kratny kökleri bar:

$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2$ onda,

$$\frac{2x^3 - 3x + 3}{x^3 - 2x + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)},$$

$$2x^3 - 3x + 3 = A((x-1)^2 + Bx + Dx(x-1) = (A+D)x^2 +$$
$$+(-2A - D + B)x + A,$$

$$\begin{cases} A + D = 2 \\ -2A - D + B = -3 \\ A = 3 \end{cases} \to \begin{cases} A = 3 \\ D = -1 \\ B = 2. \end{cases}$$

Şeýlelikde:

$$I = \int (x+1)dx - \int \frac{(x+2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1},$$

$$x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Dx(x-2).$$

Bu toždestwonyň iki tarapyna $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ (maýdalawjynyň köklerini) goýup, alarys:

$$A = -1, \quad B = \frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{3}.$$

Şeýlelikde

$$I = \int (x+1)dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= x^2 + x + \ln|x| - \frac{2}{3}|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

73. $I = \int \dfrac{2x^3 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 = x}.$

Çözülişi: Bu ýerde integralyň aşagynda dogry rasional drob dur. Onuň maýdalawjysynyň hakyky we kratny kökleri bar:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Onda

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}, \qquad (*)$$

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx + Dx(x-1) = (A+D)x^2 +$$
$$+(-2A - D + B)x + A,$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + D = 2 \\ 2A - D + B = -3 \\ A = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 3 \\ D = -1 \\ B = 2 \end{array} \right.$$

Şeýlelikde:

$$I = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} = 3\ln|x| - \frac{2}{x-1} -$$
$$-\ln|x-1| + c.$$

Bellik. Eger $(*)$ toždestwoda $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ (maýdalawjynyň kökleri) we x_3 – islendik baha alsak, onda koeffisiýentleri kesgitlemek käbir aňsatlyk döredýär. $x = 0$ bolanda $3 = A$; $x = 1$ bolanda $2 = B;$ $x = 2$ bolanda $5 = A + 2B + 2D$; $5 = 3 + 4 + 2D$; $D = -1$.

74. $I = \int \dfrac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}dx.$

Jogaby: $2\ln|x-1| - \ln|x| - \dfrac{x}{(x-1)^2} + c.$

75. $I = \int \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

Jogaby: $\dfrac{1}{3}\text{arctg}x - \dfrac{1}{6}\text{arctg}\dfrac{x}{2} + c.$

76. $I = \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$.

Jogaby: $\frac{2}{3\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x+2) + c$.

77. $I = \int \frac{x^4+4x+11x^2+12x+8}{(x^2+2x=3)^2(x+1)}$.

Jogaby: $\ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{4}} + c$.

78. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Jogaby: $5x + \ln x^2 (x+2)^4 |x-2|^3 + c$.

79. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Jogaby: $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + c$.

80. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

Jogaby: $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x -$

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c.$$

81. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

Jogaby: $\frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2\mathrm{arctg}x + \ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}} + c$.

5. Käbir irrasional aňlatmalary integrirlemek

Käbir irrasional aňlatmalaryň integrirlemegi rasional funksiýalaryň integrirlemegine getirilýär.

1. Eger integralyň aşagynda $R(x, x^{p_1/q_1}, ..., ^{p_k/q_k})$ funksiýa duran bolsa, onda $x = t^m$, $m - q_1, q_2, \ldots, q_k$ sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy ornuna goýmagy ulanyp rasional funksiýalary integrirlemegine getirilýär.

2. Eger integralyň aşagynda

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p1/q1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{pk/qk}\right).$$

Funksiýa bolsa, onda $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ ornuna goýmak bilen rasional funksiýa getirilýär, bu ýerde m-iň manysy ýokardaky ýalydyr.

82. $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx.$

Çözülişi: $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$

$$I = 6\int \frac{(t^6 + t^4 + t)' t^5 dt}{t^6(1+t^2)} = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t(1+t^2)} = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2} =$$
$$= 6\int \frac{t^3(t^2+1)+1}{t^2+1} = 6\int \left(t^3 + \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6 \cdot \frac{t^4}{4} + \text{arctg}t + c =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot t^4 + \text{arctg}t + c = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x} + c.$$

83. $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx.$

Jogaby: $4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 24\sqrt[12]{x} + 24\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + c.$

84. $I = \int \frac{(2x-3)^{1/2} dx}{(2x-3)^{1/3} + 1}.$

Çözülişi: $(2x-3) = t^6$, $2dx = 6t^5\,dt$, $dx = 3t^5\,dt$

$$I = \int \frac{t^3 \cdot 3t^5 dt}{t^2+1} = 3\int \frac{t^8 dt}{t^2 t} = 3\int \left[(t^6 - t^2 - 1) + \frac{1}{3}(2x-3)^{1/2} - \right.$$
$$\left. -(2x-3)^{1/6} + + \text{arctg}(2x-3)^{1/6}\right] + c.$$

85. $I = \int \frac{dx}{x\left(2 + \sqrt[3]{(x-1)/x}\right)}.$

Jogaby: $-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\sqrt[3]{(t+2)^4}}{\sqrt[3]{t-1} \cdot \sqrt{t^2+t+1}}\right| + c,$

bu ýerde $t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$.

86. $I = \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx.$

Çözülişi: $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t;\quad \frac{2-x}{2+x} = t^3;$

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3};\qquad 2 - x = \frac{4t^3}{1+t^5};\qquad dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt.$$

Onda

$$I = -\int \frac{2\left(1+t^3\right)^2 \cdot t \cdot 12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}dt = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}\frac{3}{4t^2} + c,$$

$$I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + c.$$

87. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

Çözülişi:

$$\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5} = \left(x-1\right)\left(x+2\right)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}};$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t;\quad \frac{x+2}{x-1} = t^4;\quad x = \frac{t^4+2}{t^4-1};\quad x - 1 = \frac{3}{t^4-1};$$

$$x + 2 = \frac{3t^4}{t^4-1};\quad dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt$$

$$I=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)2t^3dt}{3\cdot 3t^4\cdot t\cdot(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+c=$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+c.$$

88. $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. *Jogaby*: $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}+c.$

89. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. *Jogaby*: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+c.$

90. $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$

Jogaby: $\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+c.$

6. Eýleriň ornuna goýmalary

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ görnüşdäki integrallar aşakdaky Eýleriň üç ornuna goýmalary bilen hasaplanýar:

1) Eger $a>0$ bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$;

2) Eger $c>0$ bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{c}$;

3) Eger $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ýa-da eger ax^2+bx+c üç agza hakyky bolsa, onda $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-a)t$.

91. $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Çözülişi: Bu ýerde $a=1>0$, onda

$$\sqrt{x^2+3x+2}=t-x.$$

ornuna goýmany ulanmaly. Bu deňligiň iki tarapyny kwadrata göterip, alarys:

$$x^2+2x+2=t^2-2tx+x^2;$$

$$2x+2tx=t^2-2;$$

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(1 + t)};$$

$$dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1 + t)^2};$$

Onda

$$I = \int \frac{2(1 + t)(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 + 4t + 4)(1 + t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)dt}{(2 + t)^2(1 + t)}.$$

Alnan dogry rasional droby ýönekeý droblara dargadalyň

$$\frac{(t^2 + 2t + 2)}{(2 + t)^2(1 + t)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 2} + \frac{D}{(2 + t)^2},$$

$$t^2 + 2t + 2 = A(2 + t)^2 + B(2 + t)(1 + t) + C(t + 1)$$

$t = -2$ bolanda $D = -2$

$t = -1$ bolanda $A = 1$

$t = 0$ bolanda $2 = 4A + 2B + D$; $2 = 4 + 2B - 2$; $B = 0.$

Diýmek,

$$I = \int \frac{dt}{t + 1} - 2\int \frac{dt}{(2 + t)^2} = \ln|t + 1| + \frac{2}{t + 2} + c =$$

$$= \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + c.$$

92. $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$

Çözülişi: $c = 1 > 0$, onda Eýleriň 2-nji ornuna goýmasyny ulanalyň:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1;$$

$$(2t - 1)x = (t^2 - 1)x^2;$$

$$x = \frac{2t - 1}{(t^2 - 1)},$$

$$dx = -2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}dt,$$

$$I = \int (-2)\frac{t^2 - t + 1}{t(t-1)(t+1)^2}dt,$$

$$(-2)\frac{t^2 - t + 1}{t(t-1)(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(t-1)} + \frac{D}{(t+1)} + \frac{E}{t+1}.$$

Näbelli koeffisiýentler usuly bilen taparys:

$$A = 2; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad D = -3; \quad E = \frac{3}{2}.$$

Onda

$$I = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{3}{t+1} - \frac{3}{2}\ln|t+1| + c.$$

bu ýerde $\qquad t = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}.$

93. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1 + x - x^2}}.$

Jogaby: $-2\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{1 + x - x^2} + 1}{x}\right) + c.$

94. $I = \displaystyle\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x - 10 - x^2})^3}.$

Çözülişi: Berlen integralda $a < 0$ we $c < 0$. Bu ýagdaýda Eýleriň 1-nji ýa-da 2-nji usulyny ulanmak bolmaýar. $7x - 10 - x^2$ kwadrat üç agzanyň $\alpha = 2$, $\beta = 5$ hakyky kökleri bar. Onda Eýleriň 3-nji ornuna goýmasyny ulanalyň:

$$\sqrt{7x - 10 - x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t,$$

bu ýerde

$$5 - x = (x - 2)t^2,$$

$$x = \frac{5 + 2t^{t}}{1 + t^2},$$

$$dx = -\frac{6tdt}{(1 + t^2)^2},$$

$$(x - 2)t = \left(\frac{5 + 2t^2}{1 + t^2} - 2\right)t = \frac{3t}{1 + t^2}.$$

Diýmek,

$$I = \frac{6}{27}\int \frac{5 + 2t^2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\int \left(\frac{5}{t^2} + 2\right)dt = -\frac{2}{9}\left(\frac{5}{t} + 2t\right) + c.$$

bu ýerde $t = \dfrac{\sqrt{7x - 10 - x^2}}{(x - 2)}$.

95. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$.

Jogaby: $2\ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x\right| - \dfrac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} -$
$-\dfrac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1\right| + c$

96. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} - x}$.

Jogaby: $\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} + c$.

97. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$. *Jogaby*: $\dfrac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}} + c$.

98. $\displaystyle\int \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{15}dx}{\sqrt{1 + x^2}}$. *Jogaby*: $\dfrac{(x + \sqrt{1 + x^2})^{15}}{15} + c$.

6. Binominal differensialyň integrirlenmegi

$\int x^m(a + bx^n)^p dx$; m,n,p – rasional sanlary, aşakdaky üç ýagdaýda hasaplamak bolýar:

1) p – bitin. Eger $p > 0$ bolsa, onda integralyň aşagyndaky aňlatma Nýutonyň binomy formulasy boýunça hasaplanýar, eger-de $p < 0$

bolsa, onda $x = t^k$ diýip (k – m we n sanlaryň umumy maýdalawjysy) integraly hasaplaýarys.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – bitin. Onda $a + bx^n = t^\alpha$, bu ýerde α – p drobuň maýdalawjysy.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – bitin. $a + bx^n = t^\alpha x^n$, bu ýerde α – p drobuň maýdalawjysy.

99. $I = \int \sqrt[2]{x}(2+\sqrt{x})^2 dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $p = 2$ – bitin san. 1-nji ýagdaýy ulanalyň:

$$I = \int x^{\frac{1}{3}}\left(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4\right)dx = \int\left(x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} +$$
$$+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}} + 3x^{\frac{4}{3}} + c.$$

100. $I = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}dx.$ *Jogaby*: $3\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x} + c.$

101. $I = \int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Çözülişi: $I = \int x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx.$

bu ýerde $m = -\dfrac{2}{3},\ n = \dfrac{1}{3},\ p = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1$ – bitin san.

Ikinji ýagdaýa gabat gelýär. Onda $1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2;\ \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = 2tdt.$

Diýmek, $I = 6\int t^2 dt = 2t^3 + c = 2(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + c.$

102. $I = \int x^{\frac{1}{3}}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}dx.$

Jogaby: $\dfrac{2}{3}(x+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{9}{4}} - \dfrac{12}{5}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}} + c.$

103. $I = \int x^5(1+x^2)^{\frac{2}{3}}dx.$

Jogaby: $\dfrac{3}{22}(1+x^2)^{\frac{11}{3}} - \dfrac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{8}{3}} + \dfrac{3}{10}(1+x^2)^{\frac{5}{3}} + c.$

104. $I = \int x^{-11}(1+x^4)^{\frac{-1}{2}}dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $p = -\frac{1}{2}$ – drob san,

$\frac{m+1}{n} = \frac{-11+1}{4} = \ = -\frac{5}{2}$ – drob san,

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3 \text{ – bitin san.}$$

Goý, $1 + x^4 = x^4t^2$ bu ýerden

$$x = \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}};$$

$$dx = -\frac{tdt}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}.$$

Bu aňlatmalary integrala goýup, alarys:

$$I = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{tdt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2 dt =$$

$$= -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + c = -\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5} + \frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3} -$$

$$-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4} + c.$$

105. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

Jogaby: $\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^5} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + c.$

106. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}.$ *Jogaby*: $3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + c.$

107. $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$ *Jogaby*: $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(3x^2-2)}{15} + c.$

108. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}.$ *Jogaby*: $\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{2x^2-1}{3x^3} + c.$

109. $\sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$ *Jogaby*: $\int \frac{21}{32}\sqrt[7]{(1+\sqrt[3]{x^4})^8} + c.$

110. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

Jogaby: $\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^9} + c.$

8. Trigonometrik we giperbolik funksiýalaryň integrirlenmesi

I. $I = \int \sin x^m \cos x^n dx$ görnüşdäki integrallar

$I = \int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$ binomial diferensialdan integral almaklyga getirilýär. Şonuň üçin berlen integraly elementar funksiýalarda üç ýagdaýda hasaplap bolýar:

1) n – täk $\left(\frac{n-1}{2} - bitin\right)$,

2) m – täk $\left(\frac{m+1}{2} - bitin\right)$,

3) $m+n$ – jübüt $\left(\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} - bitin\right)$.

Eger n – täk bolsa, onda $\sin x = t$ ornuna goýmak ulanylýar.

Eger m – täk bolsa, onda $\cos x = t$. Eger $m+n$ – jübüt san bolsa, onda $\mathrm{tg} x = t$ (ýa-da $\mathrm{ctg} x = t$).

Hususy ýagdaýda, şular ýaly ornuna goýma $\int \mathrm{tg}^n x dx$ (ýa-da $\int \mathrm{ctg}^n x dx$), (n – bitin položitel san) integrallar üçin oňaýly bolýar. Soňky ornuna goýma m we n – položitel san bolanda oňaýly däldir. Eger m we n – otrisatel däl san bolsa, onda

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

trigonometrik formulalar arkaly derejesini peseldip bolýar.

111. $I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $m = 3$ – täk san. Goý, $\cos x = t$ bolsun. Onda

$$I = -\int (1-t^2) t^{-\frac{2}{3}} dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}} + c = 3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{4}\cos^2 x - 1\right) + c.$$

112. $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + c.$

113. $I = \int \sin^{4x} \cos^6 x dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $m = 4$ we $n = 6$ iki san položitel. Derejäni peseltmek formulalary peýdalanýarys:

$$I = \frac{1}{16}\int (2\sin x \cos x)^4 \cos^2 x dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x(1 + \cos 2x)dx =$$
$$= I_1 + I_2.$$

$\frac{1}{32}\int \sin^4 2x \cos 2x dx = I_2$, integral $\sin 2x = t$ ornuna goýma bilen hasaplanýar:

$$\cos 2x dx = \frac{1}{2} t dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{64}\int t^4 dt = \frac{t^5}{320} + c = \frac{1}{320}\sin^5 2x + c.$$

$I_1 = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x$, derejesini peseltmek formulany ulanýarys:

$$I_1 = \frac{1}{128}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{128}\left(x - \frac{1}{2}\sin 4x\right) +$$
$$+ \frac{1}{256}\int (1 + \cos 8x)dx = \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + c.$$

Şeýlelikde,

$$I = \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + \frac{1}{320}\sin^5 2x + c.$$

114. $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

Çözülişi: Bu ýerde m we n – bitin san, emma olaryň biri otrisatel. Şonuň üçin goý,

$$\mathrm{tg} x = t;$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2;$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

115. $I = \dfrac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $\mathrm{ctg}x = t$ almak bolýar. Emma integraly dagatma bilen hasaplamak aňsat:

$$I = \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x\right)dx = -\,\mathrm{ctg}x - 2x + \frac{1}{2}$$
$$\int(1-\cos 2x)dx = -\left(\mathrm{ctg}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{4}\right) + c.$$

116. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ *Jogaby*: $\mathrm{tg}x + \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + c.$

117. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}}.$

Çözülişi: Bu ýerde iki görkeziji $-\dfrac{11}{3}$ we $-\dfrac{1}{3}$; otrisatel sanlar we olaryň jemi $-\dfrac{11}{3} - \dfrac{1}{3} = -4$ – bitin sandyr. Onda goý, $\mathrm{tg}x = t$; $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt.$

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{tg^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}} = \int (t^{\frac{11}{3}} + t^{\frac{5}{3}})dt =$$
$$= -\frac{3}{8}t^{-\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}t^{-\frac{2}{3}} + c.$$

118. a) $\displaystyle\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c.$

b) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + c.$

119. $I = \displaystyle\int \mathrm{tg}^7 x dx.$

Çözülişi: $\mathrm{tg}x = t$; $x = \mathrm{arctg}t$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$;

$$I = \int t^7 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int\left(t^5 - t^4 - t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} -$$
$$-\frac{1}{2}\ln|1+t^2| + c = \frac{1}{6}\mathrm{tg}^6 x - \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln|\cos x| + c.$$

120. $\int \text{ctg}^6 x dx.$ *Jogaby*: $-\text{ctg}x + \frac{1}{3}\text{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\text{ctg}^5 x - x + c.$

121. $\int \text{tg}^3 x dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}\text{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln(1 + \text{tg}^2 x) + c$

II. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (R – sin$x$ we cos$x$ görä rasional funksiýa) görnüşdäki integrallar rasional funksiýadan integrallara özgerdilýär, ornuna goýma bilen

$$\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t, \qquad t - \pi < x < \pi.$$

Bu ornuna goýma uniwersal ornuna goýma diýilýär.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2 \text{ atctg}t; \ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Bu ornuna goýma, köplenç, uly çylşyrymly hasaplamalara getirýär. Aşakdaky bu integrallary ýönekeý ornuna goýma bilen hasaplamak bolýandygyny görkezilýär:

a) Eger $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ deňlik ýerine ýetse ýa-da $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ deňlik ýerine ýetse, onda birinji ýagdaýda $t = \cos x$, ikinji ýagdaýda bolsa $t = \sin x$ ornuna goýmany ulanmak peýdaly bolar.

b) Eger $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ deňlik ýerine ýetse, onda tg$x = t$ ýa-da ctg$x = t$ ornuna goýmany ulanmak peýdaly bolar. Soňky ýagdaý $\int R(\text{tg}x)dx$ integraly hasaplamalarda ulanmak bolýar.

122. $I = \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}.$

Çözülişi: Goý, $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t,$ onda

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2dt}{1+t^2}\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4dt}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2 - 4t + 3)}.$$

Ýönekeý droblara dargadyp, alarys:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{D}{t-1},$$

$$1+t^2=A(t-3)(t-1)+Bt(t-1)+Dt(t-3),$$

$t=0$ bolanda $1=3A$; $A=\frac{1}{3}$;

$t=3$ bolanda $10=6B$; $B=\frac{5}{3}$;

$t=1$ bolanda $2=-2D$; $D=-1$.

Diýmek,

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-$$
$$-\ln|t-1|+c=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-3\right)\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+c.$$

123. $I=\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.

Jogaby: $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{15}}\right)+c$.

124. $I=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2x-1)}$.

Çözülişi: Eger $\frac{1}{\sin x(2\cos^2x-1)}$ aňlatmada $\sin x$-iň ornuna, $-\sin x$ goýsak, onda aňlatma öz alamatyny garşy alamata üýtgedýär. Diýmek, $t=\cos x$ ornuna goýmany ulanmaly. $dt=-\sin x\,dx$. Onda

$$I=-\int\frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)}.$$

$$\frac{1}{(1-t^2)(2t^2-1)}=\frac{(2-2t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(2t^2-1)}=\frac{2}{1-2t^2}-\frac{1}{1-t^2}.$$

Onda

$$I = 2\int \frac{dt}{1-2t^2} - \int \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos}x\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

125. $I = \int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x + \cos x}dx.$

Çözülişi: sin$x$ we cos$x$ funksiýalaryň alamatyny üýtgetseň, integralyň aşagyndaky aňlatma alamatyny üýtgetmeýär. Onda tg$x = t$; $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$

Diýmek, $I = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x\cos^2 x}{\operatorname{tg}x + 1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{t^2\,dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$

Ýönekeý droblara dargadyp, alarys:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+D}{t^2+1} + \frac{Et+F}{(t^2+1)^2},$$

$$t^2 = A(t^2+1)^2 + (Bt+D)(t+1)(t^2+1) + (Et+F)(t+1),$$

$$S = \frac{1}{4};\; B = -\frac{1}{4};\; D = \frac{1}{4};\; E = \frac{1}{2};\; F = -\frac{1}{2}.$$

Diýmek,

$$I = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right| -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2} + c = \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + c.$$

126. $I = \int \frac{2\operatorname{tg}x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx.$

Çözülişi: $I = \int \frac{\frac{2\operatorname{tg}x+3}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x}}dx = \int \frac{(2\operatorname{tg}x+3)\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2}.$

$$\mathrm{tg}x = t; \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt;$$

$$I = \int \frac{(2t+3)dt}{2+t^2} = \ln(2+t^2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + c = \ln(\mathrm{tg}^2 + 2) +$$
$$+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}} + c.$$

127. $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

Çözülişi: Bu integraly uniwersal ornuna goýma $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ bilen çözüp bolardy. Emma integralyň aşagyndaky aňlatmany özgerdip aňsat çözmek bolar:

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx = \int \frac{\sin(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}dx =$$
$$= \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx -$$
$$-\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{1}{\cos x} - \mathrm{tg}x + x + c.$$

128. $I = \int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}dx.$

Çözülişi: Bu ýerde $\mathrm{tg}x = t$, ulanyp bolýar, emma integralyň aşagyndaky aňlatmany özgertseň, integral aňsat hasaplanýar. Sanawja trigonometrik birligiň kwadratyny girizip, alarys:

$$I = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x}dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \mathrm{tg}^2 \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\mathrm{tg}x -$$
$$-\mathrm{ctg}x + c = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \mathrm{tg}^2 \frac{dx}{\cos^2 x} +$$
$$+2\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + c.$$

III. Giperbolik funksiýalardan integrallar trigonometrik funksiýalardan integral alnyşy ýalydyr. Olar ýaly hasaplamak üçin aşakdaky formulalary ulanylýar:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1; \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x - 1);$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x + 1); \quad \mathrm{sh}x\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\mathrm{sh}2x.$$

Eger $\mathrm{th}\frac{x}{2} = t$ bolsa, onda $\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}$; $\mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$;

$$x = 2\mathrm{arth}t - \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), (-1 < t < 1), \ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

129. $I = \int \mathrm{ch}^2 x dx.$

Çözülişi: $I = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x + 1)dx = \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{2}x + c.$

130. $I = \int \mathrm{ch}^3 x dx$

Çözülişi: ch$x$ täk derejede, onda sh$x = t$; ch$xdx = dt$. Alarys:

$$I = \int \mathrm{ch}^2 x \mathrm{ch} x dx = \int (1 + t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + c = \mathrm{sh}x + \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + c.$$

131. a) $\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x dx.$ *Jogaby*: $-\frac{x}{8} + \frac{\mathrm{sh}4x}{32} + c.$

b) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}x + 2\mathrm{ch}x}.$ *Jogaby*: $\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{th}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c\right).$

9. Trigonometrik we giperbolik funksiýalaryň ornuna goýma bilen irrasional funksiýalaryň integrirlenmegi

x we $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ – rasional bagly funksiýalaryň integrirlenmegini aşakdaky integrallaryň görnüşlerine getirip bolýar:

I. $\int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2})dt;$

II. $\int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2})dt;$

III. $\int R(t, \sqrt{q^2 - p^2t^2})dt;$

Bu ýerde $t = x + \frac{b}{2a}$; $ax + bx + c = \pm p^2t^2 \pm q^2$ (doly kwadraty çykarmak)

I – III görnüşdäki integrallar adaty ýa-da giperbolik sinusa, kosinusa görä rasional aňlatmalardan integrallaryň hasaplamagyny getirip bolýar:

I. $t = \frac{q}{p}\text{tg}z$ ýa-da $t = \frac{q}{p}\text{sh}z.$

II. $t = \frac{q}{p}\sec z$ ýa-da $t = \frac{q}{p}\text{ch}z.$

III. $t = \sin z$ ýa-da $t = \frac{q}{p}\text{th}z.$

132. $I = \int \frac{dx}{(5 + 2x + x^2)^2}.$

Çözülişi: $5 + 2x + x^2 = 4 + (x + 1)^2.$

Goý, $x + 1 = t$ bolsun. Onda

$$I = \int \frac{dx}{(5 + 2x + x^2)^3} = \int \frac{dx}{\sqrt{(4 + t^2)^3}}.$$

I görnüşli integral alyndy. Aşakdaky ornuna goýmany ulanalyň:

$t = 2\text{tg}z;$ $dt = \frac{dz}{\cos^2 z};$ $\sqrt{4 + t^2} = 2\sqrt{1 + \text{tg}^2 z} = \frac{2}{\cos x}$. Alarys:

$$I = \frac{1}{4}\int \cos z dz = \frac{1}{4}\sin z + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{tg}z}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 z}} + c =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{4}}} + c = \frac{x + 1}{4\sqrt{5 + 2x + x^2}} + c.$$

133. $I = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + x^2}}.$

Çözülişi: $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$

Goý, $x+1=t$, onda $I=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$

ýene-de I görnüşli integral alyndy. $t=\text{sh}z$ ornuna goýmany ulanalyň:

$$dt=\text{ch}zdz;\ \sqrt{t^2+1}=\sqrt{1+\text{sh}^2z}=\text{ch}z.$$

Diýmek,

$$I=\int\frac{\text{ch}zdz}{\text{sh}^2z\,\text{ch}z}=\int\frac{dz}{\text{sh}^2z}=-\text{cth}z+c=-\frac{\sqrt{1+\text{sh}^2z}}{\text{sh}z}+c=$$
$$=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+c=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c.$$

134. $I=\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx.$

Jogaby: $-\frac{1}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{8}x(2x^2-\sqrt{x^2-1})+c.$

135. $I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$

Jogaby: $\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+c.$

136. $I=\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$

Çözülişi: $x=\text{ch}t$; $dx=\text{sh}tdt$ ornuna goýmany ulanalyň. Diýmek,

$$I=\int\sqrt{(\text{ch}^2t-1)^3}\,\text{sh}tdt=\int\text{sh}^4tdt=\int\left(\frac{\text{ch}2t-1}{2}\right)^2dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int\text{ch}^2 2tdt-\frac{1}{2}\int\text{ch}2tdt+\frac{1}{4}t+c=\frac{1}{8}\int(\text{ch}4t+1)dt-$$
$$-\frac{1}{4}\text{sh}2t+\frac{1}{4}t+c=\frac{1}{32}\text{sh}4t-\frac{1}{4}\text{sh}2t+\frac{3}{8}t+c.$$

x üýtgeýän ululyga gaýdyp geleliň:

$$t=\text{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1});$$
$$\text{sh}2t=2\text{sh}t\text{ch}t=2x\sqrt{x^2-1}\,(2x^3-1);$$
$$\text{sh}4t=2\text{sh}2t\text{ch}2t=4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1);$$

Diýmek, $I = \frac{1}{8}x(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8}\ln(x +$
$+\sqrt{x^2 - 1}) + c.$

137. $I = \int \frac{dx}{(1 = \sqrt{x})\sqrt{x - x^2}}.$

Çözülişi: $x = \sin^2 t$; $dx = 2\sin t \cos t\, dt$ ornuna goýmany ulanyp alarys:

$$I = \int \frac{2\sin t \cos t dt}{(1 + \sin t)\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2dt}{1 + \sin t} = 2\int \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t}dt =$$
$$-2\mathrm{tg}t - \frac{2}{\cos t} + c = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x}} + c = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x - 1}} + c.$$

§ 2. Kesgitli integral

1. Kesgitli integral barada düşünje

Goý, $Y = f(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde kesgitlenen bolsun

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

bu ýerde $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $\Delta x_i = \Delta x_{i+1} - \Delta x_i$;

$$\xi_i[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,1\ ,\dots,n - 1$$

aňlatma integral jem diýilýär.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i \left(S_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i x_i\right),$$

aňlatma ýokarky (aşaky) jem diýilýär, bu ýerde
$M_i = \sup f(x)$ $[m_i = \inf f(x)] \not\forall x \in [x_i, x_{i+1})]\max|\Delta x_i| \to 0$ bolanda integral jemleriň predeline

$$\lim \sum_{I=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

$f(x)$ funksiýadan kesgitli integral diýilýär. Eger bu predel bar bolsa, onda funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýän diýilýär. Her bir üznüksiz funksiýa integrirlenýändir.

138. $[0,\pi]$ kesimi deň 3 we 6 bölege bölünende $\int_0^n \sin x dx$ integral üçin ýokarky we aşaky integral jemleri tapmaly.

Çözülişi: $[0,\pi]$ kesimi

$$x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_3 = \pi$$

nokatlar bilen deň 3 bölege bölýäris. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ kesimde sin$x$ funksiýa monoton artýar, şonuň üçin bu kesim üçin $m_0 = \sin\ 0 = 0$, $M_0 = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ kesimde funksiýanyň iň kiçi bahasy $m_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ we iň uly bahasy $M_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ kesimde sin$x$ funksiýa monoton kemelýär, onda:

$$m_2 = \sin\pi = 0, \quad m_2 = \sin\pi = 0, M_2 = \sin\left(\frac{2\pi}{3};\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\Delta x_k = \frac{\pi}{3}$, $k = 1,2,3$ bolany üçin

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2} m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0,907,$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2} m_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 2,86.$$

Eger kesim deň 6 bölege bölünýän bolsa , onda

$$x_0 = 0, \ x_1 = \frac{\pi}{6}, \ x_2 = \frac{\pi}{3}, \ x_3 = \frac{\pi}{2}, \ x_4 = \frac{2\pi}{3}, \ x_5 = \frac{5\pi}{6}, \ x_6 = \pi$$

Diýmek,

$$m_0 = 0, \qquad M_0 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$m_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad M_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$m_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad M_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$m_3 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad M_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$m_4 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad M_4 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$m_5 = \sin\pi = 0, \qquad M_5 = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Onda:

$$S_6 = \frac{\pi}{6}(m_0 + m_1 + ... + m_5) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1,43,$$

$$S_6 = \frac{\pi}{6}(M_0 + N_1 + ... + M_6) = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2,48.$$

$$S_3 \le S_6 \le \int_0^\pi \sin x dx \le S_6 \le S_3$$

139. Deňsizlikler ýerine ýetmeli (bu integralyň takyk bahasy 2-ä deň).

$$\int_0^\pi \sin x dx \sum_{i=0}^{n-1} \sin\xi_k | < 0,001$$

gatnaşykdan $\Delta x_i < \delta$ deňsizlikden ýerine ýeter ýaly $\delta > 0$ näçä deň bolmaly.

Çözülişi: $s_n < \ln < S_n$ ýerine ýetýär. Onda berlen deňsizlik ýerine ýeter ýaly

$$0 < S_n - s_n < 0,001$$

bolmaly

$$S_n - s_n = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i < \delta\sum_{i=0}^{b-1}(M_1 - m_i),$$

bu ýerde M_i we m_i – sin$x$ funksiýanyň $[xi, x_{i+1}](i = 0,1,..., n-1)$ kesimlerde iň uly we iň kiçi bahalary.

Goý, bölme nokatlaryň biri bolup $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alnan bolsun, sin$x$ funksiýanyň $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ we $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ kesimlerde monoton bolany üçin, alarys:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(m_i - m_i) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2.$$

Diýmek, eger $2\delta < 0{,}001$ ýa-da $\delta < 0{,}0005$ bolsa meseläniň şertindäki deňsizlik kanagatlanýar.

140. Kesgitli integralyň kesgitlemesini ulanyp, $\int_0^1 x^m\,dx$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi: Kesgitlemä görä

$$\int_0^1 xdx = \sum_{i-0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i, \qquad \max \Delta x_i \to 0,$$

bu ýerde $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

1) [0,1] kesimi $x_i = \frac{i}{n}(i = 0, 1, 2, .., n)$ nokatlar bilen n deň bölege böleliň.

Her bir kesimiň böleginiň uzynlygy $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ deň, we $n \to \infty$ bolanda $\frac{1}{n} \to 0$.

ξ_i nokatlar hökmünde bölek kesimleriň sag tarapyny alalyň:

$$\xi_i = x_{i+1} \frac{i+1}{n} (i = 0, 1, ..., n-1).$$

Integral jemi düzeliň:

$$\ln = S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2},$$

$n \to \infty$, bolanda integral jemiň predeli $m_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ deňdir.

Diýmek, $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

2) Ýokarda seredilen mysalda integral jemiň bahasy ξ_i nokatlaryň saýlamasyna bagly daldigini görkezeliň.

ξ_i nokatlaryň hökmünde, mysal üçin, bölek kesimleriň ortalaryny alalyň:

$$\xi_i = \left(i + \frac{1}{2}\right)/n, \quad (i = 0{,}1{,}\ldots{,}n - 1)$$

Integral jemi düzeliň:

$$\ln = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2i+1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2}[1+3+5+...+(2n-1)] = \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}.$$

bu ýerden: $\lim_{n\to\infty} \ln = \frac{1}{2}$.

141. Integralyň kesgitlemesine görä hasaplaň.

$$\int_a^b x^m dx, \qquad (m \neq -1{,}0 < a < b).$$

Çözülişi: Bu mysalda x_i nokatlar hökmünde $x_0 = a$, $x_1 = a$ $x_0 = a, x_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}, .., x_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/n} = b$ nokatlary almak amatly bolar. Bu nokatlar bolsa maýdalawjysy $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} > 1$ bolan geometrik progressiýany aňladýar. i-nji bölek kesimiň uzynlygy $\Delta x_i = aq^{i+1} - aq^i = aq^i(q-1)$ deňdir.

Şonuň üçin bölek kesimleriň iň uly uzynlygy

$\max \Delta x_i - aq^{n-1}(q-1) = a\left(\frac{b}{a}^{\frac{n-1}{n}}\right)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right]$ deňdir we

$\lim\limits_{n\to\infty} q = 1$ bolany üçin $n \to \infty$ bolanda nola ymtylýar.

ξ_i nokatlar hökmünde bölek kesimleriň sag tarapyny saýlalyň:

$$\xi_i = x_{i+1} = aq^{i+1} \ (i = 0,1,\dots,n-1).$$

Integral jemi düzeliň:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi i^m = \Delta xi = \sum_{i=0}^{n-1} a^m q^{(i+1)m} aq^i (q-1) = a^{m+1}(q-1)[1 + q^{m+1} +$$

$$+ ... + q^{(n-1)(m+1)}] = a^{(m+1)}(q-1)q^m \frac{q^{(m+1)n_{-1}}}{q^{m+1_{-1}}} = (b^{m+1} - a^{m+1})q^m \cdot \frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

$\max \Delta x_i \to 0$ bolanda integral jemiň predelini hasaplalyň:

$$\lim \ln = (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \lim_{q\to 1} q^m \frac{q-1}{q^{m+1}-1} = (b^{m+1} - a^{m+1})\frac{1}{m+1}.$$

Şeýlelikde: $\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1})$.

142. Kesgitleme boýunça integraly hasaplamaly $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Çözülişi: [1;2] kesimi x_i (i = 0,1,2,...,n) nokatlar bilen n deň bölege böleleň we ol nokatlar geometrik progressiýany emele getirmeli:

$$x_0 = 1, x_1 = q,\ x_2 = q^2,\ x_3 = q^3, \ldots, x_n = q^n = 2.\ \text{Bu ýerden}\ q\sqrt[n]{2}.$$

i-nji bölek kesimiň uzynlygy $\Delta x_i = q^{i+1} - q^i = q^i\,(q-1)$ deň.
$n \to \infty$ ýa-da $q \to 1$ bolanda $\max \Delta x_i = q^{n-1}\,(q-1) \to 0$
ξ_i nokatlar hökmünde bölek kesimleriň sag tarapyny alalyň:

$$\xi_i = x_{i+1} = q^{q+1}$$

Integral jemi düzeliň:

$$q = \sqrt[b]{2}, I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{i+1}} q^i (q-1) = \frac{n}{q}(q-1) =$$
$$= \frac{1}{2^{1/n}} n(2^{1/n} - 1).$$

Indi integral jemiň predelini tapmaly:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} = \ln 2.$$

Sebäbi, $n \to \infty$ bolanda $(2^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n} \ln 2.$

Şeýlelikde: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$

143. Kesgitli integralyň geometriki manysyny ulanyp $I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$ integralyň ululygyny tapyň.

Çözülişi: $y = \sqrt{25 - x^2}$ çyzyk – töweregiň ýokarky ýarymtöweregi. x_0-dan 5-e çenli üýtgände ýarymtöweregiň bölegi I çärýekde ýatýar. Diýmek, egri çyzykly trapesiýa $x = 0, x = 5, y = 0,\ y = \sqrt{25 - x^2}$ çyzyklar bilen çäklendirilendir. Onuň meýdany $\frac{25\pi}{4}$ deň. Diýmek,

$$I = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx = \frac{25\pi}{4}.$$

144. Kesgitli integralyň geometriki manysyny ulanyp $I = \int_1^5 (4x - 1)dx$ integralyň bahasyny tapyň.

Jogaby: $4 \cdot 1 - 1 = 3$ we $4 \cdot 5 - 1 = 19$ deň we beýikligi $5 - 1 = 4$-e deň bolan trapesiýanyň meýdanyna deň bolan trapesiýanyň meýdany berlen integrala deňdir:

$$\frac{3 + 19}{2} \cdot 4 = 44.$$

145. Integralyň geometriki manysyny ulanyp:

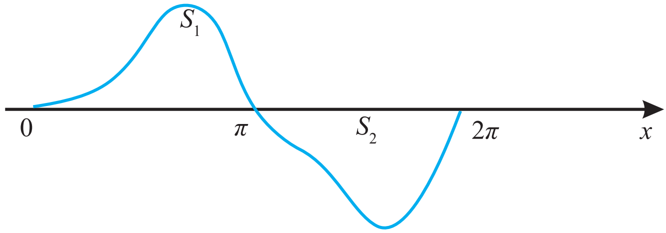
a) $\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \pi;$

b) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\int_0^1 e^{-x^2} dx;$

ç) $I = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad (0 < x \leq a)$

deňlikleri subut ediň.

Subuty: a) $y = \sin^3 x$ funksiýanyň grafigi çyzgyda şekillendirilen:

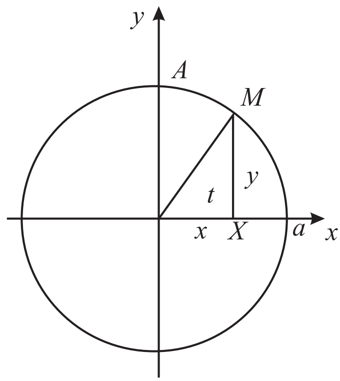


1-nji surat

S_1 we S_2 meýdanlaryň deňligini görkezeliň.

Hakykatdan hem, goý, $\pi \leq x \leq 2\pi$ bolsun. Onda $x = \pi + x_1$, bu ýerde $0 \leq x_1 \leq \pi$ we $\sin^3 x = \sin^3(+ x_1) = -\sin^3 x_1$. Şonuň üçin grafigiň ikinji ýarymy birinji bölegini π süýşürip we x oka simmetrik edip alynýar. Diýmek, $S_1 = -S_2$. Onda:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = 0.$$



2-nji surat

ç) $I = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ integral S_{OAMX} meýdany aňladýar.

$S_{AMX} = S_{OMX} + S_{OAM}$, OMX – üçburçluk, OAM – sektor.

$$S_{OMX} = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$S_{OAM} = \frac{1}{2}a^2 t, \text{ bu ýerde } \sin t = x/a.$$

$$\text{Diýmek: } S_{OAM} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

146. [– 2;3] kesimde $f(x) = x^3$ funksiýa berlen. Ol kesimi deň n bolege bölüp aşaky S_n we ýokarky S_n integral jemleri tapmaly.

147. Kesgitli integrallaryň geometriki manysyny ulanyp, subut etmeli:

a) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0;$ b) $\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx = 0;$

ç) $\int_1^2 (2x + 1)dx = 6;$ d) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{9\pi}{2}.$

2. Nýuton – Leýbnisiň formulasy bilen kesgitli integraly hasaplamak

Aşakdaky formula Nýuton – Leýbnisiň formulasy diýilýär.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

bu ýerde $F(x) – f(x)$ funksiýa asyl fuksiýalaryň biri ýa-da $F'(x) = f'(x)$ $a \le x \le b$.

148. Integrallary hasaplaň:

1) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx;$ 2) $\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt;$

3) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$ 3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx.$

Çözülişi:

1) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8 =$
$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} = 33\frac{1}{3}.$

2) $\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt = \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}}d(1+t) = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}|_0^1 \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$

3) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{9(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{3}|_1^3 \arcsin\frac{1}{3} -$
$-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0,6794$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = -\operatorname{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right) = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1.$

Integrallary hasaplaň:

149. $\int_0^3 2^x dx.$ *Jogaby*: $\frac{7}{\ln 2}.$

150. $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx.$ *Jogaby*: $19\frac{1}{6}.$

151. $\int_{-2}^2 (x^3 + 4x)dx.$ *Jogaby*: 0.

152. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$ *Jogaby*: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$

153. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}\ln 2.$

154. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$ *Jogaby*: $-1.$

155. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}.$

156. $\int_1^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}.$

157. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4 xdx.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.$

158. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2xdx.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}.$

159. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}.$

160. $\int_0^1 e^{2x}dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}(e^2-1).$

161. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$ *Jogaby*: ln3.

