**M. Meredow, G. Kurbankulyýew,**
**N. Durdyýew**

# MATEMATIKI FIZIKANYŇ DEŇLEMELERI

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi*
*tarapyndan hödürlenildi*

Aşgabat
«Ylym» neşirýaty
2017

UOK 530.1:378
M 41

**Meredow M. we başg.**
M 41 **Matematiki fizikanyň deňlemeleri.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Ylym, 2017. – 232 sah.

Kitapda hususy önümli differensial deňlemeler üçin matematiki fizikanyň dürli meseleleriniň goýluşyna we olary çözmekligiň analitiki usullaryna garaldy hem-de alnan çözüwleriň häsiýetleri derňeldi. Dürli fiziki hadysalaryň matematiki modelleri getirilip çykaryldy we olar üçin birnäçe çyzykly meseleler beýan edildi.

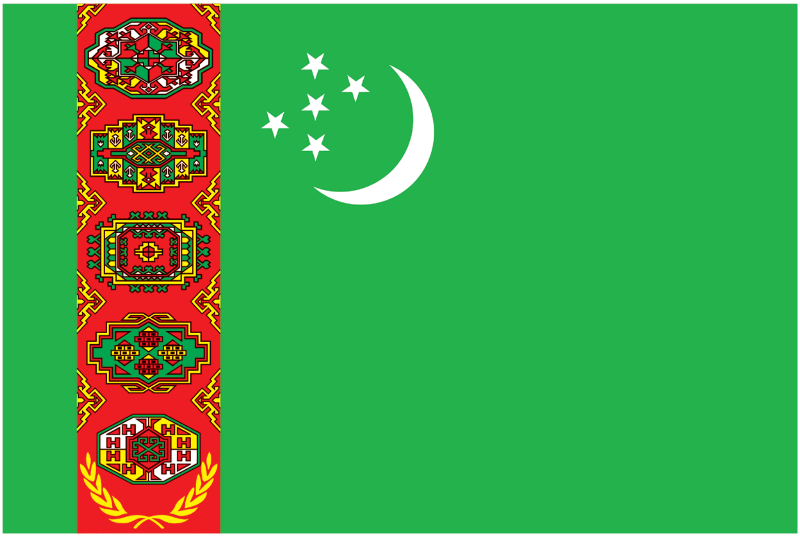
Okuw kitaby awtorlar tarapyndan Magtymguly adyndaky Türkmen döwlet uniwersitetiniň matematika, amaly matematika, radiofizika we elektronika hem-de fizika hünärleri boýunça bilim alýan talyplara dürli ýyllarda okalan leksiýalar esasynda taýýarlanyldy.

Kitap uniwersitetleriň hem-de tehniki ugurdan ýokary bilim berýän institutlaryň talyplary üçin niýetlenen bolup, ondan mugallymlar, aspirantlar, inženerler we ylmy işgärler hem peýdalanyp bilerler.

TDKP № 287, 2017 KBK 22.31 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY**



**TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY**

## TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

*Gaýtalama:*
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

*Gaýtalama:*
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

# GIRIŞ

Bu kitap girişden, alty bölümden we ulanylan edebiýatlaryň sanawyndan ybarat.

"Matematiki fizikanyň deňlemeleri" diýen at fizikanyň käbir ýönekeý we wajyp meselelerine garalanda döräp, bu dersiň maksady fiziki prosesler üçin differensial, integral we integral-differensial deňleme görnüşinde matematiki modeli gurmakdan, olar üçin mesele goýmakdan we çözmekden ybaratdyr.

Birinji bölümde ikinji tertipli deňlemeleriň toparlara bölünişine, ol deňlemeleriň kanonik (ýönekeý) görnüşe getirilişine garalýar. Matematiki fizikanyň deňlemeleri üçin umumy çözüw düşünjesi girizilýär.

Ikinji bölümde kirşiň yrgyldylaryna, ýylylyk geçirijiligiň we Laplas deňlemeleriniň getirilip çykarylyşyna, olar üçin goýuljak meselelere garalýar.

Üçünji bölümde Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwine kesgitleme berilýär, Grin formulasy getirilýär we garmonik funksiýanyň häsiýetleri öwrenilýär. Elliptik deňlemeler üçin goýulýan meseleleriň çözüwiniň ýeke-täkligi, çözüwiň barlygy we ol çözüwleriň tapylyşy görkezilýär.

Dördünji bölümde göwrüm, goşa, ýönekeý gatlagyň potensiallary we olaryň häsiýetleri öwrenilýär.

Bäşinji bölümde Dalamber formulasyna, Gursa we Koşi meselelerine, Riman usulyna garalýar. Giperbolik deňlemeler üçin garyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligi, başlangyç maglumatlar bilen üznüksiz baglylygy görkezilýär. Furýe usulyny ulanyp, garyşyk meseläniň çözüwi tapylýar. Şturm-Liuwil meselesiniň çözüwiniň häsiýetleri öwrenilýär. Köpölçegli ýagdaýda Furýe usulyny ulanyp, hususy bahalaryň we hususy funksiýalaryň käbir häsiýetleri öwrenilýär.

Altynjy bölümde ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin maksimum prinsipi subut edilýär, onuň netijeleri görkezilýär. Maksimum prinsipinden peýdalanyp, garyşyk we Koşi meseleleriniň çözüwleriniň ýeke-täkligi görkezilýär. Soňra garyşyk we Koşi meseleleriniň çözüwleriniň barlygy görkezilýär.

Şu okuw kitaby uniwersitetleriň matematika we fizika hünärleriniň talyplary üçin niýetlenildi. Bu kitapdan "Matematiki fizikanyň deňlemeleri" dersi bilen gyzyklanýanlar hem peýdalanyp bilerler.

# I BAP
# IKINJI TERTIPLI DEŇLEMELERIŇ TOPARLARA BÖLÜNIŞI

## §1. Umumy düşünjeler

"Matematiki fizikanyň deňlemeleri" dersiniň maksady fiziki hadysalar üçin differensial, integral we integral-differensial deňleme görnüşinde matematiki modeli gurmakgan, bu deňlemeler üçin meseleler goýmakdan we olary çözmekden ybaratdyr.

$U(x_1, x_2, ..., x_n)$ näbelli funksiýany, $x_1, x_2, ..., x_n$ baglanyşyksyz üýtgeýän ululyklary we näbelli funksiýanyň hususy önümlerini baglanyşdyrýan deňlemä hysusy önümli differensial deňleme diýilýär.

Ol aşakdaky görnüşlerde ýazylýar:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k U}{\partial x_1^{k_1}\, \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots\right) = 0 \quad (1.1)$$

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

ýa-da

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_1 x_2 \dots x_n}, \dots\right) = 0,$$

bu ýerde $F$ – öz argumentlerine görä berlen funksiýa.

(1.1) deňlemäniň düzümine girýän hususy önümiň iň ulusynyň tertibine hususy önümli differensial deňlemäniň tertibi diýilýär.

*x*, *y* iki baglanyşyksyz üýtgeýän ululykly ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemäniň umumy görnüşi aşakdaky

$$F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$$

ýaly ýazylýar.

Deňlemäniň düzümine girýän önümler bilen birlikde *D* ýaýlada üznüksiz we deňlemäni toždestwa öwürýän *U* (*x*, *y*) funksiýa ol deňlemäniň regulýar ýa-da klassyky çözüwi diýilýär.

Eger hususy önümli deňleme düzümine girýän näbelli funksiýanyň iň uly tertipli önümleriniň ählisine görä çyzykly bolsa, onda ol deňlemä kwaziçyzykly deňleme diýilýär.

Mysal üçin:

$$A\left(x, y, U, U_x, U_y\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\left(x, y, U, U_x, U_y\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} +$$
$$+ C\left(x, y, U, U_x, U_y\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f\left(x, y, U, U_x, U_y\right) = 0$$

deňleme iki üýtgeýänli **ikinji tertipli kwaziçyzykly** deňlemedir.

Eger hususy önümli deňleme näbelli funksiýa we onuň önümlerine görä çyzykly bolsa, onda ol deňlemä çyzykly deňleme diýilýär.

Mysal üçin:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} +$$
$$+ a(x, y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x, y)U = f(x, y)$$

deňleme *U* (*x*, *y*) näbelli funksiýa görä iki üýtgeýänli ikinji tertipli çyzykly deňlemedir.

Eger $f(x, y) \neq 0$ bolsa, onda deňlemä çyzykly birjynsly däl we $f(x, y) = 0$ bolsa çyzykly birjynsly deňleme diýilýär.

## §2. Matematiki fizikanyň esasy deňlemeleri

Mehanikanyň we fizikanyň köp meseleleri ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeleri derňemeklige syrykdyrylýar. Mysal üçin, tolkunlaryň dürli görnüşleri öwrenilende tolkunyň deňlemesi diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \qquad (A)$$

$$(A)$$

deňlemä gelinýär.

Bu ýerde *a* – berlen gurşawda (sredada) tolkunyň ýaýraýyş tizligi.