162. $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{6}.$

3. Kesgitli integralda üýtgeýän ululygy çalyşmak

Eger $f(x)$ funksiýa $[a,b]$ aralykda üznüksiz we $x = \varphi(t)$ funksiýa we onuň önümi $x' = \varphi'(t)$ $[\alpha;\beta]$ aralykda üznüksiz, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ hem-de t $[\alpha;\beta]$ aralykda üýtgände $x = \varphi(t)$ funksiýanyň bahalary $f(x)$ funksiýanyň üznüksizlik aralygyndan çykmaýan bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

163. Integrallary hasaplaň:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx;$ 2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx;$

3) $\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$ 4) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

Çözülişi:

1) Berlen integral $\int f(\cos x)\sin x dx$ integrala aňsat getirmek bolýar. $\cos x = t$; $\sin x\, dx = - dt$ ornuna goýmany ulanalyň. Integrirlemegiň täze çäklerini kesgitläliň: eger $x = 0$ bolsa, onda $\cos 0 = t$, $t = 1$; eger $x = \frac{\pi}{2}$, bolsa, onda $\cos\frac{\pi}{2} = t$, $t = 0$. Diýmek,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\sin x dx = -\int_1^0 (1 - t^2)dt = \int_0^1 (1 - t^2)dt =$$
$$= \left(t - \frac{t^2}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2) $t = \sqrt{e^x - 1}$, $t^2 = e^x - 1$, $2tdt = e^x\, dx$, $dx = \frac{2t}{t^2 + 1}dt$ ornuna goýmany peýdalanalyň. Eger $x = 0$ bolsa, onda $t = 0$; eger $x = \ln 2$ bolsa, onda $t = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$. Diýmek,

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 t\frac{2t}{t^2 + 1}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt = 2(t - arctgt)\Big|_0^1 =$$
$$= 2(1 - \mathrm{arctg}1) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

3) $x = a \sin t$, $dx = s \cos tdt$ ornuna goýmany peýdalanalyň. Eger $x = - a$ bolsa, onda $- a = a \sin t$, $\sin t = 1$, $t = -\frac{\pi}{2}$; eger $x = a$ bolsa, onda $a = a \sin t$, $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$. Diýmek,

$$\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t dt =$$

$$= a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 dt = \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{a^4}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) =$$
$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\pi a^4.$$

4) $\sqrt{x^2 - 1} = t$, $x^2 - 1 = t^2$, $2xdx = 2tdt$ ýa-da $xdx = tdt$ ornuna goýmany peýdalanalyň. Eger $x = 0$ bolsa, onda $t = 0$, eger $x = 2$ bolsa, onda $t = \sqrt{3}$. Diýmek,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx = \int_1^2 \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = (t - \mathrm{arctg}\, t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Ornuna goýma usuly peýdalanyp aşakdaky integrallary hasaplamaly:

164. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx;$ *Jogaby*: $2 - \frac{\pi}{2}$.

165. $\int_1^5 \sqrt{x - 1}\, dx;$ *Jogaby*: $\frac{16}{3}$.

166. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx;$ *Jogaby*: $\frac{2}{3}$.

167. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 5};$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}$.

168. $\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{x + 5}} dx;$ *Jogaby*: $\frac{8}{3}$.

169. $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2 + 4}\, dx;$ *Jogaby*: $\frac{19}{3}$.

170. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x},$ (tg $x = t$ ornuna goýma);

Jogaby: $\frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{arctg} \sqrt{2}$.

171. $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx,$ $(\sqrt[3]{1 + \ln x} = t);$ *Jogaby*: $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2} - 1)$.

172. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}};$ *Jogaby*: 1.

173. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 9}}.$ *Jogaby*: ln2.

4. Bölekleýin integrirlemek.

Eger $u(x),v(x)$ funksiýalar we olaryň $u'(x),v'(x)$ önümleri $[a,b]$ aralykda üznüksiz bolsa, onda aşakdaky bölekleýin integrirleme formula ýerliklidir:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

174. Aşakdaky integrallary hasaplamaly:

1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; 2) $\int_1^2 x\log_2 xdx$; 3) $\int_1^e \ln^2 xdx$.

Çözülişi: 1) Goý, $u = x$, $dv = e^{-x}$ bolsun. Onda $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Diýmek,

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = xe^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2) $u = \log_2 x$, $dv = xdx$. Onda $du = \frac{dx}{x\ln 2}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Diýmek,

$$\int_1^2 x\log_2 x = \frac{1}{2}x^2\log_2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{xdx}{2\ln 2} = \left(\frac{1}{2}x^2\log_2 x - \frac{x^2}{4\ln 2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{\ln 2}\right) - \left(-\frac{1}{4\ln 2}\right) = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

3) $u = \ln^2 x$, $dv = dx$. Onda $du = \frac{2}{x}\ln xdx$, $v = x$.

$$\int_1^e \ln^2 xdx = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln xdx.$$

$\int_1^e \ln xdx$ integraly ýene-de bölekleýin integrirleme formula arkaly taparys:

$$u = \ln x, \quad dv = dx; \quad du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x,$$

$$\int_1^e \ln xdx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = (x\ln x - x)\Big|_1^e.$$

Diýmek,

$$\int_1^e \ln^2 xdx = (x\ln x - 2x\ln x + 2x)\Big|_1^e = e - 2.$$

Bölekleýin integrirleme formulany ulanyp hasaplamaly:

175. $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ *Jogaby*: $\frac{1+2e^3}{9}.$

176. $\int_0^1 \arcsin x dx.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{2}-1$

177. $\int_0^\pi e^x \sin x dx.$ *Jogaby*: $\frac{e^\pi+1}{2}$

178. $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x}\, dx.$ *Jogaby*: $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$

Integraly hasaplaň:

179. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$

180. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}.$ *Jogaby*: $\frac{5}{3}-2\ln 2.$

181. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$ *Jogaby*: $\frac{1}{2}.$

182. $\int_1^9 \sqrt{x}\ln x dx.$ *Jogaby*: $\frac{4}{9}(81\ln 3-26).$

183. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{3}.$

184. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x-3}.$ *Jogaby*: $\frac{1}{4}\ln 2{,}5.$

185. $\int_0^\pi x^2.$ *Jogaby*: $-2\pi.$

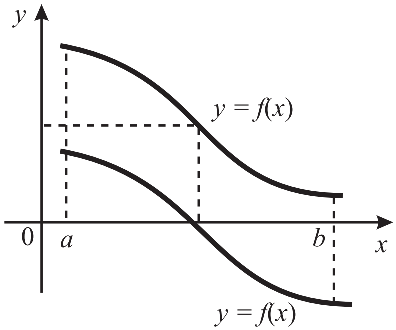
186. $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx,$ *Jogaby*: $\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$

187. $\int_1^{4,5} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}.$ $(\sqrt[3]{2x-2}=t).$

Jogaby: 1,5(0,5 + ln1,5).

188. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$ $(\mathrm{tg}x=t).$ *Jogaby*: $4(\sqrt[8]{3}-1).$

§ 3. Tekiz figuranyň meýdany



3-nji surat

Iki üznüksiz $y = f(x)$ we $y = \varphi(x)$ ($f(x) \geq \varphi(x)$) funksiýalar hem-de $x = a$, $x = b$ göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdany aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$$

189. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň:

1) koordinata oklar, $x = 3$ göni çyzyk we $y = x^2 + 1$ parabola bilen;

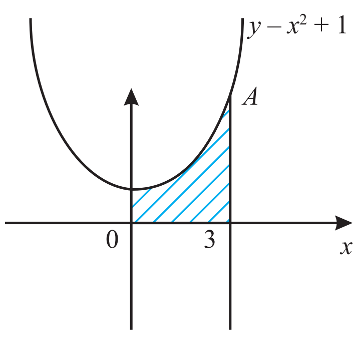
2) ordinata oklar, $y = -2$, $y = 3$ göni çyzyklar, $x = \frac{1}{2}x^2$ parabola bilen;

3) $y = x^2$ we $x = y^2$ parabola bilen;

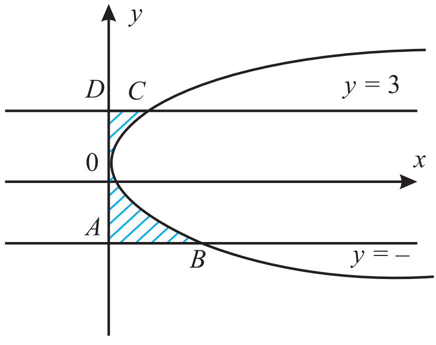
4) $y = x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$ we $y = 5$ göni çyzyk bilen.

Çözülişi:

1)



4-nji surat



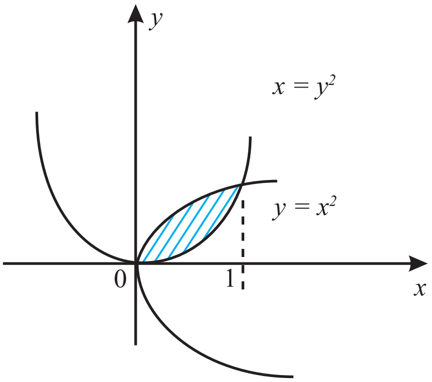
5-nji surat

2) $S = \frac{1}{2}\int_{-2}^{3} y^2 dy = \frac{y^3}{6}\Big|_{-2}^{3} = \frac{27}{6} - \left(-\frac{8}{6}\right) = \frac{35}{6}.$

3) Berlen egri çyzyklaryň kesişme nokatlaryny tapalyň:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x, \end{cases} x^4 - x = 0, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases}$$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



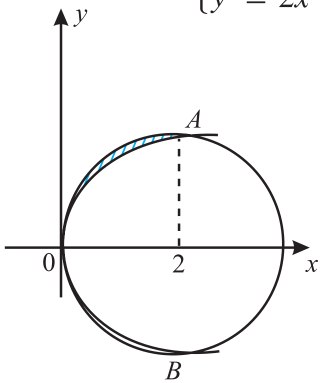
6-njy surat

4) $S = \int_0^3 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^3 = 9 + 3 = 12.$

190. $y^2 = 2x$ parabola we $y = 4x - x^2$ töwerek bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi: $\begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$ $4x - x^2 = 2x;\quad 2x - x^2 = 0;\quad x(2 - x) = 0.$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} y^2 = 0 \\ y^2 = 4, \end{cases} \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_{2,3} = \pm 2. \end{cases}$$



7-nji surat

Berlen çyzyklar $O(0;\ 0)$, $A(\ 2;\ 2\ )$, $B(\ 2;\ -2)$ nokatlarda kesişýärler.

$$S = 2\int_0^2 (\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x})dx =$$

$$= \left(\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\, dx - \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\, dx\right).$$

Birinji integral tegelegiň $\frac{1}{4}$ bölegine deň. Onda $\frac{1}{4}\cdot\pi 2^2 = \pi$. Diýmek,

$$S = 2\left(\pi - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right) = 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right).$$

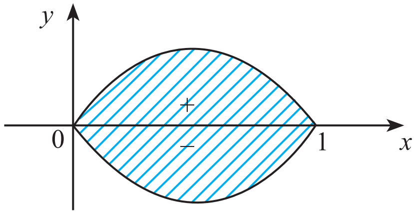
Ştrihlenmedik figuranyň meýdany:

$$S_1 = \pi R^2 - S = 4\pi - 2\left(\pi - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\pi + \frac{8}{3}\right).$$

191. $y^2 = x(x-1)^2$ egri çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi: $y^2 = x(x-1)^2$ funksiýa y üýtgeýäne görä jübüt, onda bu çyzyk bilen çäklenen figura x oka görä simmetrikdir. Integrirleme aralygy tapalyň:

Goý, $y=0$, onda $x_1=0, x_2=1$



8-nji surat

$$\frac{1}{2}S = \int_0^1 \sqrt{x}(x-1)dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})dx = -\frac{4}{15}.$$

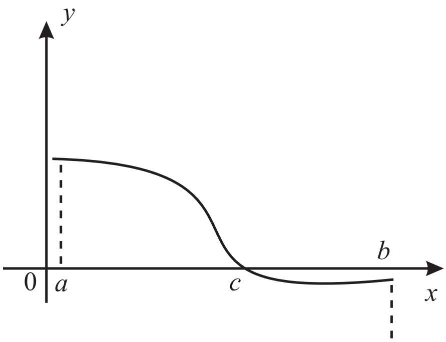
«–» alamat tapylan meýdanly figura Ox okuň aşagynda ýerleşýändigini aňladýar. Hakykatdan hem integral aňlatma [0;1] segmentde $\sqrt{4}(x-1) \leq 0$. Onda alnan netijäni ters alamatly almaly ýa-da $\frac{1}{2}S = \frac{4}{15}$. Onda gözlenýän figuranyň meýdany $S = \frac{8}{16}$.

192. $y = -x^2 + 6x - 5$ parabola we koordinata oklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapmaly.

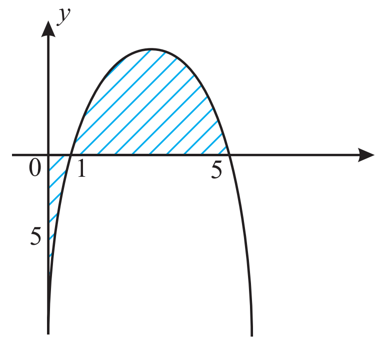
Çözülişi: Eger figura Ox okuň iki tarapynda hem ýerleşen bolsa, onda onuň meýdany:

$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$ formula arkaly tapylýar.

$$S = \left|\int_0^1 (-x^2 + 6x - 5)dx\right| + \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx =$$
$$= \left|\left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\right|_0^1 + \left|\left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\right|_1^5 = 13.$$



9-njy surat



10-njy surat

193. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň:

1) $x^2 + y^2 = R^2$ töwerek bilen; *Jogaby*: πR^2

2) $y = \sin x$ sinusoidanyň ýarymtolkun y we Ox ok bilen; *Jogaby*: 2.

3) $xy = 7$ giperbola we $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ göni çyzyklar bilen; *Jogaby*: $7l\,n\ 2{,}5$

4) $y = \ln x$ egri we $x = e$, $y = 0$, göni çyzyklar bilen; *Jogaby*:1

5) $y = 4 - x^2$ parabola we abssissa oky bilen; *Jogaby*: $10\frac{2}{3}$.

6) $y^2 = x^3$ ýarymkub parabola, ordinata ok we $y = 2$ göni çyzyk bilen; *Jogaby*: $\frac{6}{5}\sqrt[3]{4}$.

7) $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ zynjyr çyzyk we $x = a$, $x = -a$ göni çyzyklar bilen; *Jogaby*: $\frac{a^2}{e}(e^2 - 1)$.

8) $y = x^3$ kub parabola, $y = 2$ göni çyzyk we Oy oky bilen;

Jogaby: $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

9) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ egriler we $y = 4$ göni çyzyklar bilen;
Jogaby: $2(8\ln 2 - 3)$

10) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; *Jogaby*: πab.

11) $y = x^2$ we $y = \frac{2}{1 + x^2}$; çyzyklar bilen. *Jogaby*: $\frac{3\pi - 2}{3}$.

§ 4. Egriniň uzynlygy

Eger $[a,b]$ aralykda egriniň dugasy $y = f(x)$ deňleme bilen berlen we $f(x)$ funksiýa görkezilen aralykda üznüksiz önümi bar bolsa, onda abssissalary $x = a$, $x = b$ nokatlaryň arasyndaky egriniň dugasynyň uzaklygy

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (1)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

Eger $[c,d]$ aralykda egriniň dugasy $x = \varphi(y)$ deňleme bilen berlen we $\varphi(y)$ funksiýa görkezilen aralykda üznüksiz önümi bar bolsa, onda bu aralykda duganyň uzynlygy:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2}\, dy \qquad (2)$$

formula arkaly kesgitlenýär.

194. $y^2 = 4x$ parabolanyň depesinden $M(1;2)$ nokat aralykdaky duganyň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi: (2) formulany ulanalyň. Parabolanyň deňlemesinden $x = \frac{y^2}{4}$; $x' = \frac{2y}{4} = \frac{y}{2}$. Meseläniň şerti boýunça y 0-dan 2-ä çenli üýtgeýär, diýmek,

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4 + y^2}\, dy,$$

$$\int \sqrt{x^2 + a}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$$

formuladan peýdalanyp, alarys:

$$l = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{4 + y^2} + \frac{4}{2}\ln\left|y + \sqrt{4 + h^2}\right|\right]_0^2 = \frac{1}{2}[\sqrt{4 + 4} +$$

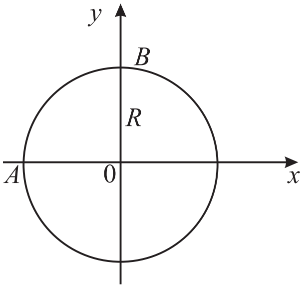
$$+ 2\ln\left|2 + \sqrt{8}\right| - 0 + 2\ln 2] = \sqrt{4} + \ln\left|2 + 2\sqrt{2}\right| - \ln 2 = \sqrt{2} +$$

$$+ \ln\frac{2 + 2\sqrt{4}}{2} = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

195. $x^2 + y^2 = R^2$ töweregiň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi: Berlen deňlemäni differensirläp, alarys:

$$2xdx + 2ydy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$



11-nji surat

(1) formulany peýdalanyp, AB duganyň uzynlygyny ýa-da töweregiň $\frac{1}{4}$ böleginiň uzynlygyny tapalyň:

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}dx = \int_0^R \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}dx =$$

$$= \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = R\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)\Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi R;$$

$$l = 4 \cdot \frac{1}{2}\pi R = 2\pi R.$$

196. Abssissalary $x = \sqrt{3}$ we $x = \sqrt{8}$ nokatlaryň arasyndaky $y = \ln x$ egriniň dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi: (1) formulany peýdalanyp, egriniň deňlemesinden $y' = \frac{1}{x}$ taparys. Diýmek,

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2}dx$$

$\sqrt{x^2 + 1} = t$, $x^2 + 1 = t$, $xdx = tdt$ ornuna goýmany ulanalyň. Eger $x = \sqrt{8}$ bolsa, onda $t = 3$, eger $x = \sqrt{3}$ bolsa, onda $t = 2$. Diýmek,

$$l = \int_2^3 \frac{t^2\,dt}{t^2 - 1} = \int_2^3 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}dt = \int_2^3 \left(1 - \frac{d}{t^2 + 1}\right)dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t - 1}{t + 1}\right)\Big|_2^3 = \left(3 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{2}\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

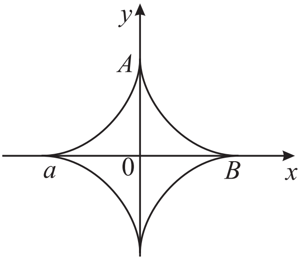
197. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ astroidanyň uzynlygyny tapmaly.

Çözülişi: (1) formulany ulanalyň.

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0; \; y'_x = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \text{we} \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Diýmek,

AB duganyň ýa-da $\frac{1}{4}$ astroidanyň uzynlygyny taparys. Anyk däl funksiýanyň x görä önümini tapalyň:



12-nji surat

$$\frac{1}{4}l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2}\Big|_0^a = \frac{3a}{2} \quad \text{we} \quad l = 6a.$$

198. $y^2 = x^3$ ýarymkub parabolanyň koordinatalar başlangyjyndan $(5;5\sqrt{5})$ nokada çenli uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: $12\frac{11}{27}$.

199. $y = 4 - x^2$ parabolanyň we Ox okunyň kesişme nokatlaryň arasyndaky parabolanyň dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: $2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{17})$.

200. Abssissalary $x = 0$, $x = a$ bolan nokatlaryň arasyndaky $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ zynjyr egriniň dugasynyň uzynlygyny tapyň.

Jogaby: $\frac{a}{2}(e - e^{-1})$.

201. $x = 4$ göni çyzygyň $y^2 = (x + 1)^3$ egriden kesip alýan dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: $24\frac{22}{27}$.

202. $y = 0$-dan $y = 1$ çenli $x = y^2$ parabolanyň dugasynyň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: $4[2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})]$.

203. $x = 0$ – dan $x = \alpha \left(0 \le a \le \frac{\pi}{2}\right)$ çenli $y = \ln\cos x$ egriniň dugasynyň uzynlygyny tapmaly. *Jogaby*: $\ln \operatorname{tg} \frac{\pi + 2a}{4}$.

204. $y^2 = 9 - x$ we Ox oky bilen kesişýän nokatlaryň arasynda ýerleşýän egriniň uzynlygyny tapmaly. *Jogaby*: $3\sqrt{37} + \frac{1}{2}\ln(6 + \sqrt{37})$.

205. $x^2 = 4 - y$ we Ox oky bilen kesişýän nokatlaryň arasynda ýerleşýän egriniň uzynlygyny tapmaly.

Jogaby: $2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4 + \sqrt{17})$.

§ 5. Aýlanma jisimiň göwrümi

$x = a$, $x = b$ göni çyzyklar, üznüksiz $y = f(x)$ egri we Ox okuň kesimi bilen çäklenen egri çyzykly trapesiýanyň Ox okuň daşyndan aýlanma bilen emele gelen jisimiň göwrümi

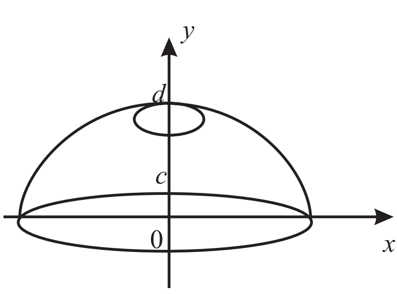
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{1}$$

formula arkaly tapylýar.

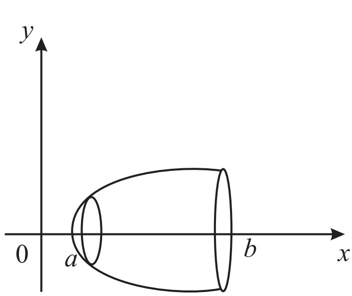
$y = c$, $y = d$ göni çyzyklar, üznüksiz $x = \varphi(y)$ egri we Oy okuň kesimi bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň Oy okuň daşyndan aýlanma bilen emele gelen jisimiň göwrümi

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \tag{2}$$

formula arkaly tapylýar.



13-nji surat



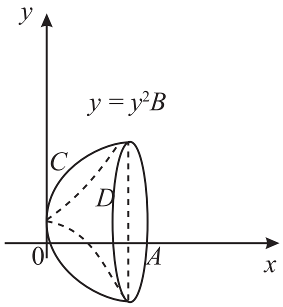
14-nji surat

206. Uly oky $2a$, kiçi oky $2b$ ($a > b$) bolan elips 1) Uly okuň daşyndan; 2) Kiçi okuň daşyndan aýlanýar. Aýlanma elipsoidalaryň göwrümlerini tapmaly. Hususy ýagdaýda şaryň göwrümini tapmaly.

Çözülişi: Ellipsiň kanonik deňlemesini ýazalyň: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(1) formulany peýdalanalyň. Ox okuň daşyndan aýlananda elipsoidiň göwrümini tapalyň. Ellipsiň deňlemesinden taparys:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2).$$



15-nji surat

Meseläniň şerti boýunça ellipsiň ýarym oky a deň. Onda integrirleme aralygy – a-dan a çenli bolýar.

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2)dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a |= \frac{2}{3}\pi ab^2 \text{ onda, } V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Ellipsiň Oy okuň daşyndan aýlananda ellipsoidiň göwrümini tapalyň. (2) formuladan peýdalanyp, Ellipsiň deňlemesinden taparys:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2).$$

Meseläniň şerti boýunça ellipsiň kiçi ýarym oky b deň. Onda integrirleme çäkleri [– b;b] aralykdyr.

$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)dy = \frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

Onda $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b,\ a = b$ bolanda aýlanma ellipsoidiň hususy ýagdaýynda şar bolýar. Şeýlelikde, şaryň göwrümi $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, bu ýerde a – şaryň radiusy.

207. $y = x^2$ we $x = y^2$ parabolalar bilen çäklenen figuranyň Ox okuň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň meýdanyny tapmaly.

Çözülişi: $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ $x^4 - x = 0$ $\begin{matrix} x_1 = 0 & x_1 = 0 \\ y_1 = 0 & x_1 = 0 \end{matrix}$

Onda parabolalar $O(0;\ 0)$ we $B(1;\ 1)$ nokatlarda kesişýärler. Suratdan görnüşi ýaly, gözlenýän jisimiň göwrümi $OCBA$ we $ODBA$ trapesiýalaryň Ox okuň daşynda aýlanma jisimleriň tapawudyna deň.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) =$$
$$= \frac{3}{10}\pi.$$

208. $xy = 4$ giperbola, $y = 1$, $y = 2$ göni çyzyklar we Oy oky bilen çäklenen figuranyň Oy okuň daşyndan aýlananda emele gelen jisimiň göwrümini tapmaly.

Çözlüşi: (2) formulany ulanalyň. Giperbolanyň deňlemesinden tapalyň: $x = \dfrac{4}{y}$. integralyň çäkleri meseläniň şertinden: $c = 1$, $d = 2$. Diýmek,

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{16}{y^2 dy} = \pi \cdot \left(-\frac{16}{y}\right)\Big|_1^2 = 16\pi \frac{1}{y}\Big|_1^2 =$$
$$= 16\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8\pi.$$

Aşakdaky egriler bilen çäklenen figuranyň Ox ýa-da Oy okuň daşyndan aýlananda emele gelen figuranyň göwrümini tapmaly:

209. $x = y^2$, $x = 1$, $y = 0$; Ox we Oy okuň daşyndan;

Jogaby: $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{4\pi}{5}$.

210. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$; Ox we Oy okuň daşyndan; *Jogaby*: 8π.

211. $xy = -2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; Ox okuň daşyndan; *Jogaby*: 2π.

212. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; Ox we Oy oklaryň daşyndan;

Jogaby: $\dfrac{128\pi}{7}$; $\dfrac{64\pi}{5}$.

213. $y^2 = (x + 4)^3$ we $x = 0$; Ox we Oy oklaryň daşyndan;

Jogaby: 64π; $\frac{\pi 2^{11}}{35}$.

214. $y = \sin x$ (ýarym tolkun) $y = 0$; Ox okuň daşyndan;

Jogaby: $\frac{\pi^2}{2}$.

215. $y = \sin^2 x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ $y = 0$; Ox okuň daşyndan; *Jogaby*: $\frac{3\pi^2}{8}$.

216. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a,$, $x = 0$, $y = 0$; Oy okuň daşyndan;

Jogaby: $\frac{\pi a^3}{15}$.

217. $y = 4x - x^2$, $y = x$; Ox okuň daşyndan; *Jogaby*: $21{,}6\pi$.

218. $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$; Ox okuň daşyndan; *Jogaby*: $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

219. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; Ox okuň daşyndan; *Jogaby*: $\frac{32}{105}\pi a^3$.

220. $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + y^{-x/a})$, $x = -a$, $x = a$, $y = 0$; Ox okuň daşyndan;

Jogaby: $\frac{\pi a^3}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$.

§ 6. Hususy däl integrallar

Tükeniksiz çäkli integrallara garalyň.

Goý, $f(x)$ funksiýa $[a, +\infty]$ aralykda üznüksiz bolsun, onda

$$\int_a^{=\infty} f(x)dx - \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

bolar.

Eger (1) tükenikli predel bar bolsa, onda hususy däl integral ýygnalýar diýip aýdylýar, garşylykly ýagdaýda integral dargaýar. Şuňa meňzeş:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{we}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{b\to-\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Çäklenmedik funksiýalardan integrallara garalyň. Eger $f(x)$funksiýa $[a,b]$ kesimiň c nokadynyň islendik etrabynda çäklenmedik we $x = c$ nokatdan başga bu aralykda üznüksiz bolsa, onda

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

alynýar.

Eger (2) deňligiň sag tarapyndaky tükenikli predeller bar bolsa, onda hususy däl integral ýygnanýar, garşylykly ýagdaýda dargaýar.

$c = a$ ýa-da $c = b$ bolanda alarys:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

221. Hususy däl integraly tapyň:

1) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;

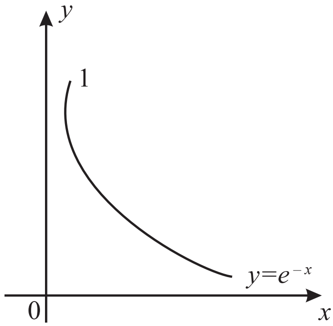
3) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$; 4) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Çözülişi: 1) Integralyň aşakdaky funksiýasy $[0; +\infty)$ aralykda üznüksiz, kesgitleme boýunça:

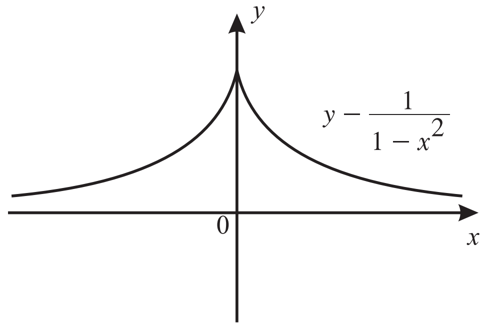
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx - \lim_{b\to+\infty}(-e^{-x})\big|_{0}^{b} = \lim_{b\to=\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$$

Berlen hususy däl integraly hasaplap biz $f = e^{-x}$ funksiýa, $x = 0$ we Ox ok bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapandygymyzy aňladýar.

2) Kesgitleme boýunça alarys:



16-njy surat



17-nji surat

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to-\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\,|_a^0+$$

$$+\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\,|_0^b=-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Berlen hususy däl ýygnalýan integralyň aşakdaky funksiýanyň grafigi we onuň gorizontal asimptotasy bolan Ox oky bilen çäklenen figuranyň meýdanyny aňladýar.

3) Integralyň aşakdaky funksiýa $[1; -\infty]$ aralykda üznüksiz, onda

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty.$$

Berlen integral dargaýar.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1.$$

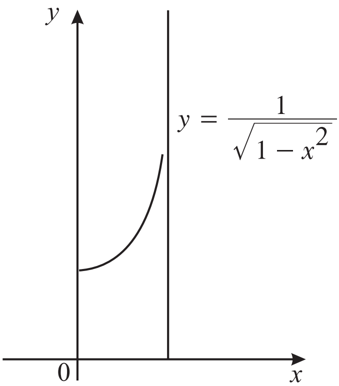
Integral ýygnanýar we $x = 1$, $y = 0$ göni çyzyklar we $y = 1/x^2$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen figuranyň meýdanyny aňladýar.

222. Hususy däl integraly tapyň:

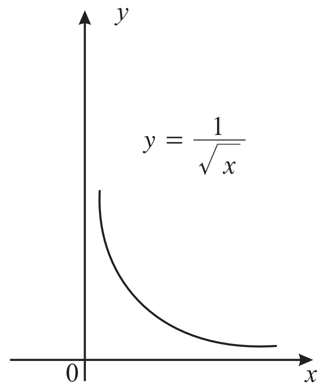
1) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_0^2\frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Çözülişi: 1) Integralyň aşagyndaky funksiýa $x = 1$ nokatda üznükli, [0;1] aralygyň galan nokatlarynda ol üznüksiz. Onda kesgitleme boýunça

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \,|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\arcsin (1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$



18-nji surat



19-njy surat

2) $$\int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x \Big|_\varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 2 - \ln\varepsilon) =$$
$$= \ln 2 + \infty = +\infty.$$ Integral dargaýar.

3) $$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{2}\,|_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to 0} 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) = 4.$$

Integral ýygnalýar $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiýanyň grafigi $x = 4$ göni çyzyk we $x = 0$ asimptota bilen çäklenen figuranyň meýdany 4-e deň.

4) Integralyň aşagyndaky funksiýa $x = 1$ nokatdan başga [0;2] aralykda üznüksiz. Diýmek, bu nokadyň etrabynda çäklenmedik:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Eger bu deňligiň sag tarapyndaky iki integral ýygnalsa, onda berlen integral hem ýygnalýar.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}+\ln 3\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon} = \infty,$$

bu ýerden berlen integral dargaýar.

Hususy däl integraly tapmaly:

223. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$. *Jogaby*: 1. **224.** $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$. *Jogaby*: dargaýar.

225. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$. *Jogaby*: 2. **226.** $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}$. *Jogaby*: $\frac{1}{2}$.

227. $\int_0^{+\infty}\cos x dx$. *Jogaby*: dargaýar. **228.** $\int_0^1 \ln x dx$. *Jogaby*: – 1.

229. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-x-2}$. *Jogaby*: dargaýar.

230. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+7}$. *Jogaby*: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

231. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2)^2}$. *Jogaby*: dargaýar.

232. 1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. *Jogaby*: $\frac{1}{\ln 3}$.

2) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. *Jogaby*: $\frac{3(1-\sqrt[3]{4})}{2}$.

§ 7. Kesgitli integrallary hasaplamagyň takmyn usullary

Käbir hallarda asyl funksiýalary tapmaklyk köp hasaplamalary talap edýär. Şeýle ýagdaýlarda kesgitli integrallary hasaplamak üçin takmyn usullary ulanmak amatly bolýar. Goý, kesgitli integral

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

berlen bolsun.

1. Gönüburçluklar usuly

Kesgitli integraly hasaplamagyň iň ýönekeý usuly onuň kesgitlemesi bilen bagly bolan takmyn usuldyr. Eger $[a,b]$ kesimi $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$ $(i = \overline{1, n-1})$ nokatlar arkaly deň n böleklere bölüp, bölek $[x_{i-1}, x_i]$ kesimde alynýan erkin nokady x_{i-1} deň alsak, onda $[a,b]$ kesimde üznüksiz f funksiýa üçin düzülen integral jeme integralyň takmyn bahasy hökmünde garamak bolar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}), \quad y_k = f(x_k)(k = \overline{0, n-1}).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga gönüburçluklar usuly diýilýär. Şunlukda, kesgitli integral bu usul bilen hasaplanylanda goýberilýän ýalňyşlyk ($f'(x)$ önüm $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolanda)

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{n}M, \; M = \max_{a \leq x \leq b}|f'(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar.

2. Trapesiýalar usuly

Eger egri çyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin ýene-de $[a,b]$ kesimi deň n böleklere bölüp, her bölekdäki egri çyzykly trapesiýany gönüçyzykly trapesiýa bilen çalşyrsak, onda olaryň meýdanlarynyň jemine egri çyzykly trapesiýanyň takmyn meýdany hökmünde garamak bolar, ýagny:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\Big[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\Big], \; y_k = y(x_k).$$

Bu formulany ulanyp, kesgitli integraly hasaplamaklyga trapesiýalar usuly diýilýär Şunlukda, kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda (ikinji tertipli üznüksiz önümi bolan f funksiýa üçin) goýberilen ýalňyşlyk:

$$|R_n| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M, \quad M = \max_{a \leq x \leq b}|f''(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar. Bu formula kesgitli integral trapesiýalar usuly bilen hasaplanylanda goýberilen ýalňyşlygyň gönüburçluklar usuly bilen hasaplanylandakydan azdygyny görkezýär.

3. Parabolalar usuly

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + . $$
$$+ ... + y_{2n-2})].$$

Şuňa parabolalar ýa-da Simpson formulasy diýilýär. Şunlukda, f funksiýanyň dördünji tertipli üznüksiz önümi bar halynda goýberilýän ýalňyşlyk

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4}M, \quad M = \max_{a\le x\le b}|f^{iv}(x)|$$

deňsizlik boýunça bahalandyrylýar.

233. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integraly Simpson usuly bilen 0,001-e çenli takyklykda hasaplamaly.

Çözülişi: Zerur bolan takyklykda integraly hasaplamak üçin ilki bilen $f^{IV}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3)$ önümi tapalyň. [0,1] kesimde $e^{-x^2} \le 1$ we $|4x^4 - 12x^2 + 3| \le 5$ bolýandygy sebäpli $f^{IV}(x) \le 20$. Şonuň üçin:

$$|R_n| \le \frac{20}{2880n^4} < \frac{1}{1000}$$

deňsizlik $n^4 > 1000/144$ bolanda ýerine ýetýär. Onuň üçin bolsa $n = 2$, ýagny $2n = 4$ almak ýeterlikdir. Indi [0,1] kesimi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 1$ nokatlar arkaly deň dört böleklere böleliň we şol nokatlarda funksiýanyň bahalaryny hasaplalyň: $y_0 = 1{,}0000$; $y_1 = 0{,}9394$; $y_2 = 0{,}7788$; $y_3 = 0{,}5698$; $y_4 = 0{,}3679$. Onda Simpson formulasy esasynda:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{12}[1.0000 + 0{,}3679 + 2\cdot 0{,}7788 + 4(0{,}9394 +$$
$$+ 0{,}5698)] \approx 0{,}7469.$$

Şeýlelikde, 0,001 takyklykda:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,747.$$

234. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ mälimdir. $n = 10$ bolanda gönüburçluklar we trapesiýalar usullary peýdalanyp ln2 bahasyny takmyn tapmaly.

Çözülişi: [1;2] aralygy deň 10 bölege böleliň we şol nokatlarda integralyň aşagyndaky $y = \frac{1}{x}$ funksiýanyň bahalaryny tapalyň:

$x_0 = 1,0;$	$y_0 = 1,0000;$	$x_6 = 1,6;$	$y_6 = 0,6250;$
$x_1 = 1,1;$	$y_1 = 0,9091;$	$x_7 = 1,7;$	$y_7 = 0,5882;$
$x_2 = 1,2;$	$y_2 = 0,8333;$	$x_8 = 1,8;$	$y_8 = 0,5556;$
$x_3 = 1,3;$	$y_3 = 0,7692;$	$x_9 = 1,9;$	$y_9 = 0,5263;$
$x_4 = 1,4;$	$y_4 = 0,7143;$	$x_{10} = 2,0;$	$y_{10} = 0,5000;$
$x_5 = 1,5;$	$y_5 = 0,6667;$	$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}.$	

Gönüburçluklar formulasy boýunça alarys:

$$I \approx h\sum_{i=0}^{9} y_i = \frac{1}{10}(y_0 + ... + y_9) = \frac{1}{10}\cdot 7,1877 \approx 0,7188,$$

$$I = h\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}(y_1 + ... + y_{10}) = \frac{1}{10}\cdot 6,6877 \approx 0,6688.$$

Berlen kesgitli integral bu usul bilen hasaplanylanda goýberilýän ýalňyşlyk

$$|R_{10}| \le \frac{(2-1)^2}{10}\cdot 1 = 0,1 \text{ deňdir,}$$

Trapesiýalar usuly boýunça:

$$I \approx h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{9} y_i\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1+0,5}{2} + 6,1877\right) = \frac{1}{10}\cdot 6,9377 \approx$$
$$\approx 0,6938.$$

Berlen kesgitli integral bu usul bilen hasaplanylanda goýberilýän ýalňyşlyk, $|R_{10}|$ aşakdaky görnüşde hasaplanylýar:

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^2}, \quad |y''(1)| = \frac{2}{1^3} = 2,$$

$$|R_{10}| \le \frac{(2-1)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 = \frac{1}{600} \approx 0{,}0017.$$

Bradisiň tablisalarynda berlen: ln2 ≈ 0,6931. Bu baha trapesiýalar formulasy arkaly tapylan baha ýakyndyr.

Gönüburçluklaryň, trapesiýalaryň we parabolalar usullaryny peýdalanyp aşakdaky integrallaryň takmynyny hasaplaň we ol formulalar boýunça hasaplamalarda ýalňyşlyklary hasaplaň.

235. $\int_{-1}^{5} (x^2 - 2)dx, \qquad (n = 6).$

236. $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx, \qquad (n = 8).$

237. $\int_{0}^{3} \sqrt{1 + x^3}\, dx, \qquad (n = 6).$

238. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\, dx, \qquad (n = 10).$

§ 8. Integralyň ykdysadyýetde ulanylyşy

239. Predel girdeji $R'(x) = 20 - 0{,}04x$ funksiýa berlen. Girdeji funksiýany we önüme isleg kanunyny tapmaly.

Çözülişi:

$$R(x) = \int (20 - 0{,}04x)dx = 10x - 0{,}04 \cdot \frac{x^2}{2} + c =$$
$$= 10x - 0{,}02x^2 + c;$$

$R(0) = 0$. Onda $20 \cdot 0 - 0{,}02 \cdot 0^2 + c = 0$, $c = 0$. Diýmek,

$$R(x) = 20x - 0{,}02x^2.$$

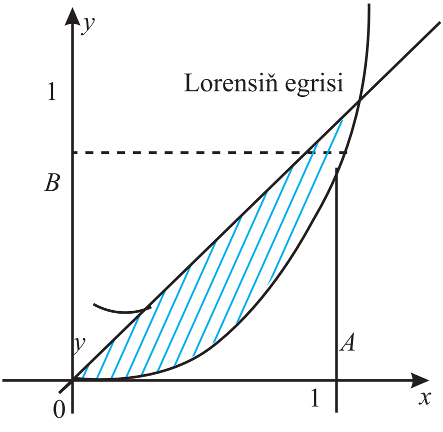
Eger önümiň her birligi p baha boýunça satylýan bolsa, onda girdeji $R = xp$ formula arkaly hasaplanýar. Onda $p(x) = \frac{R}{x}$. Diýmek isleg kanuny

$$p(x) = 20 - 0{,}02x.$$

Girdejiniň deňölçegli däl paýlamanyň koeffisiýenti

Goý, x-iň az girdejili ilat, y – olara degişli ähli girdejiniň bölegi. $y = f(x)$ funksiýany garalyň: mysal üçin, $y(0{,}8) = 0{,}6$ aňlatma iň az girdejili 80% ilaty ähli girdejiniň 60%-i alýar. Bu ýerde $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ we $\leq x$. Goý, ilatyň arasynda nol girdejili adam ýok, ýa-da $y(0) = 0$, we ähli girdejini ähli ilatyň arasynda paýlanýandyr ýa-da $y(1) = 1$.

Suratda $y = f(x)$ funksiýanyň mysaly görkezilen. Bu funksiýanyň grafigine Lorensiň egrisi diýilýär. Eger girdejileriň paýlanyşy kämil bolanda ilatyň 10% girdejiniň 10%, ilatyň 20% girdejiniň 20% we ş.m. alardy.



20-nji surat

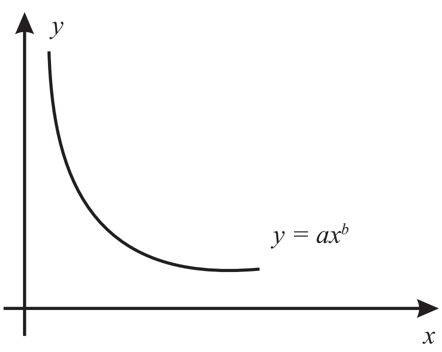
Onda girdejiniň paýlama kanuny $y = x$ göni çyzyk bolardy.

Girdejiniň hakyky paýlanyşygyň ideal paýlanyşygyň gyşarmasy reňklenen meýdanyň we OAB üçburçlugyň meýdanynyň L gatnaşygyna deň. $0 \le L \le 1$ aýdyňdyr. $L = 0$ baha girdejiniň kämil paýlanyşygyň koeffisiýenti diýilýär. L gatnaşyga – girdejiniň deňölçegli däl paýlanyşygyň koeffisiýenti diýilýär. Okatmagyň egrisi. Käbir goşmaça önümiň öndürilmegine näçe wagt gerek boljaklygyna baha bermek örän zerur bolýar. Şular ýaly hasaplamalar üçin okatmagyň egrisi ulanylýar. Goý, $T = F(x)$ – adam/sagatda ölçelinilýän önümiň birinji x sanyny öndürmek üçin zerur wagt. $f(x) = F'(x)$ takmyn $(x + 1)$ sanyny öndürmek üçin wagta deň. Köplenç, $f(x) = ax^b$, $a > 0$, $-1 < b < 0$ funksiýa ulanylýar. Bu funksiýanyň grafigi 21-nji suratda şekillendirilen we oňa okatmagyň egrisi diýilýär. $f(x)$ funksiýa – kemelýän funksiýa, sebäbi käbir operasiýany ýerine ýetirmek üçin zerur wagt gaýtalamalaryň sany artmagy bilen kemelýär.

Önümiň $(n_1 + 1)$ sanyndan başlap n_2 sanyny öndürmek üçin ΔT wagt aşakdaky formula arkaly kesgitlenýär:

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$

240. 100 sany mebeli ýygnamak üçin $y = 15x^{-0,14}$ formula bilen wagtyň harçlygy berilýär. Ýene-de 20 mebeli ýygnamak üçin näçe wagt harç ediler?



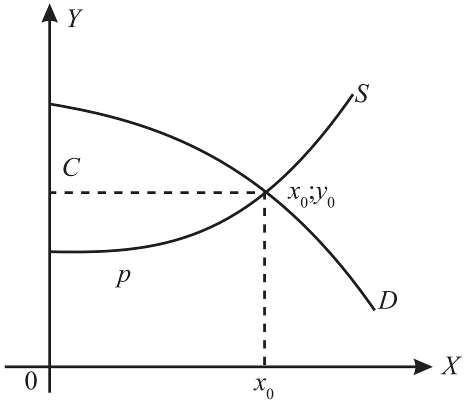
21-nji surat

Çözülişi:

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx = -\left[\frac{15x^{0,86}}{0,86}\right]_{100}^{120} = \frac{1500}{86}(120^{0,86} - 100^{0,86}) \approx 8,91.$$

Alyjylaryň we üpjün edijileriň utuşy. Goý, $p = f(x)$ – käbir haryda islegiň D egrisi, we, $p = g(x)$ – S hödürlemäniň egrisi; $(x_0; y_0)$ – bazar deňagramlyk nokady.

Käbir alyjylar haryt üçin $p > p_0$ baha tölemek mümkindir. Goýlan p_0 bahadan alyjylaryň utuşyny tapalyň:



22-nji surat

d $[0; x_0]$ kesimi

$$0 = \overline{x_0}, \ \overline{x_1}, \ldots \overline{x_{l-1}}, \ \overline{x_l}, \ \ldots, \overline{x_n} = x_0$$

nokatlar bilen n bölege böleliň. Her bir interwalda $x_i^* \in [\overline{x_{i-1}}, \overline{x_i}]$ nokady saýlalyň. Bu kesimde alyjylaryň utuşy $(p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i$,

$\Delta x_i = \overline{x_i} - \overline{x_{l-1}}$ deňdir. Ähli utuşlary jemläp, alarys:

$$\sum_{i=1}^{n} (p(x_i'') - p_0)\Delta x_i .$$

Eger isleg funksiýa üznüksiz we $n \to \infty$, hem-de $\max \Delta x_i \to 0$, onda ýokardaky integral jemiň predeli bar we ol:

$$\int_0^{x_0} (f(x) - p_0)dx$$

deň. Şeýlelikde alyjylaryň utuşy

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 .$$

Şuňa meňzeş üpjün edijileriň utuşy tapylýar:

$$p = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx.$$

Alyjylaryň utuşy isleg D egri we $p = p_0$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyna deň. Satyjylaryň utuşy hödürleme S egri we $p = p_0$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyna deň.

241. Isleg we hödürleme kanunlar berlen:

$$p = 116 - x^2,$$

$$p = \frac{5}{3}x + 20.$$

Eger bazar deňagramlygy belli bolsa, onda alyjylaryň utuşyny, üpjün edijileriň utuşyny tapmaly.

Çözülişi: Bazar deňagramlyk nokady tapalyň:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20;$$

$$3x^2 + 5x - 288 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 3456}}{6},$$

bu ýerden $x_1 = 9,\ x_2 = -\frac{32}{2}.$

$$x_0 = 9, \quad p = 116 - 9^2 = 35.$$

$$p_0 x_0 = 35 \cdot 9 = 315.$$

$$C = \int_0^9 (116 - x^2 dx) - 315 = \left(116 - \frac{x^3}{3}\right)_0^9 - 315 \Big| = 486.$$

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)dx = 315 - \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 20x\right)_0^9 = 315 +$$

$$+\frac{5}{3} \cdot \Big| 81 - 180 = 67,5.$$

Orta baha. $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýanyň orta bahasy

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

formula arkaly tapylýar.

Funksiýanyň orta bahasyny edaranyň eýeçiligindäki emläge salgyt goýmagy hasaplamada ulanylýar. Salgydyň ululygy:

$$N = kf(c) = k \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

bu ýerde k – edaranyň görnüşine bagly koeffisiýent, $f(c)$ – bir ýylda emlägiň bahasynyň orta bahasy, $[a,b]$ – bir ýyla deň wagt aralygy.

Integral takmyny trapesiýalar formulany ulanyp bir ýyla, ýagny 12 aýa bölüp hasaplanýar:

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0)+f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \dots + f(12)\right).$$

Bu ýerde $f(0)$– emlägiň bahasy 1-nji ýanwara;

$f(1)$– emlägiň bahasy 1-nji fewrala;

....

$f(11)$ – emlägiň bahasy 1 dekabra;

$f(12)$ – emlägiň bahasy indiki ýylyň 1-nji ýanwaryna;

Maksimal girdeji almak meselesi. Käbir senagat pudaklarda (mysal üçin nebit-gaz pudakda) käbir wagtyň pursadynda girdeji pese düşýär. Bu ýagdaýda girdeji maksimal bahasyny alýan wagtyň pursadyny tapmaly we belli wagtda önümçiligi duruzmaly.

242. Çykdajylaryň we girdejileriň wagt boýunça üýtgemesiniň tizlikleri aşakdaky formula arkaly berilýär:

$$C'(t) = 2 + t;$$

$$R'(t) = 17 - 2t.$$

Bu önümçiligiň girdejiniň maksimal bahasyny tapmaly. Önümçiligi haçan doňdurmaly?

Çözülişi: $P'(t) = R'(t) - C'(t) = 17t - 2t - 2 - t = 15 - 3t$, eger $t = 5$, onda $P'(t) = 0$.

$P''(5) = -3 < 0$, diýmek $t = 5$ – maksimal nokady.

$$P(5) = \int_0^5 P'(t)dt = \int_0^5 (15 - 3t)dt(15 - 3t)dt = \left(15t - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 =$$
$$= 75 - \frac{75}{2} = \frac{75}{2}.$$

Kapitalyň üýtgemesi. Eger $I(t)$ – inwestisiýalaryň üýtgemesiniň tizligi we $A(t)$ – kärhananyň kapitaly bolsa, onda:

$$I(t) = \frac{dA}{dt}$$

Inwestisiýanyň üýtgemesiniň tizligi berlen bolsa, onda kapitalyň üýtgemesini:

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

formula arkaly tapyp bolýar.

243. Predel çykdajylaryň funksiýasy

$$C'(x) = 50 - 0,02x$$

görnüşde berilýär.

a) Eger fiksirlenen çykdajylar bir aýda 2500 manada deň bolsa, çykdajylar funksiýasyny tapmaly.

b) Bir aýda 250 sany önümi öndürmek üçin kärhananyň çykdajylaryny tapmaly.

ç) Harydyň biri 75 manatdan satylanda maksimal girdeji alar ýaly näçe sany haryt öndürmeli we satmaly?

Jogaby: b) 15625; ç) 1250.

244. Käbir kärhananyň predel çykdajylary

$$C'(x) = 60 - 0,04x + 0,003x^2$$

görnüşde berlen.

a) Eger önümiň 100 birligini öndürmek üçin 7 müň manat çykdajy edilse, onda çykdajylar funksiýany tapmaly.

b) Fiksirlenen çykdajylary tapmaly.

ç) Önümiň 250 sany birligine önümçiligiň çykdajylaryny hasaplamaly.

d) Eger önümiň biriniň bahasy 65,5 manada deň bolsa, onda girdejiniň maksimal bahasyny tapyň.

Jogaby: b) 200; ç) 29575; d) 0.

245. Predel çykdajylar funksiýa

$$C'(x) = 60 + 0{,}04x$$

görnüşde berlen. Fiksirlenen çykdajylar bir aýda 1800 manada deň, bir önümiň bahasy 80 manada deň.

a) Üýtgeýän çykdajylary tapmaly.

b) 150 sany önümiň çykdajylary nämä deň?

ç) Eger önümçiligiň göwrümi 150-den 200 sany önüme galan bolsa, girdejiniň artdyrmasyny tapmaly.

Jogaby: b) 11250; ç) 650.

246. Käbir kärhananyň predel girdeji funksiýasy aşakdaky görnüşde berlen:

a) $R'(x) = 20 - 0{,}02x$; b) $R'(x) = 45 - 0{,}04x - 0{,}003x^2$.

Girdeji funksiýasyny we islegiň deňlemesini tapmaly.

Jogaby: a) $p = 20 - 0{,}01x$; b) $p = 45 - 0{,}02x - 0{,}001x^2$.

247. Predel girdeji funksiýa $P'(x) = 25 - 0{,}004x$ görnüşde berlen. Eger kärhana 2500 sany önümini satsa, onda girdeji 35,8 müň manada deň. Girdeji funksiýasyny tapmaly.

Jogaby: $P = 25x - 0{,}002x^2 + 8680$.

248. Käbir önümiň predel çykdajylar funksiýasy

$$C'(x) = 30xe^{0{,}001x^2}$$

görnüşde berilýär. Eger fiksirlenen çykdajylar 20 *müň* manada deň bolsa, onda çykdajylar funksiýasyny tapmaly.

Jogaby: $C'(x) = 15000xe^{0{,}001x^2} + 5000$.

249. Predel girdeji funksiýa berlen:

a) $R'(x) = 25 - 0{,}4x - 0{,}06x^2$;

b) $R(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 900}}$; ç) $R'(x) = (5 - x)e^{-\frac{(x)}{5}}$.

Girdeji funksiýasyny tapmaly. Önüme isleg kanuny tapmaly.

Jogaby: a) $P = 25 - 0{,}2x - 0{,}02x^2$;

b) $P = \dfrac{2\sqrt{x^2 + 900} - 20}{x}$; ç) $p = 5e^{-\frac{(x)}{6}}$.

250. Eger girdeji nol bolanda isleg 6 *mlrd* manada deň bolan pursatda we predel islegi aşakdaky görnüşi alanda isleg funksiýasyny tapmaly:

a) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}5 + \dfrac{0{,}2}{\sqrt{y}}$; b) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}4 + \dfrac{1}{\sqrt{3y+4}}$;

ç) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}6 = e^{-3y}$. *Jogaby*: a) $C(y) = 0{,}5y + 0{,}4\sqrt{y} + 6$;

b) $C(y) = 0{,}4y + \dfrac{2}{3}\sqrt{3y+4} + \dfrac{14}{3}$;

ç) $C(y) = 0{,}6y + \dfrac{1}{3}e^{-3y} + \dfrac{17}{3}$.

251. Eger girdeji nol bolanda isleg 4 *mlrd* manada deň bolan pursatda we predel ýygnanma aşakdaky görnüşi alanda isleg funksiýasyny tapmaly:

a) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}37$; b) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}4 - \dfrac{1}{\sqrt{2y+9}}$;

ç) $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}3 = e^{-1{,}6y}$.

Jogaby: a) $C(y) = 0{,}63y + 4$; b) $C(y) = 0{,}6y + \sqrt{2y+9} + 1$;

ç) $C(y) = 0{,}7y + 0{,}625e^{-1{,}6y} + 3{,}375$.

252. Käbir döwletde girdejiniň paýlanylyşy Lorensiň egrisi bilen kesgitlenilýär:

a) $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$; b) $y = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x$.

Ilatyň iň az üpjün edilen 12% bölegi girdejiniň nähili bölegini alýar? Ähli girdejiniň deňölçegli däl paýlanyş koeffisiýentini hasaplaň.

a) 0,0232; 11/36; b) 0,02496; 0,3.

253. Käbir ýurtda girdejiniň paýlanylyşy Lorensiň egrisi bilen kesgitlenilýär:

a) $y = 0{,}87x^2 + 0{,}13x$; b) $y = 0{,}96x^2 + 0{,}04x$.

Ilatyň iň az üpjün edilen 8% bölegi girdejiniň nähili bölegini alýar? Ähli girdejiniň deňölçegli däl paýlanyş koeffisiýentini hasaplaň.

Jogaby: a) 0,015968; 0,29; b) 0,01008; 0,32.

254. Awtobuslaryň ilkinji 30 reňklenenden, okatmagyň egrisi $y = 20x^{-0{,}312}$ görnüşini alýandygyny görüpdirler.

Awtobuslaryň soňky 50-ni reňklemek üçin näçe wagt harç ediler?

Jogaby: 290,82.

255. Ilkinji 50 sany detaly (önümiň 1 birligini) ýygnamak üçin 70 adam/sag gerek bolupdyr. Geljekde önümiň 1 birligini (50 detal) ýygnamak üçin $f(x) = 70x^{-0{,}24}$ okatmagyň formulasy esasynda wagt az harç edilipdir. Önümiň 2 birligi ýasalandan soň, önümiň 5 birligini (250 sany detaly) taýýarlamak üçin näçe wagt harç ediler?

Jogaby: 258,19.

256. Ilkinji 100 sany harydyň (önümiň 1 birliginiň) öndürmekligine 30 sagat harç edilýär. Şonda harydy öndürmek üçin zerur wagt $f(x) = 30x^{-0{,}14}$ formula arkaly kemelýändigini kesgitläpdirler. 500 sany haryt öndürilenden soň 400 sany harydy öndürmek üçin näçe wagt gerek bolar?

Jogaby: 91,59.

257. Käbir haryt üçin isleg deňlemesi $P = 112 - x^2$ görnüşini alýar. Eger deňagramly baha 90-a deň bolsa, alyjylaryň utuşyny kesgitläň.

Jogaby: 83,33.

258. Käbir haryt üçin isleg deňlemesi $P = \dfrac{150}{2x + 5}$ görnüşini alýar. Eger deňagramly baha 10-a deň bolsa, alyjylaryň utuşyny kesgitläň.

Jogaby: 60,71.

259. Käbir haryt üçin isleg we hödürleme kanunlary aşakdaky görnüşde berilýär:

a) $p = 89 - x^2$; $\quad 10x - 7p + 210 = 0$;

b) $5p + 2x = 50$; $\quad 5p - 6x = 10$;

ç) $p = 44 - x^2$; $\quad p = x^2 + 2x + 20$;

d) $p = \dfrac{120}{x + 2}$; $\quad p = \dfrac{5}{2}x + 10$.

Harydyň alyjylarynyň we satyjylarynyň girdejilerini tapyň.

Jogaby: a) 228; 67,35; b) 5; 15; ç)18; 27; d)51,83.

260. Kärhananyň harydy öndürmek üçin ähli çykdajylar funksiýasy we bu haryda isleg deňlemesi aşakda berilýär:

a) $C(x) = 900 + 40x + 5x^2$; $\quad p = 280 - 4x - 2^2$;

b) $C(x) = 400 + 30x + x^2$; $\quad p = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 50$.

Kärhananyň iň uly girdeji alýan nokadynda satyjylaryň utuşyny tapmaly.

Jogaby: a) 216,67; b) 0,67.

261. Käbir harydyň isleg deňlemesi $p = 30 - 0{,}02x$ görnüşde berlen. Eger harydyň satylyşy 80-den 150 birlige artýan bolsa, girdejiniň orta bahasyny tapyň.

Jogaby: 3041.

262. Käbir harydyň önümine ähli çykdajylaryň funksiýasy

$$C(x) = 1000 + 2x + 0{,}04x^2$$

görnüşde berilýär. Harydyň öndürilmesiniň göwrümi 100-den 200 birlige çenli artmagynda çykdajylaryň orta bahasyny tapmaly.

Jogaby: 2700.

263. Awtoulaglaryň reňklemekde okatmagynyň egrisi $f(x) = 10x^{-0{,}312}$ görnüşe berilýär. Bu ýerde $f(x)$ – $(x + 1)$ awtoulagyň reňklemegine zerur bolan adam/ sagadyň sany. Eger

a) ilkinji 100 awtoulag reňklenen;

b) 401 – 500 nomerli awtoulaglar reňklenen bolsa, awtoulaglaryň reňklemegine zerur bolan wagtyň orta bahasyny tapmaly.

Jogaby: a) 3,45; b) 1,49.

264. a) Eger k = 2% we kärhananyň emläginiň bahasy her aýyň başyna tablisa bilen berilýär:

Aý		2				6	7		9				
manat		2,8			6,1	3.8	2,6		7,4				

Kärhana öz emlägine nähili salgyt tölemeli? *Jogaby*: 0,09.

b) Eger k = 1,5% we kärhananyň emläginiň bahasy her çärýegiň başyna jetwel bilen berilýär:

çärýek	I	II	III	IV	I
mln manat	11,2	0,8	4,6	10,8	7,6

Kärhana öz emlägine nähili salgyt tölemeli? *Jogaby*: 0,13.

265. Kärhana peýnir öndürýär. Onuň girdejisi

$$R(t) = 40e^{0{,}25t}, \ 0 < t < 10$$

görnüşde berilýär. [0;10] aralykda girdejiniň orta bahasyny tapmaly.

Jogaby: 194,92.

266. Eger çykdajylaryň we girdejileriň üýtgemesiniň tizligi aşakdaky görnüşi alýan bolsa, onda kärhana maksimal girdeji alýança näçe ýyl çig maly gazyp çykarmaly?

a) $C'(t) = 3 + 2t$, $\quad R'(t) = 28 - 3t$;

b) $C'(t) = 10 + 3t^{\frac{2}{3}}$, $\quad R'(t) = 46 - t^{\frac{2}{3}}$;

ç) $C'(t) = 22 + 4t^{\frac{4}{5}}$, $\quad R'(t) = 134 - 3t^{\frac{4}{5}}$;

Jogaby: a) 62,5; b) 388,8; ç) 1592,89.

VI bap
KÖPGAT WE EGRIÇYZYKLY INTEGRALLAR

§ 1. Ikigat integrallar

Ikigat integrallaryň kesgitlenişi

Goý, $f(x,y)$ funksiýa käbir ýapyk kwadratlanýan D oblastda kesgitlenen we çäkli bolsun. D oblasty ölçegi nol bolan egriler arkaly umumy içki nokatlary bolmadyk $D_1, D_2, \ldots, D_n$ oblastlara böleliň we olaryň meýdanlaryny degişlikde, $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her bir bölek D_k oblastda erkin (x_k, y_k) nokady alalyň we $f(x,y)$ funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny D_k bölek oblastyň ΔS_k meýdanyna köpeldip,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{1}$$

jemi düzeliň. Ol jeme $f(x,y)$ funksiýanyň D oblasty boýunça düzülen integral jemi diýilýär. D oblastyň $D_1, D_2, \ldots, D_n$ bölekleriniň köplügine ol oblastyň bölünmesi diýilýär we $\{D_k\}$ bilen belgilenýär. D oblastyň dürli $\{D_k\}$ bölünmelerine degişli böleklerde alynýan nokatlaryny üýtgetmek arkaly, $f(x,y)$ funksiýanyň D oblast boýunça biri-birlerinden tapawutly bolan tükeniksiz köp integral jemini düzmek bolar. Şonuň üçin D oblastyň dürli bölümlerinden alynýan bölek oblastlaryň diametrleriniň iň ulusy bolan d sanyň nola ymtylandaky predeli düşünjesini girizmek bolar.

Kesgitleme. Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta > 0$ san tapylyp, D oblastyň $\forall \{D_k\}$ bölünmesi we $\forall (x_k, y_k) \in D_k$ üçin $d < \delta$ bolanda,

$$|I - \sigma| < \varepsilon \tag{2}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda I sana (1) integral jemiň $d \to 0$ bolandaky predeli diýilýär we ol ýazgyda şeýle aňladylýar:

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k. \tag{3}$$

Kesgitleme. Eger $d \to 0$ bolanda (1) integral jemiň D oblastyň bölünmesine we böleklerde alynýan nokatlaryna bagly bolmadyk tükenikli (3) predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x,y)$ funksiýanyň D oblasty boýunça *ikigat integral* diýilýär we

$$I = \iint_D f(x,y)dx \text{ ýa-da } I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

görnüşde belgilenýär. Şunlukda, $f(x,y)$ funksiýanyň özüne D oblastda integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Eger $f(x,y) = 1$ bolsa, onda (3) predel D oblastyň meýdanyna deňdir. Şoňa görä kesgitleme esasynda D oblastyň meýdanyny ikigat integralyň kömegi bilen tapmak üçin formulany alarys:

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (4)$$

Gat integrallaryň häsiýetleri

Gat integrallaryň ählisiniň kesgitli integralyňka meňzeş häsiýetleriniň barlygy sebäpli, olary ikigat integral üçin ýazarys (olaryň subuty hem kesgitli integralyňka meňzeşdir).

1) Çyzyklylyk. Eger $f(x,y)$ we $g(x,y)$ funksiýalar D oblastda integrirlenýän bolsalar, onda $\forall a, b \in R$ sanlar üçin $af(x,y) + bg(x,y)$ funksiýa hem integrirlenýändir we

$$\iint_D [af(x,y) + bg(x,y)]ds = \iint_D f(x,y)ds + b\iint_D g(x,y)ds$$

deňlik dogrudyr.

2) Eger $f(x,y)$ funksiýa D' we D'' oblastlarda integrirlenýän bolsa, onda ol funksiýa olaryň birleşmesi bolan oblastda hem integrirlenýändir. Şunlukda, eger D' we D'' ýaýlalaryň içki nokatlary ýok bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D'} f(x,y)ds + \iint_{D''} f(x,y)ds$$

deňlik dogrudyr.

3) Eger D ýaýlada integrirlenýän $f(x,y)$ we $g(x,y)$ funksiýalar $\forall(x,y) \in D$ üçin $f(x,y) \le g(x,y)$ deňsizligi kanagatlandyrsa, onda

$$\iint_D f(x,y)ds \le \iint_{D'} g(x,y)ds.$$

4) Eger $f(x,y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän bolsa, onda $|f(x,y)|$ funksiýa hem D oblastda integrirlenýändir we

$$\iint_D f(x,y)ds \leq \iint_{D'} |f(x,y)|ds.$$

5) Orta baha hakyndaky teorema. Eger $f(x,y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän we $m \leq f(x,y) \leq M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$mS \leq \iint_D f(c,y)ds \leq MS.$$

Deňsizlikler dogrudyr, bu ýerde S berlen D oblastyň meýdanydyr. Orta baha baradaky bu deňsizligi başgaça:

$$\iint_D f(x,y)ds = \mu S \quad (m \leq \mu \leq M)$$

görnüşde hem ýazmak bolar. Şunlukda,

$$\mu = \frac{1}{S}\iint_C f(x,y)ds,$$

sana $f(x,y)$ funksiýanyň D oblastdaky orta bahasy diýilýär.

Käbir goşmaça şertlerde orta baha hakyndaky teorema şeýle okalýar.

6) Eger $f(x,y)$ funksiýa bir baglanyşykly D oblastda üznüksiz bolsa, onda şol ýaýlada $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ nokat tapylyp,

$$\iint_D f(x,y)ds = f(\overline{c},\overline{y})S$$

deňsizlikler dogrudyr. Ýokarda belleýşimiz ýaly, bu häsiýetleriň hemmesi üçgat integrallar üçin hem ýerine ýetýändir, ýöne orta baha bilen baglanyşykly häsiýetlerde S meýdanyň deregine V göwrüm alynýar, ýagny olar şeýle okalýar:

7) Eger $f(x,y)$ funksiýa G oblastda integrirlenýän we $m \leq f(x,y,z) \leq M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$mV \leq \iint_D f(x,)ds \leq MV$$

deňsizlikler dogrudyr.

8) Eger $f(x,y,z)$ funksiýa bir baglanyşykly G oblastda üznüksiz bolsa, onda şol oblastda $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in G$ nokat tapylyp,

$$\iint_G f(x,y,z)dv = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})V$$

deňsizlikler dogrudyr.

Ikigat integrallaryň gaýtalanýan integrallara getirilişi

a) Gaýtalanýan integral düşünjesi. Goý, $f(x,y)$

$$G=\{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

gönüburçlukda kesgitlenen funksiýa bolsun.

Kesgitleme. Eger her bir $x[a,b]$ üçin $f(x,y)$ funksiýa y boýunça $[c,d]$ kesimde integrirlenýän bolsa, ýagny $\forall x \in [a,b]$ üçin:

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy,$$

integral bar bolsa we $F(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \qquad (6)$$

Integrala ilki y, soňra x boýunça gaýtalanýan integral diýilýär we ol:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

görnüşde ýazylýar. Edil şonuň ýaly, beýleki tertipdäki:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx, \qquad (7)$$

gaýtalanýan integral kesgitlenýär.

Gaýtalanýan integral düşünjesini integralyň integrirleme çäkleriniň funksiýalary bolan haly üçin hem görkezmek bolar.

Kesgitleme. Goý, $f(x,y)$ $G = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ gönüburçlukda kesgitlenen, $p(x)$ we $q(x)$ funksiýalar bolsa $[a,b]$ kesimde üznüksiz bolup, bahalary $[c,d]$ kesime degişli bolsun. Eger her bir $x\in[a,b]$ üçin:

$$F(x) = \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy$$

integral bar bolsa we $F(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýän bolsa, onda:

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

gaýtalanýan integral diýilýär. Edil şuňa meňzeşlikde:

$$\int\limits_{p(y)}^{q(y)} \left(\int\limits_c^d f(x,y)dx \right) dy$$

görnüşdäki gaýtalanýan integral kesgitlenýär. Ikigat integrallar gaýtalanýan integrallara getirilip hasaplanylýar.

Integrirleme oblastyň gönüburçluk haly

Teorema. Eger $f(x,y)$ G gönüburçlukda integrirlenýän bolsa we her $x\in[a,b]$ üçin:

$$F(x) = \int\limits_c^d d(x,y)dy$$

integral bar bolsa, onda:

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

gaýtalanýan integral bardyr we

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \qquad (8)$$

deňlik dogrudyr.

Teorema. Eger $f(x,y)$ G gönüburçlukda integrirlenýän bolsa we her $y\in[c,d]$ üçin:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$$

integral bar bolsa, onda

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

gaýtalanýan integral bardyr we

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dx \int_a^b f(x,y)dx \qquad (9)$$

deňlik dogrudyr.

1. $\iint_G (x^2 - y^2)dxdy \quad G = \{-1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2\}$

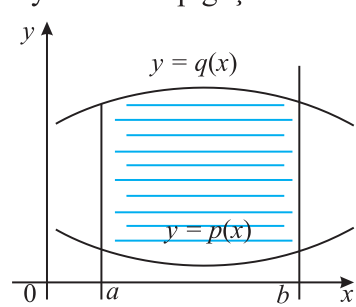
integraly G gönüburçluk boýunça hasaplaň. Integralyň astyndaky funksiýa seredilýän gönüburçlukda üznüksizdir we şonuň üçin (5) formulany ulanmak bolar:

$$\iint_G (x^2 - y^2)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^2 (x^2 - y^2)dy = \int_{-1}^0 \left(x^2 y = \frac{y^3}{3} \right)_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(2x^2 - \frac{8}{3} \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{8}{3}x \right)_{-1}^0 = -2.$$

Integrirleme oblastyň egriçyzykly haly. Bu halda integrirleme D ýaýlanyň bolup biljek görnüşlerine aýratynlykda seredip geçeliň.

a) Goý, D ýaýla gapdallaryndan $x = a$ we $x = b$ göni çyzyklar bilen, aşagyndan $y = p(x)$ egri bilen, ýokardan $y = q(x)(p(x) \le q(x))$ egri bilen çäklenen ýaýla bolsun, bu ýerde $p(x)$ we $q(x)$ funksiýalar $[a,b]$ kesimde üznüksizdirler. Bu halda D kwadratlanýan ýapyk ýaýladyr. Oňa y görä ýönekeý ýaýla diýeliň *(1-nji surat)*.



1-nji surat

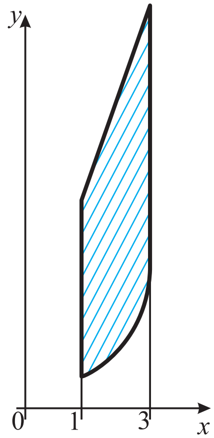
Teorema. Eger $f(x,y)$ funksiýa y görä ýönekeý D ýaýlada integrirlenýän bolsa we her bir $x \in [a,b]$ üçin:

$$F(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy.$$

Integral bar bolsa, onda $F(x)$ funksiýa integrirlenýändir we

$$\iint_D f(x.y)dxdy = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy.$$

2. $y = 8x,\ y = \dfrac{x^2}{2},\ x = 1,\ x = 3$ egriler bilen çäklenen ýapyk D ýaýla boýunça *(1-nji surat)*. $f(x,y) = x + 2y$ funksiýanyň ikigat integralyny hasaplamaly. Bu mysaldaky D ýaýla oka görä ýönekeý bolan 2-nji suratdaky ýaýladyr:



2-nji surat

$$D = \left\{(x,y): 1 \le x \le 3,\quad \frac{x^2}{2} \le y \le 8x\right\}.$$

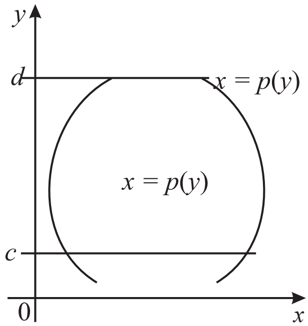
Şoňa görä-de D ýaýla boýunça ikigat integraly soňky formulada ulanyp, hasaplamak bolar:

$$\iint_D (x + 2y)dxdy = \int_1^3 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{8x} (x + 2y)dy =$$

$$\int_1^3 [xy + y^2]_{\frac{x^2}{2}}^{8x} dx = \int_1^3 \left(72x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)dx =$$

$$= \left[24x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_1^3 = 602,1.$$

b) Goý, D ýaýla $y = c$ we $y = d$ göni çyzyklar bilen, gapdallaryndan $x = p(y)$ we $x = q(y)(p(y) \le q(y))$ egri bilen çäklenen ýaýla bolsun, bu ýerde $p(y)$ we $q(y)$ funksiýalar $[c,d]$ kesimde üznüksizdirler. Bu halda D kwadratlanýan ýapyk ýaýladyr. Oňa Ox oka görä ýönekeý ýaýla diýeliň *(3-nji surat)*.



3-nji surat

Teorema. Eger $f(x,y)$ funksiýa Ox oka görä ýönekeý D ýaýlada integrirlenýän bolsa we her bir $y \in [c,d]$ üçin

$$F(y) = \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx$$

integral bar bolsa, onda $F(y)$ funksiýa integrirlenýändir we

$$F(y) = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx$$

formula dogrudyr. Onda:

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx.$$

3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} dy \int\limits_{y}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx.$

Integraly hasaplamaly (integral astyndaky funksiýany $x = 0$ nokatda bire deň hasap etmeli).

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} dy \int\limits_{y}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin x}{x} dy = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} x dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

Ikigat integrallarda funksiýa L egri bilen çäklenen ýapyk D oblastda ýa üznüksiz ýa-da çäkli we meýdany nola deň bolan köplükden başga ähli ýerde üznüksiz bolsun. Eger D we D' oblastlaryň arasynda özara birbahaly öwürmeleri gurnaýan

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

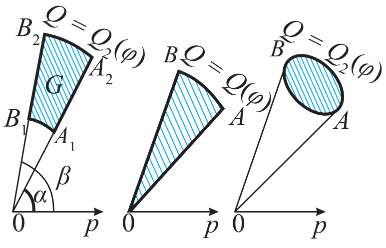
sistema D' oblasty D oblasta birbahaly öwürýän bolsa, onda

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,\vartheta)y(u,\vartheta)|\, I(u,\vartheta)\,|du\, d\vartheta), \qquad (10)$$

bu ýerde

$$I(u,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}.$$

Hususy ýagdaýda, polýar koordinatalar üçin:



4-nji surat

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \\ = \iint_{D'} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)pdpd\varphi. \quad (11)$$

Eger D' polýar ok bilen $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ burçlary emele getirýän şöhleler we $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)(\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi))$ egriler bilen çäklenen bolsa, onda:

$$\iint_{D'} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)pdpd\varphi = \int_{a}^{\beta} d\varphi \int_{p_1(\varphi)}^{p_2(\varphi)} f(p\cos\varphi,\ p\sin\varphi)pdpd\varphi.$$

Eger-de D' koordinata başlangyjyny özünde saklaýan bolsa, onda:

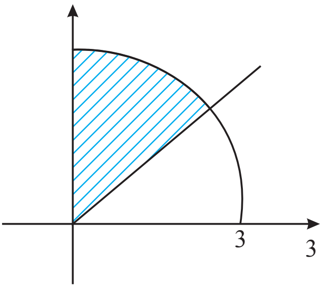
$$\iint_{D'} f(p\cos\varphi r\sin\varphi)pdpd\varphi = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{p(\varphi)} f(p\cos\varphi r\sin\varphi)pdpd\varphi. \quad (12)$$

Mysallar

4. Hasaplaň:

$$\iint_D p^2\cos^2\varphi d\varphi dp,$$

bu ýerde $D - \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \varphi = \dfrac{\pi}{2},\ \ p = 3$



5-nji surat

çyzyklar bilen çäklenen tegelek sektor.

Çözülişi: (11) formulany peýdalanyň. Bu halda $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; $\beta = \dfrac{\pi}{2}$; $\rho_1(\varphi) = 0$; $\rho_2(\varphi) = 3$.

3) Seredilýän tegelek sektor G sektoryň hususy ýagdaýy: A_1 we B_1 nokatlar O nokat bilen gabat gelýär *(1-nji surat)*. Belli hasaplamalary geçirip alarys:

$$\iint\limits_D p^2\cos^2\varphi d\varphi dp = \iint\limits_D p^2(1+\cos 2\varphi)d\varphi dp =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^3 p^2(1+\cos 2\varphi)dp = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi \int\limits_0^3 p^2 dp =$$

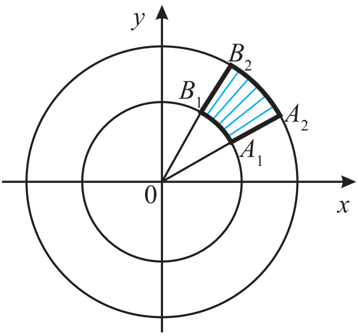
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)\frac{p^3}{3}\Big|_0^3 d\varphi = \frac{9}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

5. Polýar koordinatalara geçip, hasaplaň.

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy.$$

bu ýerde $D: x^2+y^2=9;\ x^2+y^2=25;\ y=x;\ y=\sqrt{3}\,x$ çyzyklar bilen çäklenen oblast.



6-njy surat

Çözülişi: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ formulalar arkaly polýar koordinatalara geçeliň:

$$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2;$$
$$p_1^2 = 9;\ p_2^2 = 25;$$
$$\rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi;\quad \mathrm{tg}\varphi = 1;\ \varphi = \frac{\pi}{4};$$
$$p\sin\varphi = \sqrt{3}\ \rho\cos\varphi;\ \mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3};$$
$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$
$$a = \frac{\pi}{4};\ \beta = \frac{\pi}{4};\ \rho_1(\varphi) = 3;\ \rho_2(\varphi) = 5$$

hasaba alyp, (11) formula boýunça alarys:

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_G p^2 \cdot pd\varphi dp = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_3^5 p^3 dp = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{p^4}{4}\right]_3^5 d\varphi =$$

$$= \frac{625-81}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = 136\varphi\delta\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 136\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{34\pi}{12}.$$

6. Hasaplaň:

$$\iint_G \frac{dxdy}{(x+y)^3}$$

bu ýerde $G : A(1,3), B(2,6), C(6,2), D(3,1)$ depeli trapesiýa.

Çözülişi: Trapesiýanyň taraplarynyň ýatan göni çyzyklarynyň deňlemesini tapalyň:

$$3x - y = 0\ (AB),\ x+y-8=0\ (BC),\ x-3y=0\ (CD),$$
$$x+y-4=0\ (AD).$$

Täze üýtgeýän ululyklary aşakdaky formulalar arkaly girizeliň:

$$x+y=u; y=vx. \tag{1}$$

Bu formulalardan taparys:

$$x=\frac{u}{1+v},\ y=\frac{uv}{1+v}.$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{1+\upsilon};\ \frac{dx}{d\upsilon}=-\frac{u}{(1+\upsilon)^2};\ \frac{dy}{du}=\frac{\upsilon}{1+\upsilon};\ \frac{dy}{d\upsilon}=\frac{u}{(1+\upsilon)^2}$$

sebäpli funksional kesgitleýji:

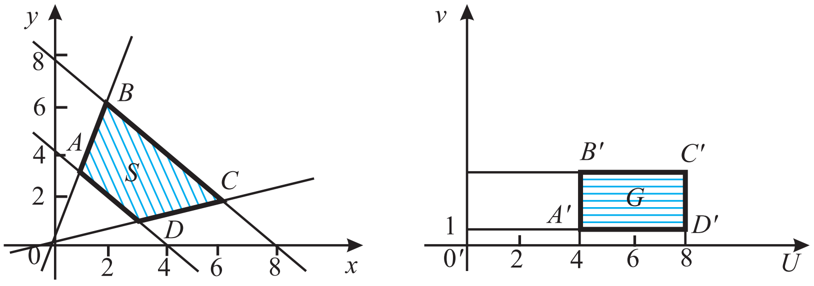
$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2}\\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^3}=\frac{uv}{(1+v)^3}=$$

$$=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

(1) özgertme berlen Oyx tekizlikdäki trapesiýany O'_{uv} tekizlikdäki

$$u=4,\ u=8,\ v=1/3,\ v=3.$$

$A'\,B'\,C'\,D'$ gönüburçluga öwürýär.



7-nji surat

(10) formula arkaly taparys:

$$\iint\limits_{G} \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \iint\limits_{G'} \frac{1}{u^3}\frac{u}{(1+v)^2} = \iint\limits_{G'} \frac{1}{u^2}\frac{1}{(1+v)^2}dudv =$$

$$= \int\limits_{4}^{8} du \int\limits_{1/3}^{3} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{1+v}\right)dv = \int\limits_{4}^{8} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{1+v}\right)\Bigg|_{v=1/3}^{v=3} du =$$

$$= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\int\limits_{4}^{8}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right)\Bigg|_{4}^{8} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{16}.$$

Bellik. Berlen ikigat integraly Dekart gönüburçly koordinatalarda hem hasaplap bolýar, emma egriçyzykly koordinatalarda bu integraly aňsat bolýar.

7. Hasaplaň:

$$\iint\limits_{G} \frac{dxdy}{\sqrt{k^2 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}},$$

bu ýerde $G: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{k^2a^2} + \dfrac{y^2}{k^2b^2} = 1,\ k > 1.$

Çözülişi: Berlen integraly hasaplamak üçin umumylaşdyrylan polýar koordinatalary girizeliň:

$$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi.$$

Bu özgertmäniň ýakobianyny tapalyň:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = a\cos\varphi; \ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\,ap\sin\varphi; \ \frac{\partial y}{\partial p} = b\sin\varphi; \ \frac{kdy}{\partial \varphi} = bp\cos\varphi.$$

$$I(u,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -\,ap\sin\varphi \\ b\sin\varphi & bp\cos\varphi \end{vmatrix} = abp.$$

Integralyň astyndaky funksiýa we G oblastyň serhediniň deňlemeleri aşakdaky görnüşleri alar:

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - p^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - p^2}};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}p^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = p^2, \quad p^2 = 1, \quad p_1 = k$$

$$\frac{x^2}{k^2a^2} + \frac{y^2}{k^2b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad p^2 = k^2, \quad p_2 = k$$

Onda, alarys:

$$\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{k^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \iint\limits_{G'} \frac{abpdpd\varphi}{\sqrt{k^2 - p^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^k \frac{pdp}{\sqrt{k^2 - p^2}} =$$
$$= 2\pi ab\sqrt{k^2 - 1}.$$

Aşakdaky ikigat integralda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

görkezilen D oblastlar üçin integrirleme çäklerini iki görnüşinde hem ýazyň:

8. D : $O(0,0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$ depeli üçburçluk.

Jogaby: $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.$

9. $D: O(0,0), A(2;1), B(-2;1)$ depeli üçburçluk.

Jogaby: $\int_{-2}^{2} dx \int_{|x|/2}^{1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx.$

10. $D: O(0,0), A(1;0), B(1;2), C(0;1)$ depeli trapesiýa.

Jogaby: $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x+1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dx \int_{y-1}^{1} f(x,y)dy.$

11. $D: x^2+y^2 \le 1$ tegelek.

Jogaby: $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

12. $D: x^2+y^2 \le y$ tegelek.

Jogaby: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx.$

13. $D - y = x^2$ we $y = 1$ çyzyklar bilen çäklenen parabolik segment.

Jogaby: $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

14. $D: 1 \le x^2 + yx^2 \le 4$ tegelek halka.

Jogaby:

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^{1} dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \right\} +$$

$$+ \int_{1}^{1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dx.$$

Integrirlemegiň tertibini üýtgediň:

15. $\iint\limits_{0}^{2} dx \iint\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy.$

Jogaby: $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx.$

16. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\left(x^2/4\right)-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

Jogaby: $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+x}}^{1\sqrt{1+y}} f(x,y)dx.$

17. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy.$ *Jogaby*: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$

18. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^3}}^{1-x^2} f(x,y)dy.$

Jogaby: $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx.$

19. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$ *Jogaby*: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

20. $\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0).$

Jogaby: $\int\limits_{0}^{a} dy \left\{ \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx \right\} + \int\limits_{a}^{2a} dy \int\limits_{y^2/4a}^{2a} f(x,y)dx.$

21. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,y)dy.$ *Jogaby*: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx.$

22. $\int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy.$

Jogaby: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$

Aşakdaky integrallary hasaplaň:

23. $\iint\limits_{D} xy^2 dxdy,\ D - y^2 = 2px,\ x = p/2\ (p > 0).$ *Jogaby*: $\frac{p^3}{21}.$

24. $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{2a-x}}\ (a > 0),$ merkezi $(a;a)$ nokatda, radiusy a deň töweregiň gysga dugasy we oklar bilen çäklenen.

Jogaby: $\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$

25. $\iint\limits_{D} |xy|dxdy,$

D – merkezi koordinatalaryň başlangyjynda we radiusy a deň tegelek.

Jogaby: $\frac{a^4}{2}.$

26. $\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy,\quad D: y = x, y = x + a,\ \ y = a$ we

$y = 3a\ (a > 0)$ taraply parallelogram.

Jogaby: $14a^4.$

27. $\iint\limits_{a} y^2 dxdy,\ D: x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$

$(0 \leq t \leq 2\pi)$ sikloidanyň birinji arkasy

Jogaby: $\frac{35\pi a^4}{12}.$

$\iint\limits_{a} f(x,y)dx\ dy$ ikigat integralda polýar koordinatalara geçiň we integrirleme çäkleri goýuň:

28. $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ töwerek.

Jogaby: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp.$

29. $D : x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ töwerek.

Jogaby: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp.$

30. $D : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ halka.

Jogaby: $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{|a|}^{|b|} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp.$

31. $D : 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1 - x.$

Jogaby: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}\operatorname{cosec}(\varphi + \pi/4)} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp.$

32. $D : a \leq x \leq a;\ x^2 / a$ x^2/$(a \leq y \leq a)$ – parabolik segment

Jogaby: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi/\cos^2\varphi} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp.$

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ formulalar arkaly polýar koordinatalaryna geçiň we integrirlemäniň predellerini iki tertipde-de ýazyň:

33. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy.$

$$Jogaby\text{: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} pf(\cos\varphi, p\sin\varphi)\,dp + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,dp =$$

$$= \int_0^1 pdp \int_0^{\pi/2} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} pdp \int_{\arccos 1/p}^{arccin 1/p} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,d\varphi.$$

34. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

$$Jogaby\text{: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{1/\sqrt{2}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1/\cos\varphi} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,dp =$$

$$= \int_{1/\sqrt{2}}^{1} pdp \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos 1/p\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos 1/p\sqrt{2}} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,d\varphi.$$

35. $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x2+y^2})\,dy.$

Jogaby:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2/\cos\varphi} pf(p)\,dp = \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} pf(p)\,dp + \int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{p}\right)pf(p)\,dp.$$

36. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$

Jogaby:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin\varphi/\cos^2\varphi}^{1/\cos\varphi} pf(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho = \int_0^1 pdp \int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4p^2-1}}{2p}} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} pdp \int_{\arccos 1/p}^{\sqrt{1+4p^2-1}} f(p\cos\varphi,\ p\sin\varphi)\,d\varphi.$$

37. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$

bu ýerde $D : (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ $(x \geq 0)$ egri çyzyk bilen çäklenen.