Birjynsly izotrop jisimde ýylylygyň ýaýramgy, şeýle hem diffuziýa hadysasy, ýylylyk geçirijiligi deňlemesi diýlip atlandyrylýar we

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad (B)$$

görnüşde ýazylýar.

Birjynsly izotrop jisimde ýylylyk geçirijiliginiň durnuklaşan ýagdaýyna garasak, onda biz Puasson deňlemesi diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z) \qquad (Ç)$$

deňlemäni alarys. Eger jisimiň içinde ýylylyk çeşmesi ýok bolsa, onda *(Ç)* deňlemäniň ýerine Laplas deňlemesi diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (L)$$

deňlemäni alarys.

(*A*)–(*L*) deňlemelere matematiki fizikanyň esasy deňlemeleri diýilýär.

(*A*)–(*L*) deňlemeleriň her biriniň tükeniksiz köp çözüwi bar. Takyk fiziki meseleler çözülende şol çözüwleriň içinden meseläniň fiziki manysyndan gelip çykýan goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwi saýlap almak zerurdyr.

Şeýlelik bilen, matematiki fizikanyň esasy meselesi hususy önümli differensial deňlemäniň goşmaça şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklykdyr. Şeýle goşmaça şertler gyra şerler, ýagny garalýan ýaýlanyň araçäginde berlen gyra we başlangyç şertler bolýar.

## §3. Ikinji tertipli deňlemeleriň toparlara bölünişi

Aşakdaky ikinji tertipli deňlemä garalyň:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (3.1)$$

$a_{ij}$ koeffisiýentler $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ giňişligiň $D$ ýaýlasynda berlen funksiýalar, şunlukda, $a_{ij} = a_{ji}$.

(3.1) deňlemäni nokatda toparlara böleliň. $D$ ýaýladan kesgitli $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ nokady alalyň we

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)\xi_i \xi_j \quad (3.2)$$

kwadratik formany düzeliň.

Eger (3.2) kwadratik formanyň alamaty kesgitli bolsa, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ nokatda **elliptik deňleme** diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik forma kwadratlaryň jemine getirilende bir koeffisiýentinden galan ähli koeffisiýentleriniň alamaty birmeňzeş, beýleki bir koeffisiýentiniň alamaty olara garşylykly bolsa, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ nokatda **giperbolik deňleme** diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik forma kwadratlaryň jemine getirilende ol jem birden köp položitel koeffisiýentlere we birden köp otrisatel koeffisiýentlere eýe bolsa (şunlukda, ähli koeffisiýentler noldan tapawutly), onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ nokatda **ultragiperbolik deňleme** diýilýär.

Eger (3.2) kwadratik forma kwadratlaryň jemine getirilende bir koeffisiýent nola deň, beýleki koeffisiýentleriň alamatlary birmeňzeş bolsa, onda (3.1) deňlemä $\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ nokatda **parabolik deňleme** diýilýär.

Eger (3.1) deňleme $D$ ýaýlanyň her bir nokadynda elliptik, degişlilikde giperbolik we parabolik deňleme bolsa, onda ol deňlemä $D$ ýaýlada elliptik, degişlilikde giperbolik we parabolik deňleme diýilýär.

Eger $a$ koeffisiýentler hemişelik bolsalar, onda deňlemäniň ol ýa-da beýleki görnüşe degişlidigi üýtgeýän ululygyň bahasyna bagly däldir.

Laplas deňlemesi elliptik deňlemelere, tolkunyň deňlemesi giperbolik deňlemelere we ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi bolsa parabolik deňlemelere degişli deňlemeleriň ýönekeýleridir.

## §4. Köp üýtgeýänli ikinji tertipli hemişelik koeffisiýentli deňlemeleri kanonik görnüşe getirmek

Aşakdaky hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemä garalyň:

$$\sum_{i,j,=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + cU = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right). \tag{4.1}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üýtgeýän ululyklaryň ornuna

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\, x_i, k = i, 2, \dots, n \tag{4.2}$$

çyzykly özgertmäniň kömegi bilen $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ üýtgeýän ululyklary girizeliň. (4.2) özgertmede $\|c_{ki}\|$ kesgitleýji noldan tapawutly diýeliň. Köne üýtgeýän ululyklar boýunça önümler täze üýtgeýän ululyklar boýunça önümleriň üsti bilen aşakdaky formulalar boýunça aňladylýar:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\frac{\partial U}{\partial x_i};\\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,i=1}^{n} c_{ki}\, c_{ij}\,\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_i}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

(4.3) önümleri (4.1) deňlemede goýup alarys:

$$\sum_{k,i=1}^{n} \bar{a}_{ki}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i\,\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + cU = f\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right), \tag{4.4}$$

bu ýerde

$$\bar{a}_{ki} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cdot c_{ki}\cdot c_{ij}. \tag{4.5}$$

Eger

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j \tag{4.6}$$

kwadratik formada

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \cdot \tau_k$$

çyzykly özgertme etsek, onda ol

$$\sum_{k,l=1}^{n} \overline{a}_{kl} \cdot \tau_k \cdot \tau_l$$

görnüşe gelýär we $\overline{a}_{kl}$ koeffisiýentler (4.5) formula bilen kesgitlenýär.