Jogaby:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} pf(p\cos\varphi, p\sin\varphi)dp = \int_0^a pdp \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{p^2}{a}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4p^2-1}}{2p}} f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)d\varphi.$$

r we φ – polýar koordinatalar diýip hasaplap, aşakdaky integrallarda integrirlemegiň tertibini üýtgediň:

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)dr,\ (a > 0).$

Jogaby: $\int_0^a dp \int_{-\arccos\frac{p}{a}}^{\arccos\frac{p}{a}} f(\varphi, p)d\varphi.$

39. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)dr,\ \ (a > 0).$

Jogaby: $\int_0^a dp \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{p^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{p^2}{a^2}} f(\varphi, p)d\varphi.$

40. $\int_a^0 d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r)dr,\ \ (0 < a < 2\pi).$

Jogaby: $\int_0^a dp \int_p^a f(\varphi, p)d\varphi.$

Polýar koordinatalara geçip, ikigat integrallary birgat integrallar görnüşinde ýazyň:

41. $\iint\limits_{x^2+y^2<1} f\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$ *Jogaby*: $2\pi\int_0^1 pf(p)dp.$

42. $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy, \quad D=\{|y|\le |x|\le 1\}.$

Jogaby: $\pi\int\limits_0^1 pf(p)dp+\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{p}\right)pf(p)dp.$

43. $\iint\limits_{x^2+y^2<1} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy.$

Jogaby: $\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\mathrm{tg}\varphi)\cos^2\varphi d\varphi.$

Polýar koordinatalara geçip, ikigat integrallary hasaplaň:

44. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le a^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$ *Jogaby*: $\frac{2\pi a^3}{3}$.

45. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$ *Jogaby*: $6\pi^3$.

x we y üýtgeýän ululyklaryň ornuna u we v täze üýtgeýän ululyklary giriziň we aşakdaky ikigat integrallarda integrirleme çäkleri kesgitläň:

46. $\int\limits_a^b dx\int\limits_{ax}^{\beta x} f(x,y)dy.\ f(x,y)\ dy,\ (0<a<b;\ 0<\alpha<\beta),$

$$u=x,\quad \vartheta=y/x.$$

Jogaby: $\int\limits_a^b udu\int\limits_a^{\beta} f(u,uv)dv.$

47. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)dy,\quad u=x,\quad \vartheta=x-y.$

Jogaby: $\frac{1}{2}\int\limits_1^2 du\int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv.$

48. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, bu ýerde $D{:}\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,

$x=0$, $y=0$ $(a>0)$ egriler bilen çäklenen,

$$x = u\cos\vartheta, \quad y = \sin\vartheta.$$

Jogaby: $\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos^3 v dv \int\limits_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)du.$

x we y üýtgeýän ululyklary laýyk bilen çalşyryp, ikigat integrallary birgat integral görnüşinde ýazyň:

49. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1|} f(x+y)dxdy.$ *Jogaby*: $\int\limits_{-1}^{1} f(u)du.$

50. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)dxdy,$ $(a^2+b^2\neq 0).$

Jogaby: $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du.$

51. $\iint\limits_D f(xy)dxdy,$

$D=\{xy=1, \quad xy=2, \quad y=x, \quad y=4x \ (x>0, y>0)\}.$

Jogaby: $\ln 2\int\limits_1^2 f(u)du.$

Aşakdaky ikigat integrallary hasaplaň:

52. $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ $D=\{x^2+y^2=x+y\}.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{2}.$

53. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy.$ *Jogaby*: $\frac{4}{3}.$

54. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,\ \ D=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}.$

Jogaby: $\frac{2}{3}\pi ab.$

55. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

56. $\iint\limits_a (x+y)dxdy,\ D: x^2=2x,\ \ x+y=4,\ \ x+y=12.$

Jogaby: $543\frac{11}{15}.$

57. $\iint\limits_D xydxdy,\ D: xy=1, x+y=5/2.$ *Jogaby*: $1\frac{37}{128}-\ln 2.$

58. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|dxdy.$ *Jogaby*: $2\pi.$

59. $\iint_{x^2+y^2\le 1}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy.$ *Jogaby*: $\frac{9}{16}.$

60. $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\0\le y\le 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy.$ *Jogaby*: $\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}.$

Ikigat integraly hasaplaň:

61. $\iint\limits_S xdxdy$, bu ýerde $S: xy=6,\ \ x+y-7=0$ egriler bilen çäklenen figura.

Jogaby: $20\frac{5}{6}.$

62. $\iint\limits_S xy^2dxdy$, bu ýerde $S: x^2+y^2=4,\ x+y-2=0$ egriler bilen çäklenen figura.

63. $\iint\limits_S x^4 y dxdy$, bu ýerde $S: xy = 1,\ y - x = 0,\ x = 2$ çyzyklar bilen çäklenen figura.

Jogaby: $7\frac{19}{21}$.

64. $\iint\limits_S (xy^2 + 1)dxdy$, bu ýerde $S: 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} - 1 \le y \le \sqrt{\frac{x}{2}}$ deňsizlikler bilen çäklenen figura.

Jogaby: $\frac{47}{105}$.

§ 2. Üçgat integrallar

Üçgat integrallaryň kesgitlenişi

Kwadratlanýan ýapyk D ýaýla boýunça iki üýtgeýänli funksiýanyň ikigat integralynyň kesgitlenişi ýaly, üçölçegli giňişliklerde kublanýan ýapyk ýaýlar boýunça degişlilikde, üç üýtgeýänli funksiýalaryň üçgat integrallary kesgitlenýär.

Goý, kublanýan üçölçegli ýapyk G ýaýlada çäkli $f(x,y,z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. G ýaýlany umumy içki nokatlary bolmadyk $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ýaýlalara böleliň we olaryň göwrümlerini degişlilikde $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ bilen belgiläliň. Her bölek G_k ýaýlada erkin (x_k, y_k, z_k) nokady alalyň we $f(x,y,z)$ funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny G_k bölek ýaýlanyň ΔV_k göwrümine köpeldip,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k \qquad (4)$$

jemi düzeliň. Ol jeme $f(x,y,z)$ funksiýanyň G ýaýla boýunça integral jemi diýilýär.

Goý, G ýaýlanyň islendik $\{G_k\}$ bölünmesi üçin bölek G_k ýaýlanyň diametriniň iň ulusy d bolsun.

Kesgitleme. Eger $d \to 0$ bolanda (4) integral jemiň G ýaýlanyň bölünmesine we böleklerde alynýan nokatlaryna bagly bolmadyk tükenikli predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x,y,z)$ funksiýanyň G ýaýla boýunça *üçgat integraly* diýilýär we

$$I = \iiint_G f(x,y,z)dv$$

görnüşde belgilenýär. Şunlukda, $f(x,y,z)$ funksiýanyň özüne G ýaýlada integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Integral jemiň kesgitlemesinden görnüşi ýaly, eger $f(x,y,z) = 1$ bolsa, onda (4) integral jemiň predeli bardyr we ol predel G ýaýlanyň göwrümine deňdir. Şeýlelikde soňky kesgitleme boýunça G ýaýlanyň göwrümini tapmak üçin:

$$V = \iiint_G dv$$

formulany alarys.

Üçgat integrallaryň gaýtalanýan integrallara getirilişi

Integrirleme ýaýlanyň parallelepiped haly

Goý, $f(x,y,z)$ funksiýa $P = \{(x,y,z) : a \le x \le b;\ c \le y \le d;\ h \le z \le r\}$ parallelepipetde kesgitlenen we çäkli bolsun. Onda parallelepipediň xy tekizlige proýeksiýasy $G = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ gönüburçluk bolar.

Teorema. Eger $f(x,y,z)$ funksiýanyň

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz.$$

Üçgat integraly we her bir $(x,y) \in G$ üçin

$$f(x,y) = \int_h^r f(x,y,z)dz$$

integral bar bolsa, onda

$$\iint_G F(x,y)dxdy = \iint_G dxdy \int_h^r f(x,y,z)dz$$

gaýtalanýan integral bardyr we

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_G dxdy \int_h^r f(x,y,z)dz$$

deňlik dogrudyr.

$$\iint_G F(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy$$

deňligiň esasynda:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^r f(x,y,z)dz. \qquad (1)$$

Bu formula üçgat integraly hasaplamagyň yzygiderli üç sany kesgitli integraly hasaplamaklyga getirýändigini görkezýär. Edil şo-nuň ýaly, başgaça şertlerde:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_a^b dx \int_h^r f(x,y,z)dx. \qquad (2)$$

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_h^r dy \int_c^d dx \int_a^b f(x,y,z)dx. \qquad (3)$$

Integrirleme ýaýlanyň egriçyzykly haly

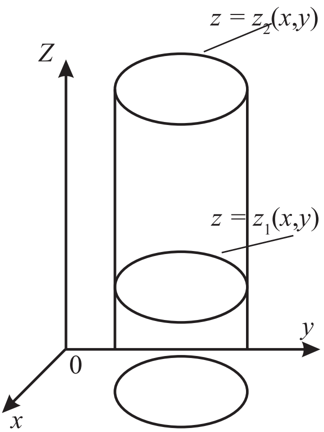
Goý, Q ýaýla aşagyndan $z = z_1(x,y)$ üst bilen, ýokarsyndan $z = z_2(x,y)(z_1(x,y) \leq z_2(x,y))$ üst bilen we gapdallaryndan silindrik üst bilen çäklenen bolsun, şunlukda $z_1(x,y)$ we $z_2\ (x,y)$ funksiýalar Q ýaýlanyň xy tekizlige proýeksiýasy bolan D ýaýlada kesgitlenendir. Ol ýaýlada Oz oka görä silindrik ýaýla diýeris *(8-nji surat)*.

Teorema. Eger $f(x,y,z)$ funksiýanyň Oz oka görä silindrik Q ýaýlada

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz$$

üçgat integraly we her bir $(x,y) \in D$ üçin:

$$g(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$



8-nji surat.

integral bar bolsa, onda

$$\iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dx$$

gaýtalanýan integral bardyr we

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

formula dogrudyr.

Eger D ýaýla Oy oka görä ýönekeý ýaýla bolsa we

$$g(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

funksiýa üçin şol ýaýlada ikigat integral üçin teoremanyň şertleri ýerine ýetse, onda:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

deňlik dogrudyr.

Şuňa meňzeşlikde

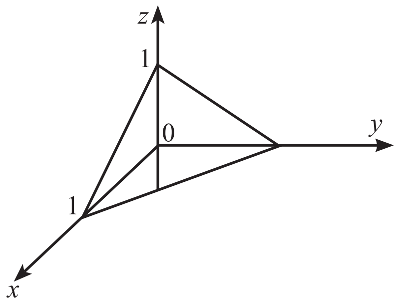
$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

formula subut edilýär.

65. $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tekizlikler bilen çäklenen Q ýaýla boýunça

$$\iiint_Q zdxdydz$$

üçgat integraly hasaplamaly *(9-nji surat)*.



9-njy surat

Bu ýerde

$$Q = \begin{Bmatrix} (x,y,z): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{Bmatrix}$$

Oz oka görä silindrik ýaýladyr. Ondan başga-da *xy* tekizlikdäki $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ göni çyzyklar bilen çäklenen

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x\},$$

ýaýla *Oy* oka görä ýönekeý ýaýladyr. Şoňa göräde ýokardaky formulalar esasynda

$$\iiint\limits_G xdxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{2}\iint\limits_D (1 - x - y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 [(1 - x - y)^3]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1 - x)^3 dx = -\frac{1}{24}[(1 - x)^4]\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

2.1. Üçgat integrallarda üýtgeýänleri çalşyrmak

1. Dekart koordinatalarynda üýtgeýänleri çalşyrmak

Goý, *Oxyz* dekart koordinatalarynyň käbir *Q* oblastynda differensirlenýän:

$$u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z)\ w = w(x,y,z) \qquad (4)$$

funksiýalar berlen bolup, olar birbahaly funksiýalary

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w) \qquad (5)$$

kesgitleýän bolsun, bu ýerde öz üýtgeýänlerine görä käbir oblastda differensirlenýän funksiýalar. (5) funksiýalar Q we oblastlary özara-birbahaly öwürmekligi amala aşyrýar. Şunlukda, üçgat integralda üýtgeýänleri çalşyrmagyň

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydx =$$

$$\iiint_Q f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]I\,|\,dudvdw \qquad (6)$$

formulasyny alarys, bu ýerde

$$I = I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

kesgitleýjä (5) funksiýalaryň ýakobiany diýilýär we ol noldan tapawutly hasap edilýär.

2. Üçgat integrallar silindrik we sferik koordinatalarynda

Eger dekart koordinatalaryny $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$, $z = z$ formulalar boýunça silindrik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u = p$, $v = \varphi$, $w = \check{z}$ alyp, (6) formuladan ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -p\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & p\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = P.$$

Şonuň üçin hem bu halda formula (5) şeýle görnüşi alar:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz = \iiint_Q f(p\cos\varphi, p\sin)pdpd\varphi\check{z}. \qquad (8)$$

Eger-de dekart koordinatalaryny $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) formulalar boýunça sferik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$ alyp, (7) formulany ulanyp, ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 01 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \qquad (9)$$

Bu deňligiň esasynda (6) formula

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_{D'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \qquad (10)$$

görnüşde ýazylar.

66. $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz$ integraly hasaplamaly, bu ýerde Q oblast $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ şardyr.

Integraly hasaplamak üçin dekart koordinatalaryny sferik koordinatalary bilen çalşyrarys. Şonda Q oblast $0 \le \varphi \le \pi$ $0 \le p \le R$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän Q' oblasta özgerdiler. Şonuň üçin (9) formulany ulanyp alarys:

$$\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz = \iiint\limits_{Q'} p^5p^2\sin\theta d\varphi d\theta dp = \\ = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{R} p^7\sin\theta dp.$$

2.2. Üçgat integrallaryň ulanylyşy

Üçgat integrallaryň ulanylyşyna biz eýýäm duş geldik, ýagny jisimiň göwrümi we göwrüm dykyzlygy $p = p(x,y,z)$ funksiýa bilen aňladylan material jisimiň massasy degişlilikde

$$V = \iiint\limits_Q dxdydz, \quad m = \iiint\limits_Q p(x,y,z)dxdydz$$

üçgat integrallar arkaly hasaplanylýar. Ikigat integrallaryň ulanylyşy ýaly üçgat integraly göwrüm dykyzlygy $p = p(x,y,z)$ funksiýa bilen aňladylýan Q material jisimiň agyrlyk merkeziniň koordinatalary üçin:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_Q xp(x,y,z)dxdydz,$$

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_Q xp(x,y,z)dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_Q zp(x,y,z)dxdydz$$

formulalary alarys, bu ýerde m seredilýän Q jisimiň massasydyr we ol ýokarda görkezilen formula boýunça tapylýar. Şonuň ýaly-da, Q material jisimiň Ox, Oy, Oz koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri:

$$I_x = \iiint\limits_Q (y^2 + z^2)p(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_Q (x^2 + z^2)p(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_Q (x^2 + y^2)p(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_Q (y^2 + y^2 + z^2)p(x,y,z)dxdydz$$

formulalar boýunça tapylýar. Koordinatalar tekizliklerine görä inersiýa momentleri bolsa

$$I_{xy} = \iiint\limits_Q z^2 p(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_Q x^2 p(x,y,z)dxdydz,$$

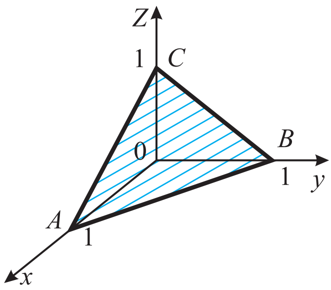
$$I_{xz} = \iiint\limits_Q y^2 p(x,y,z)dxdydz$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

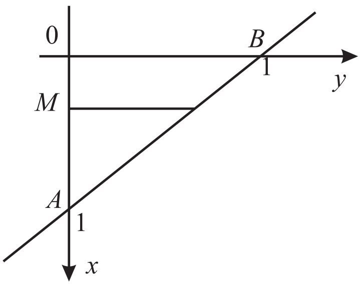
Üçgat integraly hasaplaň:

67. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6}$, bu ýerde $G - x + y + z - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tekizlikler bilen çäklenen oblast.

Çözülişi: G oblast koordinata tekizlikler we $x + y + z - 1 = 0$ tekizlik bilen çäklenen üçburçly piramidadyr.



10-njy surat



11-nji surat

$$\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (4x+3y+z-2)^{-6} dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{(4x+3y+z-2)^{-5}}{-5}\right]_0^{1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{5}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3x+2y-1)^{-5} dy + \frac{1}{5}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (4x+3y-2)^{-5} dy =$$

$$= -\frac{1}{5}\int_0^1 \left[\frac{(3x+2y-1)^{-4}}{-4\cdot 2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx + \frac{1}{5}\int_0^1 \left[\frac{(4x+3y-2)^{-4}}{-4\cdot 3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{40}\int_0^1 (x+1)^{-4} dx - \frac{1}{40}\int_0^1 (3x-1)^{-4} dx - \frac{1}{60}\int_0^1 (x+1)^{-4} dx +$$

$$+ \frac{1}{60}\int_0^1 (4x-2)^{-4} dx = \frac{1}{40}\frac{(x+1)^{-3}}{-3}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{40}\frac{(3x-1)^{-3}}{-3}\Bigg|_0^1 -$$

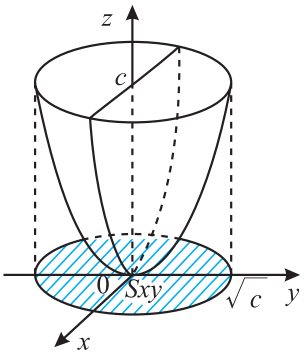
$$- \frac{1}{60}\frac{(x+1)^{-3}}{-3}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{60}\frac{(4x+2)^{-3}}{-3}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{120}\left(\frac{1}{8}-1\right) +$$

$$+ \frac{1}{360}\left(\frac{1}{8}+1\right) + \frac{1}{180}\left(\frac{1}{8}-1\right) - \frac{1}{180\cdot 4}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{192}.$$

68. Üçgat integraly hasaplaň:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2+z)^4\,dxdydz,$$

bu ýerde $G : z = x^2 + y^2$ aýlama paraboloidiň $z = c$ tekizlik bilen kesilen bölegi.



12-nji surat

Çözülişi: Aýlama paraboloid we tekizlik $x^2 + y^2 = c$ töwerek boýunça kesişýärler, onuň Oxy koordinata tekizlige proýeksiýanyň deňlemesi $x^2 + y^2 = c$ görnüşini alar.

Berlen integraly hasaplamak üçin silindrik koordinatalaryna geçeliň.

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$

$z = x^2 + y^2$ paraboloidiň deňlemesi aşakdaky görnüşi alar:

$$z = \rho^2 \quad \Rightarrow p = \sqrt{z}.$$

Onda (8) formula arkaly alarys:

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2+z)^4\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} (p^2+x)^4\,pdpd\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dz \int_0^{\sqrt{z}} (p^2+z)^4 pdp = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dx \int_0^{\sqrt{z}} (p^9 + 4p^7z + 6p^5z^2 +$$

$$+ 4p^3z^3 + z^4p)dp = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c \left(\frac{p^{10}}{10} + \frac{4p^8z}{8} + \frac{6p^6z^2}{6} + \frac{4z^4p^3}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4z^4p^2}{2}\right)\Bigg|_{p=0}^{p=\sqrt{z}.} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{z^5}{10} + \frac{z^5}{2} + z^5 + z^5 + \frac{z^5}{2}\right) dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c \frac{31}{10} z^5 dz = \int_0^{2\pi} \frac{31}{10}\frac{z^6}{6}\Bigg|_0^c d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{31\cdot c^6}{10\cdot 6} d\varphi = \frac{31\cdot 2\pi}{106} c^6 =$$

$$= \frac{31`}{10}\pi c^6.$$

69. Üçgat integraly hasaplaň:

$$\iiint_G \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz,$$

bu ýerde $G: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ şar.

Çözülişi: Bu integraly hasaplamak üçin $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\sin\theta$ sferik koordinatalaryna geçmeli. Bu özgertme G oblasty $G'=\{0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le\pi, 0\le\rho\le R\}$ geçirýär. Integralyň astyndaky funksiýa: $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}=\sqrt{(p^2)^5}=p^5$ we özgertmäniň ýakobiany $I=\rho^2\sin\theta$ deň bolan üçin (9) formula arkaly alarys:

$$\iiint_G \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz = \iiint_G p^2p^5\sin\theta d\varphi d\theta dp =$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R}p^7\sin\theta dp=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{p^8}{8}\right]_{p=0}^{p=R}d\theta=$$

$$=\frac{R^8}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\sin\theta d\theta=\frac{R^8}{8}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\varphi=\frac{R^8}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi R^8}{2}.$$

70. Üçgat integraly hasaplaň:

$$\iiint_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz,$$

bu ýerde G:$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3$ elipsoid bilen çäklenen oblast.

Çözülişi: Bu integraly hasaplamak üçin:

$$x=a\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\rho\sin\theta \qquad (1)$$

formulalar arkaly umumylaşdyrylan polýar koordinatalaryny girizeliň. Onda:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=a\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=ap\cos\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-ap\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = b\sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = bp\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = bp\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = c\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = cp\cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

$u=\rho, v=\theta, w=\varphi$ hasap edip, (7) formula boýunça (10) özgertmäniň ýakobiany tapalyň:

$$I = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & ap\cos\theta\cos\varphi & -ap\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & bp\cos\theta\sin\varphi & bp\sin\theta\cos\varphi \\ c\sin\theta & cp\cos\theta & bp\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = abcp^2\sin\theta.$$

Integralyň astyndaky funksiýa täze koordinatalarda aşakdaky görnüşi alar:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 = (p^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + p^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + p^2\cos^2\theta)^3 =$$
$$= (p^2)^3 = p^6.$$

Bu özgertme G oblasty $G' = \{0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ geçirýär. (6) formula arkaly alarys:

$$\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz = \iiint\limits_{G'} p^6 abcp^2 \sin\theta dp d\theta d\varphi =$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} p^8 \sin\theta dp = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{p^9}{9}\Big|_{p=0}^{p=1} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{9}abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{1}{9}abc\int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2}{9}abc\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{9}abc.$$

71. Üçgat integraly hasaplaň:

$$\iiint\limits_G \frac{xy}{z} dxdydz,$$

bu ýerde $G: y^2 = ax, y^2 = bx$ $(0 < a < b)$; $x^2 = cy, x^2 = dy$ $(0 < c < d)$; $y^2 = pz, y^2 = qz$ $(0 < p < q)$ parabolik silindrler bilen çäklenen oblast.

Çözülişi: Bu integraly hasaplamak üçin täze egriçyzykly koordinatalary girizeliň:

$$y^2 = ux,\ x^2 = vy,\ y^2 = wz, \tag{1}$$

bu ýerden: $x = \sqrt[3]{uv^2};\ y = \sqrt[3]{vu^2};\ z = \dfrac{\sqrt[3]{u^4p^2}}{w}.$

(1) özgertme G oblasty $G' = \{a \le u \le b;\ c \le v \le d;\ p \le w \le q;\}$ oblasta geçirýär. (7) formula arkaly alarys:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} & 0 \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} & 0 \\ \frac{4}{3}u^{1/3}w^{-1}v^{2/3} & \frac{24}{3}u^{4/3}w^{-1}v-{1/3} & -u^{4/3}3w^{-2}v^{2/3} \end{vmatrix} =$$

$$= -w^{-2}u^{4/3}v^{2/3}\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{u^4v^2}}{w^2}.$$

Integralyň astyndaky funksiýa täze koordinatalarda aşakdaky görnüşi alar:

$$\frac{xy}{z} = \frac{\sqrt[3]{uv^2}\sqrt[3]{vu^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{u^4p^2}}{w}} = \frac{uvw}{\sqrt[3]{u^4v^2}}.$$

(6) formula arkaly alarys:

$$\iiint\limits_G \frac{xy}{z}dxdydz = \iiint\limits_{G'} \frac{uvw}{\sqrt[3]{u^4v^2}}\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{u^4v^2}}{w^2}dudvdw = \iiint\limits_{G'} dudvdw =$$

$$= \frac{1}{3}\int_a^b du\int_p^q \frac{uv}{w}dw = \frac{1}{3}\int_a^b du\int_c^d uv\ln w\Big|_{w=p}^{w=q} dv =$$

$$= \frac{\ln q - \ln p}{3}\int_a^b udu\int_c^d vdv = \frac{\ln q - \ln p}{3}\int_a^b u\frac{v^2}{2}\Big|_{p=c}^{v=d} du =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{q}{p}\frac{d^2 - c^2}{2}\int_a^b udu = \frac{1}{6}\ln\frac{q}{p}(d^2 - c^2)\frac{u^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= \frac{(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)}{12}\ln\frac{q}{p}.$$

Üçgat integrallary hasaplaň:

72. $\iiint\limits_G xy^2z^3\,dxdydz,$ bu ýerge $G: z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0.$ üstler bilen çäklenen oblast. *Jogaby*: $\dfrac{1}{364}$.

73. $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$. $G = \{x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}$.

Jogaby: $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{5}{16}$.

74. $\iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz.$ $G = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}$.

Jogaby: $\dfrac{1}{48}$.

75. $\iiint\limits_G \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$ $G = \left\{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

Jogaby: $\dfrac{4}{5}\pi abc$.

76. $\iiint\limits_v \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz.$ $G = \{x^2 + y^2 = z^2, z = 1\}$.

Jogaby: $\dfrac{\pi}{6}$.

Aşakdaky üçgat integrallarda integrirlemäniň çäklerini dürli usullar bilen goýuň:

77. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$

Jogaby: $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^x dz \int\limits_0^{1-x} t(x,y,z)dy + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\} =$

$$= \int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^2 dy \int\limits_{z-y}^{z-y} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}.$$

78. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz.$

Jogaby: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z) = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$

79. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$

Jogaby: $\int\limits_{0}^{1} dx \left\{ \int\limits_{0}^{x^2} dz \int\limits_{0}^{1} f(xmtmz)dy + \int\limits_{x^2}^{x^2+1} dz \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,y,z)dy \right\} =$

$= \int\limits_{0}^{1} dz \left\{ \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{1} f(x,y,z)dx \right\} +$

$+ \int\limits_{1}^{2} dz \int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)dx.$

Sferiki koordinatalara geçip, aşakdaky integrallary hasaplaň:

80. $\iiint\limits_{G} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz, \qquad G = \{x^2+y^2+z^2 = z\}.$

Jogaby: $\frac{\pi}{10}.$

81. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$ *Jogaby*: $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1).$

82. Sferiki koordinatalara geçip, integralyň çäklerini goýuň:

$$\iiint\limits_{G} f\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

$$G = \{z = x^2+y^2, x = y, x = 1, y = 0, z = 0\}.$$

Jogaby: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\varphi}} r^2 f(e)dr.$

83. Laýyk koordinatalara geçip, integraly hasaplaň:

$$\iiint_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz.\quad G=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}.$$

Jogaby: $\frac{\pi^2 abc}{4}$.

84. Sferiki koordinatalara geçip integraly hasaplaň:

$$\iiint_v (x^2+y^2)dxdydz,\qquad G=\{x^2+y^2=2z;\ z=2.\}.$$

Jogaby: $\frac{16\pi}{3}$.

85. Integraly hasaplaň:

$$\iiint_G dxdydz,\quad G-\{z=ay^3,\quad z=by^2,\quad y>0\quad (0<a<b),$$

$$z=ax,\ z=\beta x),\quad z=h(h>0)\}.$$

Jogaby: $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{b}\right)h^4\sqrt{h}$.

86. Integraly hasaplaň:

$$\iiint_G xyzdxdydz,\quad G=\{x>0,\quad y>0,\quad z>0,$$

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\ z=\frac{x^2+y^2}{n},$$

$$(0<a<b;\quad 0<\alpha<\beta;\quad 0<m<n).\}$$

Jogaby: $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\times(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\alpha}{\beta}\right]$.

§ 3. Egriçyzykly integrallar

Birinji görnüşli egri çyzykly integrallar kesgitli integrallara getirilip hasaplanýar. Eger giňişlikdäki egriçyzyk L parametrik deňlemeler bilen:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

berlen bolsa, onda

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dl. \qquad (1)$$

Eger egri L Oxy tekizlikde ýatan bolsa, onda

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt. \qquad (2)$$

Hususy ýagdaýda ($y = y(x)$, $a \le x \le b$) görnüşde berlen egriler üçin

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x,y(x)\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (3)$$

Eger egri çyzyk $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ polýar koordinatalarda berlen bolsa, onda

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(p\cos\varphi, p\sin\varphi)\sqrt{p^2 + p'^2}\,d\varphi. \qquad (4)$$

Ikinjii görnüşli egri çyzykly integrallar kesgitli integrallara getirilip hasaplanýar. Eger giňişlikdäki egriçyzyk L parametrik deňlemeler bilen:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

berlen bolsa, onda:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z) + R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) +$$
$$+ Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\,dt. \qquad (5)$$

Eger egri L Oxy tekizlikde ýatan bolsa, onda:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int \{p[x(t),y(t)]x'(t) +$$
$$+ Q[x(t),(t)] + y'(t)\}\,dt. \qquad (6)$$

Hususy ýagdaýda ($y = y(x)$, $a \le x \le b$) görnüşde berlen egriler üçin

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(x)\}dx. \quad (7)$$

Aşakdaky birinji görnüşli egriçyzykly integrallary hasaplaň:

87. $\int_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}\,dl$,

bu ýerde $L: y = \mathrm{ctg}x;\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ egriniň dugasy.

Çözülişi: $y = \mathrm{ctg}\,x$ egride $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ şonuň üçin

$$dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2}dx,\ \ dl = \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x}dx.$$

(3) formula arkaly alarys:

$$\int_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}\,dl = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\sin^4 x}{\sin x}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x dx =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\sin x dx =$$

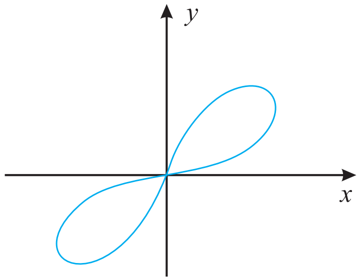
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x d(\cos x) = \ln\left|\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$-(\cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln \mathrm{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{8*3} =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{12} - \ln \mathrm{tg}\frac{\pi}{8}.$$

88. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 dl$,

bu ýerde $L: (x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ egriniň 1-nji kwadrantda ýatan bölegi.



13-nji surat

Çözülişi: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ formulalar arkaly polýar koordinatalara geçeliň, onda:

$$\sqrt{x^2+y^2} = p, \quad \text{arctg}\,(y/x) = \varphi$$

$$p = \alpha\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi/2$$

$$p' = \frac{\alpha\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} \text{ bolany üçin:}$$

$$dl = \sqrt{p^2+p'^2}\,d\varphi = \sqrt{\alpha^2\sin 2\varphi + \alpha^2\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

(4) formula arkaly alarys:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\text{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 dl = \int_0^{\pi/2} p\varphi^2\frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin^2 2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\alpha\sqrt{\sin 2\varphi\varphi^2}\,\frac{ad\varphi}{\sqrt{\sin^2 2\varphi}} = \alpha^2\int_0^{\pi*2}\varphi^2 d\varphi = \alpha^2\varphi^3\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2\pi^2}{24}.$$

89. Hasaplaň:

$$\int_L \sqrt{\frac{\alpha^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}\,dl.$$

bu ýerde $L : x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \le t < \pi/2$ ellipsiň dugasy.

$$x_t' = -a\sin t, \quad y_t' = b\cos t,$$

$$dl = \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

bolany üçin:

$$\int_L \sqrt{\frac{\alpha^2}{b^2}y^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}\,dl = \int_L \sqrt{\frac{\alpha^2}{b^2}b^2\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}a^2\cos^2 t}\,dl =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t +$$

$$+ b^2\cos^2 t)\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt + b^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{b^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}(a^2+b^2).$$

90. Hasaplaň:

$$\int_L \sqrt{x^2+2x^2}\,dl,$$

bu ýerde $L: x^2+y^2+z^2=R^2$ we $y=z$ deňlemeler bilen kesgitlenen töwerek.

Çözülişi: Berlen halda çyzyk iki üstüň: $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferanyň we $y=z$ – koordinatalaryň başlangyjyndan geçýän tekizligiň kesişmesi bilen berlen.

Berlen çyzygyň parametrik deňlemesini ýazalyň: Goý, $z=t$ bolsun. Onda $y=t$ we $x=\pm\sqrt{R^2-2t^2}$ (bu deňleme $y=z=t$ deňligi hasaba alyp $x^2+y^2+z^2=R^2$ deňlemeden tapylan).

Çyzygyň:

$$x=\pm\sqrt{R^2-2t^2} \quad y=t, \quad z=t$$

parametrik deňlemelerden taparys:

$$x' = \pm\frac{2t}{\sqrt{R^2+2t^2}}, \quad y'=1, \quad z'=1.$$

Onda

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{\frac{4t^2}{R^2+2t^2}+1+1}\,dt=\frac{\sqrt{2}\,R}{\sqrt{R^2-2t^2}}dt$$

$x=\pm\sqrt{R^2-2t^2}$ deňlemelerden t ululygyň üýtgeýän çäklerini kesgitläliň: Goý, $x=0$ ýa-da $R^2-2t^2=0$. Onda

$$t_1=-\frac{R}{\sqrt{2}}, \quad t_2=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Berlen çyzykda $x^2+2z^2=R^2$ ýa-da $\sqrt{x^2+2z^2}=R$ deňdigini göz öňünde tutup alarys:

$$\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl=2\int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} R\frac{\sqrt{2}\,R}{\sqrt{R^2-2t^2}}dt=2R^2\int_{-R\backslash\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}}\frac{d(\sqrt{2}\,t)}{\sqrt{R^2(\sqrt{2}\,t)^2}}=$$

$$=R^2\arcsin\frac{\sqrt{2}\,t}{R}=2R^2\Big|_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}}=2R^2[\arcsin 1-\arcsin(-1)]=2\pi R^2.$$

91. Ikinji görnüşli egriçyzykly integraly hasaplaň:

$$\int_L (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy.$$

bu ýerde $L : A(-1,1)$ nokatdan $B(0,2)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi.

Çözülişi: $A(-1,1)$ we $B(0,2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesi $y = x + 2$ deňleme bilen kesgitlenýär. AB kesimde $y = x + 2$ we $dy = dx$. Onda (7) formula arkaly taparys:

$$\int_L (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy = \int_{-1}^{0} [x^2 + (x + 2)]dx + [x + (x + 2)^2]dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [x^2 + x + 2]dx + [x + x^2 + 4x + 4]dx + \int_{-1}^{0} (2x^2 + 6x + 6)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{2x^2}{3} + 3x^2 + 6x\right)\Big|_{-1}^{0} = -\left(\frac{2}{3} + 3 - 6\right) = \frac{11}{3}.$$

$$\int_L \frac{(y^3 - x^2)dx + (x^3 + y^2)dy}{x^2 + y^2},$$

$$dx = -R\sin t\, dt, \quad dy = R\cos t\, dt, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi/2.$$

92. Hasaplaň:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(y^3 - x^2)dx + (x^3 + y^2)dy}{x^2 + y^2},$$

bu ýerde $L : x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t < \pi/2$ töweregiň dugasy.

Çözülişi: $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t dt$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$ bolany üçin (6) formula boýunça alarys:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(y^3 - x^2)dx + (x^3 + y^2)dy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(r^3\sin^3 t - R^2\cos^2 t)(-R\sin t dt) + (R^3\cos^3 t + R^2\sin^2 t)R\cos t dt}{R^2\cos^2 + R^2\sin^2 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{R^4\cos^4 + R^3\sin^2 t\cos t + R^3\cos^2 t\sin t - R^4\sin^4 t}{R^2} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (R^2\cos^4 t - R^2\sin^4 t + R\sin^2 t\cos t + R\cos^2 t\sin t)dt =$$

$$= R^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 tdt - R^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 tdt + R\int_0^{\pi/2}\sin^2 td(\sin t) -$$

$$-R\int_0^{\pi/2}\cos^2 dt(\cos t) = R\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} - R\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}R.$$

Bellik. Bu ýerde

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 tdt = \frac{3}{16}\pi, \quad \int_0^{\pi/2}\sin^4 tdt = \frac{3}{16}\pi$$

deňlikler hasaba alnypdyr.

93. Ikinji görnüşli egriçyzykly integraly hasaplaň:

$$\int_L y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz,$$

bu ýerde L giňişlikde $A(1,0,2)$ nokatdan $B(3,1,4)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi.

Çözülişi: $A(1,0,2)$ we $B(3,1,4)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini tapalyň:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y=0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2}$$

Deň gatnaşyklary t bilen belgiläp, göni çyzygyň parametrik deňlemesini alarys:

$$x = 1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 2 + 2t,$$

bu ýerden:

$$dx = 2dt, \quad dy = dt, \quad dz = 2dt.$$

Bu deňlemelerden A nokatdan B nokada tarap süýşende t parametr 0-dan 1-e çenli üýtgeýär. Onda (5) formulada integralyň çäkleri $t_1 = 0$; $t_2 = 1$. Diýmek,

$$\int_L y^2dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz = \int_0^1 t^2 2dt + [(1 + 2t)^2 +$$

$$+(2 + 2t)]dt + [(1 + 2t) + t + (2 + 2t)^2]2dt = \int_0^1 [2t^2 + 1 + 4t +$$

$$+4t^2 + 2 + 2t + 2(1 + 2t + 8t + 4t^2)]dt = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13)dt =$$

$$= \left(\frac{14t^3}{3} + 14t^2 + 13t\right)\Big|_0^1 = \frac{95}{3}.$$

Aşakdaky birinji görnüşli egriçyzykly integrallary hasaplaň:

94. $\int_L ydl,$

bu ýerde $L : A(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli $y = x$ göni çyzygyň kesimi. *Jogaby*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

95. $\int_L xdl,$

bu ýerde $L : A(1,1)$ we $B\left(1\frac{1}{2}\right)$ nokatlaryň arasyndaky $2y = x^2$ çyzygyň dugasy. *Jogaby*: $(2\sqrt{2}-1)/3$.

96. $\int_L \frac{x^3}{y^2} dl,$

bu ýerde $L : A(1,1)$ we $B\left(2\frac{1}{2}\right)$ nokatlaryň arasyndaky $xy = 1$ çyzygyň dugasy. *Jogaby*: $17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}/6$.

97. $\int_L \sqrt{1+x^6}\, dl,$

bu ýerde $L : A(0,0)$ we $B\left(1,\frac{1}{4}\right)$ nokatlaryň arasyndaky $4y = x^4$ çyzygyň dugasy. *Jogaby*: 8/7.

98. $\int_L y^2 dl,$

bu ýerde $L : A(0,1)$ we $B(1,e)$ nokatlaryň arasyndaky $x = \ln y$ çyzygyň dugasy. *Jogaby*: $[(1+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}]/3$.

99. $\int_L \frac{[\cos^2 x]}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl,$

bu ýerde $L : y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ sinusoidanyň dugasy. *Jogaby*: $\frac{\pi}{2}$.

100. $\int_L \frac{[\cos^3 x]}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl,$

bu ýerde $L : y = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ kosinusoidanyň dugasy. *Jogaby*: 3/2

101. $\int_L \sqrt{1+\cos^4 x}\, dl,$

bu ýerde $L: y = \operatorname{tg} x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ tangensoidanyň dugasy.
Jogaby:$(10+\pi)/8$.

102. $\int_L \sin^4 x \cos x dl,$

bu ýerde $L: y = \ln \sin x,\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$ egriniň dugasy. *Jogaby*: 5/64.

103. $\int_L \sin^2 x \cos^3 dl,$

bu ýerde $L: y = \ln \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ egriniň dugasy. *Jogaby*: $\frac{\pi}{32}$.

104. $\int_L y^2 dl,$

bu ýerde $L: x^2 + y^2 = R^2,\ y \ge 0$ ýokarky ýarym tõwerek.

Jogaby: $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\, dl.$

105. $\int_L \sin^2 x dx + y^2 dy,$

bu ýerde $L: \rho = a(1+\cos\varphi)$ kardioidanyň ýokarky ýarymy.
Jogaby: $16a^2/3$.

Aşakdaky ikinji görnüşli egriçyzykly integrallary hasaplaň:

106. $\int_L \sin^2 x dx + y^2 dy,$

bu ýerde $L: y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$ çyzygyň dugasy. *Jogaby*: $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

107. $\int_L \sqrt{x^2+3y}\, dy + (x-y)dx,$

bu ýerde $L: A(0,0);\ B(1,1)$ çenli $y = x^2$ parabolanyň dugasy.

Jogaby: $\frac{3}{2}$.

108. $\int_L \frac{xdx + ydy}{x^3 + y^3}$,

bu ýerde $L : A(1,1) – A(1,1)$ – dan $B(2,2)$ çenli göni çyzygyň kesimi.

Jogaby: $\frac{1}{2}$.

109. $\int_L (x^2 + y^2)dx + xydy$,

bu ýerde $L : A(0,1)$-dan $B(1,e)$-e çenli $y = e^x$ egriniň dugasy.

Jogaby: $\frac{3e^2}{4} + \frac{1}{12}$.

110. $\int_L \sin^3 xdx + \frac{dy}{y^2}$,

bu ýerde $L : x = 0$-dan $x = \frac{\pi}{3}$-e çenli $y = \mathrm{ctg}x$ egriniň dugasy.

Jogaby: $\frac{5}{24} - \sqrt{3}$.

111. $\int_L (x^2 + y + z)dx + z^2 dy + (x + y^2)dx$,

bu ýerde $L : A(2,1,0)$-dan $B(4,3,1)$-e çenli göni çyzygyň kesimi.

Jogaby: 95/3.

112. $\int_L yzdx + z^2 dy + (x - y)dx$,

bu ýerde $L : A(1,0,2)$-dan $B(2,– 1,0)$ çenli göni çyzygyň kesimi.

Jogaby: – 17/3.

Griniň formulasy

Eger S ýaýla $x = a, x = b$ göni çyzyklaryň kesimlerinden we $[a,b]$ kesimde üznüksiz $y = \varphi(x)$, $y = \Psi(x)(\varphi(x) \le \Psi(x))$ egrilerden düzülen L ýapyk çyzyk bilen çäklenen, $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ funksiýalar we olaryň birinji we ikinji tertipli hususy onümleri L egri bilen çäklenen ýapyk S ýaýlada üznüksiz bolsalar, onda

$$\oint_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \qquad (8)$$

Egriçyzykly integral:

$$\int_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

bu ýerde L kontur bütinleýin S oblastda ýatmaly, $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ funksiýalar we olaryň birinji we ikinji tertipli hususy önümleri üznüksiz bolanda, integrirlemegiň ýoluna bagly bolmasa, onda:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{9}$$

Bu ýagdaýda integralyň aşagyndaky aňlatma käbir funksiýanyň doly differensialyny aňladýar

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y)$$

we

$$\int_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2,y_2) - U(x_1 - y_1), \tag{10}$$

bu ýerde $M_1(x_1,y_1)$ we $M_2(x_2,y_2)$ – integrirlemegiň başlangyç we ahyrky nokatlary. Hususy ýagdaýda, ýapyk kontur boýunça integral nola deň:

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Egriçyzykly integral:

$$I = \int_{(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dx. \tag{11}$$

bu ýerde L kontur bütinleýin V oblastda ýatmaly, $P = P(x,y,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$funksiýalar we olaryň birinji we ikinji tertipli hususy onümleri üznüksiz bolanda, integrirlemegiň ýoluna bagly bolmasa, onda:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\delta \partial x}. \tag{12}$$

Bu ýagdaýda integralyň aşagyndaky aňlatma käbir funksiýanyň doly differensialyny aňladýar.