Algebradan belli bolşy ýaly, $C_{ik}$ koeffisiýentleri (4.6) forma kwadratlaryň jemine, ýagny

$$\sum_{k=l}^{n} \lambda_k \cdot \tau_k^2$$

görnüşe geler ýaly saýlap almak bolýar. $\lambda_k$ koeffisiýentler degişlilikde ±1 ýa-da nola deň. $\lambda_k$ koeffisiýentleriň alamaty hem (4.1) deňlemäniň görnüşini kesgitleýär. Özgerdilen (4.4) deňleme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + c_1 \cdot U = f_1\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right) \tag{4.7}$$

görnüşi alar. (4.7) deňlemä (4.1) deňlemäniň **kanonik görnüşi** diýilýär.

Elliptik deňlemeler üçin ähli $\lambda_k = 1$ ýa-da $\lambda_k = -1$. Soňky ýagdaýda deňlemäniň iki bölegini hem (–1)-e köpeldip, ähli $\lambda_k = 1$ diýip hasap etmek bolar. Şeýlelik bilen, islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli elliptik deňlemäni, öňki belgilemämizi saklap,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_1 U = f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$$

görnüşe getirmek bolar.

Giperbolik deňleme ýagdaýynda üýtgeýän ululyklar ($n+1$) sany diýip hasap edeliň we $\xi_{n+1}=t$ diýeliň. Onda islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli giperbolik deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+c_1\cdot U=f_1\left(x_1,\,x_2,\,\ldots,x_n\right)$$

görnüşe getirmek bolar.

Islendik çyzykly hemişelik koeffisiýentli parabolik deňleme

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+c_1\cdot U=f_1\left(x_1,\,x_2,\,\ldots,x_n\right)$$

görnüşe getirilip bilner.

## §5. Iki üýtgeýänli ikinji tertipli deňlemäni kanonik görnüşe getirmek

Uly önümlere görä çyzykly, iki üýtgeýänli ikinji tertipli deňleme aşakdaky görnüşe eýe:

$$A\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+F\left(x,\,y,\,U,\,\frac{\partial U}{\partial x},\,\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0,\ (5.1)$$

bu ýerde: $A,B,C$ koeffisiýentler $x,\ y$ üýtgeýänlere bagly üznüksiz funksiýalar. $A,B,C$ koeffisiýentler bir wagtda nola deň däl diýip hasap etjekdiris.

(5.1) deňlemä

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2$$

kwadratik forma degişlidir.

(5.1) differensial deňlemä:

1) $B^2-AC>0$ (kwadratik formanyň alamaty üýtgeýän) bolanda giperbolik;

2) $B^2-AC=0$ (kwadratik formanyň alamaty hemişelik) bolanda parabolik;

3) $B^2 - AC < 0$ (kwadratik formanyň alamaty kesgitli) bolanda elliptik deňleme diýilýär.

$\Delta(x, y) = B^2 - AC$ ululyga (5.1) deňlemäniň **diskrirminanty** diýilýär.

$(x, y)$ üýtgeýän ululyklaryň deregine täze $(\xi, \eta)$ üýtgeýän ululyklary

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y) \tag{5.2}$$

formulalaryň kömegi bilen girizeliň, bu ýerde $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ – iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar, şunlukda, $D$ ýaýlada ýakobian

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.3}$$

$U = U(\xi, \eta)$ funksiýa $(x, y)$ näbellilere görä çylşyrymly funksiýa hökmünde garap alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Bu önümleri (5.1) deňlemede goýup, ony

$$A_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2B_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F_1\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{5.5}$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$A_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B_1(\xi,\eta) = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (5.6)$$

$$C_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Gös-göni barlamak bilen

$$\Delta_1(x,y) = B_1^2 - A_1C_1 = \left(B^2 - AC\right)\cdot\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2 \quad (5.7)$$

bolýandygyny görkezmek kyn däl. Bu ýerden görnüşi ýaly, (5.2) özgertme deňlemäniň görnüşini (tipini) üýtgetmeýär.

(5.2) özgertmede biziň garamagymyzda $\xi$ $(x, y)$ we $\eta$ $(x, y)$ iki funksiýa bar. Bu funksiýalary

1) $A_1 = 0, C_1 = 0$; 2) $A_1 = 0, B_1 = 0$; 3) $A_1 = C_1$ $B_1 = 0$ şertleriň biri ýerine ýeter ýaly saýlap alyp bolýandygyny görkezeliň. Şonda (5.2) özgertme bilen alnan (5.5) deňleme iň ýönekeý, ýagny **kanonik** görnüşi alar.

**1.** $\Delta(x, y) = B^2 - AC > 0$, ýagny $D$ ýaýlada (5.1) deňleme giperbolik deňlemedir.

$A \neq 0$ diýip hasap edeliň. Birinji tertipli

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\, C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (5.8)$$

differensial deňlemä garalyň. Bu deňlemäni

$$\left[A\frac{\partial z}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\cdot\left[A\frac{\partial z}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0$$

görnüşde ýazalyň. Soňky deňleme bolsa

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (5.8\ a)$$

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (5.8\ b)$$

iki deňlemä dargaýar. Şeýlelikde, (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň çözüwleri (5.8) deňlemäniň çözüwleridir.

(5.8a) we (5,8b) deňlemeleri integrirlemek üçin olara degişli ady differensial deňlemeleriň ulgamyny düzeliň:

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}};$$

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

ýa-da

$$Ady-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0; \qquad (5.9a)$$

$$Ady-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx=0. \qquad (5.9b)$$

(5.9a) we (5.9b) deňlemeleri

$$A\left(dy\right)^2-2Bdxdy+C\left(dx\right)^2=0 \qquad (5.9)$$

deňleme görnüşinde ýazmak bolýandygyny belläliň.

(5.9a) we (5.9b) deňlemeleri integrirläp alarys:

$$\varphi\left(x,y\right)=C_1,\ \psi\left(x\cdot y\right)=C_2. \qquad (5.10)$$

(5.10) integrallaryň çep bölekleri, degişlilikde (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň, şeýle hem (5.8) deňlemäniň çözüwleridir.

(5.10) egrilere (5.1) deňlemäniň **häsiýetlendiriji egrileri** ýa-da ýöne **häsiýetlendirijileri**, (5.8) deňlemä (edil şonuň ýaly-da (5.9) deňlemä) **häsiýetlendirijileriň deňlemesi** diýilýär.

Giperbolik deňlemeler üçin $B^2 - A \cdot C > 0$, diýmek, (5.10) integrallar hakyky we dürlüdir. Şeýlelikde, giperbolik deňlemeleriň hakyky häsiýetlendirijileriniň iki sany dürli maşgalasy bardyr.

(5.2) özgertmede

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y)$$

diýeliň. Onda (5.6) deňlemeden görnüşi ýaly, (5.5) deňlemede $A_1 = C_1 = 0$. Garalýan ýagdaýga $B_1 \neq 0$, munuň şeýledigi (5.7) deňlikden görünýär. Şeýlelik bilen, (5.5) deňleme

$$2B_1 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + F_1\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0$$

görnüşi alar. Soňky deňlemäni $2B_1$-e bölüp

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + F_2\left(\xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (5.11)$$

görnüşde ýazalyň. (5.11) deňlemä **giperbolik deňlemäniň birinji kanonik** görnüşi diýilýär.

Eger $\xi, \eta$ üýtgeýän ululyklaryň deregine $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ deňlikler bilen täze $\alpha$, $\beta$ üýtgeýän ululyklary girizsek, onda (5.11) deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \Phi\left(\alpha, \beta, U, \frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}\right) = 0 \qquad (5.12)$$

görnüşde ýazmak bolýar. (5.12) deňlemä giperbolik deňlemäniň **ikinji kanonik görnüşi** diýilýär.

**2.** $B^2 - AC = 0$, ýagny garalýan ýagdaýda (5.1) deňleme parabolik deňlemedir. Bu ýagdaýda $A$ we $C$ koeffisiýentleriň biri noldan tapawutlydyr. Goý, $A \neq 0$ bolsun. Onda (5.8a) we (5.8b) deňlemeler gabat gelýärler:

$$A \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (5.13)$$

$B^2 - AC = 0$ şert esasynda (5.13) deňlemäniň her bir çözüwiniň

$$B \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (5.14)$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl. (5.13) deňlemä degişli

$$A \cdot dy - B \cdot dy = 0$$

ady differensial deňlemäni integrirläp, alarys:

$$\varphi\ (x, y) = C,$$

ýagny parabolik deňlemeler hakyky häsiýetlendirijileriň bir maşgalasyna eýedir.