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = dU(x,y,z)$$

we

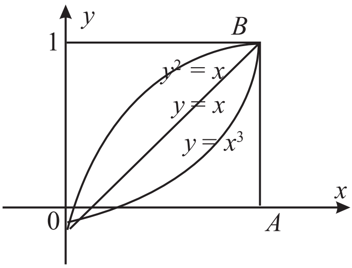
$$\int_{(x_1 y_1 z_1)}^{(x_2 y_2 z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = Y(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1). \tag{13}$$

Hususy ýagdaýda, ýapyk kontur boýunça integral nola deň:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

113. Ikinji görnüşli egriçyzykly integraly aşakdaky hallaryň her birinde hasaplaň:

$$\int_{(L)} (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy.$$



14-nji surat

L – $O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi;

L – OAB döwük çyzyk, bu ýerde $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$;

L – $y^2 = x$ parabolanyň $O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli dugasy;

$L : y = x^3$ parabolanyň $O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli dugasy;

Çözülişi: 1) $O(0,0)$ we $B(1,1)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesi $y = x$, onda birinji halda $y = x$, $dy = dx$ ýagny

$$I_1 = \int_L (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int_0^1 (x^3 + 3x^4)dx +$$

$$+(x^3 + 2x^4)dx = \int_0^1 (2x^3 + 5x^4)dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^5\right)\Bigg|_0^1 = 1,5.$$

2) Ikinji halda berlen integral iki integralyň jemine deň. Birinji integral OA kesim boýunça, ikinji integral bolsa AB kesim boýunça tapylýar: OA kesimde $y = 0$ we $dy = 0$; AB kesimde bolsa $x = 1$; $dx = 0$, onda:

$$\int_{OA} (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int_{AB} (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int_0^1 (y^3 + 2y)dy = \left(\frac{y^4}{4} + y^2\right)\Bigg|_0^1 = 1\frac{1}{4},$$

$$I_2 = \int\limits_L (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int\limits_{OA} (x^3 + 3x^2y^2)dx +$$

$$(y^3 + 2x^3y)dy + \int\limits_{AB} (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = 1,5.$$

3) Üçünji ýagdaýda $y^2 = x$ we $dx = 2ydy$, onda

$$I_3 = \int\limits_L (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int\limits_0^1 (y^6 + 3y^4y^2)2ydy +$$

$$+(y^3 + 2y^6y)dy = \int\limits_0^1 (10y^7 + y^3)dy = \left(\frac{5}{4}y^3 + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = 1,5.$$

4) Dördünji halda $y = x^3$; $dy = 3x^2\, dx$, diýmek:

$$I_4 = \int\limits_L (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy = \int\limits_0^1 (x^2 + 3x^2x^6)dx +$$

$$+(x^9 + 2x^3x^3)3x^2dx = \int\limits_0^1 (x^3 + 9x^3 + 3x^{11})dx = \left(\frac{x^4}{4} + x + \frac{x^{12}}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1,5.$$

Bellik. Seredilen dört halda hem berlen egriçyzykly integralyň bahasy 1,5-e deň. Bu netije tötänleýin bolmaýar. Hakykatdan hem, berlen mysalda

$$P(x,y) = x^3 + 3x^2y^2, \quad Q(x,y) = y^3 + 2x^3y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y$$

ýa-da (9) şert ýerine ýetýär we egriçyzykly integralyň bahasy integrirlemegiň ýoluna bagly däldir.

114. Ikinji görnüşli egriçyzykly integraly aşakdaky hallaryň her birinde hasaplaň:

$$I = \int\limits_L (x + 2x^3y^2 - y^4)dx + (y^2 - 3x^2y^3 + 4xy)dy.$$

$L: O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi;

$L: OAB$ döwük çyzyk, bu ýerde $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$;

$L: y = x^2$ parabolanyň $O(0,0)$ nokatdan $B(1,1)$ nokada çenli dugasy;

Çözülişi: 1) $y = x$, $dy = dx$, onda:

$$I_1 = \int_0^1 (x + 2x^5 - x^4)dx + (x^2 - 3x^5 + 4x^2)dx =$$

$$= \int_0^1 (x + 5x^2 - x^4 - x^5)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} -$$

$$-\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{9}{5}.$$

2) $$I_2 = \int_{OA} + \int_{AB} = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (y - 3y^3 + 4y)dy =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{y^3}{3} - \frac{3y^4}{4} + 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{25}{12}.$$

3) $$I_3 = \int_L (x + 2x^3x^4 - x^8)dx + (x^4 - 3x^2x^6 + 4xx^2)2xdx =$$

$$= \int_0^1 (x + 2x^7 - x^8 + 2x^5 - 6x^9 + 8x^4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^8}{4} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^6}{3} -\right.$$

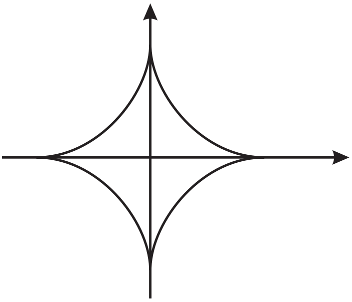
$$\left.-\frac{3x^{10}}{5} + \frac{8x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{71}{36}.$$

Bellik. Bu integral integrirleme ýoluna bagly, sebäbi (9) şert ýerine ýetmeýär:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3y - 4y^3, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^3 + 4y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

115. Ikinji görnüşli egriçyzykly integraly ýapyk kontur boýunça hasaplaň:

$$\oint_L xdy + ydx.$$



15-nji surat

bu ýerde L – astroida

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$$

$$0 \le t \le 2\pi.$$

Çözülişi:

$$dx = -3a\cos^2 t\sin t dt,$$

$$dy = 3a\sin^2 t\cos t dt$$

Onda:

$$\oint_L xdy + ydx = \int_0^{2\pi} \alpha\cos^3 t \cdot 3\alpha\sin^2 t + a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t dt) =$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t)dt = 3a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t -$$

$$-\sin^2 t)dt = \frac{3a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t dt = 0.$$

Bellik. Bu ýerde (9) şert ýerine ýetýär:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

$$u = (x,y) = xy, \qquad d(xy) = xdy + ydx$$

$$\oint_L xdy + ydx = [(x_0 y_0) - (x_0 y_0)] = 0,$$

bu ýerde $M_0(x_0, y_0)$ – astroidanyň islendik nokady.

116. Griniň formulasy arkaly hasaplaň:

$$\oint_L 2xdy - ydx,$$

bu ýerde L ýapyk $y = x^2 (0 \le x \le 1)$ parabola we $O(0,0)$ we $B(1,1)$ nokatlardan geçýän $y = x$ göni çyzygyň OB kesimi bilen çäklenen kontur.

Çözülişi: Berlen mysalda

$$P(x,y) = -y,\ \ Q(x,y) = 2x,\ \ \frac{\partial P}{\partial y} = -1,\ \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3.$$

(8) formula arkaly taparys:

$$\oint\limits_L 2xdy - ydx = \iint\limits_S 3dxdy = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy = 3\int\limits_0^1 y\Big|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= 3\int\limits_0^1 (x - x^2)dx = 3\left(\frac{x^2}{x} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 0,5.$$

117. Ikinji görnüşli egriçyzykly integral

$$\int\limits_L (12xy + 4xz^2)dx + (6x^2 - 5y^2z)dy + (8xz - 5y^3)dx.$$

Integralyň bahasy başlangyjy $O(0,0,0)$ nokatda we ahyry $B(1,1,1)$ nokatda bolan integrirleme ýoluna bagly däldigini görkeziň, integralyň aşagyndaky aňlatma haýsy $u = u(x,y,z)$ funksiýanyň doly differensialy bolar, berlen integralyň bahasyny tapyň.

Çözülişi:

$$P = 12xy + 4z^2,\ \ Q = 6x^2 - 15y^2z,\ \ R = 8xz - 5y^3$$

deň bolan (11) görnüşli integraldyr.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x.$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 8z,\quad \frac{\partial R}{\partial x} = 8z,\quad -\frac{\partial R}{\partial z} = -15y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial y} = -15y^2$$

bolany üçin

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

(12) şert ýerine ýetýär. Diýmek berlen integral integrirleme ýoluna bagly däldigini görkezýär. Onda integralyň aşagyndaky aňlatma käbir $u = u\,(x,y,z)$ funksiýanyň doly differensialy bolýar.

$$du = (x,y,z) = (12xy + 4z^2)dx + (6x^2 - 15y^2z)dy + (8xz - 5y^3)dz,$$

$$du(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12xy + 4x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - 15y^2x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 8xz - 5y^3.$$

Birinji deňlikden y we z hemişelik diýip hasaplap, alarys:

$$u = 6x^2y + 4z^2x + c.$$

Integrirlemäniň hemişeligi x görä hemişelik, emma ol y we z bagly bolmagy mümkin ýa-da $c = \varphi(y,z)$. Şeýlelikde:

$$u = 6x^2y + 4z^2x + (y,z).$$

Bu deňlikden $\frac{\partial u}{\partial y}$ tapyp we ony bar bolan $\frac{\partial u}{\partial y}$ bahasy bilen deňeşdirip, alarys:

$$6x^2 + \varphi_y'(y,z) = 6x^2 - 15y^2z.$$

Bu ýerden:

$$\varphi_y'(y,z) = -15y^2z, \quad \varphi(y,z) = -5y^3z + \psi(x).$$

Onda:

$$u(x,y,z) = 6x^2y + 4z^2x - 5y^3z + (z).$$

Soňky deňlikden $\frac{\partial u}{\partial z}$ tapyp we ony bar bolan $\frac{\partial u}{\partial z}$ bahasy bilen deňeşdirip, alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 8xz - 5y^3 + \psi'(z) \text{ we } \frac{\partial u}{\partial z} = 8xz - 5y^3,$$

$$\psi'(z) = 0, \quad \psi(z) = c$$

Onda:

$$u(x,y,z) = 6x^2y + 4xz^2 - 5y^3z + c.$$

(13) formula arkaly taparys:

$$\int_L (12xy + 4z^2)dx + \psi(6x^2 - 15y^2z)dy + (8xz - 5y^3)dz = u(1,1,1) -$$
$$-u(0,0,0) = 5.$$

Bellik. Bu integraly başga usul bilen hem hasaplap bolýar. Bu integral integrirleme ýoluna bagly däl sebäbi ony O nokatdan B nokada çenli göni çyzygyň kesimi boýunça integrirläliň. O we B nokatlardan geçýän göni çyzygyň parametrik deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar :

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t.$$

Onda $dx = dt$, $dy = dt$, $dz = dt$. OB kesimde $0 \le t \le 1$, onda:

$$\int_L (12xy + 4z^2)dx + (6x^2 - 15y^2 z)dy + (8xz - 5^3)dz =$$

$$= \int_0^1 (12t^2 + 4t^2 + 6t^2 - 15t^3 + 8t^2 - 5t^3)dt = \int_0^1 (30t^2 - 20t^3)dt =$$

$$= (10t^3 - 5t^4)\Big|_0^1 = 5$$

Egriçyzykly integralyň bahasynyň integrirleme ýoluna baglydygyny ýa-da bagly däldigini barlaň:

118. $\int_L 2xe^{x^2+y^2}dx + 3y^2 e^{x^2+y^6}dy.$ *Jogaby*: bagly.

119. $\int_L 8x\sin(4x^2 - 5y^2)dx - 10y\sin(4x^2 - 5y^2)dy.$

Jogaby: bagly däl.

120. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\,dx + \ln(x^2 + y^2 + 1)dy.$ *Jogaby*: bagly.

121. $\int_L (4x^3 - 12x^2 y)dx + (5y^4 - 4y^3)dy.$ *Jogaby*: bagly däl.

122. $\int_L (xy^2 + x^2 - 2y^2)dx + (y^5 - 3x^3 y^2 + x^4)dy.$ *Jogaby*: bagly.

123. Egriçyzykly integraly berlen hallarda hasaplaň:

$$\int_L (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz,$$

bu ýerde:

1) $L - A(0, 0 ,0)$ nokatdan $B(1 ,1 ,1)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi;

2) $L - x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ egriniň dugasy;

3) $L - x = t, y = t^3, z = t^5$ $(0 \le t \le 1)$ egriniň dugasy.

Jogaby: Ähli ýagdaýda 3.

124. Egriçyzykly integraly berlen hallarda hasaplaň:

$$\int_L x^2dx + (x+z)dy + xydz,$$

bu ýerde:

1) $L - A(0 ,0 ,0)$ nokatdan $B(1, 1, 1)$ nokada çenli göni çyzygyň kesimi;

2)$L - x = t, y = t^2, z = t^3 (0 \le t \le 1)$ egriniň dugasy;

3) $L - x = \sin t, y = \sin^2 t, z = \sin^3 t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ egriniň dugasy.

Jogaby: 1) 5/3; 2) 1,9; 3) 1,9.

Integralyň aşagyndaky aňlatma haýsy $u = u\ (x,y,z)$ funksiýanyň doly differensialy bolar, berlen integralyň bahasyny tapyň.

125. $\int_{AB} (3x^2y) - 4xy^2dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2)dy,$

bu ýerde $A(-1,-1)$; $B(1,1)$. *Jogaby*: 2; $u = x^3y + 2x^2y^2 + y^3 + c.$

126. $\int_{AB}(3y^2 + 4y)dx + (6xy + 4x - 4y)dy,$

bu ýerde $A(0 ,1)$, $B(1,2)$. *Jogaby*: 14; $u = 3x^2y + 4xy - 2y^2 + c.$

127. $\int_{(0,2)}^{(1,3)} (4xy - 15x^2y)dx + (2x^2 - 5x^3 + 7)dy.$

Jogaby: – 2; $u = 2x^2y - 5x^3y + 7y + c.$

Integralyň aşagyndaky aňlatmanyň bir funksiýanyň doly differensialy bolýandygyny barlap, egriçyzykly integraly hasaplaň:

128. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2xy^2z^3dx + 2x^2yz^3dy + 3x^2y^2z^2dz.$ *Jogaby*: 1.

129. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (2xy + y^2 + yz^2)dx + (x^2 + 2xy + xz^2)dy = 2xyzdz.$

Jogaby: 3.

130. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} x(y^2 + z^2)dx + y(x^2 + z^2)dy + z(x^2 + y^2)2xyzdz.$

Jogaby: $3/2$.

131. $\int\limits_{(-1,1,2)}^{(1,0,-1)} (4xy + 12x^2z)dx + (2x^2 - 3z^3)dy + (4x^3 - 9yz^2)dz.$

Jogaby: 26.

Griniň formulasyny ulanyp, integraly hasaplaň:

132. $\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, bu ýerde $L - x^2 + y^2 = R^2$.

Jogaby: $\pi R^4/2$.

133. $\oint\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$, bu ýerde $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Jogaby: $-2\pi ab$.

134. $\oint\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$, bu ýerde $L : x^2 + y^2 = R^2$.

Jogaby: 0.

135. $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, bu ýerde

$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ *Jogaby*: 0.

VII bap
DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§ 1. Differensial deňlemeler barada esasy düşünjeler

1. Differensial deňlemäniň kesgitlenişi we onuň çözüwi

Eger deňlemede gözlenýän funksiýa we onuň dürli tertipdäki önümleri saklanýan bolsa, onda bu deňlemä **differensial deňleme** diýilýär. Deňlemedäki gözlenýän funksiýanyň önüminiň ýokary tertibine deňlemäniň tertibi diýilýär.

Eger gözlenýän funksiýa bir üýtgeýänli bolsa, onda degişli differensial deňlemä **ady differensial deňleme** diýilýär. Eger-de gözlenýän funksiýa birnäçe üýtgeýänli bolsa, onda bu differensial deňlemä **hususy önümli differensial deňleme** diýilýär.

n-nji tertipli umumy ady differensial deňleme

$$F(x,y,y,y',y'',...y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde x bagly däl üýtgeýän ululyk, $y = y(x)$ gözlenýän funksiýa, $y,y',y'',...y^{(n)}$ gözlenýän funksiýanyň önümleri, $F(x,y,y',y'',...y^{(n)})$ bolsa berlen funksiýa.

Eger (1) deňleme $y^{(n)}$-e görä çözülen bolsa, onda ol deňlemäni

$$y^{(n)} = F(x,y,y,y',y'',...y^{(n-1)}) \tag{2}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Eger (a,b) interwalda kesgitlenen we n gezek differensirlenýän $y = \varphi(x)$ funksiýa $\forall x \in (a,b)$ üçin (1) deňlemäni:

$$F(x,\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x),..., (x)) \equiv 0$$

toždestwa öwürýän bolsa, onda $y = \varphi(x)$ funksiýa şol deňlemäniň (a,b) interwalda kesgitlenen çözüwi diýilýär. (1) deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{3}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga şol deňleme üçin Koşiniň meselesi diýilýär.

(1) deňlemäni kanagatlandyrýan $y = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ funksiýa şol deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

(1) deňlemäniň umumy çözüwinden erkin hemişelikleriň berlen bahasyndan alnan çözüwine, ýagny $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ çözüwe berlen deňlemäniň hususy çözüwi diýilýär.

Eger (1) differensial deňlemäniň umumy çözüwi anyk däl görnüşde:

$$G(x, y, C_2, ..., C_n) = 0$$

deňlemeden kesgitlenýän bolsa, onda oňa şol deňlemäniň umumy integraly diýilýär.

1. $y = Cx + C^2$ funksiýa $(y')^2 + xy' - y = 0$ differensial deňlemäniň çözüwidigini görkeziň.

Çözülişi: Berlen funksiýanyň önümini tapalyň:

$$y' = (Cx + C^2)' = C.$$

Funksiýany we onuň önümini berlen deňlemä goýup alarys:

$$C^2 + xC - Cx - C^2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Diýmek berlen funksiýa berlen deňlemäni kanagatlandyrýar we ol berlen differensial deňlemäniň çözüwidir.

Berlen funksiýalar berlen differensial deňlemeleriň çözüwimi?

2. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \dfrac{e^x}{(k-1)^2}$; $\qquad y'' - 2ky' + k^2y = e^x.$

3. $y = Cx + C - C^2$; $\qquad (y')^2 - y' - xy' + y = 0.$

4. $y = \sin x - 1 + C - e^{-\sin x}$; $\qquad y' + y\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$..

5. $\arcsin\dfrac{y}{x} = c - x$; $\qquad xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$.

6. $y - arcctg\dfrac{x+y}{a} = C$; $\qquad (x+y)^2y' = a^2.$

7. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \dfrac{12x+7}{144}$; $\qquad y''' - 7y' + 12y = x.$

8. $y = \left(C_1 + C_2x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^x + C_3$; $\qquad y''' - 2y'' + y' = e^x.$

9. $y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}; \qquad x^2 yy'' - (xy' - y)^2 = 0.$

10. $(x-1)(3x+2y-1)=C$ funksiýa $(3x+y-2)dx+(x-1)dy=0$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidigini görkeziň. Abssissasy 2-ä deň bolan nokatdan geçýän we eger bu nokatda galtaşýan çyzyk Ox okuna parallel bolsa, onda integral egrini tapyň.

Çözülişi: Berlen funksiýany x boýunça differensirläliň. Alarys:

$$(3x + 2y - 1) + (x - 1)\left(3 + 2\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$$(3x + 2y - 1)dx + (x - 1)(3dx + 2dy) = 0,$$

$$(3x + y - 2)dx + (x - 1)dy = 0.$$

Onda berlen funksiýa berlen deňlemäniň umumy çözüwidir.

Eger $x = 2$ we $\frac{dy}{dx} = 0$ şertleri kanagatlandyrýan C hemişeligiň bahasy tapylsa, onda gözlenýän integral egrini taparys. Berlen şertleri umumy çözüwine we differensirlenen deňlige goýulsa, onda deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases}(2-1)(6+2y-1)=0\\(6+2y-1)+(2-1)(3+2\cdot 0)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y+5=C\\2y+8=0,\end{cases}\quad \begin{cases}2y+5=C\\y=-4,\end{cases}\quad \begin{cases}y=-4\\C=-3.\end{cases}$$

$C = -3$ umumy çözüwine goýup gözlenýän integral egrini alarys:

$$(x-1)(3x+2y-1)+3=0.$$

11. $y = C\sin x \cdot e^x$ funksiýa $y'' - 2y' + 2y = 0$ differensial deňlemäniň çözüwidigini subut ediň. Bu çözüw umumy ýa-da hususy?

Çözülişi: $y = C\sin x \cdot e^x$; $y' = C\cos x \cdot e^x + C\sin x \cdot e^x$;

$$y'' = -C\sin x \cdot e^x + C\cos x \cdot e^x + C\cos x \cdot e^x + C\sin x \cdot e^x = 2C\cos x \cdot e^x.$$

Berlen funksiýany we onuň tapylan önümlerini deňlemä goýup, alarys:

$$2C\cos x\cdot e^x - 2C\cos x\cdot e^x - 2C\sin x\cdot e^x + 2C\sin x\cdot e^x = 0;\quad 0 = 0.$$

Diýmek, berlen funksiýa berlen deňlemäniň çözüwidir. Ol hususy çözüw, sebäbi differensial deňleme ikinji tertipli, emma bu çözüwe bir hemişelik girýär.

12. $y = C_1x + 2C_2x + C_3$ funksiýa $y''' + y'' = 0$ differensial deňlemäniň çözüwidigini subut ediň. Bu çözüw umumy ýa-da hususy?

Çözülişi: $y' = C_1 + 2C_2$, $y'' = 0$, $y''' = 0$. Onda berlen funksiýa berlen deňlemäni kanagatlandyrýar, emma ol umumy çözüwi däl, sebäbi üçünji tertipli deňlemä bir-birine bagly däl üç hemişelik girmeli. Bu ýerde $C_1x + 2C_2x = (C_1 + 2C_2)x$, onda C_1 we C_2 çyzykly bagly. Diýmek berlen funksiýa berlen deňlemäniň hususy çözüwidir.

13. $y = Ce^{kx}$ funksiýa $y' = ky$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidigini subut ediň.

14. $y = Cx + C^2$ we $y = -\dfrac{x^2}{4}$ funksiýalar $y = xy' + (y')^2$ differensial deňlemäniň çözüwleridigini subut ediň. Cözüwleriň arasynda hususy çözüwi barmy?

Jogaby: Birinji funksiýa deňlemäniň umumy çözüwi. Ikinji funksiýa hususy çözüwi däl, sebäbi ol umumy çözüwden alyp bolmaýar. Ikinji çözüw x ululygy ikinji derejede saklaýar, emma umumy çözüwde x ululyk birinji derejede girýär. Bu çözüwe aýratyn çözüw diýilýär.

15. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ funksiýa $y'' - y = 0$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidigini subut ediň. Bu integral egrileriň arasyndan $A(0,2)$ nokatdan geçýän we şol nokatda ol egrä galtaşýan çyzyk Ox okuna parallel bolan integral egrini tapyň.

Jogaby: Berlen funksiýa we onuň önümine $x = 0$, $y = 2$, $y' = 0$ şertleri goýup we C_1 we C_2 ululyklara görä sistemany çözüp hem-de olaryň bahalaryny berlen funksiýa goýup, alarys:

$$y = e^x + e^{-x}.$$

16. $x^2 + y^2 - Cx = 0$ funksiýa $y^2 - 2xyy' = 0$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidigini subut ediň.

17. $y = C_1 + C_2 \sin(x + C_3)$ funksiýa $y''' + y' = 0$ differensial deňlemäniň umumy çözüwidigini subut ediň.

18. Differensial deňlemäniň umumy çözüwi boýunça deňlemäni tapmaly.

$$y^2 - 2Cx = 0$$

Çözülişi: Ony differensirläp taparys:

$$yy' - C = 0.$$

Bu iki gatnaşykdan C hemişeligi yok edip, differensial deňlemäni alarys:

$$yy' = C, \quad y^2 - 2xyy' = 0.$$

19. Differensial deňlemäniň umumy çözüwi boýunça deňlemäni tapmaly.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

a, b, r parametrler bolup hyzmat edýärler .

Çözülişi: Üç gezek differensirläp alarys.

$$x - a + (y - b)y' = 0 \quad (A)$$

$$1 + (y - b)y'' + y'^2 = 0 \quad (B)$$

$$(y - b)y''' + 3y''y' = 0 \quad (W)$$

a we r parametrler differensirlenilende ýok boldular, b parametrleri soňky iki deňlemeden ýok etmek galýar.(B) we (W) deňliklerden $(y - b)$ ýok edip, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

20. Umumy çözüwi $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Çözülişi: Berlen umumy çözüwde 3 sany hemişelik bar, şonuň üçin oňa üçünji tertipli differensial deňleme degişli bolmaly. Berlen funksiýany üç gezek differensirläp alarys:

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}; \quad y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x};$$

$$y''' = C_1e^x - C_2e - x.$$

Birinji we ikinji önümleri goşup, C_2 hemişeligi ýoklamaly:

$$y'' + y' = 2C_1e^x.$$

Üçünji we ikinji önümleri goşup, C_2 hemişeligi ýoklamaly:

$$y'' + y'' = 2C_1e^x.$$

Soňky iki deňlemeden C_1 hemişeligi ýoklamaly: ikinji deňlemeden birinji deňlemäni aýryp, alarys: $y''' - y' = 0$.

21. Umumy çözüwi $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Çözülişi: Berlen umumy çözüwde 2 sany hemişelik bar, şonuň üçin oňa ikinji tertipli differensial deňleme degişli bolmaly. Berlen funksiýany iki gezek differensirläp alarys:

$$y' = 2C_1e^2x + 3C_2e^3x; \quad y'' = 4C_1e^2x + 9C_2e^3x.$$

Birinji önümi 3-e köpeldip ikinji önümden aýryp, C_2 hemişeligi ýoklamaly:

$$y'' - 3y' = -2C_1e^{2x}. \qquad \text{(I)}$$

Berlen funksiýany 3-e köpeldip birinji önümden aýryp, C_2 hemişeligi ýoklamaly:

$$y' = 3y - C_1e^2x. \qquad \text{(II)}$$

(II) deňlemäni ikä köpeldip (I) deňlemeden aýryp, alarys:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

22. Umumy çözüwi $y = C_1e^x + C_2e^2x$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Jogaby: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

23. Umumy çözüwi $y = C_1x + \dfrac{C_1}{x}$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Jogaby: $x^2y'' - xy' - y = 0$.

24. Umumy çözüwi $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Jogaby: $y'' + y = 0$.

25. Umumy çözüwi $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Jogaby: $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$.

26. Çözüwi $y = C_1 e^{x+C_2}$ bolan differensial deňlemäni tapmaly.

Çözülişi: Berlen çözüwde 2 sany hemişelik bar, şonuň üçin oňa ikinji tertipli differensial deňleme degişli bolmaly. Berlen funksiýany iki gezek differensirläp alarys:

$$y = C_1 e^{x+C_2};(1) \quad y' = C_1 e^{x+C_2} \ (2); \quad y'' = C_1 e^{x+C_2}.$$

Eger (1) we (2) deňlikleri bir-birine bölsek, onda iki hemişelik hem ýoklanylýar:

$$\frac{y}{y'} = 1 \quad \text{ýa-da} \quad y' - y = 0\,.$$

Alnan differensial deňleme birinji tertiplidir. Onda C_1 we C_2 çyzykly baglydyr. Hakykatdan hem, $y = C_1 e^{x+C_2} = (C_1 \cdot e^{C_2}) \cdot e^x = Ce^x$. Diýmek, berlen funksiýada bir hemişelik bar we oňa birinji tertipli differensial deňleme degişlidir.

§ 2. Birinji tertipli differensial deňlemeleriň görnüşleri

1. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler

$$F(x)\varphi(y)dx + f_1(x)\varphi_1\varphi(y)dy = 0 \qquad (1)$$

görnüşdäki deňlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňleme diýilýär.

$f_1(x)\varphi(y) \neq 0$ bolanda (1) deňlemäni $f_1(x)\varphi(y)$ bölüp alarys:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = 0. \qquad (2)$$

Bu deňlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilen (ýa-da üýtgeýänleri böleklenen) deňleme diýilýär. Ol deňlemede dx-iň ýanynda diňe x – e, dy-iň ýanynda diňe y-e bagly funksiýa bardyr. (2) deňlemäni integrirläp, ol deňlemäniň

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = C,$$

umumy integralyny taparys.

27. $\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$

Çözülişi: Integrirleýäris:

$$\int \sin x dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \quad \text{ýa-da} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C,$$

bu ýerden $y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}$. Bu berlen deňlemäniň umumy çözüwidir.

28. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$

Üýtgeýän ululyklary aýyrýarys, şol maksat bilen deňlemäniň iki böleginide $(y^2 - 1)(x^2 - 1)$ bölýäris.

$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0$ alarys.

Bu deňligi integrirläp,

$$\ln|x^2 - 1| + ln|y^2 - 1| = \ln|C|,$$

alarys ýa-da potensirläp, $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$ umumy integraly taparys. (biz amatlylyk üçin integrirlemegiň $\ln|C|$ görnüşde aldyk).

29. $e^{-\frac{1}{x}}ydx + x^2dy = 0.$ *Jogaby*: $e^{-\frac{1}{x}} + \ln y = C.$

30. $2x(1 + e^y)dx = e^y(1 + x^2)dy.$ *Jogaby*: $1 + e^y = C(1 + x^2).$

31. $y - xy' = a(1 + x^2)y'$. *Jogaby*: $\ln\dfrac{x}{(1 + ax)(y - a)}\ln C$.

32. $x(1 + e^y)dx - e^y\, dy = 0$. *Jogaby*: $x^2 - 2\ln(1 + e^y) = C$.

33. $(1 + x^2)y^3 dx + (1 - y^2)x^3\, dy = 0$.

Jogaby: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2\ln\dfrac{x}{y} + C$.

34. $(1 - y^2) + y'(1 - x^2) = 0$.

Jogaby: $(x + 1)(y + 1) = C(x - 1)(y - 1)$.

35. $(x - 1)(y^2 - y + 1)dx - (y + 1)(x^2 + x + 1)dy$.

Jogaby: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2 + x + 1}{y^2 - y + 1} - \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\dfrac{2y - 1}{\sqrt{3}}\right) = C$.

36. $(1 + y^2)(e^2 xdx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$.

Jogaby: $\dfrac{1}{2}e^{2x} - e^y - Ln\sqrt{1 + y^2} - y = C$.

37. $e^{x-y}y' = 1$; $x_0 = 1$ bolanda $y_0 = 1$ şerte kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly. *Jogaby*: $y = x$.

38. $(1 + e^x)yy' = e^y$; $x_0 = 0$ bolanda $y_0 = 0$ şerte kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly. *Jogaby*: $(1 + y)e^{-y} = \ln\dfrac{1 + e^x}{2} + 1 - x$.

39. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$; $x_0 = 0$ bolanda $y_0 = 1$ şerte kanagatlandyrýan hususy çözüwini tapmaly.

Jogaby: $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1$; $y = 1$.

40. $dy = \sin(x - y)dx.$

Çözülişi: Berlen deňlemede üýtgeýän ululyklary bölekläp bolmaýar. Eger $x - y = u$ diýip alsak, onda $dx - dy = du$; $dy = dx - du$. Berlen deňlemede $x - y$ tapawudy we dy ululyklary çalşyrsak, onda alarys:

$$dx - du = \sin u dx; \quad \text{ýa-da} \quad (1 - \sin u)dx - du = 0.$$

Soňky deňlemede üýtgeýän ululyklary bölekläp, alarys:

$$dx = \frac{du}{(1 - \sin u)}; \quad \int dx = \int \frac{du}{(1 - \sin u)}; \quad x = \int \frac{(1 + \sin u)du}{\cos^2 u};$$

$$x = \mathrm{tg} u + \frac{1}{\cos u} + C;$$

u ululygyň bahasyny goýup, alarys:

$$x - \mathrm{tg}(x - y) - \frac{1}{\cos(x - y)} = C.$$

41. $dy = [(x - y)^2 + 1]dx.$ **Görkezme.** $x - y = u.$

Jogaby: $y = x - \dfrac{1}{x + C}..$

42. $y' = \dfrac{a^2}{(x + y)^2}.$ **Görkezme.** $x + y = u.$

Jogaby: $x + y = \arg\left(C + \dfrac{y}{a}\right).$

43. $y' = (ax + by + c)^2.$ **Görkezme.** $ax + by + c = u.$

Jogaby: $ax + by + c = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\,\mathrm{tg}(x\sqrt{ab} + C).$

44. $y' = 3x - 2y + 5.$ **Görkezme.** $3x - 2y + 5 = u.$

Jogaby: $3x - 2y + 5 = \dfrac{3 - e^{C - 2x}}{2}.$

45. $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y(e) = 1.$

Jogaby: $\sqrt{y} = x\ln x - x + C, \ \sqrt{y} = x\ln x - x + 1$

46. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy, \quad y(0) = 1.$

Jogaby: $y = \dfrac{C\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}, \ y = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}.$

2. Birjynsly differensial deňlemeler

Eger $F(x,y)$ funksiýa üçin

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y) \tag{1}$$

toždestwo ýerine ýetýän bolsa, onda $F(x,y)$ funksiýa n ölçegli birjynsly funksiýa diýilýär.

Mysal üçin:

$$F_1(x,y) = 4x + 3y, \qquad F_2(x,y) = x^2\cos\frac{x}{y} + xy,$$

$$F_3(x,y) = \frac{x - y}{y}$$

funksiýalar degişlilikde bir, iki we nol ölçegli birjynsly funksiýalardyr. Hakykatdan-da,

$$F_1(tx,ty) = 4tx + 3ty = t(4x + 3y) = tF_1(x,y);$$

$$F_2(tx,ty) = (tx)^2\cos\frac{tx}{ty} + (tx)(ty) = t^2\left(x^2\cos\frac{x}{y} + xy\right) = t^2F_2(x,y);$$

$$F_3(tx,ty) = \frac{tx - ty}{ty} = \frac{x - y}{y} = t^0F_3(x,y).$$

Eger $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ şol bir n ölçegli birjynsly funksiýalar bolsalar:

$$P(tx,ty) = t^nP(x,y), \quad Q(tx,ty) = t^nQ(x,y),$$

onda:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

deňlemä birjynsly differensial deňleme diýilýär. Eger bu ýerde $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ alsak, onda

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x,y),\ Q\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}Q(x,y),$$

deňlikler alnar. Seýlelikde, bu halda

$$P(x,y) = x^n P\left(1,\frac{y}{x}\right),\quad Q(x,y) = x^n Q\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

bolar. Ol funksiýalary (1) deňlemede ornuna goýup,

$$x^n p\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + x^n Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

ýa-da

$$p\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0. \qquad (2)$$

deňlemäni alarys. Eger bu deňlemede $u = \frac{y}{x}$ ýa-da $y = ux$ belgileme girizsek, onda ol şeýle görnüşi alar:

$$P(1,u)dx + Q(1,u)(udx + xdu) = 0 \quad \text{ýa-da}$$

$$(P(1,u) + uQ(1,u))dx + xQ(1,u)du = 0$$

Alnan deňleme üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemedir. Eger bu differensial deňlemäniň umumy integraly $\varphi(x,u,C) = 0$ bolsa, onda (1) birjynsly differensial deňlemäniň umumy integraly $\varphi\left(x,\frac{y}{x},C\right) = 0$ bolar.

47. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

Çözülişi: $M(x,y)= x^2 - y^2$ we $N(x,y) = 2xy$ funksiýalaryň ikisi-de ikinji ölçegli birjynsly funksiýadyr, sebäbi

$$M(tx,ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2) = t^2 M(x,y),$$

$$N(tx,ty) = 2(tx)(ty) = t^2 2xy = t^2 N(x,y),$$

diýmek, berlen deňleme birjynslydyr.

Üýtgeýän ululygy $y = ux$; $y' = u'x + u$ bilen çalşyryp, üýtgeýän ululyklary aýyrýarys:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{1 + x^2} = 0.$$

Integrirläp alarys: $\ln x + \ln(1 + z^2) = \ln C$,

Potensirleýäris: $x(1 + u^2) = C$ we u ululygy $\frac{y}{x}$ bilen çalşyrýarys:

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

Iň soňkyda öwürmeleri geçirýäris:

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

48. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Çözülişi: Berlen deňlemäni x $(x \neq 0)$ bölüp, ony

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

görnüşde ýazalyň. Onuň birjynsly differensial deňlemedigi aýdyňdyr. Belgilemäni ulanyp, $u'x + u = \sqrt{1 - u^2} + u$ ýa-da

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}.$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemeden üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, $\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni we ony integrirläp, $\arcsin u = \ln|n| + \ln C_1$ $(C_1 > 0)$ (ýa-da $\arcsin u = \ln C|x|$ deňligi alarys. bolýanlygy üçin $\pm c_1 = c$ belgilemäni ulanyp, $\arcsin u = \ln Cx$ deňligi alarys, bu ýerde $|\ln Cx| \leq \frac{\pi}{2}$. $u = \frac{y}{x}$ deňligi göz öňünde tutup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx \quad \text{ýa-da} \quad y = x\sin\ln Cx.$$

Deňlemäniň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edenimizde, deňlemäniň iki bölegini hem $x\sqrt{1 - u^2}$ bölüpdik. Şonuň üçin käbir çözüwleri ýitirmegimiz mümkin. Goý, $x = 0$ we $\sqrt{1-u^2} = 0$ bolsun. Ýöne $u = \frac{y}{x}$ çalşyrmany ulanýanymyz üçin $x \neq 0$. Ikinjisinden $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$ ýa-da $y = \pm x$ alarys. Deňlemede ornunda goýup, $y = x$ we $y = -x$ funksiýalaryň hem berlen deňlemäniň çözüwidigini alarys.

49. $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{y}dx + xdy = 0.$ *Jogaby*: $\ln x + \sqrt{\frac{y}{x}} = C.$

50. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0.$

Jogaby: $(x + y)^2(2x + y)^3 = C.$

51. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$ *Jogaby*: $c^2x^2 - 2yC = 1.$

52. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$ *Jogaby*: $c^2x^2 = 1 + 2yC.$

53. $xdy - ydx = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)dx.$ *Jogaby*: $\ln\frac{y}{x} = Cx.$

54. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$ *Jogaby*: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C.$

55. $(x^2 - xy + y^2)dx + x(y - 2x)dy = 0,\ \ y(1) = 0.$

Jogaby: $x(x-2)^3 = (x-y)^2.$

56. $ydx = (x + \sqrt{x^2 - y^2})dy.$ *Jogaby*: $y^2 = C(2x - C).$

57. $xye^{\frac{x}{y}}dx - [x^2e^{\frac{x}{y}} + (x+y)^2]dy = 0.$

Jogaby: $ye^{\frac{x}{y}} = (x + y)\ln(Cy)$

3. Birjynsly deňlemelere getirilýän differensial deňlemeler

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

differensial deňlemä garalyň (bu ýerde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 – hemişelik sanlar). Bu görnüşdäki deňlemeleri çözmek üçin iki hala seredeliň.

1-nji hal. Kesgitleýji $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Bu halda berlen deňleme $x = u + h, \quad y = v + k$ ornuna goýma bilen birjynsly deňlemä getirilýär. h we k aşakdaky deňlemeler sistemanyň çözüwi bolmaly:

$$\begin{cases} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0. \end{cases}$$

x, y, dx, dy ululyklaryň ornuna olaryň bahalaryny goýup, u we v görä birjynsly deňleme alarys. Alnan differensial deňlemäni u we v görä integrirläp, u we v ululyklary $u = x - h$ we $v = y - k$ bilen çalyşmaly.

2-nji hal. Kesgitleýji $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$

Bu halda berlen deňleme $u = a_1 x + b_1 y$ ornuna goýma bilen x we u (ýa-da y we u) görä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemelere getirilýär. Soňky deňlemäni çözüp, çözülişinde $u = a_1 x + b_1 y$ goýulýar.

58. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}.$

Çözülişi: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} h - k + 1 = 0 \\ h + k - 3 - 0 \end{aligned}\right\}$$

deňlemeler sistemasyny çözüp, taparys:

$$h = 1, \quad k = 2$$

$x = u + 1, \quad y = v + 2$ diýip güman edip, aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

Üýtgeýän ululyklary $z = \dfrac{v}{u}$ ýa-da $v = zu$ bilen çalşyrmak üýtgeýän ululyklary aýrylan deňlemä getirýär:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z}; \quad \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - x^2} = \frac{du}{u};$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2x-z^2| = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln C;$$

$$(1-2z-z^2)u^2 = C,$$

$$u^2 - 2uv - v^2 = C; x\ \ - 2xy - y\ \ + 2x + 6y = C.$$

59. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x-2y+5}{2x-y+4} = 0.$ *Jogaby*: $\sqrt{\dfrac{(x+y-1)^2}{x-y+3}} = C$

60. $(2y + x - 1)dx + (y - 2x - 1)dy = 0.$

Jogaby: $\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{5}\right)^2 = Ce^{4arctg\frac{5y-3}{5x+1}}.$

61. $(2x + 3y + 2)dx + (4x + 6y + 3)dy = 0.$

Çözülişi: Bu ýerde

$a_1x + b_1y + c_1 = 2x + 3y + 2;\quad a_2x + b_2y + c_2 = 4x + 6y + 3.$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Onda deňleme 2-nji hala degişlidir.

Goý, $u = 2x + 3y$, onda $du = 2dx + 3dy$; $4x + 6y = 2u$;

$dy = \frac{1}{3}(du - 2dx)$. Bu deňlemede çalşyrmany ýerine ýetirip, u we v görä täze differensial deňleme alarys:

$$(u+2)dx + (2u+3)\frac{1}{3}(du - 2dx) = 0$$

ýa-da

$$-\frac{1}{3}udx + \frac{1}{3}(2u+3)du = 0.$$

Bu deňlemede üýtgeýän ululyklary aýryp, alarys:

$$dx = \frac{2u+3}{u};\quad dx - 2du - \frac{3}{u}du = 0,$$

$$x - 2u - 3\ln u + C = 0;\quad x + C = 2u + 3\ln u.$$

u-nyň ornuna $2x + 3y$ goýup, alarys:

$$x + C = 2(2x + 3y) + 3\ln(2x + 3y), \quad 3x + 6y + 3\ln(2x + 3y) = C,$$

$$x + 2y + \ln(2x + 3y) = C.$$

62. $(3x + 3y - 1)dx + (x + y + 1)dy = 0.$

Jogaby: $\dfrac{3x + y}{2} + \ln(x + y - 1) = C.$

63. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$

Jogaby: $x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$

64. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$

Jogaby: $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C.$

65. $(x - 5y + 7)dx + 2(2x - y + 5)dy = 0.$

Jogaby: $(x + y + 1)^2 = C(x - 2y + 4).$

66. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$

Jogaby: $x - 2y + 3\ln(2 - x - y) = C.$

67. $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.$

Jogaby: $x + y + 1 = Ce^{\frac{2x+y}{3}}.$

68. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)dy = 0.$

Jogaby: $x + 2y + \ln(x + y - 2) = C.$

4. Birinji tertipli çyzykly deňlemeler

Näbelli funksiýa we onuň önümine görä çyzykly bolan deňlemä birinji tertipli çyzykly deňleme diýilýär. Çyzykly deňlemäniň şeýle görnüşi bar:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \qquad (1)$$

Mundan beýläk $P(x)$ we $Q(x)$ funksiýalary, (1) deňlemäni integrirlemek talap edilýän ýaýlasynda, üznüksiz funksiýalar diýip hasap ederis: Eger $Q(x) \equiv 0$ bolsa, onda (1) deňlemä çyzykly birjynsly deňleme diýilýär.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \text{ bu ýerden } \frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Integrirläp alarys:

$$\ln|y| = \int -P(x)dx + \ln C, \quad C > 0, \tag{2}$$

$$y = Ce^{\int -P(x)dx}, \quad C \neq 0.$$

Bu umumy çözüwidir. y-e bölenimizde, $y = 0$ çözüwi biz ýitirdik. Eger C san 0 baha alyp bilýär diýsek, onda şol ýitirilen çözüw tapylan (2) çözüwleriň maşgalasyna girizilip bilner.