(5.2) özgertmede $\xi = \varphi\ (x, y)$ diýeliň. $\eta\ (x, y)$ funksiýa hökmünde bolsa (5.3) şerti kanagatlandyrýan islendik iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýany alalyň. Onda (5.5) deňlemede $A_1 = 0$ bolar. Indi $B_1$ koeffisiýenti aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$B_1 = \left( A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

(5.13) we (5.14 deňliklerden $B_1 = 0$ gelip çykýar. (5.5) deňlemedäki $C_1$ koeffisiýenti özgerdip

$$C_1 = \frac{1}{A} \cdot \left( A\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden $C_1 = 0$, sebäbi tersine bolaýsa (5.13) deňlik esasynda $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 0$ bolar. Şeýlelik bilen, (5.5) deňleme

$$C_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F_1 \left( \xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0$$

görnüşi alar. Soňky geňlemäni $C_1$-e bölüp,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + F_2 \left( \xi, \eta, U, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \qquad (5.15)$$

görnüşde ýazalyň. (5.15) deňlemä **parabolik deňlemäniň** kanonik görnüşi diýilýär.

**3.** $B^2 - AC < 0$, ýagny (5.1) deňleme elliptik deňlemedir. $A$, $B$, $C$ koeffisiýentler $x$, $y$ üýtgeýän ululyklardan analitiki funksiýalar diýip hasap edeliň. Onda (5.8a) we (5.8b) deňlemeleriň hem $x$, $y$ üýtgeýän ululyklardan analitiki funksiýalardyr we olaryň özara çatrymly analitik

$$z(x,y) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y);$$

$$\bar{z}(x,y) = \varphi(x,y) - i \cdot \psi(x,y)$$

çözüwleri bardyr. (5.2) özgertmede

$$\xi = \varphi\,(x,\,y), \qquad \eta = \psi\,(x,\,y)$$

diýeliň. $z = \xi + i \cdot \eta$ ululygy aşakdaky deňlikde goýalyň:

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + 2B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\,\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$$

ýa-da

$$A_1 = C_1, \quad B_1 = 0.$$

Şeýlelik bilen, bu ýagdaýda (5.1) deňleme

$$A_1\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + A_1\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,U,\frac{\partial U}{\partial\xi},\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) = 0$$

görnüşi alar. Soňky deňlemäniň iki bölegini hem $A_1$-e bölüp

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + F_2\left(\xi,\,\eta,\,U,\frac{\partial^2 U}{\partial\xi},\frac{\partial^2 U}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (5.16)$$

görnüşde ýazalyň. (5.16) deňlemä **elliptik deňlemäniň** kanonik görnüşi diýilýär.

**Bellik.** Goý, deňlemesi $B^2 - A \cdot C = 0$ bolan $\sigma$ egri $D$ ýaýlany iki bölege bölýän bolsun we onuň bir böleginde (5.1) deňleme elliptik, beýleki böleginde bolsa giperbolik bolsun. Bu ýagdaýda (5.1) deňlemä $D$ ýaýlada **gatyşyk görnüşli deňleme** diýilýär, σ egrä bolsa deňlemäniň **parabolik dänýän çyzygy** diýilýär.

Eger (5.1) deňleme çyzykly deňleme bolsa, onda onuň kanonik görnüşi hem çyzykly deňlemedir:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) U = f(\xi,\eta)$$

ýa-da

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) \cdot U = f(\xi,\eta)$$

(giperbolik deňleme ýagdaýynda);

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) \cdot U = f(\xi,\eta)$$

(parabolik deňleme ýagdaýynda);

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + a(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} + c(\xi,\eta) \cdot U = f(\xi,\eta)$$

(elliptik deňleme ýagdaýynda).

## §6. Umumy çözüw düşünjesi

Ikinji tertipli ady differensial deňlemäniň umumy çözüwini iki sany erkin hemişelik sana baglydygy bellidir. Koşi şertlerinden peýdalanyp, erkin hemişelikleriň takyk bahalary tapylýar we bu tapylan bahalary umumy çözüwde goýup, berlen ady differensial deňlemäniň başlangyç (Koşi) şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwini almak bolýar.

Hususy önümli differensial deňlemeler üçin bolsa umumy çözüw düşünjesi girizilmeýär. Ýöne hususy önümli differensial deňlemeler özgerdilende bir üýtgeýän ululyk (argument) boýunça iki gezek integrirlemeklige getirilýär we integrirlemekligiň netijesinde iki sany erkin funksiýa bagly bolan çözüw alynýar. Bu halda ady differensial deňlemeler nazaryýetini göz öňünde tutup, alnan iki sany erkin funksiýa bagly bolan çözüwe hususy önümli differensial deňlemäniň **umumy çözüwi** diýilýär.