Birjynsly däl çyzykly deňlemäni

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

integrirlemek üçin «hemişeligiň wariasiýasy» diýip atlandyrylýan usuly ulanalyň. Birjynsly däl çyzykly deňlemäni (2) görnüşdäki çözüw bilen kanagatlandyrmaga çalşarys, ýagny şol formulada C hemişelik däl diýip hasap ederis:

$$y = Ce^{\int -P(x)dx}, \tag{3}$$

bu ýerde $C(x)$ – täze näbelli funksiýadyr. Şu güman edilişde (3) sag bölegini birjynsly däl çyzykly deňlemede ornuna goýup, alarys:

$$\frac{dC(x)}{dx} - e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

ýa-da

$$\frac{dC(x}{dx} - e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad \frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Bu ýerden integrirläp, taparys:

$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C_1$ (x – erkin hemişelik).

$C(x)$ bahasynda (3) ornuna goýup, birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C_1 + \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}\right). \qquad (4)$$

Şeýlelikde, birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi degişli birjynsly deňlemäniň $C_1 e^{-\int P(x)dx}$ umumy çözüwi bilen birjynsly däl çyzykly deňlemäniň $C_1 = 0$ bolanda (4) formuladan alynýan $(e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{-\int P(x)dx})$ hususy çözüwiniň jemine deňdir.

Birjynsly däl çyzykly deňleme başga usul (Bernulliniň usuly) bilen-de çözülip bilner:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ deňlemede } \ y = u(x) \cdot v(x). \qquad (5)$$

Ornuna goýmany ulanyp, alarys:

$$u\frac{dv}{dx} + \left(Pu + \frac{dv}{dx}\right)v = Q. \qquad (6)$$

v-iň koeffisiýenti nola öwrüler ýaly edip, u-ny kesgitleýäris:

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0 \quad \text{ýa-da} \quad u = e^{\int Pdx}, \qquad (7)$$

bu ýerde $C = 1$. Onda (6) deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$u\frac{dv}{dx} = Q. \qquad (8)$$

(8) deňlemeden v-ny tapmak üçin, oňa u-yň (7) deňlemedäki bahasyny ornuna goýalyň we integrirläliň:

$$e^{-\int Pdx} \cdot \frac{dv}{dx} = Q, \quad dv = Qe^{\int Pdx}dx, \quad v = \int Qe^{\int Pdx}dx + C. \qquad (9)$$

Tapylan (7), (9) funksiýalary (5) ornuna goýup, birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int Pdx}dx\right)$. ((4) bilen deňeşdireliň).

69. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$

Çözülişi: Bu ýerde $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$. Degişli birjynsly çyzykly deňlemäni integrirleýäris:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|x| + \ln C,$$

$y = Cx$ birjynsly çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi. C-ni x-iň funksiýasy hasap edýäris, onda $y = C(x) \cdot x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}x + Cx$. Indi ilki başdaky deňlemäni ornuna goýup, ýönekeýleşdirilenden soň alarys:

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot x = x^2, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

C – erkin hemişelikdir.

Diýmek, birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi:

$y = C_1x + \frac{x^3}{2}$ bolar.

70. $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{ctg}x = 2x\sin x.$

Çözülişi: Deňlemede gözlenilýän funksiýany $y = u \cdot v$ bilen çalşyrýarys, onda:

$$u\frac{dv}{dx} + u\frac{du}{dv} - uv\operatorname{ctg}x = 2x\sin x,$$

$$u\frac{dv}{dx} + \left(u\frac{du}{dx} - u\operatorname{ctg}x\right)v = 2x\sin x,$$

$$\frac{du}{dx} = u\operatorname{ctg}x, \quad \frac{du}{u} = \frac{\cos x}{\sin x}dx; \quad \int\frac{du}{u} = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

$$\ln u = \ln\sin x, \quad u = \sin x.$$

soňra $u\frac{dy}{dx} = 2x\sin x$, alarys: $\sin x\frac{dv}{dx} = 2x\sin x$, $\frac{dv}{dx} = 2x$, $v = x^2 + C_1$. Birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi:

$y = (x^2 + C)\sin x$ bolar.

71. $2xy' - 6y + x^2 = 0.$ *Jogaby*: $y = \frac{1}{2}x^2 + Cx^3.$

72. $y^2(dx - dy) = (2y - 1)xdy.$

Çözülişi: $y^2dx - y^2dy - 2xydy + xdy = 0;$

$$y^2\frac{dx}{dy} - (2y-1)x = y^2.$$

Bu deňlemäni Bernulliniň usuly bilen çözeliň: $x = uv$,

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{du}{dy}v + u\dfrac{dv}{dy}$. Onda

$y^2\left(\dfrac{du}{dy}v + u\dfrac{dv}{dy}\right) - (2y-1)x = y^2$ ýa-da

$$uy^2\frac{dv}{dy} + v\left[y^2\frac{du}{dy} - (2y-1)u\right] = y^2.$$

$$y^2\frac{du}{dy} - (2y-1)u = 0; \quad \frac{du}{u} = \frac{2y-1}{y^2}dy;$$

$$\ln u = 2\ln y + \frac{1}{y}; \quad u = y^2 e^{\frac{x}{y}}.$$

$$y^2 e^{\frac{1}{y}}\frac{dv}{dy} = 1; \quad y^2 e^{\frac{1}{y}}\frac{dv}{dy} = 1; \quad dv = \frac{e^{\frac{1}{y}}dy}{y^2}; \quad v = e^{\frac{1}{y}} + C;$$

$$x = y^2 + Cy^2e^{\frac{1}{y}}$$

73. $y' - \dfrac{y}{x} = x.$ *Jogaby:* $\dfrac{y - x^2}{x} = C.$

74. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$ *Jogaby:* $y = (x + C)\cdot(1 + x^2).$

75. $(1 + y^2) - (xy + y + y^3)y' = 0.$ *Jogaby:* $x = 1 + y^2 + C\sqrt{1 + y^2}.$

76. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3.$ *Jogaby:* $x^2y = \dfrac{1}{6}x^6 + C.$

77. $x(1 + x)y' - (1 + 2x)y = 1 + 2x.$ *Jogaby:* $y = Cx(1 + x) - 1.$

78. $xy' - y + \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 0.$ *Jogaby:* $y = \dfrac{x}{x-1} + Cx.$

79. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$. *Jogaby*: $y^2 - 2x = Cy^3$.

80. $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)dy$, $y(5) = 0$.

Jogaby: $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = 0$.

Çyzykly differensial deňlemä getirilýän deňemeler

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

görnüşi bolan deňlemä Bernulliniň deňlemesi diýilýär. Bu ýerde P we Q,x-a bagly bolan berlen üznüksiz funksiýalardyr, n – käbir hemişelik sandyr. $n = 0$ bolanda birjynsly däl çyzykly deňleme alynýar, $n = 1$ bolanda bolsa birjynsly çyzykly

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)y = 0$$

deňleme alynýar.

Şeýlelikde, Bernulliniň deňlemesinde $n \neq 0$, $n \neq 1$. Bernulliniň deňlemesiniň iki bölеginide y^n-e bölüp alarys:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q.$$

Täze $z = y(-n + 1)$ funksiýany girizýäris, onda:
$\frac{dz}{dx} = (-n + 1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ alarys.

Bernulliniň deňlemesiniň iki böleginide $(-n + 1)$ köpeldip we z-e görä birjynsly däl çyzykly deňlemäni alarys:

$$\frac{dz}{dx} + (-n + 1)P \cdot z = (-n + 1)Q.$$

Şu birjynsly däl çyzykly deňlemäniň umumy çözüwini tapanymyzdan soňra z-iň ýerine y^{-n+1} goýarys we Bernulliniň deňlemesiniň umumy integralyny alarys, ol y-e görä aňsat çözülýär. $n > 0$ bolanda ýene-de bir $y = 0$ çözüwi alarys.

Bellik. Birjynsly däl çyzykly deňleme üçin edilişi ýaly Bernulliniň deňlemesini gözlenilýän funksiýany $y = u \cdot v$ bilen çalşyrmak arkaly gös-göni integrirlemek mümkindir. $n = 1$ bolanda şu usul ulanylmaýar, şu halda Bernulliniň deňlemesi birjynsly çyzykly deňlemä öwrülýär we üýtgeýän ululyklary aýyrmak arkaly çözülýär.

81. $xy' + y = y^2 \ln x$.

Çözülişi: Deňlemäniň iki tarapyny hem y^{-2} köpeldip, alarys

$$y^{-2}xy' + y^{-1} = \ln x.$$

Goý, $y^{-1} = z$ bolsun, onda $-y - 2\,y' = z'$, deňlemä goýup alarys:

$$-xz' + z = \ln x. \qquad (*)$$

Alnan deňleme z görä çyzykly deňleme. Bu deňlemäni hemişeligiň wariasiýasy usuly bilen çözmeli:

$$-xz' + z = 0; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{z}; \quad \ln z = \ln x + \ln C; \quad z = Cx \qquad (**)$$

$$z' = C'x + C;$$

z we z' bahalaryny $(*)$ deňlemä goýalyň:

$$-x^2\frac{dC}{dx} - xC + xC = \ln x; \quad dC = -\frac{\ln x dx}{x^2}; \quad \int dC = -\int \frac{\ln x dx}{x^2};$$

$$C = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1$$

Indi tapylan C-niň bahasyny $(**)$ goýup, alarys:

$$x = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1\right)x \quad \text{ýa-da} \quad z = \ln x + 1 + C_1 x$$

$$y^{-1} = z, \quad \text{onda } y^{-1} = \ln x + 1 + C_1 x; \quad y = \frac{1}{\ln x + 1 + C_1 x}.$$

82. $y' + 2y = y^3$.

Bernulliniň deňlemesini bellikde görkezilen usul bilen integrirläliň.

$y = u$ güman edip taparys:

$$u\frac{dv}{dx} + u\frac{du}{dx} + 2uv = u^3v^3.$$

Bu deňleme iki deňlemä dargaýar:

$$\frac{dv}{dx} + 2v = 0 \text{ we } \frac{dv}{dz} = u^3v^3.$$

Birinji deňlemeden taparys: $v = e^{-2x}$.
Şondan soňra ikinji deňleme aşakdaky görnüşi alar:
$\frac{du}{u^3} = e^{-4x}dx$, bu ýerden

$$u^{-2} = \frac{1}{2}e^{-4x}\frac{C}{2} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{1}{u^2} - \frac{1 + Ce^{4x}}{2e^{4x}}.$$

Ýeňil öwürmelerden soň alarys:

$$u = \pm\frac{\sqrt{2}\,e^{2x}}{\sqrt{1 + Ce^{4x}}}, \text{ diýmek } y = u \cdot v = \sqrt{\frac{2}{1 + Ce^{4x}}}.$$

Şu punktyň ahyrynda Rikkati deňlemesi diýip atlandyrylýan deňlemäniň üstünde gysgaça durup geçeliň.

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \qquad (11)$$

Bu ýerde P, Q, R funksiýalar$(-\infty, +\infty)$ interwalda x-dan üznüksiz funksiýalardyr. $P = 0$ bolanda Rikkati deňlemesinden çyzykly deňleme, $R = 0$ bolanda Bernulliniň deňlemesini alýarys.

Ozalky garalan görnüşleriniň tersine, Liuwilliň görkezişi ýaly, Rikkati deňlemesiniň çözüwi umuman kwadraturalarda aňladylyp bilinmeýär. Şoňa garamazdan, biz şu deňlemäniň çözüwleri bar hökmünde gürrüň ederis. Eger Rikkati deňlemesiniň bir $y_1(x)$ hususy çözüwi belli bolsa, onda üýtgeýän ululygy çalşyrmak arkaly ony Bernulli deňlemesine öwürmek mümkindir. Hakykatdanda $y = y_1 + z$ diýip güman etsek, alarys:

$$y' + z' = P(x)(y + z) \; + Q(x)(y + z) + R(x).$$

Indi

$$y' = P(x)y \; + Q(x)y + R(x).$$

Toždestwo görä alarys:

$$z' - (2P(x)y + Q(x))z = P(x)z^2.$$

83. $y' + y^2 = x \; - 2x.$

Çözülişi: Hususy çözüwini $y = ax + b$ görnüşde gözläliň:
$y = ax + b$; $y' = a$. y we y' bahalaryny deňlemä goýup alarys:

$$a + (ax + b)^2 = x \; - 2x; \quad a + a^2x^2 + 2abx + b^2 = x^2 - 2x.$$

Soňky deňligiň iki tarapynyň x-iň meňzeş derejelerindäki koeffisiýentleri deňeşdireliň:

$$a = b^2; \quad a^2 = 1; \quad 2ab = -2.$$

Soňky sistemadan $a = -1$; $b = 1$. Diýmek, $y_1 = -x + 1$.

Indi $y = y_1 + z = 1 - x + z$ ornuna goýma bilen berlen Rikkatiniň deňlemesini Bernulliniň deňlemesine getireliň:

$$y' + y^2 = x^2 - 2x; \quad (1 - x + z)' + (1 - x + z)^2 = x^2 - 2x;$$

$$-1 + z' + (1 - x)^2 + 2(1 - x)z + z^2 = x^2 - 2x;$$

$$-1 + z' + x^2 - 2x + 1 - 2xz + 2z + z^2 = x^2 - 2x;$$

$$z' - 2xz + 2z + z^2 = 0;$$

$$z' + 2(1 - x)z = -z^2.$$

84. $y' + 2y^2 = \dfrac{6}{x^2}.$

Görkezme. Hususy çözüwini $y_1 = \dfrac{a}{x}$ görnüşde gözlemeli.
Aşakdaky differensial deňlemeleri çözüň:

85. $2yy' - y^2 = x.$ *Jogaby*: $x + y^2 + 1 = Ce^x.$

86. $y' + 2xy = 2x^3y^3.$ *Jogaby*: $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}.$

29. sargyt № 1573

87. $y' + xy = xy^3,\ y(0) = \frac{1}{2}$. *Jogaby*: $y^2(3e^{x^3} + 1) = 1$.

88. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. *Jogaby*: $y = \left(\frac{C + \ln\cos x}{x} + \mathrm{tg}x\right)^2$.

89. $3yy'^2 = x + y^3 + 1$. *Jogaby*: $x + y^3 + 2 = Ce^x$.

90. $xy^3dx = x^2ydy$. *Jogaby*: $x^2 = 1 - \frac{2}{x^2} + Ce^{\frac{x}{2}}$.

91. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$. *Jogaby*: $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$; $y = \frac{2}{x}$.

92. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$. *Jogaby*: $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} - x}$; $y = \frac{1}{x}$.

93. $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$. *Jogaby*: $y = x + \frac{x}{C + x}$.

6. Doly differensially deňlemeler

Eger

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

deňlemäniň çep bölegi käbir $F = F(x,y)$ funksiýanyň doly differensialy, ýagny $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ bolsa, onda (1) deňlemä doly differensially deňleme diýilýär.

Bu ýagdaýda (1) deňlemäni $dF(x,y) = 0$ görnüşde ýazyp, ol deňlemäniň umumy integralyny taparys. $F = F(x,y)$ funksiýa üçin:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Deňlik esasynda şeýle deňlikleri alarys:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Aşakdaky tassyklama dogrudyr.

(1) deňlemäniň doly differensially deňleme bolmagy üçin, $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalaryň kesgitlenen D ýaýlada $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ we $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ üznüksiz önümleri bar bolup,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{2}$$

şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Eger (2) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (1) deňlemäniň umumy integraly aşakdaky usullar bilen tapylýar:

1-nji usul. 1) $\int P(x,y)dx$ integraly hasaplamaly we hemişelik sanyň ornuna $\varphi(y)$ funksiýany almaly;

2) $\int P(x,y)dx + \varphi(y)$ $(*)$ funksiýany y üýtgeýän ululyk boýunça differensirlemeli we alnan netijäni $Q(x,y)$ funksiýa deňlemeli ýa-da

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int P(x,y)dx + \varphi(y)\right\} = Q(x,y).$$

Soňky deňlikden integrirlemegiň hemişeligini girizmän $\varphi(y)$ funksiýany kesgitlemeli;

$(*)$ jemi hemişelige deňläp, umumy çözüwini tapmaly ýa-da

$$\int P(x,y)dx + \varphi(y) = C.$$

2-nji usul. 1) $\int P(x,y)dx$ integraly hasaplamaly we hemişelik sanyň ornuna $\varphi(y)$ funksiýany almaly;

2) $\int Q(x,y)dx + \varphi(x) = C.$ $(**)$ funksiýany x üýtgeýän ululyk boýunça differensirlemeli we alnan netijäni $P(x,y)$ funksiýa deňlemeli ýa-da

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx = Q(x,y).$$

Soňky deňlikden integrirlemegiň hemişeligini girizmän $\varphi(x)$ funksiýany kesgitlemeli; $(**)$ jemi hemişelige deňläp, umumy çözüwini tapmaly ýa-da

$$\int Q(x,y)dx = C.$$

Hususy ýagdaý 1) Eger

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx = Q(x,y),$$

onda umumy integral

$$\int P(x,y)dx = C$$

görnüşde alynýar.

94. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdx - ydy}{x^2} = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Deňlemäniň çep tarapynda birinji agza *dx* ikinji agza bolsa diňe *dy* saklar ýaly özgertme geçireliň:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

Bu ýagdaýda $P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{x^2};$

$$Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2},$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ýerine ýetýär. Diýmek, deňlemäniň çep tarapy doly differensial.

Integraly hasaplalyň:

$$\int P(x,y)dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2}\right)dx = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} + \varphi(y).$$

Hususy önümi hasaplalyň:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} + \varphi(y)\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \varphi'(y).$$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} + \varphi(y)\right) = Q(x,y)$ bolan üçin deňlemäniň umumy çözüwi hususy ýagdaýdaky formula arkaly alynýar:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} = C.$$

95. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

Çözülişi: Bu ýagdaýda $P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2;$

$$Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ýerine ýetýär. Diýmek, deňlemäniň çep tarapy doly differensial. 2-nji usuly ulanyp, integraly hasaplalyň:

$$\int Q(x,y)dy = \int (6x^2y + 4y^3)dy = 3x^2y^2 + y^4 + \varphi(x).$$

Hususy önümi hasaplalyň:

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + y^4 + \varphi(x)) = 6xy^2 + \varphi'(x).$$

Alnan önümi $P(x,y)$ funksiýa deňeşdirip, $\varphi(x)$ funksiýany tapalyň:

$$6xy^2 + {}'(x) = 3x^2 + 6xy^2; \quad \varphi'(x) = 3x^2; \quad (x) = x^3.$$

2-nji usul boýunça berlen deňlemäniň umumy integraly diýip alarys:

$$3x^2y^2 + y^4 + x^3 = C.$$

96. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$

Çözülişi: Deňlemäni özgerdip, aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$$

Bu ýagdaýda $p(x,y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad Q(x,y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2};$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ýerine ýetýär. Diýmek, deňlemäniň çep tarapy doly differensial. 1-nji usuly ulanyp integraly hasaplalyň:

$$\int P(x,y)dx = \int\left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(x).$$

Hususy önümi hasaplalyň:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(x)\right) = -\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y).$$

Alnan önümi $Q(x,y)$ funksiýa deňeşdirip, $\varphi(y)$ funksiýany tapalyň:

$$\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \varphi'(y) = y; \quad \varphi'(y) = \frac{y^2}{2}.$$

1-nji usul boýunça berlen deňlemäniň umumy integralyny, alarys:

$$\frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Eger (2) şert ýerine ýetmese, onda (1) deňleme doly differensially deňleme däldir. Käbir hallarda bu deňlemäni integrirleýji köpeldiji atlandyrylýan $\mu = \mu(x,y)$ funksiýa köpeldip, doly differensially deňlemä getirmek bolar.

1-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int\varphi(x)dx}. \qquad (3)$$

2-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \varphi(y)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe y-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu = e^{\int \varphi(y)dy} \tag{4}$$

formuladan tapylýar.

3-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q - p} = \varphi(x + y)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int \varphi(z)dz}; \quad z = x + y. \tag{5}$$

4-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xp} = \varphi(xy)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int \varphi(z)dz}; \ \ z = xy. \tag{6}$$

5-nji hal. Eger

$$\frac{x^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}{yQ - xp} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int \varphi(z)dz}; \quad z = \frac{y}{x}. \tag{7}$$

6-njy hal. Eger

$$\frac{x^2\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}{yQ - xp} = \varphi(x^2 + y^2)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int\varphi(z)dz}; \quad z = x^2 + y^2. \qquad (8)$$

97. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$

Çözülişi: $P(x,y) = x^2 + y^2 + x; \quad Q(x,y) = y;$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - p}\varphi\frac{2y - 0}{y} = 2 = \varphi(x),$$

onda $\mu = e^{\int\varphi(x)dz} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$.

Berlen deňlemäniň iki tarapyny e^{2x}-a köpeldip, alarys:

$$(x^2 + y^2 + x)e^2xdx + ye^2xdy = 0.$$

Bu deňlemede $(x,y) = (x^2 + y^2 + x)e^2x; \quad Q(x,y) = ye^2x;$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{2x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{2x}.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ýerine ýetýär. Diýmek, deňlemäniň çep tarapy doly differensial. 2-nji usuly ulanyp, integraly hasaplalyň:

$$\int Q(x,y)dy = \int ye^{2x}dy = \frac{1}{2}y^2e^{2x} + \varphi(x).$$

Hususy önümi hasaplalyň:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}y^2e^{2x} + \varphi(x)\right) = y^2e^{2x} + \varphi'(x).$$

Alnan önümi $P(x,y)$ funksiýa deňeşdirip, $\varphi(x)$ funksiýany tapalyň:

$$y^2e^2x + {}'(x) = (x^2 + y^2 + x)e^2x; {}'(x) = (x^2 + x)e^2x;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

2-nji usul boýunça berlen deňlemäniň umumy integraly diýip, alarys:

$$\frac{1}{2}y^2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = \frac{1}{2}e^C \quad \text{ýa-da} \quad (x^2+y^2)e^{2x} = e^c,$$

$$\ln[(x^2+y^2)e^2x] = \ln e^C; \quad \ln(x^2+y^2) + 2x = C.$$

98. $(3xy - 2y^2 + 4y)dx + (2x - 3xy + 4x)dy = 0.$

Çözülişi: Bu doly differensiallardaky deňleme däldir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x - 4y + 4; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 3y + 4.$$

Integrirleýji köpeldijini tapalyň:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = \frac{3x - 4y + 4 - 4x + 3y - 4}{y(2x^2 - 3xy + 4x) - x(3xy - 2y^2 + 4y)} =$$

$$= \frac{-x-y}{2x^2y - 3xy^2 + 4xy - 3x^2y + 2xy^2 - 4xy} = \frac{-x-y}{-x^2y - xy^2} =$$

$$= \frac{x+y}{xy(x+y)} = \frac{1}{xy};$$

$$\mu = e^{\int\varphi(z)dz} = e^{\int\frac{1}{x}dz} = z = xy.$$

Eger berlen deňlemäni $\mu(x,y) = xy$ köpeltsek, onda doly differensially deňleme alarys:

$$xy(3xy + 2y^2 + 4y)dx + xy(2x - 3xy + 4x)dy = 0.$$

Deňlemäni çözüp, onuň umumy integralyny taparys:

$$x^3y^2 + x^2y^3 + 2x^2y^2 = C.$$

Doly differensial deňlemeleri çözüň:

99. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$ *Jogaby*: $3x^2y - y^3 = C.$

100. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$ *Jogaby*: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C.$

101. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$ *Jogaby*: $xe^{-y} - y^2 = C.$

102. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$ *Jogaby*: $4y\ln x + y^4 = C.$

103. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0.$

Jogaby: $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C.$

104. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

Jogaby: $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C.$

Differensial deňlemeleri çözüň.

105. $(x^2 + y^2 + x)dx - xdy = 0.$ *Jogaby*: $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$

106. $ydx = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}.$ *Jogaby*: $\sqrt{1 + y^2} = xy + C.$

107. $xy^2(xy' + y) = 1.$

108. $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0.$ *Jogaby*: $2x^3xy^3 - 3x^2 = C.$

109. $\left(y - \frac{1}{x}dx\right) + \frac{dy}{y} = 0.$ *Jogaby*: $y^2 = x^2(C - 2y);\ x = 0.$

110. $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy.$ *Jogaby*: $(x^2 - C)y = 2x;\ x = 0.$

111. $y^2dx + (xy + \operatorname{tg}xy)dy = 0.$ *Jogaby*: $y\sin xy = C.$

112. $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0.$

Jogaby: $\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = C;\quad y = 0.$

113. $y(y^2+1)dx + x(y^2 - x + 1)dy = 0.$

Jogaby: $-x + 1 = xy(\text{arctg}y + C);\quad y = 0.$

7. Birinji tertipli we önümine görä derejesi birden uly differensial deňlemeler

a) önüme görä algebraik deňleme

Goý, y' önüme görä algebraik deňleme berlen bolsun:

$$A_0(y')^n + A_1(y')^{n-1} + A_2(y')^{n-2} + \cdots + A_{n-1}y' + A_n = 0, \qquad (1)$$

bu ýerde A_0, A_1, A_2, A_{n-1}, A_n – x we y görä funksiýalar. Eger (1) deňlemäniň n sany hakyky köki bar bolsa, onda önüme görä n sany deňleme alarys:

$$y' = f_1(x,y), y' = f_2(x,y), \ldots, y' = f_n(x,y).$$

Goý, bu deňlemeleriň umumy çözüwleri tapylan bolsun:

$$\varphi_1(x,y,C) = 0, {}_2(x,y,C) = 0\ldots, {}_n(x,y,C) = 0. \qquad (2)$$

114. $y'^2 - (x + y^2)y' + xy^2 = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Önüme görä ikinji derejeli deňleme berlen. Ony çözüp önümiň iki bahasyny alarys:

$$y' = \frac{x + y^2 \pm \sqrt{(x+y^2)^2 - 4xy^2}}{2} = \frac{x + y^2 \pm (x - y^2)}{2};$$

$$y' = x;\quad y' = y^2.$$

Soňky iki deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$y' = x,\quad \frac{dy}{dx} = x,\quad dy = xdx,\quad y = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$y' = y^2,\quad \frac{dy}{dx} = y^2,\quad \frac{dy}{y^2} = dx,\quad -\frac{1}{y} = x - C \quad y = \frac{1}{C - x}.$$

Onda (2) esasynda berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0.$$

115. $y'^3 - 7y' + 6 = 0.$

Çözülişi: Önüme görä üçünji derejeli deňleme berlen:

$$y'^3 - y' - 6y' + 6 = 0,$$

$$y'(y'^2 - 1) - 6(y' - 1) = 0, \quad (y' - 1)[y'(y' + 1) - 6],$$

$$(y' - 1)(y'^2 + y' - 6) = 0, \quad (y' - 1)(y' + 3)(y' - 2) = 0.$$

Soňky deňleme üç differensial deňlemä ekwiwalentdir:

$$y' = 1, \quad y' = -3, \quad y' = 2.$$

Bu deňlemeleriň her biriniň çözüwini tapalyň:

$$y = x + C; \quad y = -3x + C; \quad y = -2x + C.$$

Onda (2) esasynda berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$(y - x - C)(y + 3x - C)(y - 2x - C) = 0,$$

$$((y - C) - x)((y - C) + 3x)((y - C) - 2x) = 0,$$

$$(y - C)^3 - 7x^2(y - C) + 6x^2 = 0.$$

Aşakdaky deňlemeleri çözüň.

116. $y'^2 + yy' - x^3 - xy = 0.$

Jogaby: $\left(y - \frac{x^2}{2} + C\right)(x + y - 1 + Ce^{-x}) = 0.$

117. $y'^2 + \frac{3y}{x}y' + \frac{2y^2}{y} = 0.$ *Jogaby*: $(xy - C)(x^2y - C) = 0.$

118. $xyy'^2 - (x^2 - y^2)y' + xy = 0.$ *Jogaby*: $(y - Cx)(y^2 - x^2 - C) = 0.$

119. $y^3y'^3 - a^3 = 0.$ *Jogaby*: $(y^2 + 2ax - C)(y^2 - 2ax - C) = 0.$

120. $y'^3 + (x + y + a)y'^2 + (ax + ay + xy)y' - axy = 0.$

Jogaby: $(y - ax - C)\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)(y - Ce^x).$

b) argumentine görä çözülen deňlemeler.

$$x = f(y, y'). \tag{1}$$

$y' = p$ alyp, täze üýtgeýän ululygy girizeliň. Onda

$$x = f(y, p). \tag{2}$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem y boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f dp}{\partial p dy};$$

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{p}$ bolany üçin $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dy}$ ýa-da

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\dfrac{1}{p} \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}} = \varphi(y, p). \tag{3}$$

Eger (3) deňlemäniň umumy çözüwini: $p = \varphi(y, C)$ tapyp bolsa, onda ony (2) deňlige goýup berlen deňlemäniň çözüwini taparys:

$$x = f[y, (\varphi(y, C))] \text{ ýa-da } x = \Phi(y, C). \tag{4}$$

Eger (3) deňlemäniň umumy çözüwini p görä anyk görnüşinde ýazyp bolmasa we (2), (4) deňlemelerden p-ni ýoklap bolmasa, ony $y = g(p, C)$ görnüşde alyp bolsa, onda berlen deňlemäniň umumy çözüwini parametrik görnüşde alyp bolar.

121. $x = y\sqrt{1 + y'^2} - yy'$.

Çözülişi: Goý, $y' = p$ onda

$$x = y\sqrt{1 + p^2} - yp. \tag{*}$$

Soňky deňlemäni y boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + p^2} + y\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\frac{dp}{dy} - p - y\frac{dp}{dy}$$

ýa-da (çünki $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p}$):

$$\frac{1}{p} = \sqrt{1+p^2}\, y\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dy} - p - y\frac{dp}{dy},$$

$$y\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - 1\right)\frac{dp}{dy} + \sqrt{1+p^2} - \frac{1}{p} - p = 0.$$

Soňky deňlemede üýtgeýän ululyklary bölekläliň:

$$\frac{p(p-\sqrt{1+p^2})dp}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+p^2}(p-\sqrt{1+p^2})} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Bu ýerden:

$$\frac{pdp}{1+p^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

$$\int\frac{pdp}{1+p^2} + \int\frac{dy}{y} = 0; \quad -\frac{1}{2}\ln(1+p^2) + \ln C = \ln y;$$

$$\ln(1+p^2) - 2\ln C = -2\ln y, \quad 1+p^2 = \left(\frac{C}{y}\right)^2, \quad p = \sqrt{\frac{C^2}{y^2} - 1}.$$

p-niň bahasyny (∗) deňlemä goýup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$x = y\frac{C}{y} - y\sqrt{\frac{C^2}{y^2} - 1} \quad \text{ýa-da} \quad x = C - \sqrt{C^2 - y^2 1}.$$

122. $xy'^2 = 1 + y'$.

Çözülişi: Deňlemeden x tapalyň: $x = \dfrac{1+y'}{y'^2}$.
Goý, $y' = p$ onda:

$$x = \frac{1+p}{p^2}. \qquad (*)$$

Soňky deňlemäni y boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p^3 - 3p^2(1+p)dp}{p^6}\frac{dp}{dy}, \quad \frac{1}{p} = \frac{-2p^3 - 3p^2}{p^6}\frac{dp}{dy}$$

$$dy = \left(-\frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^3}\right)dp.$$

Deňlemäni integrirläp alarys:

$$y = -\frac{2}{p} + \frac{3}{p^2} + C.$$

Berlen deňlemäniň parametrik görnüşde umumy çözüwini guralyň:

$$x = \frac{1+p}{p^2}, \quad y = \frac{4p+3}{2p^2} + C.$$

123. $xy' = 1 + y'^2$. *Jogaby*: $y + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

124. $x = ay' + by'^3$.

Jogaby: $x = ap + bp^2, \quad y = C + \frac{1}{2}ap^2 + \frac{2}{3}bp^3$.

125. $x = (y')^3 + 1$. *Jogaby*: $(x-1)^4 = \frac{64}{27}(y-C)^3$.

126. $(1-x)y'^2 + 2y'(x-1) - x = 0$.

Jogaby: $(y - x + C)^2 = 4(1-x)$.

127. $x(1+y'^2) = 1, \quad y(0) = -2$.

Jogaby: $y - 2 = \sqrt{x - x^2} = \arcsin\sqrt{x}$.

7. Funksiýa görä çözülen deňlemeler

$$y = f(x, y'). \tag{1}$$

Goý, $y' = p$ onda

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

Soňky deňlemäni x boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}},$$

$$\frac{dp}{dx} = F(x,p). \qquad (3)$$

Eger (3) deňlemäniň umumy çözüwini:

$$p = \varphi(x,C).$$

Görnüşde tapyp bolsa, onda $\varphi(x,C)$ p-niň ornuna (20) deňlige goýup (1) deňlemäniň umumy çözüwini tapyp bolar:

$$y = f[x,\varphi(x,C)].$$

Eger (3) deňlemäniň çözüwini $x = \psi(p,C)$ görnüşde tapyp bolsa, onda (1) deňlemäniň umumy çözüwi parametrik görnüşde alynýar:

$$x = \psi(p,C); \quad y=f[\psi(p,C),p].$$

128. $y = (y')^2 + (2y')^3$.

Çözülişi: Goý, $y' = p$, onda $y = p^2 + (2\mathrm{p})^3$,

$$\frac{dy}{dx} = 2p\frac{dp}{dx} + 6p^2\frac{dp}{dx}; \quad p = 2p\frac{dp}{dx} + 6p^2\frac{dp}{dx}; \quad x = 2p + 3p^2 + C.$$

Onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi parametrik görnüşinde ýazylýar:

$$x = 2p + 3p^2 + C; \quad y = p^2 + (2p)^3.$$

Bu deňlemä $x = 0$ hem kanagatlandyrýar. $x = 0$ – deňlemäniň aýratyn çözüwi.

9. Lagranžyň deňlemesi

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \qquad (1)$$

Goý,

$$y' = p, \ y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad (2)$$

(2) deňlemäni x boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ýa-da $\quad p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\dfrac{dp}{dx} + \psi'(p)\dfrac{dp}{dx};$

$$\frac{dx}{dp} = +\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x = \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p} = 0. \tag{3}$$

Goý, $x = f(p,C)$ funksiýa (3) çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. (20) deňlige x-iň ornuna $f(p,C)$ funksiýany goýup, alarys:

$$x = f(p,C)\cdot x\varphi(p) + \psi(p); \quad \text{ýa-da} \quad y = \Phi(p,C).$$

Şeylelikde, x we y üýtgeýänler p-niň üsti bilen tapyldy. Diýmek Lagranžyň differensial deňlemesiniň parametrik görnüşinde umumy çözüwi tapyldy:

$$x = f(p,C);\ y = \Phi(p,C).$$

Bu iki deňlemeden p parametri ýoklap, deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$F(x,y,C) = 0.$$

129. $y = 2xy' + (y')^3$. (1)

Çözülişi: Berlen deňleme Lagranžyň deňlemesidir. Goý, $y' = p$ onda

$$y = 2xp + p^3. \tag{2}$$

(2) deňlemäni x boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}; \quad p = 2p + (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$

ýa-da

$$p\frac{dx}{dp} + 2x + 3p^2 = 0. \tag{3}$$

(3) çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2. \tag{4}$$

(2) deňlemä x-iň bahasyny goýup, alarys:

$$y = 2p\left(\frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2\right)p^2 + p^3. \tag{5}$$

(4) we (5) deňlikler (1) deňlemäniň parametrik görnüşde umumy çözüwini kesgitleýär:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2; \quad y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{2}p^3.$$

10. Kleronyň deňlemesi

$$y = xy' + \psi(y').$$

Goý, $y' = p$ onda:

$$y = xp + \psi(p).$$

Soňky deňlemäni x boýunça differensirläp, alarys:

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}; \quad p = p + \frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)];$$

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0.$$

Köpeldijileriň her birini nola deňläp, iki deňleme alarys:

$$1)\ \frac{dp}{dx} = 0; \quad 2)\ x + \psi'(p) = 0.$$

1) Birinji deňlemeden alarys: $p = C$. Berlen deňlemäniň umumy çözüwini alar ýaly $y = px + \psi(p)$ deňlikde p-niň ornuna C goýmaly: $y = xC + \psi(C)$.

2) Ikinji deňlemeden: $x = -\psi'(p)$.

$x = -\psi'(p)$ we $y = xp + \psi(p)$ deňlemelerden p-ni ýoklap, alarys:

$$\Phi(x,y) = 0. \qquad (3)$$

Bu cözüwe hemişelik girmeýär. (3) çözüw – Kleronyň deňlemesiniň aýratyn çözüwi. Deňlemäniň aýratyn çözüwini almak üçin umumy çözüwi C boýunça differensirlemeli we

$$y = Cx + \psi(C), \quad 0 = x + \psi'(C),$$

deňlemelerden C-ny ýoklamaly.

130. $y = xy' + \dfrac{1}{2y'}.$ (1)

Çözülişi: y'-iň ornuna C goýup, deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$y = xc - \frac{1}{2C^2}. \qquad (2)$$

(2) deňligi C boýunça differensirläp, alarys:

$$0 = x - \frac{1}{2c^2}. \qquad (3)$$

(2) deňligiň iki tarapyny hem kwadrata götereliň:

$$y^2 = x^2C^2 + x + \frac{1}{4 \cdot c^2}. \qquad (4)$$

(3) deňlikden: $C^2 = \frac{1}{2x}$. Onda (4) deňlikden :

$$y^2 = x^2C^2 + x + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2x}};$$

$$y^2 = \frac{1}{2x}x^2 + x + \frac{1}{2}x,$$

$y^2 = 2x$ berlen deňlemäniň aýratyn çözüwi.

Aşakdaky deňlemeleri integrirläň:

131. $y = x(1 + y') + y'^2$. *Jogaby*: $\begin{cases} x = 2(1 - p) + Ce^{-p}, \\ y = 2 - p^2 + Ce^{-p}(1 + p). \end{cases}$

132. $y = xy'^2 + y'^2$. *Jogaby*: $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$.

133. $y = xy' + y' - y'^2$.

Jogaby: $y = Cx + C - C^2$; $x^2 + 4y = 0$.

134. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

Jogaby: $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$.

135. $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$. *Jogaby*: $\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C) \\ y = \frac{2}{p}(\ln p + C) + \frac{1}{p}. \end{cases}$

§ 3. Ýokary tertipli differensial deňlemeler. Käbir *n*-nji tertipli integrirlenýän differensial deňlemeleriň görnüşleri. Tertibi peseldilýän deňlemeler

1. $y^{(n)} = f(x)$ görnüşdäki deňleme. Üznüksiz $f(x)$ funksiýa üçin bu deňlemäniň umumy çözüwini n gezek integrirläp talarys:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} \iint f(x)dxdx + C_1 x + C_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$y = \int ... \int f(x)dx...dx = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1} + C_n.$$

Alnan funksiýa berlen deňlemäniň umumy çözüwidir. Bu çözüwde kesgitsiz integrallary ýokarky çägi üýtgeýänli kesgitli integrallar bilen çalşyrmak bolar, ýagny ony:

$$y = \int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx...dx = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1} + C_n,$$

görnüşde ýazmak bolar. Koşiniň,

$$\int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx...dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)$$

formulasyny peýdalanyp, umumy çözüwi:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}(x-1)^{n-1} f(t)dt + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... +$$
$$+ C_{n-1} + C_n$$

görnüşde ýazarys. Eger berlen deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{'}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \qquad (1)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsa, onda berlen deňlemäni yzygiderli n gezekden x-e çenli integrirläp, bu meseläniň çözüwini taparys:

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\ldots+$$
$$+y_0^1(x-x_0)+y_0$$

ýa-da

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i.$$

136. $y'''=\sin x+\cos x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0.$

Çözülişi: Üç gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y''=-\cos x+\sin x+C_1,$$

$$y'=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2$$

$$y=\cos x-\sin x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3,$$

Indi berlen deňlemäniň $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Bu şertleri ulanyp, näbelli hemişelikleri tapmak üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases}2=1+C_1\\1=-1+C_2,\\0=-1+C_1.\end{cases}\Rightarrow C_1=1,\quad C_2=2,\ C_3=1$$

Şeýlelikde, deňlemäniň berlen şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwi:

$$y=\cos x-\sin x+\frac{1}{2}x^2+2x+1.$$

$F(y^{(n-1)}, y^{(n)})$ görnüşdäki deňleme. $y^{(n-1)}=z$ çalşyrmany ulanyp, bu deňlemäni $F(z,z)=0$ görnüşde ýazarys. Eger alnan deňlemäniň umumy çözüwi: $z=\varphi(x,C_1)$ bolsa, onda çalşyrmanyň esasynda 1-nji görnüşdäki: $y^{(n-1)}=\varphi(x,C_1)$ differensial deňlemäni alarys.

137. $z''=\sqrt{1+(y'')^2}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: $y'' = z$ çalşyrmany ulanyp, birinji tertipli $z' = \sqrt{1+z^2}$ ýa-da $\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$ deňlemäni alarys. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edeliň we alnan deňlemäni integrirläliň:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x + C. \qquad (2)$$

$z = \operatorname{sh} t,\ dz = \operatorname{ch} t\,dt$ çalşyrmany ulanyp alarys:

$$\int \frac{\operatorname{ch} t\,dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} = x + C \text{ ýa-da } x\frac{dz}{dx} = z$$

Diýmek, $z = \operatorname{sh}(x + C_1)$. Ony $y'' = z$ deňlemede ornunda goýup, alnan $y'' = \operatorname{sh}(x + C_1)$ deňlemäni iki gezek yzygiderli integrirläliň:

$$y' = \operatorname{ch}(x + C_1) + C,$$

$$y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3.$$

3. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ görnüşdäki deňleme. Eger $y^{(k)} = z$ çalşyrmany ulansak, onda

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+1)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)} \qquad (3)$$

bolar we şonuň üçin berlen deňleme $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$ görnüşi alar. Eger alnan $n - k$ tertipli bu deňlemäniň umumy çözüwi:

$z = \varphi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ bolsa, onda $y^{(k)} = z$ çalşyrma boýunça 1-nji görnüşdäki: $y^{(k)} = \varphi(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäni k gezek yzygiderli integrirläp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys.

138. $xy^{V} - y^{IV} = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapyň.

Çözülişi: $y^{IV} = z$ çalşyrmany girizeliň, onda $y^{V} - z'$ bolar we berlen deňleme $xz' - z = 0$ görnüşi alar. Bu deňlemäni $x\frac{dz}{dx} = z$ görnüşde ýazyp we üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni alarys.