Käbir halatlarda hususy önümli differensial deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin ol deňlemede täze üýtgeýän ululyk ýa-da täze funksiýa girizmelik amatly bolýar.

**1-nji mysal.**

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

**Çözülişi.** Berlen deňlemäniň diskriminantyny hasaplalyň:

$$\Delta(x, y) = B^2 - A \cdot C = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4} > 0.$$

Diýmek, berlen deňleme tekizligiň ähli ýerinde giperbolikdir. Indi onuň häsiýetlendiriji deňlemesini düzeliň:

$$2\,(dy)^2 + 5\,dxdy + 3\,(dx)^2 = 0$$

ýa-da

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 5\,\frac{dy}{dx} + 3 = 0.$$

Soňky ady differensial deňlemäni integrirläp alarys:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}.$$

Bu ýerden

$$x + y = C_1, \qquad 3x + 2y = C_2 -$$

göni çyzyklaryň iki sanysynyň maşgalasy. $\xi = x + y$, $\eta = 3x + 2y$ belgilemeleri girizeliň we deňlemä girýän önümleri hasaplalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + 3\frac{\partial U}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 U}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Tapylan önümleri berlen deňlemede goýup, alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Soňky deňligi $\xi$ boýunça integrirläp, alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta).$$

Alnan deňlemä birinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde garamak bolýar ($\xi$ – berkidilen ululyk, $\eta$ – üýtgeýän ululyk).

Bu deňlemäni integrirläliň, onda

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta)\, d\eta + f_2(\xi).$$

$\int f_1(\eta)\, d\eta = f_1(\eta)$ belgileme girizip we $x$, $y$ üýtgeýän ululyklara geçip, berlen deňlemäniň umumy çözüwüni alarys:

$$U(x, y) = f_1(3x + 2y) + f_2(x + y),$$

bu ýerde $f_1$ we $f_2$ iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalardyr.

**2-nji mysal.**

$$y\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (x - y)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

deňlemäniň umumy çözüwüni tapmaly.

**Çözülişi.** Ilki bilen berlen deňlemäni ýönekeý görnüşe getireliň. Onuň üçin ol deňlemäniň diskriminantyny hasaplalyň:

$$\Delta(x,y) = B^2 - AC = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Soňky deňlikden görnüşi ýaly, berlen deňleme $x + y \neq 0$ bolanda giperbolik görnüşe eýedir. $x + y = 0$ göni çyzyk bolsa, onuň parabolik dänýän çyzygydyr.

Indi häsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň:

$$y\,(dy)^2 - (x - y)\,dxdy - x\,(dx)^2 = 0.$$

Bu deňlemäniň özgerdip, alarys:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x-y) \pm (x+y)}{2y}.$$

$x + y \neq 0$ halda soňky ady differensial deňlemeleri integrirläp,

$x + y = C_1$, $x^2 - y^2 = C_2$ – göni çyzyklaryň we giperbolalaryň maşgalasyny alarys.

$\xi = x + y$, $\eta = x^2 - y^2$ häsiýetlendirijileri (bellemeleri) girizip, berlen deňlemä girýän önümleri hasaplalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2x\frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - 2y\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4x\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (-2y + 2x)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - 4xy\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 4y\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2y\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Tapylan önümleri berlen deňlemede goýup, alarys:

$$2\left(x+y\right)^{2}\frac{\partial^{2}U}{\partial\xi^{2}}+2\left(x+y\right)\frac{\partial U}{\partial\eta}=0.$$

Soňky deňlemäni $x + y \neq 0$ ululyga gysgaldyp we häsiýetlendiriji üýtgeýän ululyga geçirip, alarys:

$$\xi\frac{\partial^{2}U}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial U}{\partial\eta}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\xi\frac{\partial U}{\partial\xi}+U\right)=0.$$

Soňky deňligi $\eta$ ululyk boýunça integrirläliň. Onda

$$\xi\frac{\partial U}{\partial\xi}+U=f_{1}\left(\xi\right).$$

Bu ýerde $f_1$ $(\xi)$ – erkin funksiýadyr. Alnan deňlemäni $\xi$ üýtgeýän ululyk boýunça ($\eta$-berkidilen) birinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde garamak mümkin. Şonuň üçin ol deňlemäni integrirläp, alarys:

$$U=\frac{\int f_{1}\left(\xi\right)d\xi+\psi\left(\eta\right)}{\xi}.$$

Soňky deňlikde $\dfrac{\int f_{1}\left(\xi\right)d\xi}{\xi}=f\left(\xi\right)$ belgileme girizip we köne $x,y$ üýtgeýän ululyklara geçip, berlen deňlemäniň umumy çözüwüni tapalyň:

$$U\left(x,y\right)=f\left(x+y\right)+\frac{\psi\left(x^{2}-y^{2}\right)}{x+y},$$

bu ýerde: $f$ we $\psi$ – iki gezek üznüksiz differensirlenýän erkin funksiýalardyr.