Ony integrirläp,

$$\ln|Z| = \ln|x| + \ln|C_1| \text{ ýa-da } z = C_1 x,$$

deňligi alarys. Belgilemäni göz öňünde tutup, $y^{IV} = C_1 x$ deňlemäni alarys. Ony dört gezek yzygiderli integrirläliň:

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{4!} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{5!} + C_2 \frac{x^2}{3} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

ýa-da

$$y = \overline{C_1} x^5 + \overline{C_2} x^3 + \overline{C_3} x^2 + C_4 x + C_5,$$

bu ýerde: $\overline{C_1} = \frac{C_2}{5!}, \quad \overline{C_2} = \frac{C_2}{3!}, \quad \overline{C_3} = \frac{C_3}{2!}.$

4. $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ görnüşdäki deňleme. $y' = z$ çalşyrma ulanylyp, berlen deňlemäniň tertibi bir birlik kemeldilýär. Bu ýerde täze girizilen z üýtgeýän y-e görä funksiýadyr: $z = z(y)$. $y' = z(y)$ deňligi differensirläp alarys:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = z\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2 z}{dy^2}\right) =$$

$$= z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2 \frac{d^2 z}{dy^2}$$

we şuňa meňzeşlikde beýleki ýokary tertipli önümleri taparys. Olary berlen deňlemede ornunda goýup, $(n - 1)$ tertipli deňlemäni alarys.

139. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: $y' = z(y)$ $y'' = z\frac{dz}{dy}$ çalşyrmalary ulanyp, z üýtgeýäne görä birinji tertipli $z\frac{dz}{dy} + z^2 = 2e^{-y}$ deňleme alarys. $z^2 = u$ çalşyrmany ulanyp, $\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+u=2e^{-y}$ ýa-da $\frac{du}{dy}+2u=4e^{-y}$ çyzykly deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$u=e^{-\int 2dy}\left(\int 4e^{-y}e^{\int 2dy}+C_1\right)=e^{-2y}\left(4\int e^{-y}e^{2y}dy+C_1\right)=e^{-2y}(4e^{y}+$$
$$+C_1)=4e^{-y}+C_1y^{-2y}.$$

Ony ulanyp,

$$(y')^2=y=4e^{-y}+C_1e^{-2y} \text{ ýa-da } y'=\pm\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}}.$$

Birinji tertipli deňlemäni alarys. Ol üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemedir. Onuň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip we alnan deňlemäni integrirläp, onuň umumy çözüwini taparys:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{4e^{y}+C_1}}{e^{y}},\quad \pm\int\frac{e^{y}dy}{\sqrt{4e^{y}+C_1}}=x+C_2.$$

$$\pm\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{y}\overline{C}_1)}{\sqrt{e^{y}+\overline{C}_1}}=x+C_2,\quad \pm\sqrt{e^{y}+\overline{C}_1}=x+C_2\quad (\tilde{C}_1-C_1/4)$$

ýa-da

$$e^{y}+\tilde{C}_1=(|x|+C_2)^2,\quad y=\ln|(x+C_2)^2-\tilde{C}_1|.$$

140. $y'''=\frac{1}{x},\quad y(1)=1,\quad y'(1)=2,\quad y''(1)=-2.$

Jogaby: $y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{7}{4}x^2-\frac{9}{4}.$

141. $y^{IV}=\sin x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2,\quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Jogaby: $y=\sin x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$

142. $y^{V}=e^{2x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=-2,\quad y'''(0)=-1,$ $y^{IV}(0)=2.$

Jogaby: $y=\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{24}x^3-\frac{23}{16}x^2-\frac{33}{16}x-\frac{1}{32}.$

143. $y''' = \dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}$. *Jogaby*: $y = \ln\sin x + C_1 + C_2x + C_3x^2$.

144. $\sqrt{1+x^2}\,y'' - 1 = 0$.

Jogaby: $y = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C_1 + C_2x$.

145. $y'' = \arcsin x$.

Jogaby: $y = \dfrac{1}{2}x^2\arcsin x + \dfrac{3}{4}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{4}\arcsin x + C_1 + C_2x$.

146. $(1-x^2)\,y'' - x \quad y' = 2$.

Jogaby: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.

147. $y'' = ay'$. *Jogaby*: $y = C_1e^a x + C_2$.

148. $y'' = 1 + \dfrac{x(y' - x)}{1-x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Görkezme: $y' = p(x)$ ornuna goýmanyň kömegi bilen berlen deňlemäni çyzykly deňlemä getireliň: $\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{x}{1-x^2}p = \dfrac{1-2x^2}{1-x^2}$.

Jogaby: $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1\arcsin x + C_2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2\arcsin x + 1$.

149. $y'' - 2x(x^2 - y') = 0$. *Jogaby*: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1\int e^{-x^2}dx + C_2$

150. $y'y'' - \sqrt{1+y'^2} = 0$.

Jogaby: $y = \dfrac{x-C_1}{2}\sqrt{(x-C_1)^2 - 1} - \dfrac{1}{2}\ln\left[(x-C_1) + \right.$

$\left. + \sqrt{(x-C_1)^2 - 1}\,\right] + C_2$.

151. $y''^2 = y'$. *Jogaby*: $y = \dfrac{1}{12}(x-C_1)^3 + C_2$.

152. $y'' = ae^y$. *Jogaby*: $x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \frac{\sqrt{2ae^y + C_1} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{2ae^y + C_1} + \sqrt{C_1}}$.

153. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $(1,1)$ koordinataly nokatdan geçýän we birinji koordinata burçunyň bissektrisasyna galtaşýan integral egrini tapyň.

Jogaby: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(3x-1)^{\frac{2}{3}}$.

154. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Jogaby: $x + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$.

155. $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Jogaby: $y = -a \ln\cos\frac{x}{a}$ ýa-da $e^{\frac{y}{a}}\cos\frac{x}{a} = 1$.

156. $yy'' = y'^2$. *Jogaby*: $y = C_2 e^{C_1 x}$, bu ýerde $e^{c_1} = C_2$.

157. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$. *Jogaby*: $y = e^{C_1 \operatorname{tg}(C_1 + C_2 x)}$, $y = C$.

159. $y^3 y'' = -1$.

Jogaby: $\sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 + C_2 x$, bu ýerde $C_2 = C_1 C_2$.

160. $y'' = \frac{1}{3y\sqrt[3]{y^2}}$.

Jogaby: $\frac{1}{C_1^2}(C_1\sqrt[3]{y^2} - 2)\sqrt{1 + C_1\sqrt[3]{y^2}} = \pm(x + C_2)$.

161. $y''' - y' = 0$, *Jogaby*: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

162. $y^{IV} - a^2 y'' = 0$. *Jogaby*: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^a x + + C_3 e^{-ax}$.

§ 4. *n*-nji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

1. Hemişelik koeffisiýentli birjynsly deňlemeler we olaryň çözülişi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

deňlemä *n*-nji tertipli hemişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly deňleme diýilýär, bu ýerde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hemişelik sanlar.

(1) deňlemäniň çözüwini

$$y = e^k x (k = \text{const}) \qquad (2)$$

görnüşde gözläliň.Bu funksiýany we onuň

$$y' = ke^k x, y'' = k^2 e^k x, \ldots, y^n = k^n e^k x$$

önümlerini (1) deňlemede ornuna goýup, alarys:

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^k x + \cdots + a_{n-1} k e^k x + a_n e^k x = 0$$

ýa-da $e^k x (k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n) = 0.$

(2) funksiýanyň (1) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (3)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

(3) deňlemä (1) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär. Bu *n*-nji derejeli algebraik deňlemäniň *n* sany köki bardyr, olaryň içinde gabat gelýänide, kompleks san bolýanyda bolmagy mümkin.

Häsiýetlendiriji deňlemäniň *n* sany dürli hakyky kökleri bar. Bu kökleri $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k_i \neq k_j, i \neq j)$ bilen belgiläliň. Bu köklere degişli (1) deňlemäniň çözüwleri:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x} \qquad (4)$$

funksiýalar bolar. Bu funksiýalar $[a,b]$ kesimde çyzykly bagly däldir. (1) deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 e^{(} k_1 x) + c_2 e^{(} k_2 x) + + c_n e(k_n x) \qquad (5)$$

formula boýunça kesgitlenýär.

163. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

Onuň kökleri $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$ bolar. Şoňa görä berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^3 x.$$

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri hakyky sanlar bolup, olaryň m sanysy özara deň, beýlekileri dürli bolsun:

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots, k_n.$$

Berlen deňlemäniň olara degişli çözüwleri:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_1 x}, \ldots, y_m = e^{k_1 x}, \quad y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \ldots, y_n = e^{e k_n x}$$

bolar. Bu çözüwler çyzykly baglydyr, sebäbi m sany çözüw gabat gelýär. m sany gabat gelýän çözüwlere m sany çyzykly bagly däl

$$y_1 = e^{k_1 x} x, y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x} x$$

çözüwleri degişli edip bolar, şeýlelikde

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x};$$

$$y_{m+1} = e^{km+1x}, \ldots, y_n = e^{k_n x};$$

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}, y_{m+1} = e^{k_{m+1} x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$$

çözüwler çyzykly bagly däldir. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} + \ldots + c_m x^{m-1} e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

ýa-da

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + \cdots + c_n e^{k_n x}$$

funksiýa bolar.

164. $y''' - 2y'' + y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Häsiýetlendiriji deňlemesi: $k^3 - 2k^2 + k = 0$. Bu deňlemäniň çözüwleri $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0$ bolar. Umumy çözüwi ýazalyň:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + C_3.$$

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň arasynda kompleks sanlar hem bar bolsun: $k_1 = \alpha - i\beta, k_2 = \alpha + i\beta$. Olara degişli çözüwler:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Onda $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiýalar berlen deňlemäniň çözüwleridir.

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň galan $k_3, k_4, \ldots, k_n$ kökleri dürli we hakyky sanlar bolsun, onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x} + c_3 e^{k_3 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}.$$

165. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi

$k^3 + 4k^2 + 13k = 0$, onuň kökleri $\lambda_1 = -2 - 3i$, $\lambda_2 = -2 + 3i$, $\lambda_3 = 0$ bolar. Ol kökleri ulanyp, deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$y = (c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)e^{-2x} + c_3.$$

2. Birjynsly däl hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeleriň hususy we umumy çözüwleriniň tapylyşy

Hemişelik koeffisiýentli birjynsly däl

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \qquad (6)$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $a_k (k = \overline{1,n})$ hakyky sanlar, $f(x)$ bolsa $[a,b]$ kesimde üznüksiz funksiýa. (6) deňlemä degişli bolan birjynsly deňlemäni ỳazalyň:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n - 1y' + a_n y = 0. \qquad (7)$$

Eger (7) deňlemäniň umumy y_0 çözüwi we (6) deňlemäniň haỳsyda bolsa bir y_1 hususy çözüwi belli bolsa, onda $y_0 + y_1$ funksiýa (6) deňlemäniň umumy çözüwidir. (7) deňlemäniň umumy çözüwiniň tapylyşyna (1)-de seredipdik. (6) deňlemäniň hususy çözüwi funksiýanyň dürli görnüşleri üçin näbelli koeffisiýentler usuly bilen tapylýar.

1) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, bu ýerde $P_n(x)$ n derejeli köpagza.

Eger α san degişli häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl bolsa, onda $y_1 = e^{\alpha x} Q_n(x)$ bolar, bu ýerde n derejeli $Q_n(x)$ köpagzanyň koeffisiýentlerini kesgitlemeli.

166. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$ deňlemäniň umumy çözüwlerini tapmaly.

Çözülişi: Ilki bilen bu deňlemäniň birjynslysynyň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin ilki häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň.

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = i,$$

diýmek:

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Hususy çözüwi

$$y_1 = ax^2 + bx + c$$

görnüşde gözläliň. Önümlerini tapyp, berlen deňlemede ornunda goýup,

$$y'_1 = 2ax + b, \quad y''_1 = 2a, \quad y'' = 0,$$

$$0 - 2a + 2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2 + x,$$

$$-ax^2 + (2a - b)x - 2a + b - c = x^2 + x$$

deňligi alarys. Bu deňlikden x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňläp, a ,b, c sanlary tapmak üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\left.\begin{aligned} -a &= 1, \\ 2a - b &= 1, \\ -2a + b - c &= 0. \end{aligned}\right\}, \quad a = -1, b = -3, \; c = -1.$$

Olary ornunda goýup, hususy çözüwi taparys:

$$y_1 = -x^2 - 3x - 1.$$

Şonuň üçin berlen deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 ex + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$

Eger α san häsiýetlendiriji deňlemäniň m kratny köki bolsa, onda hususy çözüw: $y_1 = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ görnüşde bolar.

167. $y'' + 7y' = e - 1x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Bu deňlemä degişli birjynsly deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin onuň häsiýetlediriji deňlemesiniň köklerini tapalyň:

$$k^2 + 7k = 0 \Rightarrow k_1 = -7, k_2 = 0.$$

Şonuň üçin birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y_0 = C_1 e^{-7x} + C_2.$$

$\alpha = -7$ sanyň häsiýetlendiriji deňlemesiniň bir köki bilen gabat geleni üçin berlen deňlemäniň hususy çözüwi $y_1 = axe^{-7x}$ görnüşde bolar. Bu funksiýanyň önümlerini tapyp, berlen deňlemede ornunda goýalyň:

$$y_1' = ae^{-7x} - 7axe^{-7x}, \quad y_1'' = -14ae^{-7x} + 49axe^{-7x},$$

$$14ae^{-7x} + 49axe^{-7x} + 7ae^{-7x} - 49axe^{-7x} = e^{-7x}.$$

Bu ýerden a sany taparys: $-7a = 1$, $a = -\frac{1}{7}$. Onda hususy çözüw $y_1 = -\frac{1}{7}xe^{-7x}$. Şeýlelikde, deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-7x} + C_2 - \frac{1}{7}xe^{-7x}.$$

2) $f(x)e^{ax}(P_n(x)\cos\beta + R_m(x)\sin\beta x)$.

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks san häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri bolmasa, onda hususy çözüw: $y_1 = e^{ax}(Q_k(x)\cos\beta + S_k(x)\sin\beta x)$. görnüşde bolar, bu ýerde $k = max\{n,m\}$.

168. $y'' + 25y = \cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: $k_2 + 25 = 0$, $k_1 = 5i$, $k_2 = -5i$. Şonuň üçin

$$y_0 = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$$

funksiýa birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi bolar. Onuň hususy çözüwi: $y_1 = a\cos x + b\sin x$ görnüşde bolar. Ol funksiýany we onuň

$$y_1' = -a\sin x + b\cos x, \quad y_1'' = -a\cos x - b\sin x$$

önümlerini berlen deňlemede orunlaryna goýup, näbelli a we b hemişelikleri taparys:

$$-a\cos x - b\sin x + 25a\cos x + 25b\sin x = \cos x$$

$$24a\cos x + 24b\sin x = \cos x, \quad a = \frac{1}{24}, \quad b = 0,$$

Şeýlelikde, hususy we umumy çözüwler şeýle bolar:

$$y_1 = \frac{1}{24}\cos x, \quad y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + \frac{1}{24}\cos x.$$

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks san häsiỳetlendiriji deňlemäniň r kratny köki bolsa, onda deňlemäniň hususy çözüwi şeýle görnüşde bolar:

$$y_1 = x^r e^x (Q_k(x)\cos x + S_k(x)\sin x).$$

169. $y'' + y = \sin x - \cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Häsiýetlendiriji deňlemäni düzüp, onuň köklerini tapalyň:

$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i, k_2 = i$, şonuň üçin birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Berlen deňlemäniň hususy çözüwi $y_1 = x(a\cos x + b\sin x)$ görnüşde bolar. Deňlemäni we onuň önümlerini berlen deňlemede ornuna goýup, näbelli hemişelikleri taparys:

$$y_1' a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x),$$

$$y_1'' = -2a\sin x + 2b\cos x + x(-a\cos x - b\sin x),$$

$$-2a\sin x + 2b\cos x - x(a\cos x + b\sin x) + x(a\cos x + b\sin x) =$$
$$= \sin x + \cos x,$$

$$-2a\sin x + 2b\cos x = \sin x - \cos x,$$

$$-2a = 1, \quad 2b = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \ b = -\frac{1}{2}.$$

Şeýlelikde,

$$y_1 = -\frac{1}{2}x(\cos x + \sin x),$$

$$y = y_0 + y_1 = C_1\cos x + C_2\sin - \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x).$$

3. Çyzykly differensial deňlemäni çözmek üçin Lagranžyň usuly

Eger

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0 \qquad (8)$$

deňlemäniň $y_1(x)$ hususy çözüwi belli bolsa, onda $y = y_1 z$ belgilemäni girizip, deňlemäniň tertibini bir birlik kemeldip bolýar, alnan deňleme hem çyzykly deňlemedir. Eger (8) deňlemäniň k sany hususy çözüwi belli bolsa, onda bu deňlemäniň tertibini k birlik kemeldip bolar.

Eger (8) deňlemäniň umumy çözüwi belli bolsa, onda onuň kömegi bilen:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = f(x) \qquad (9)$$

deňlemäniň çözüwini tapyp bolar, bu usula Lagranžyň usuly diýilýär.

Goý, $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ funksiýa (8) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. (9) deňlemäniň çözüwini:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + + C_n(x)y_n \qquad (10)$$

görnüşde gözlenilýär, bu ýerde $C_1(x)$ $C_2(x)$,..., $C_n(x)$ funksiýalar häzirlikçe näbellidir. Olary tapmak üçin ilki bilen

$$\left.\begin{array}{c} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \ldots + y_n C_n' = 0, \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = \ldots = y_n' C_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} C_1' = y_2^{(n-1)} C_2' + \cdots + y_n^{(n-1)} C_n' = f(x). \end{array}\right\}$$

sistemadan olaryň $C_k^{'}(x)(k = \overline{1,n})$ önümlerini kesgitläliň:

$$\frac{dC_k}{dx} = \varphi_k(x), i = \overline{1,n}$$

soňra olary integrirläp, funksiýalaryň özlerini taparys:

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)dx + \overline{C}_k \cdot (k = \overline{1,n}),$$

bu ýerde $\overline{C_k} = (k = \overline{1,n})$ erkin hemişelikler. Tapylan $C_k = C_k(x)$ $(k = \overline{1,n})$ funksiýalaryň bahalaryny (10) deňlemede ornunda goýup, (9) deňlemäniň umumy çözüwini taparys.

170. Hususy çözüwi $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ bolan

$$xy'' + 2y + xy = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ üçin $y = \dfrac{\sin x}{x} z$ çalşyrmany girizeliň, bu ýerde z – täze gözlenýän funksiýa. Funksiýany we onuň önümlerini:

$$y = y_1 z, \quad y' = y_1^{'} z + y_1 z', \quad y'' = y_1^{''} z + 2y_1^{'} z' + y_1 z,$$

berlen deňlemede ornunda goýup, alarys:

$$(xy''_1 + 2y_1' + xy_1)z + xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0,$$

y_1-iň berlen deňlemäniň çözüwi bolany üçin, $xy''_1 + 2y_1' + xy_1 = 0$ bolar we deňleme şeýle görnüşi alar:

$$xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)\, z' = 0.$$

$y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ bolany üçin bu ýerden $z''\sin x + 2z'\cos x = 0$ deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni $\dfrac{z''}{z'} + 2\dfrac{\cos x}{\sin x} = 0$ görnüşde ýazyp we soňra integrirläp taparys:

$$\ln|z'| + 2\ln|\sin x| \ln C_1 \quad \text{ýa-da} \quad z'\sin 2x = C_1.$$

Deňlemäniň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, ony integrirläliň:

$$x = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2 \quad \text{ýa-da} \quad z = \overline{C_1} \operatorname{ctg} x + C_2 (\overline{C_1} = -C_1).$$

Tapylan z-i ornunda goýup, berlen deňlemäniň çözüwini taparys:

$$y = \overline{C_1} \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}.$$

171. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Ilki bilen $y'' + y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köküni tapalyň:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i, \quad k_2 = i.$$

Şonuň üçin $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Indi berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ hasap edip, ony

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin \tag{11}$$

görnüşde gözläliň we $C_1(x), C_2(x)$ näbelli funksiýalary

$$\left.\begin{aligned} \cos x C_1'(x) + \sin C_2'(x) &= 0 \\ -\sin C_1'(x) + \cos x C_2'(x) &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

sistemadan tapalyň:

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x, \quad C_2'(x) = 1.$$

Integrirläp alarys:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{C_1}, C_2(x) = x + \overline{C_2}.$$

Tapylan funksiýalary (11) deňlemede ornunda goýup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$y = \overline{C}_1 \cos x + \overline{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

172. $y'' - y = 0$. *Jogaby*: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

173. $y'' - 6y' + 9y = 0$. *Jogaby*: $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$.

174. $y'' + 4y' + 13y = 0$. *Jogaby*: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

175. $y''' - 13y' - 12y = 0$. *Jogaby*: $y = C_1 e^4 x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x}$.

176. $y^V + y^{IV} + 14y''' - 28y'' + 8y' + 32y = 0$.

Jogaby: $y = (C_1 + C_2 x_1 + C_3 x^2)e^{-2x} + C_4 e^x + C_5 e^{4x}$.

177. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

Jogaby: $y = (C_1 + C_2 x_1)e^x + C_3 \sin x + C_4 \cos x$.

178. $y^V - 6y^{IV} + 16y''' + 48y' - 32y = 0$.

Jogaby: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x(C_3 + C_4 x + C_5 x^2)e^{2x}$.

179. $y''' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$, $y''(0) = 0$.

Jogaby: $y = e^x + 2e^2 x - e^{-3x}$.

180. $y^{IV} - y = 0$. *Jogaby*: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

181. $y^{IV} + y = 0$.

Jogaby: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.

182. $y^{VI} + 64y = 0$.

Jogaby: $y = e^{x\sqrt{3}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x +$
$+ e^{-x\sqrt{3}}(C_5 \cos x + C_6 \sin x)$.

183. $-3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

184. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$.

Jogaby: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$.

185. $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0.$

Jogaby: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + e^{-x}(c_5 + c_6x).$

186. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

Jogaby: $y = e^{2x}$ $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$

187. $y''' - y'' = x + 1.$ *Jogaby*: $y = C_1 + C_2x + C_3e^x - \frac{1}{6}x^3 - x^2.$

188. $y'' - 7y' + 12y = x.$ *Jogaby*: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{144}(12x + 7).$

189. $y'' + y = e^x.$ *Jogaby*: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x.$

190. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6.$

Jogaby: $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3.$

191. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}.$

Jogaby: $y = C_1e^2x + C_2e^3x + xe^{-x}.$

192. $y^{V} + y'' = x.$

Jogaby: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \right.$

$\left. + C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x^2}{6}.$

193. $y^{V} - 4y''' = x.$

Jogaby: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x} - \frac{x^4}{96}.$

194. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 96xe^{2x}.$

Jogaby: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + (C_3 + C_4x - 3x^2 + 2x^3)e^{2x}.$

195. $y''' - 3y' + 2y = (9x + 1)e^x + 9e^{-2x}.$

Jogaby: $y = \left(C_1 + C_2x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)e^x + (C_3 + x)e^{-2x}.$

196. $y'' + y' - 2y = x^2e^4x + 2e^x.$

Jogaby: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{4x}\left(x^2 - x + \frac{7}{18}\right) + \frac{2}{3}xe^x.$

197. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}.$

Jogaby: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + \frac{1}{15}e^{2x}.$

198. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^3e^{3x} - e^{2x}.$

Jogaby: $y = C_1e^x + (C_2 + x)e^{2x} + (C_3 + 21x - 9x^2 + 2x^3)e^{3x}.$

199. $y'' - 7y' + 6y = \sin x.$

Çözülişi: $y'' - 7y' + 6y = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \quad k_1 = 6, \quad k_2 = 1; \quad Y = C_1e^x + C_2e^{6x}.$$

Hususy cözüwi aşakdaky görnüşde gözlenilýär: $y_1 = a\cos x + b\sin x.$

$$y'_1 = -a\sin x + b\cos x; \qquad y''_1 = -a\cos x - b\sin x$$

y_1, y'_1, y''_1 bahalaryny berlen deňlemä goýup alarys:

$$-a\cos x - b\sin x + 7a\sin x - 7b\cos x + 6a\cos x + 6b\sin x = \sin x$$

ýa-da

$$(5a - 7b)\cos x + (7a + 5b)\sin x = \sin x.$$

Bu deňligiň cos$x$ we sin$x$ koeffisiýentlerini deň diýip alalyň:

$$\begin{cases} 5a - 7b = 0 \\ 7a + 5b = 1, \end{cases} \quad a = \frac{7}{74}, \quad b = \frac{5}{74}.$$

Diýmek, $y_1 = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y = Y + y_1 = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

200. $y'' + y = x^2\sin x.$

Jogaby: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}x^2\right)\cos x + \frac{1}{6}x\sin x\right].$

201. $y'' + y = x\sin^2 x.$

Jogaby: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x\cos 2x - \frac{1}{16}x^2\sin 2x.$

202. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x.$

Jogaby: $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + \frac{\cos x}{9}.$

203. $y^{IV} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x).$

Jogaby: $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^x + (C_3 + C_4x + x^2)e^{-x} + \sin x +$
$+ \cos x.$

204. $y'' + y = 2\cos^3 x(\sec^2 x - 1).$

Jogaby: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{16}(4x\sin x + \cos 3x).$

Aşakdaky deňlemeleri Lagranžyň usuly bilen çözüň.

205. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

Jogaby: $y = \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} + C_1 + C_2x\right)e^{-2x}.$

206. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$

Jogaby: $y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2\cos x}.$

207. $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

Jogaby: $y = (C_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}x\right)\sin 2x.$

208. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$

Jogaby: $y = \left(C_1 + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2} + C_2x\right)e^x.$

209. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$ *Jogaby*: $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2).$

§ 5. Ykdysadyýetde differensial deňlemeleriň ulanylyşy

Ykdysady dinamikada differensial deňlemeler giňden ulanylýar. Olarda üýtgeýän ululyklar diňe wagta bagly bolman, olar hem özara wagta görä baglydyr. Käbir ýönekeý meselelere garalyň.

210. Goý, $y(t)$ – käbir önümçilik pudagyň t wagtyň pursadynda satylan önümiň göwrümi bolsun. Goý, ähli pudakda öndürilýän önüm käbir bellibir bahadan satylýar we bazar haryt bilen doly üpjün edilmändir diýeliň. Onda t wagtda girdeji $Y(t) = py(t)$ deňdir. Önümçiligi giňeltmek üçin maýa goýumlary $G(t)$ bilen belgiläliň. Tebigy ösmek modelde önümiň öndürme tizligi (akselerasiýa) maýa goýumlaryň bahasyna göni proporsionaldyr ýa-da

$$y'(t) = l\,G(t). \tag{1}$$

Bu ýerde önümiň öndürilen we onuň satylan wagt aralygy hasap edilmeýär. $G(t)$ maýa goýumlaryň bahasy girdejiniň fiksirlenen bölegini tutýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$G(t) = mY(t) = mpy(t), \tag{2}$$

bu ýerde m – proporsionallyk koeffisiýenti (maýa goýumlaryň normasy diýip atlandyrylýar) we hemişelik san. (2) deňligi (1) deňlige goýup, aşakdaky differensial deňlemä gelýäris:

$$y'(t) = ky(t), \tag{3}$$

bu ýerde $k = mpl$.

Alnan differensial deňleme – üýtgeýän ululyklary bölünýän deňleme. Ony çözüp, aşakdaky funksiýany alarys:

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, \quad y_0 = y(t_0).$$

Bellik. (3) deňleme ilatyň artmagyny (demografik proses), hemişelik inflýasiýada bahalaryň ösmeginiň dinamikasyny, radioaktiw elementleriň dargaýyş prosesini we başgalary aňladyp bilýär.

Tejribede bazaryň haryt bilen dolulygyny diňe kiçi wagt interwal üçin alyp bolýar. Umumy ýagdaýda islegiň egrisi (satylan önümiň p bahasy onuň y göwrümine baglylyga) kemelýän $p = p(y)$ funksiýa bolsun. Şol sebäpli bäsdeş bazar şertinde ösmegiň modeli aşakdaky görnüşi alýar:

$$y'(t) = mlp(y) \cdot y(t). \tag{4}$$

Bu deňleme hem üýtgeýänleri böleklenýän deňlemesidir. (4) deňlemäniň sag tarapyndaky köpeldijileriň her biri položitel bolany üçin $y' > 0$ bolýar we bu deňleme artýan $y(t)$ funksiýany aňladýar. $y(t)$ funksiýa güberçekligine derňelende funksiýanyň çeýelikligi düşünjäni peýdalanýarlar. Hakykatdan hem, (4) deňlemeden alarys:

$$y''(t) = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right).$$

Baha görä islegiň çeýeligi:

$$E_p(y) = \frac{pdy}{ydp}$$

formula arkaly kesgitlenýär. Onda y'' üçin aňlatmany:

$$y''(t) = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right)$$

görnüşde ýazmak bolýar we $y''(t) = 0$ şert $E_p(y) = -1$ deňlige deňgüýçlidir. Şeýlelikde, eger isleg çeýelikli $|E_p(y)| > 1$ ýa-da $|E_p(y)| < -1$ bolsa, onda $y''(t) > 0$ we $y(t)$ güberçek aşak bolýar; eger-de isleg çeýelikli däl ýa-da $|E_p(y)| < 1$, $-1 < E_p(y) < 0$ bolsa, onda $y''(t) < 0$ we $y(t)$ güberçek ýokary bolýar.

211. Eger islegiň egrisi $p(y) = 2 - y$, akselerasiýanyň normasy $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$ bolsa, satylan önümiň göwrümi üçin aňlatmasyny $y = y(t)$ görnüşde tapmaly.

Çözülişi: Bu ýagdaýda (4) deňleme

$$y' = (2 - y)y \quad \text{ýa-da} \quad \frac{dy}{(2 - y)y} = dt$$

görnüşi alýar.

Agzama-agza integrirläliň:

$$\ln\left|\frac{y - 2}{y}\right| = -2t + C_1$$

ýa-da

$$\frac{y - 2}{y} = Ce^{-2t} \tag{5}$$

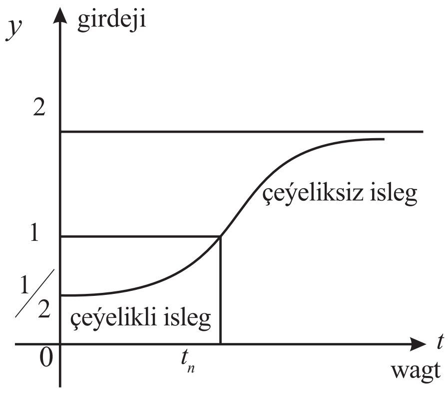
bu ýerde $C = \pm e^{C_1}$.

$y(0) = 0{,}5$ şerti hasaba alyp taparys: $C = -3$. Onda (5) deňlik

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}$$

görnüşi alýar.

Tapylan funksiýanyň grafiginiň sudury 1-nji suratda şekildirilendir.



1-nji surat

Bu ýagdaýda islegiň çeýeligi $E_p(y) = \dfrac{y-2}{y}$ funksiýa bilen berilýär we egriniň epin nokadyny kesgitleýän $E_p(y) = \dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp} = \dfrac{y-2}{y}$ şert $y = 1$ berýär.

Suratdaky şekilendirilen egrini logistik diýip atlandyrylýar. Şolar ýaly egriler informasiýanyň dinamikasyny, çäklenen ýerde bakteriýalaryň köpelmegini aňladyp biler.

212. Käbir pudagyň t wagtda alan $Y(t)$ girdejisi $G(t)$ maýa goýumlaryň we islegiň $C(t)$ ululygynyň jemine deň ýa-da

$$Y(t) = G(t) + C(t) \tag{6}$$

Öň guman edişimiz ýaly tebigy ösüş modelde girdejiniň ösüş tizligini maýa goýumlara göni proporsional diýip hasaplalyň ýa-da

$$bY(t) = G(t), \tag{7}$$

bu ýerde b – girdejiniň artdyrmasynda maýa goýumlaryň göwrüminiň (капиталоёмкость) koeffisiýenti (bu önümiň p hemişelik bahasynda we $l = \dfrac{1}{pb}$ bolanda (1) deňlige deňgüýçlidir).

$C(t)$ funksiýa baglylykda $Y(t)$ girdeji funksiýanyň üýtgemesine garalyň. Goý, $C(t)$ – girdejiniň fiksirlenen bölegi: $C(t) = (1 - m)Y(t)$ bolsun, bu ýerde m – maýa goýumlaryň normasy *(1-nji meselä seret)*. Onda (6) we (7) deňliklerden alarys:

$$Y' = \frac{m}{b}Y, \tag{8}$$

bu bolsa p – hemişelik bolanda (3) deňölçeglidir.

Käbir hallarda goşmaça maglumatlardan isleg funksiýa $C(t)$ belli bolýar.

213. Eger isleg funksiýa $C(t) = 2t$, $b = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 2$ bolsa $y = y(t)$ girdeji funksiýany tapmaly.

Çözlüşi: (6) we (7) gatnaşyklardan aşakdaky deňlemäni alarys:

$$y(t) = \frac{1}{2}y'(t) + 2t$$

ýa-da girdeji funksiýa 1-nji tertipli çyzykly birjynsly däl differensial deňlemäni kanagatlandyrýar. Onuň çözüwini $y(t) = u(t)v(t)$ görnüşde gözläp taparys:

$$u(t) = 2te^2 t + e^{-2t} + C, \quad v(t) = e^{2t}$$

C – hemişeligi $y(0) = 2$ şertden taparys: $C = 1$, diýmek

$$y(t) = 2t + e^2 t + 1.$$

Çeýelik we isleg funksiýa. Eger käbir harydyň isleginiň çeýeligi berlen bolsa, onda isleg funksiýany tapmak mümkinçiligi döreýär.

214. Islendik p-iň bahalary üçin çeýeligi

$E_p(y) = -\frac{1}{3}$. Isleg funksiýasyny tapyň.

Çözülişi: Çeýeligiň kesgitlemesini

$$E_p(y) = \frac{p}{y} \cdot \frac{dy}{dp}$$

peýdalanyp, üýetgeýän ululyklaryny bölekläp bolýan differensial deňlemäni alarys:

$$3\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dp}{p},$$

$$3\ln|x| = -\ln|p| + \ln C,$$

$$px^3 = C.$$

Bellik. C-ni kesgitlemek üçin goşmaça maglumat zerurdyr.

Teklip deňlemesi

$\frac{dy}{dt} py(m - y)$, bu ýerde p we m hemişelik sanlar görnüşdäki deňlemä teklip ýa-da logistik deňlemesi diýilýär. Bu deňleme üýtgeýän ululyklary bölünýän deňleme:

$$\frac{dy}{y(m-y)} = pdt,$$

$$-\frac{dy}{y^2 - my} = pdt.$$

Deňligiň çep tarapynyň maýdalawjysynda doly kwadraty aýralyň we integrirläliň:

$$-\int \frac{dy}{\left(y-\frac{m}{2}\right)^2 \frac{m^2}{4}} = pdt, \quad \frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt-c,$$

$$\frac{y-m}{y} = e^{-mpt} \cdot e^{-c}.$$

Soňky deňlikden y-i tapalyň:

$$y = \frac{m}{1+e^{mpt} \cdot e^{-c}}.$$

Eger $k = mp$, $A = e^{-c}$ belgileri girizsek, onda teklip (logistik) funksiýany alarys:

$$y = \frac{m}{1+Ae^{kt}},$$

bu ýerde A başlangyç şertden kesgitlenýär. Teklip deňlemesi ilatyň çäkli ösüşini modelirlemek üçin ulanylýar. $y = m$ bolanda $\frac{dy}{dt} = 0$ alynýar we önüm «+» alamatdan «–» alamata eýe bolýar. Şeýlelikde $y = m$ – maksimal bahasy.

Eger $y \ll m$ bolsa, onda

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy = ky.$$

$\frac{dy}{dt} = ky$ deňlemäniň çöwüwi $y = e^{kt}$ funksiýa we ol ilatyň çaksiz eksponensial ösüşini beýan edýär.

215. Gapdaky bakteriýalaryň sanynyň ösüşi $k = pm = 0,2$ hemişelikli logistik deňlemä kanagatlandyrýar. Goý, wagtyň başlangyç pursadynda bakterialaryň sany iň köp mümkin bolan m sanyň 1%-ne deň bolsun. Näçe wagtda bakterialaryň sany maksimal sanyň 80%-ne deň bolar?

Çözlüşi:

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y) = \frac{0,2y}{m}(m-y); \quad \frac{mdy}{y(m-y)} = 0,2dt;$$

Integrirläp we $y < m$ şerti ulanyp, alarys $\ln\frac{m-y}{y} = -0,2t - C$.

$y(o) = 0{,}01m$ başlangyç şerti peýdalanyp, C-niň bahasyny tapalyň we ony çözüwine goýalyň:

$$\ln\frac{0,99}{0,01} = -C; \quad \ln\frac{m-y}{99y} = -0,2t, \quad \frac{m-y}{99y} = e^{-0,2t}.$$

$y = \dfrac{m}{1+99e^{-0,2t}}$ – meseläniň çözülişi.

Indi $y = 0{,}8m$ bolanda, t-niň bahasyny tapalyň:

$$0,8 = \frac{1}{1+99e^{-0,2t}}; \quad e^{-0,2t} = \frac{1}{396}; \quad -0{,}2t = -\ln 396;$$

$$t = 5\ln 396 \approx 29{,}91.$$

Isleg we teklip funksiýalar. Ýönekeý ýagdaýlarda bazarda isleg we teklip harydyň diňe bahasyna bagly diýip hasaplanylýar. Çylşyrymly modellerde olar bahasynyň üýtgemesine (önüme) bagly diýip hasaplanylýar. Bu ýagdaýda deňagramly bahany kesgitlemek üçin differensial deňlemäni ulanylýar.

216. Käbir harydyň isleg we teklip funksiýalary aşakdaky görnüşi alýar:

$$y = 19 + p + 4\frac{dp}{dt},$$

$$y = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}.$$

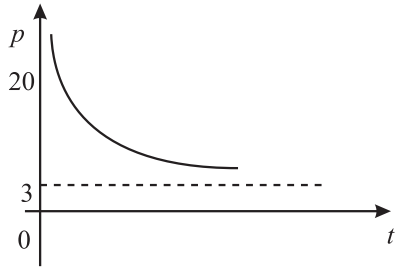
Eger wagtyň başlangyç pursadynda harydyň bahasy $p = 20$ bolsa, deňagramly bahanyň t wagtda baglylygyny tapyň.

Çözülişi: $19 + p + 4\dfrac{dp}{dt} = 28 - 2p + 3\dfrac{dp}{dt}; \quad \dfrac{dp}{dt} = 9 - 3p;$

$$-\frac{1}{3}\ln|9-2p| = t + C; \quad 9 - 3p = e^{-3t-3C}; \quad p = \frac{9+e^{-2x-3C}}{3}.$$

Başlangyç şerti ulanyp, C-iň bahasyny tapalyň:

$20 = \dfrac{9 - e^{-3C}}{3}$; $e^{-3t} = -51$; $p = \dfrac{9 + 51e^{-3t}}{3} = 3 + 17e^{-3t}$ – meseläniň çözülişi *(2-nji surat)*.



2-nji surat

$$\lim_{t\to\infty} p = 3$$

bolany üçin, durnuklylyk bar. Eger $\lim\limits_{t\to\infty} p = \infty$ bolsa, onda deňagramly baha artýar we ol inflýasiýa getirýär.

VII bap
HATARLAR

§ 1. San hatary

Goý, $\{a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots\}$ türkeniksiz san yzygiderligi berlen bolsun. Yzygiderligiň agzalaryndan aşakdaky aňlatmany düzeliň:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

aňlatma san hatary, $a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots$ sanlara bolsa san hatarynyň agzalary diýilýär.

(1) hataryň ilkinji n sany agzalarynyň jemini S_n diýip belläliň:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2}$$

Bu jeme (1) san hataryň n-nji hususy jemi diýilýär. (2) deňlikde $n \in N$ sana yzygider 1,2,3, ... bahalary berip, (1) hataryň aşakdaky ýaly hususy jemleriniň yzygiderligini alarys:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

Kesgitleme. Eger (1) hataryň $\{S_n, n \geq 1\}$ hususy jemleriniň yzygiderligi käbir S sana ýygnalýan bolsa, onda (1) hatara ýygnalýan hatar, S sana bolsa hataryň jemi diýilýär we ony bu halatda

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ýaly ýazýarlar.

Eger-de $\{S_n, n_1 \geq 1\}$ yzygiderlik tükenikli predele eýe bolmasa, onda (1) hatara dargaýan hatar diýilýär. Bu ýerden görnüşi ýaly goşmak we predele geçmek amallaryň netijesinde hataryň jemi alynýan eken.

1.

$$\ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} + \ldots + \ln\frac{n\cdot(3n-2)}{(n-1)\cdot(3n+1)} + \ldots \quad (n \geq 2)$$

hatara seredeliň.

Bu hataryň hususy jemlerini düzeliň we hasaplalyň:

$$S_1 = \ln\frac{1}{4}, \quad S_2 = \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} = \ln\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} = \ln\frac{2}{7};$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = \ln\frac{2}{7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} = \ln\frac{2}{7}\cdot\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} = \ln\frac{3}{10};$$

$$S_4 = S_3 + a_3 = \ln\frac{3}{10} + \ln\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13} = \ln\frac{3}{10}\cdot\frac{4\cdot 10}{3\cdot 13} = \ln\frac{4}{13};$$

Matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, $S_n = \ln\dfrac{n}{3n+1}$ bolýandygyny aňsatlyk bilen subut edip bolýar.

Oňa görä-de

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{n}{3n+1} = \ln\frac{1}{3} \qquad \text{diýmek,}$$

$$\ln\frac{1}{4} + \ln\frac{2\cdot 4}{1\cdot 7} + \ln\frac{3\cdot 7}{2\cdot 10} + ... + \ln\frac{n\cdot(3n-2)}{(n-1)\cdot(3n+1)} + ... = \ln\frac{1}{3}.$$

2. $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$ geometriki progressiýanyň agzalarynyň jeminden düzülen

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \cdots (a \neq 0) \qquad (3)$$

hatara seredeliň. Bu hatara, köplenç, geometrik hatar hem diýilýär.

(3) hataryň n-nji hususy jemini düzüp, alarys:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}.$$

Eger $|q| < 1$ bolsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

oňa görä-de

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} \Rightarrow S = \frac{a}{1-q}.$$

Diýmek, $|q| < 1$ bolanda (3) hatar ýygnalýan eken. Eger-de $|q| > 1$ bolsa, onda $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \infty$, oňa görä-de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, bolýar. $q = l$ bolsa $S_n = na$ bolup,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

bolýar. Diýmek, $|q| \geq 1$ bolanda (3) hatar dargaýar.

San hataryň ýygnalmagynyň zerur şerti.

Teorema. Eger,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

hatar ýygnalýan bolsa, onda $n \to \infty$ ymtylmagynda bu hataryň umumy agzasy nola ymtylýar, ýagny:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (4)$$

Meselem, $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{n}{n+1} + ...$ hatar dargaýan hatardyr, çünki:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

(4) şertiň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnalýandygyny asla aňlatmaýar. Munuň şeýledigini, garmoniki hatar diýip atlandyrylýan aşakdaky hataryň mysalynda subut edeliň

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \qquad (2)$$

garmoniki hatar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bolýandygyna seretmezden dargaýar.

Bu hatar üçin, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ýagny zerur şert ýerine ýetýär, ýöne ol dargaýar. Hakykatdan-da, eger tersine, ol ýygnanýar diýip güman etsek, onda onuň S jemi üçin:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S, \quad \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

Ol bolsa,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

deňsizlige garşy gelýär. Şeýlelikde, garmoniki hatar dargaýar.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+5}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

Bu hatar üçin, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3}$, ýagny (4) şert ýerine ýetmeýär we şonuň üçin netije boýunça hatar dargaýar.

Koşiniň kriterisi. $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0$ tapylyp $\forall n > n_o$ we $\forall p \in N$ üçin:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \qquad (5)$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnanmagy üçin zerur we ýeterlikdir.

Agzalary otrisatel däl hatarlar

Deňeşdirme nyşanlary

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (6)$$

hatarlara garalyň.

Teorema 1. Goý, (1) we (6) hatarlaryň agzalary üçin

$$0 \le a_n \le b_n \qquad (7)$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsun. Onda (6) hataryň ýygnanmagyndan (1) hataryň ýygnanmagy, (1) hataryň dargamagyndan bolsa (6) hataryň dargamagy gelip çykýar.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)3^n}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Bu hataryň umumy agzasy üçin $a_n = \dfrac{n}{(n+1)3^n} < \dfrac{1}{3^n}$, ýagny $q = \dfrac{1}{3}$ üçin $a_n \le q_n$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de, 1-nji netije esasynda garalýan hatar ýygnanýar.

Teorema 2. Eger agzalary položitel bolan (1) we (6) hatarlar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < +\infty) \qquad (8)$$

predel bar bolsa, onda (1) we (6) hatarlaryň ikisi hem birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

Koşiniň nyşany. Eger agzalary otrisatel däl (1) hatar üçin:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r, \tag{10}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r < 1$ bolanda ýygnanýar, $r > 1$ bolanda bolsa dargaýar.

Dalamberiň nyşany. Eger agzalary položitel (1) hatar üçin:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \tag{11}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r < 1$ bolanda ýygnanýar, $r > 1$ bolanda bolsa dargaýar.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Bu hatar üçin:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Şoňa görä-de Koşiniň nyşany boýunça hatar ýygnanýar.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n n!}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: $a_n = \dfrac{n^3}{2^n n!}$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!} : \frac{n^3}{2^n n!} = \frac{2^0 n!(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

deňlikleriň esasynda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

bolýandygy üçin Dalamberiň nyşany boýunça hatar ýygnanýar.

Koşiniň integral nyşany. Eger f funksiýa $[1, +\infty]$ aralykda üznüksiz, otrisatel däl we artmaýan bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k), \tag{12}$$

hatar we

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \qquad (13)$$

hususy däl integral birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hataryň, p parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny we dargaýandygyny anyklamaly.

Çözülişi: Bu hataryň agzalary bolan $f(n) = \frac{1}{n^p}$ üçin $f(x) = \frac{1}{x^p}$ funksiýa $x \geq 1$ bolanda položitel we $p > 0$ üçin artmaýar, ýagny bu halda 9-njy teoremanyň şertleri ýerine ýetýär. Şonuň üçin şol teorema esasynda hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar, $0 < p < 1$ bolanda bolsa dargaýar, çünki bu halda (24) hususy däl integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p dx}$$

görnüşi alar we ol integralyň $p > 1$ bolanda ýygnanýandygy, $0 < p < 1$ bolanda bolsa dargaýandygy ozaldan mälimdir. Eger-de $p \leq 0$ bolsa, onda $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} \neq 0$ we şonuň üçin hatar dargaýar. Şeýlelikde, hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar we $p \leq 1$ bolanda bolsa dargaýar.

Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatarlar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}a_n + ... \qquad (14)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde $\forall n \in N$ üçin $a_n > 0$.

Leýbnisiň nyşany. Eger (14) hataryň agzalary üçin

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. $a_n \geq a_{n+1}$

şertler ýerine ýetse, onda (14) hatar ýygnanýar we

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \qquad (15)$$

$$|r_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}, \qquad (16)$$

bu ýerde S we S_n degişlilikde (14) hataryň jemi we bölekleýin jemi.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}(p>0)$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän bu hatar üçin $p > 0$ bolanda, Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä hatar şol nyşan esasynda ýygnanýar.

Bu hataryň hususy haly bolan $p = 1$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}+...$$

hatar hem ýygnanýar we onuň S jemi üçin (15) esasynda $n = 1$ bolanda $1/2 \leq S \leq 5/6$ deňsizlikler ýerine ýetýär.

Absolýut ýygnanýan hatarlar. (1) hatar bilen bilelikde onuň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{17}$$

hatara garalyň.

Eger (1) hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen (17) hatar ýygnanýan bolsa, onda (1) hatara absolýut ýygnanýan hatar diýilýär.

Teorema 3. Her bir absolýut ýygnanýan hatar ýygnanýandyr.

Bellik. (1) hataryň ýygnanmagyndan (17) hataryň ýygnanmagy gelip çykmaýar. Oňa 8-nji mysaldaky hatardan bolanda alynýan we ýygnanýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \tag{18}$$

hatar mysal bolup biler, çünki bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklarynyndan düzülen hatar dargaýan garmoniki hatardyr.

Eger (1) hatar ýygnanýan bolup, (17) hatar dargaýan bolsa, onda bu halda (1) hatara şertli (absolýut däl) ýygnanýan hatar diýilýär. Şeýle hatara (18) hatar mysal bolup biler.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, $(p>1)$ hataryň absolýut ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Hatar 7-nji mysal esasynda $p > 1$ bolanda ýygnanýar we şonuň üçin berlen hatar absolýut ýygnanýar, teorema 3 esasynda bolsa ol ýöne ýygnanýar.

Hatarlaryň jemlerini tapmaly:

1. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$ *Jogaby*: 3.

3. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$ *Jogaby*: 1.

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$ *Jogaby*: $\frac{2}{3}$.

4. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ldots.$ *Jogaby*: $\frac{5}{6}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$ *Jogaby*: $1/2$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$ *Jogaby*: $1/3$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$ *Jogaby*: $1/4$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$ *Jogaby*: $3/4$.

9. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \ldots$ *Jogaby*: $\frac{4}{3}$.

10. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{84} + \ldots$ *Jogaby*: $4/7$.

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$. *Jogaby*: 1.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Jogaby*: $\frac{1}{4}$.

Aşakdaky hatarlaryň dargaýandygyny subut ediň:

13. $1-1+1-1+1-1+...$

Görkezme. $S_n=\begin{cases}1, n-\text{täk}\\ 0, n-\text{jübüt}\end{cases}$ Diýmek bölek jemleriň predeli ýok.

14. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$

Görkezme. Koşiniň kriteriýasyny ulanmaly:

$$|a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+...a_{2n}|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|$$

15. $\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{n}{\sqrt{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+...$$

16. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+...+\frac{2n-1}{2n}+...$

Görkezme. Ýygnanmagyň zerur şertini ulanyň.

Deňeşdirme nyşanlaryny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

17. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{n^2}...$ *Jogaby*: ýygnanýar.

Görkezme. Ikinji deňeşdirme nyşany ulanyp,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},$$

(gönükme 2.) hatar bilen deňeşdirmeli.

18. $1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots \quad (\alpha \geq 2).$ *Jogaby*: ýygnanýar.

Görkezme. Deňeşdirmek üçin.

19. $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$ *Jogaby*: dargaýar.

Görkezme. Deňeşdirmek üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

garmoniki hatary ulanmaly.

20. $1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots \quad (\alpha \leq 1).$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1 + 5^{2n}}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6 + n^2}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n + 1)}.$ *Jogaby*: dargaýar.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2 + 1}}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n^2 + 3}}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n = \sqrt{n}}{n^2 - n}.$ *Jogaby*: dargaýar.

Koşiniň integral nyşanyny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

27. $1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots$

Çözülişi: Hususy däl integraly garalyň:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^a}dx=\lim_{b\to\infty}\begin{cases}\left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_1^b, & \alpha\neq 1\\ \ln x\Big|_1^b, & \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha\neq 1\\ \lim\limits_{b\to\infty}\ln b, & \alpha=1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-a}, a>1\\ +\infty, \quad a<1\\ +\infty, \quad a=1.\end{cases}$$

Şeýlelikde, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\alpha}dx$ integral $\alpha>1$ bolanda ýygnanýar we $\alpha<1$ bolanda dargaýar. Diýmek berlen hatar $\alpha>1$ bolanda ýygnanýar we $\alpha<1$ bolanda dargaýar.

28. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots$ *Jogaby*: ýygnanýar

29. $e+\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}+\frac{e^{\sqrt{4}}}{\sqrt{4}}+\ldots\frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+\ldots$ *Jogaby*: dargaýar

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-6)\ln(n-2)}.$ *Jogaby*: dargaýar

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+\sqrt{3})3^{-(n+\sqrt{3})^2}$ *Jogaby*: ýygnanýar

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}.$ *Jogaby*: ýygnanýar.

34. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$ *Jogaby*: dargaýar.

Dalamberiň we Koşiniň nyşanyny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

35. $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}+\ldots$

Çözülişi: Dalamberiň nyşany boýunça

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

Diýmek, hatar ýygnanýar.

36. $3+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{3^4}{4^4}+\ldots+\frac{3^n}{n^n}+\ldots$

Çözülişi: Koşiniň nyşany boýunça

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0<1.$$

Diýmek, hatar dargaýar.

37. $\frac{100}{1!}+\frac{100^2}{2!}+\frac{100^3}{3!}+\frac{100^4}{4!}+\ldots+\frac{100^n}{n!}+\ldots$

Jogaby: ýygnanýar

38. $a+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$ *Jogaby*: ýygnanýar

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$. *Jogaby*: dargaýar.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$. *Jogaby*: dargaýar.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{6^n}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(2n-1)}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$. *Jogaby*: ýygnanýar.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-2}{3n+1}\right)^n$. *Jogaby*: dargaýar.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^2}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{1+(-1)^{2n}}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1}$. *Jogaby*: dargaýar.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos an}{n^3}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$. *Jogaby*: ýygnanýar.

Hatarlaryň absolýut ýa-da şertli ýygnanmagyny derňemeli:

55. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + ... + \frac{(1)^{n-1}}{\sqrt{2n-13}} + ...$

Jogaby: Şertli ýygnanýar

56. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + ... + \frac{(1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + ...$

Jogaby: Absolýut ýygnanýar

57. $\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{4\ln 4} - ... + \frac{(1)^n}{n\ln n} + ...$

Jogaby: Şertli ýygnanýar

58. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}.$ *Jogaby*: şertli ýygnanýar.

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n(3n+1)}.$ *Jogaby*: absolýut ýygnanýar.

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+3^n}.$ *Jogaby*: absolýut ýygnanýar.

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ *Jogaby*: absolýut ýygnanýar.

62. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}.$ *Jogaby*: absolýut ýygnanýar.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$ *Jogaby*: şertli ýygnanýar.

§ 2. Funksional hatarlar

Agzalary käbir X köplükde kesgitlenen $u_1(x), u_1(x),...,u_n(x),...$ funksiýalar bolan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \qquad (1)$$

hatara *funksional hatar* diýilýär.

Ol hatardan $x = a \in X$ bolanda alynýan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = u_1(a) + u_2(a) + ... + u_n(a) + ... \qquad (2)$$

hatar san hatarydyr. Eger bu hatar ýygnanýan bolsa, onda (1) hatara a nokatda ýygnanýan hatar, a nokada bolsa onuň ýygnanma nokady diýilýär.

Funksional yzygiderligiň deňölçegli ýygnanmagy. Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N \in n_0 = n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (8)$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{f_n(x)\}$ yzygiderlige X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýan yzygiderlik diýilýär. Ol gysgaça şeýle ýazylýar:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X \quad \text{ýa-da} \quad f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f,$$

bu kesgitlemede $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ýazylmagynyň sebäbi n_0 belginiň diňe ε sana bagly bolup, ýöne x ululyga bagly däldigini görkezýär.

Bu kesgitlemeden görnüşi ýaly (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanmagyndan

$P_n = \sup|f(x) - f_n(x)|$ üçin:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 \qquad (3)$$

deňlik gelip çykýar.

Şonuň üçin (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek üçin (3) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.

64. $\{x^n\}$ yzygiderligiň 1) $X = [0,1]$; 2) $X = [0,b]$ $(b < 1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: 1) $0 \le x < 1$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ we $x = 1$ bolanda onuň predeliniň bire deňligi sebäpli, $\{x^n\}$ yzygiderligiň predeli:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \text{bolanda} \\ 1, & x = 1 \quad \text{bolanda} \end{cases}$$

bolar. Şoňa görä $f_n(x) = x^n$ üçin $p_n = \sup\limits_{x\in[0,\infty]} |f(x) - f_n(x)| = 1$ we bu halda (3) ýerine ýetmeýär, şoňa görä yzygiderlik deňölçegsiz ýygnanýar.

2) $x \in [0,b]$ $(b > 1)$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ bolýandygy sebäpli,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\epsilon[0,1]} |f(x) - f_n(x| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\epsilon[0,1]} |x^n| = \lim_{n\to\infty} b^n = 0.$$

Şonuň üçin bu halda yzygiderlik deňölçegli ýygnanýar.

Funksional hataryň deňölçegli ýygnanmagy. Eger (3) funksional hataryň bölekleýin jeminiň $\{s_n(x)\}$ yzygiderligi X köplükde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hatara X köplükde deňölçegli ýygnanýan hatar diýilýär.

Eger $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ we $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ bolsa, onda (1) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0 = n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \text{ ýa-da } |r_n(x) < \varepsilon,| \tag{4}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegini aňladýar.

Şeýlelikde, funksonal yzygiderligiň deňölçegli ýygnanma kriterisi esasynda (1) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\rho_n = \sup\limits_X |r_n(x)|$üçin $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{n-1} - x^n)$ hataryň:

1) $X = [0,1]$; 2) $X = [0,b]$ $(b < 1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Bu hataryň bölekleýin jemi üçin:

$$s_n(x) = (1 - x^2) + \ldots + (x^{n-1} - x_n) = 1 - x^n,$$

deňligiň esasynda 1) $x \in [0,1]$ bolanda

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 - x^n, 0 \le x < 1, \\ 0, \quad x = 1 \end{cases}, S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x < 1, \\ 0, x = 1 \end{cases}$$

bolar. Şonuň üçin bu halda $\rho_n = \sup\limits_{[0,1]} |r_n(x)| = 1$ we şoňa görä hatar deňölçegsiz ýygnanýar.

2) $x \in [0,b]$ $(b < 1)$ bolanda,

$$\rho_n = \sup_{[0,b]}|r_n(x)| = \sup_{[0,b]}|x^n| = b^n \text{ we } \lim_{n\to\infty}\rho_n = 0.$$

Şonuň üçin bu halda hatar deňölçegli ýygnanýar.

Deňölçegli ýygnanmagyň Koşiniň kriterisi. (1) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0 = n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_0 \wedge \forall p \in N$ we $\forall x \in X$ üçin:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Hataryň deňölçegli ýygnanma nyşany (Weýerştrasyň nyşany). Eger $\forall n > n_0 \geq 1$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|u_n(x)a_n| \tag{10}$$

deňsizlik ýerine ýetip, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ san hatar ýygnanýan bolsa, onda (1) hatar X köplükde deňölçegli ýygnanýar.

66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ hataryň $[-1,1]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandygyny derňemeli.

Çözülişi: $\forall x \in [-1,1]$ üçin $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ we $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hatar ýygnanýar. Şoňa görä Weýerştrasyň nyşany esasynda $[-1,1]$ hatar kesimde deňölçegli ýygnanýar.

Eger $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýan bolsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx.$$

hatarlar islendik aralykda deňölçegli ýygnanýarlar.

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ hataryň R köplükde deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

Çözülişi: $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$ bolany üçin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýar. Şonuň üçin hem garalýan hatar netije esasynda R-de deňölçegli ýygnanýar.

Deňölçegli ýygnanýan funksional hatarlaryň häsiýetleri

1. Eger agzalary X aralykda üznüksiz bolan (1) hatar şol aralykda deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hataryň $S(x)$ jemi X aralykda üznüksizdir.

Bellik. Teoremanyň tassyklamasy esasynda:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \lim_{x\to a}S(x) = S(a) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a}u_n(x),$$

deňlik ýerine ýetýär we ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatarda agzalaýyn predele geçip bolýandygyny görkezýär.

Netije. Eger ähli agzalary X aralykda üznüksiz bolan hataryň jemi üznüksiz funksiýa bolmasa, onda ol hatar şol aralykda deňölçegli ýygnanýan däldir.

68. $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ funksiýanyň san okunda üznüksizdigini görkezmeli.

Çözülişi: Hataryň ähli agzalary san okunda üznüksiz we hatar 4-nji mysal esasynda deňölçegli ýygnanýar. Şonuň üçin teorema boýunça onuň jemi bolan $S(x)$ funksiýa şol köplükde üznüksizdir.

2. Eger ähli agzalary $[a,b]$ kesimde üznüksiz (1) hatar şol kesimde $S(x)$ jeme deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $S(x)$ funksiýa $[a,b]$ kesimde integrirlenýär, $a \le c \le x \le b$ üçin:

$$\int_c^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)dt \qquad (5)$$

deňlik dogrudyr we bu deňligiň sag bölegindäki hatar $[a,b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

3. Eger ähli agzalary $[a,b]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän (3) hatar ýygnanýan bolsa we

$$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x) \qquad (6)$$

hatar $[a,b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda (1) hatar hem $[a,b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar, onuň $S(x)$ jemi şol kesimde üznüksiz differensirlenýär we

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \qquad (7)$$

Eger (7) deňligi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary agzalaýyn differensirläp bolýandygyny görkezýär.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^3}$ hataryň jeminiň önümini tapmaly.

Çözülişi: $\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ deňsizligiň we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ san hataryň ýygnanýandygy sebäpli, Weýerştrasyň nyşany boýunça garalýan hatar deňölçegli ýygnanýandyr. Goý, $S(x)$ onuň jemi bolsun. Edil ýokardaky ýaly, Weýerştrasyň nyşany boýunça:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hatar hem deňölçegli ýygnanýar. Şonuň esasynda hatar üçin soňky teoremanyň ähli şertleri ýerine ýetýär we şol teorema boýunça garalýan hatary agzalaýyn differensirläp bolýar, ýagny:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

70. $|x| < 1$ bolanda

$$1 + x + x^2 + + x^n + \ldots$$

hataryň jemini tapyň we onuň

1) [0,r] kesimde, $0 < r < 1$; 2) $(-1,1)$ interwalda deňölçegli ýygnanmagyny derňemeli.

Çözülişi: Tükeniksiz geometriki progresiýanyň jeminiň formulasyny ulanyp ($|x| < 1$), alarys: $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Onda,

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x}\right| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right|$$

1) $|x| \le r < 1$ bolanda $\left|\frac{x^n}{1-x}\right| \le \frac{r^n}{1-r}$.

$0 < r < 1$ bolan üçin $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{1-r} = 0$. Onda ähli $n > N$ we ähli $x\in[0,r]$, $0 < r < 1$ üçin: $|S(x) - S_n(x)| <$. Diýmek $[0,r]$ kesimde, $0 < r < 1$ hatar deňölçegli ýygnanýar.

2) $(-1,1)$ interwal $x = 1$ nokada ýakyn nokatlary saklaýar. $x \to 1$ bolanda:

$|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \to \infty$. Diýmek, $(-1,1)$ interwalyň ähli nokatlarynda $n > N$ bolanda, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ ýerine ýetmeýär. Şonuň üçin berlen hatar $(-1,1)$ interwalda deňölçegli ýygnanmaýar.

Funksional hatarlaryň ýygnanma ýaýlalaryny tapmaly:

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n$. *Jogaby*: ähli x sanlar üçin ýygnanýar.

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$. *Jogaby*: $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{2n}(3x+2)^{2n-1}$. *Jogaby*: $(-3/4, -7/12)$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$. *Jogaby*: $(-\infty, 0)$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3 + x^{2n}}$. *Jogaby*: ähli $x \ne \pm 1$ üçin ýygnanýar.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5-x^2}{4}\right)^n$. *Jogaby*: $(-3, -1)$, $(1,3)$.

Funksional hatarlaryň deňölçegli ýygnanmagyny derňemeli:

77. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n,\ 0 \le x \le 1.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

78. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ 0 < x < \infty.$ *Jogaby*: ýygnanýar, ýöne deňölçegli däl

79. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \ 0 \le x \le 1.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

80. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},\ -\infty < x < +\infty.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

81. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x+2^n},\ -2 < x < +\infty.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

82. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n\,!}}(x^n + x^{-n}),\ \frac{1}{2} < |x| < 2.$

Jogaby: deňölçegli ýygnanýar

83. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\ -\infty < x < +\infty.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

84. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},\ -\infty < x < +\infty.$ *Jogaby*: deňölçegli ýygnanýar

85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+3^n}.$ *Jogaby*: ähli x san üçin deňölçegli ýygnanýar.

86. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^4+n^4}.$ *Jogaby*: ähli x san üçin deňölçegli ýygnanýar.

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}.$ *Jogaby*: ähli x san üçin deňölçegli ýygnanýar.

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt[3]{n}}.$ *Jogaby*: ähli x san üçin deňölçegli ýygnanýar.

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$. *Jogaby*: ähli x san üçin deňölçegli ýygnanýar.

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. *Jogaby*: Ähli x san üçin ýygnanýar, ýöne deňölçegli däl.

§ 3. Derejeli hatarlar

1. Derejeli hataryň kesgitlenişi we ýygnanmagy. Funksional hatarlaryň içinde öwrenmekde has ýönekeýi we şonuň bilen birlikde amalyýetde köp ulanylýany

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{1}$$

görnüşdäki hatara derejeli hatar diýilýär, sanlara bolsa onuň koeffisiýentleri diýilýär. (1) hataryň hususy görnüşi bolan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2}$$

hatar hem derejeli hatardyr.

Teorema 10. (Abel). Eger (2) derejeli hatar $x_0 \neq 0$ nokatda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar $|x| > |x_0|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin hem ýygnanýar, ýagny absolýut ýygnanýar.

Netije. Eger (2) hatar x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda ol hatar şerti kanagatlandyrýan $|x| > |x_1|$ üçin hem dargaýar.

Bu teoremanyň we netijäniň esasynda, eger derejeli hatar x_0 nokatda ýygnanýan bolsa, onda $(-|x_0|, |x_0|)$ interwalyň ähli nokatlarynda ol hatar absolýut ýygnanýar, eger-de x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda $(-|x_1|, |x_1|)$ interwalyň daşynda ýerleşýän ähli nokatlarda ol hatar dargaýar.

2. Derejeli hataryň ýygnanma radiusy we interwaly. Eger (2) hatar $|x| < R$ bolanda ýygnanýan bolup, $|x| > R$ bolanda dargaýan bolsa, onda R sana ol hataryň ýygnanma radiusy, $(-R, R)$ interwala bolsa ýygnanma interwaly diýilýär.

91. Derejeli hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty}x^n; \quad \text{ç) } \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n.$$

Çözülişi: $\forall x$ üçin:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(b+1)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça san okunda ýygnanýar;

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|,$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça $|x| < 1$ bolanda ýygnanýar, $|x| > 1$ bolanda bolsa dargaýar;

$$\text{ç) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

şoňa görä hatar Dalamberiň nyşany boýunça dargaýar. Diýmek, hatar diňe bir $x = 0$ nokatda ýygnanýar.

Eger (2) derejeli hatar diňe bir nokatda ýygnanýan bolsa, onda $R = 0$, eger-de ol hatar ähli x üçin ýygnanýan bolsa, onda $R = \infty$ hasap edilýär.

Beýleki hallarda (2) hataryň ýygnanma radius formula arkaly tapylýar:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

Bellik. (1) derejeli hataryň hem ýygnanma radiusy (22) formula boýunça tapylýar, ýöne ol hataryň ýygnanma interwaly $|x - a| < R$ deňsizlikden kesgitlenýär, $(a - R, a + R)$ ýagny interwaldyr.

Derejeli hatarlaryň häsiýetleri

1. Eger san (2) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $[-r, r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

1-nji netije. Özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde derejeli hataryň $S(x)$ jemi üznüksiz funksiýadyr.

2-nji netije. Derejeli hatary özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde agzalaýyn integrirlemek bolar.

Bellik. Eger $R > 0$ san (1) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda $0 < r < R$ şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $[a - r, a + r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

3-nji netije. (1) derejeli $S(x)$ hataryň jemi özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde üznüksiz, integrirlenýär we ýygnanma interwalyna degişli bolan $\forall x$ üçin:

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x c_n (t - a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}. \qquad (4)$$

Derejeli hataryň jeminiň differensirlenmegi

Eger $R > 0$ san (2) hataryň ýygnanma radiusy we $S(x)$ ol hataryň jemi bolsa, onda ol hatardan agzalaýyn differensirlenip alynýan:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \qquad (5)$$

hataryň hem ýygnanma radiusy R bolar we $\forall x \in (-R, R)$ üçin:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \qquad (6)$$

Bellik. Eger (6) deňligi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary ýygnanma interwalynyň islendik içki nokadynda agzalaýyn differensirläp bolýandygyny we differensirlenip alnan hataryň hem ýygnanma radiusynyň R bolýandygyny görkezýär.

Netije. Derejeli hatary ýygnanma interwalynda islendik gezek agzalaýyn differensirlemek bolar.

Derejeli hataryň ýygnanma interwalyny tapyň we ol interwalyň gyraky nokatlarynda hatary derňäň:

92. $1 + x + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} = ... + \frac{x^n}{n^p} + ...,\qquad p > 0.$

Çözülişi:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right| = 1$$

Şeýlelikde $|x| < 1$ bolanda hatar ýygnanýar, $|x| > 1$ bolanda hatar dargaýar.

Ýygnanma interwalyň gyraky nokatlarynda hatary derňäliň. Goý, $x = -1$ bolsun, onda hatar aşakdaky görnüşi alýar:

$$1 - 1 + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} + ... + \frac{(-1)^n}{n^p} + ...$$

Bu agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar $p > 1$ bolanda absolýut ýygnanýar we $0 < p \leq 1$ bolanda şertli ýygnanýar.

$x = 1$ bolanda

$$1 + 1 + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$$

hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar we $0 < p \leq 1$, dargaýar.

93. $1 + \frac{x}{3\cdot 2} + \frac{x^2}{3^2\cdot 3} + \frac{x^3}{3^3\cdot 4} + ... + \frac{x^n}{3^n\cdot(b+1)} + ...$

Jogaby: $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$

94. $1 + \frac{2x}{3\sqrt[2]{3}} + \frac{4x^2}{5\sqrt[2]{3^2}} + \frac{8x^3}{7\sqrt[2]{3^3}} + ... + \frac{2^n x^n}{(2n+1)\sqrt[2]{3^n}} + ...$

Jogaby: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

95. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. *Jogaby*: $-1 \leq x < 1$.

96. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$. *Jogaby*: $-1 < x \leq 1$.

97. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{2n}}$. *Jogaby*: $R = 4$, $(-4{,}4)$.

98. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n} x^2$. *Jogaby*: R 1/9, (–1/9, 1/9)

99. $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{(x+1)^{3n}}{n \cdot 4^{n-1}} + \ldots$

Görkezme. $t = x + 1$ çalşyrmany ulanmaly.
Jogaby: $-5 \leq x < 3$

100. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^{2n} x^n$. *Jogaby*: R 1/4, (–1/4, 1/4).

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} (x+3)^n$. *Jogaby*: $R = 0$

102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (x+1)^n$. *Jogaby*: $R = \infty$

103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-e)^n$. *Jogaby*: R $1/e$, $(1/e,\ 1/e)$.

104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n \cdot n!}$. *Jogaby*: $-\infty \leq x < +\infty$.

105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$. *Jogaby*: $x = 0$

106. $(2x-5) - \frac{(2x-5)^2}{3} + \frac{(2x-5)^3}{5} - \ldots +$
$+ \frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^{2n}}{2n-1} + \ldots$

107. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{5})^{2k-1}}{5^k \sqrt{k+1}}$.

Çözülişi: Hataryň ýygnanma radiusyny tapmak formulany bu ýerde ulanmak bolmaýar, sebäbi ähli $c_i \neq 0$. Berlen hatarda $k > 0$ bolanda $c_2 k = 0$. x her bir bahasynda Dalamberiň nyşany boýunca absolýut ýygnanma derňäliň:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{2k+1}}{5^{k+1}\sqrt{k+2}}}{\dfrac{x^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}}} \right| = \frac{1}{5}x^2.$$

Onda berlen hatar $\frac{x^2}{5} < 1$ bolanda ýygnanýar we $\frac{x^2}{5} > 1$ bolanda dargaýar (ýygnanmagyň zerur şerti ýerine ýetmeýär). Şeýlelikde, berlen derejeli hatar $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ bolanda ýygnanýar. Interwalyň serhet nokatlarynda hataryň ýygnanmasyny kesgitläliň. Goý, $x = \pm\sqrt{5}$ bolsun. Onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\sqrt{5})^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{5^k\sqrt{k+1}\sqrt{5}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{\sqrt{5(k+1)}};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\sqrt{5})^{2k-1}}{5^k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 5^k}{5^k\sqrt{k+1}\sqrt{5}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 5^k}{\sqrt{5(k+1)}}.$$

Bu iki hatar şertli ýygnanýar.

108. $1 - \frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}} - ... + \frac{(-1)^k x^{2k}}{3^k\cdot(k+1)\sqrt{k+1}} + ...$

Jogaby: $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)^n}$. *Jogaby*: $-\infty \leq x < +\infty$.

110. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. *Jogaby*: $-1 \leq x < 1$.

§ 4. Teýloryň we Makloreniň hatarlary we onuň ulanylyşy

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (1)$$
$$(x-a)^k + ...$$

Bu deňligiň sagyndaky hatara Teýloryň hatary diýilýär. Ondan $a = 0$ bolanda alynýan

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + ... \quad (2)$$

hatara Makloreniň hatary diýilýär.

Funksiýany Teýloryň derejeli hatary görnüşinde aňlatmagyň zerur we ýeterlik şertini görkezmek üçin Teýloryň formulasyna garalyň. Eger $S_n(x)$Teýloryň hatarynyň bölekleýin jemi bolsa, onda Teýloryň formulasyny:

$$fx = S_n(x) + r_n(x) \quad (3)$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $r_n(x)$ Teýloryň formulasynyň galyndy agzasy:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in (a-R, a+R). \quad (4)$$

(3) deňlikden görnüşi ýaly Teýloryň hatarynyň $f(x)$ funksiýa ýygnanmagy üçin:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad (5)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Funksiýanyň Teýloryň hatary boýunça aňladylmagynyň amalyýetde ulanmak üçin amatly bolan ýeterlik şerti aşakdaky teoremada beýan edilýär.

Teorema. Eger $|x - a| < R$ şerti kanagatlandyryan ähli x üçin $f(x)$ funksiýanyň önümleriniň hemmesi şol bir $K > 0$ san bilen çäklenen bolsa, ýagny

$$|f^{(n)}(x)| \le K, \quad (n = 1, 2, ...) \quad (6)$$

bolsa, onda ol funksiýa üçin Teýloryň hatary $(a - R, a + R)$ interwalda ýygnanýar we onuň jemi $f(x)$ funksiýa deňdir.

Käbir elementar funksiýalaryň Makloreniň hataryna dagadylyşynyň mysallaryny görkezeliň.

$$1)\ (1 + x)^p = 1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}x^n \quad (7)$$

Mysal üçin, $p = -1$ bolanda (37) formuladan $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ funksiýanyň hatara dagadylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} + ... \ (|x| < 1) \quad (8)$$

Eger bu formulada x-i $(-x)$ bilen çalşyrsak, onda $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ funksiýanyň derejeli hatara dagadylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ... \ (|x| < 1). \quad (9)$$

(8) we (9) deňlikleri 0-dan x-a çenli integrirläp, degişlilikde

$$\ln(1 + x) = x = \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + ... \ (|x| < 1), \quad (10)$$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^k}{k} - ... \ (|x| < 1), \quad (11)$$

formulalary alarys.

2) $f(x) = e^x$ funksiýanyň islendik önümi üçin $(-r, r)$ interwalda $|x^{(n)}(x)| = x < e^r$ deňsizligiň ýerine ýetýändigi sebäpli, ol funksiýa üçin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1^n)\frac{x^n}{n!} + ... \quad (12)$$

formulany alarys. Bu deňligiň esasynda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + (-1^n)\frac{x^n}{n!} + ... \quad (13)$$

formulany, olardan bolsa ch$x = \dfrac{3^x + e^{-x}}{2}$, sh$x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ deňlikler esasynda

$$\mathrm{ch}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{14}$$

formulalary alarys.

3) $f(x) = \sin x$ we $f(x) = \cos x$ funksiýalaryň ikisi üçin hem $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ bolýandygy sebäpli, olaryň ikisi hem Teýloryň hataryna dagadylýar:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{15}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{16}$$

(12), (16) hatarlaryň hemmesi san okunda ýygnanýar.

Teýloryň hatarynyň ulanylyşy. Hatarlar dürli takmyn hasaplamalarda, hususan-da, trigonometrik we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny, sanlaryň logarifmlerini we kökleri, kesgitli integrallary hasaplamakda giňden ulanylýar. Logarifm we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny hasaplamakda (40), (41) we (42), (43), sinusyň we kosinusyň bahalaryny hasaplamakda (45) we (46), kökleri hasaplamakda (37) formulalary ulanmak bolar. Integraly takmyn hasaplamak üçin ilki integral astyndaky funksiýa hatara dagadylýar we soňra ol hatar agzalaýyn integrirlenilýär. Olary myssallarda görkezeliň.

111. cos1 sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

Çözülişi: $x = 1$ bolanda (46) formuladan alarys:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \\ + \frac{1}{40320} - \ldots .$$

Bu hatar alamatlary gezekleşýän hatapdyr we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şeýle hataryň jemi onuň ilkinji n agzalarynyň jemi bilen çalşyrylanda alnan hatanyň ilkinji taşlanan agzanyň modulyndan uly däldigi we $\frac{1}{40320} < \frac{1}{100000} = 0,0001$

bolýandygy üçin, berlen takyklykda hasaplamak üçin hataryň ilkinji dört agzalarynyň jemini almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0,5403.$$

112. $\sqrt{26}$ sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

Çözülişi: (37) formulany ulanmak üçin, ilki ony özgerdeliň:

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = \sqrt{25(1+1/25)} = 5(1+1/25)^{1/2}.$$

$x = 1/25$ we $p = 1/2$ üçin (37) formulany ulanyp alarys:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{25}\right)^3 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{25}\right)^4 + ...,$$

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 25} - \frac{1}{2^3\cdot 25^2} + \frac{1}{2^4\cdot 25^4} - \frac{5}{2^7\cdot 25^4} + ...$$

Bu hatar ikinjiden başlap agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä $\frac{1}{2^4\cdot 25^3} = \frac{1}{250000} < 0,0001$ bolýandygy üçin hataryň ilkinji üç agzalaryny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\left(1+\frac{1}{25}\right) \approx 1 + \frac{1}{50} - \frac{1}{8\cdot 625} = \frac{5099}{5000}.$$

Şonuň esasynda $\sqrt{26} \approx 5\frac{5099}{5000} = 5,099.$

113. $\int_0^1 \frac{\sin(x/4)}{x}dx$ integraly 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

Çözülişi: Ilki bilen (45) formuladan peýdalanyp, integral astyndaky aňlatmany özgerdeliň:

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{4}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{x}{4}\right)^7+\ldots}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3!}\frac{x^2}{4^3}+$$

$$+\frac{1}{5!}\frac{x^4}{4^5}-\frac{1}{7!}\frac{x^6}{4^7}+\ldots .$$

Alnan hatary agzalaýyn integrirläp alarys:

$$\int\limits_0^1\frac{\sin(x/4)}{x}dx\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{x^5}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{x^7}{7\cdot 7!\cdot 4^7}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\cdot 4^7}+\ldots$$

Bu hatar üçin hem Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýändigi we $\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{10000}$ bolýandygy üçin, hataryň iki agzasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\int\limits_0^1\frac{\sin(x/4)}{x}dx\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}\approx 0,25000-0,00086=0,2491.$$

Funksiýalary Makloreniň hataryna dagatmaly:

114. $f(x)=\mathrm{sh}3x.$ *Jogaby*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32n-1x2n-1}{(2n-1)!}.$

115. $f(x)=\ln(x+5).$

Jogaby: $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n,\quad(-5<x<5).$

116. $f(x)=\cos 2x.$ *Jogaby*: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}.$

117. $f(x)\frac{1}{x+8}.$ *Jogaby*: $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{3(n+1)}},\quad(|x|<8).$

118. $f(x)\frac{1}{3x+4}.$ *Jogaby*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{2(n+1)}},\quad\left(|x|<\frac{4}{3}\right).$

119. $f(x)\frac{1}{3-2x}.$ *Jogaby*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^{(n+1)}},\quad\left(|x|<\frac{3}{2}\right).$

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I – IX tomlar. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2008 – 2016.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. I – II tomlar. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

3. Gurbanmämmedow N., Aşyrow O., Aşyrow A., Geldiýew B. Ýokary matematika. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2010.

4. Aşyrow O. Matematiki seljermäniň esaslary. I-II tomlar. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2006.

5. Öwezow A. Matematika sapaklarynda ýaş nesle ykdysady terbiýe bermek. «Bilim» ylmy-usuly žurnal, 2013, №3.

6. Öwezow A. Önümçiligiň hasap esaslary. «Mugallymlar gazeti», 2013-nji ýylyň 16-njy oktýabry.

7. Öwezow A. Täze maglumatlar tehnologiýalary. «Mugallymlar gazeti», 2013-nji ýylyň 10-njy iýuly.

8. Öwezow A. Kämil bilim ýolunda. «Esger» gazeti, 2013-nji ýylyň 13-nji iýuny.

9. Garajaýew A., Ahundow A., Töräýew A. Analitiki geometriýa we çyzykly algebranyň elementleri. Aşgabat, 1990.

10. Garajaýew A. we başg. Köpçülige hyzmat ediş ulgamynyň ykdysady matematiki modeli. «Türkmenistanda ylym we tehnika» žurnaly. Aşgabat, 2008. № 6

11. Hudaýberenow Ö.G. Ýokary matematika. Aşgabat, 2009.

12. Aşyrow O., Töräýew A. Matematiki analiz. I tom. Aşgabat, Magaryf, 1990.

13. Баврин И.И. Высшая математика. Москва, Просвещение, 1980.

14. Ермакова В.И. Общий курс высшей математики для экономистов», Москва, 2001.

15. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1. Минск. Изд-во БГУ, 1983.

16. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Ч. 1, Минск. «Вышейшая школа», 1972.

17. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. Наука, 1971.

18. Кудрявцев В.А..Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Наука, 1986.

19. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва, Высш. школа, 1990.

20. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. М, 1977.

21. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть 1,2. М. 1982.

22. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П., Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М. Изд. «Дело» 2002.

23. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск. 1969 .

MAZMUNY

Giriş.. 7

I bap

ÇYZYKLY ALGEBRA

§ 1. Gönüde koordinatalar.. 9

§ 2. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk. Kesimleri berlen gatnaşyklar boýunça bölmek.. 10

§ 3. Kompleks sanlar 12

§ 4. Kesgitleýjiler.. 41

§ 5. Matrisalar 63

§ 6. Çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözülişi 84

II bap

ANALITIKI GEOMETRIÝA

§ 1. Wektorlaryň üstünde çyzykly amallar... 113

§ 2. Tekizlikde analitik geometriýanyň käbir meseleleri 120

§ 3. Tekizlikde göni çyzyk 127

§ 4. Ikinji tertipli egri çyzyklar 147

§ 5. Giňişlikde tekizlik... 155

§ 6. Giňişlikde tekizlik we göni çyzyk 171

III bap

MATEMATIKI ANALIZ

§ 1. Funksiýa. Funksiýanyň predeli. Funksiýanyň üznüksizligi 179

§ 2. Funksiýanyň önümi 189

§ 3. Funksiýanyň differensialy 201

§ 4. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklary 212

§ 5.Funksiýanyň ekstremumy 214

§ 6. Funksiýanyň grafiginiň güberçekligi we epin nokatlary 216

§ 7. Funksiýanyň grafiginiň asimptotalary 220

§ 8. Önümleri peýdalanyp funksiýalary derňemeli 223

IV bap

KÖP ARGUMENTLI FUNKSIÝALAR

§ 1. Köp argumentli funksiýanyň kesgitlemesi. Funksiýanyň predeli. Üznüksiz funksiýa 261

§ 2. Köp argumentli funksiýanyň hususy önümleri we differensialy 264

§ 3. Çylşyrymly we anyk däl funksiýalaryň önümleri 267

§ 4. Ugur boýunça önüm 269

§ 5. Ýokary tertipli hususy önümler 272

§ 6. Köp argumentli funksiýanyň ekstremumy 276

§ 7. Ykdysadyýetde ekstremum meseleler 279

V bap

INTEGRAL

§ 1. Kesgitsiz integral. Integrirlemegiň esasy usullary 286
§ 2. Kesgitli integral...323
§ 3. Tekiz figuranyň meýdany. 337
§ 4. Egriniň uzynlygy..341
§ 5. Aýlanma jisimiň göwrümi...344
§ 6. Hususy däl integrallar 347
§ 7. Kesgitli integrallary hasaplamagyň takmyn usullary.......................351
§ 8. Integralyň ykdysadyýetde ulanylyşy...355

VI bap

KÖPGAT WE EGRIÇYZYKLY INTEGRALLAR

§ 1. Ikigat integrallar 368
§ 2. Üçgat integrallar...390
§ 3. Egriçyzykly integrallar...406

VII bap

DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§ 1. Differensial deňlemeler barada esasy düşünjeler.............................425
§ 2. Birinji tertipli differensial deňlemeleriň görnüşleri 431
§ 3. Ýokary tertipli differensial deňlemeler.
Käbir *n*-nji tertipli integrirlenýän differensial deňlemeleriň
görnüşleri. Tertibi peseldilýän deňlemeler...468
§ 4. *n*-nji tertipli çyzykly differensial deňlemeler..................................475
§ 5. Ykdysadyýetde differensial deňlemeleriň
ulanylyşy 488

VII bap

HATARLAR

§ 1. San hatary 496
§ 2. Funksional hatarlar...509
§ 3. Derejeli hatarlar 517
§ 4. Teýloryň we Makloreniň hatarlary we onuň ulanylyşy 523
Peýdalanylan edebiýatlar 528

Akmyrat Öwezow, Amangeldi Garajaýew

ÝOKARY MATEMATIKA BOÝUNÇA MESELELER ÝYGYNDYSY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Redaktor	*M. Berdiýewa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Kompýuter bezegi	*M. Mullikowa,*
	M. Çaryýew
Neşir üçin jogapkär	*G. Kutliýew*

Çap etmäge rugsat edildi 08.06.2017. Ölçegi 60x90 1/16.
Edebi garniturasy. Çap listi 33,5. Şertli-reňkli ottiski 69,25.
Hasap-neşir listi 22,64. Şertli çap listi 33,5.
Sargyt № 1573. Sany 1850.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744015. Aşgabat, 2127-nji (G. Gulyýew) köçe, 51/1.