# II BAP
# MATEMATIKI FIZIKANYŇ ESASY DEŇLEMELERINI GETIRIP ÇYKARMAK

## §7. Kirşiň yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

**Kesgitleme.** Inçe, absolýut çeýe, maýyşgak sapaga **kiriş** diýilýär.

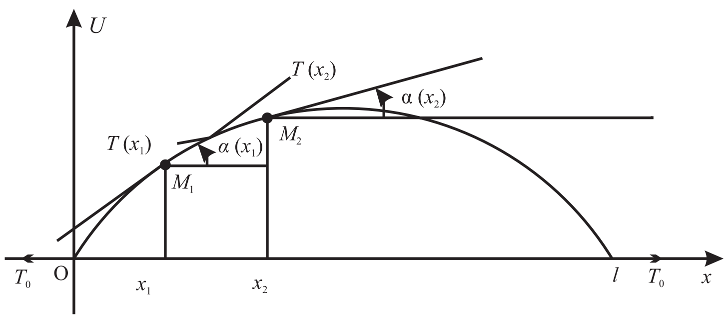
Goý, kirşiň ahyrky nokatlary (uçlary) berkidilen, özi bolsa gaty dartylan diýeliň. Beýle diýdigimiz nämäni aňladýar? Siz kirşiň nähili çekilendigi **dartyş güýjüniň üsti** bilen kesgitlenilýändigini bilýänsiňiz. Eger kirşiň haýsy hem bolsa bir nokadyndan beýleki tarapynda ýatýan bölegini aýyrsak, onda şol aýrylan bölegiň täsirini çalyşýan güýje **dartyş güýji** diýilýär. Berk dartylan kirişde dartyş güýjüne görä **agyrlyk** güýçlerini hasaba almasaň hem bolýar.

Indi kirşiň kesgitlemesinde ulanylan sözlerden nähili matematiki manylar çykaryp bolýandygyna garalyň. “Inçe” diýen söz sapagyň diňe bir çyzykly ölçeginiň (uzynlygynyň) bardygyny aňladýar. “Absolýut çeýe” diýen sözler uzynlygyna üýtgemeýän, forma üýtgemelerine sapagyň hiç hili garşylygynyň ýokdugyny aňladýar. Bu bolsa matematikada $\overline{T}$ dartyş güýjüniň kirşe galtaşýan göni boýunça ugrukdyrylandygyny aňladýar. “Maýyşgak” diýen söz bolsa kirşiň **Gukuň kanunyna** boýun egýändigini aňladýar: dartyş güýjüniň ululygynyň üýtgemesi kirşiň uzynlygynyň üýtgemesine göni proporsionaldyr.

Goý, deňagramlylyk ýagdaýynda kiriş $x$ oky boýunça ugrukdyrylan bolsun. Eger kirşi deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarsak (mysal üçin, ony çekip goýbersek), onda ol yrgyldap başlar. Biz diňe kese yrgyldylara garajakdyrys, ýagny hereket diňe bir tekizlikde bolup geçýär we kirşiň hemme nokatlary $x$ oka dik hereket edýärler diýip hasap etjekdiris. Bu tekizlikde xOU gönüburçly koordinatalar ulgamyny alalyň, onda $U$ kirşiň deňagramlylyk ýagdaýyndan gyşarmasyny aňladar, şunlukda, yrgyldy wagtynda $U$ $x$ we $t$ ululyklara bagly bolar. Hereketi suratlandyrmak üçin biz $U(x, t)$ tapmalydyrys. Her bir kesgitli (berkidilen) $t$-de $U(x, t)$ funksiýanyň grafigi kirşiň şu wagtdaky (pursatdaky) formasyny (şekilini), $\frac{\partial U}{\partial x}$ bolsa $x$ absisaly nokatda galtaşma çyzygynyň burç koeffisiýentini kesgitleýär. Berkidilen $x$-de $U(x, t)$ funksiýa $x$ absisaly nokadyň $Ou$ oka parallel çyzyk boýunça hereketiniň kanunyny berýär, onda $\frac{\partial U}{\partial t}$ – bu hereketiň tizligi, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ – bolsa tizlenmesi bolar.

Biz diňe kiçi yrgyldylara gararys, ýagny $U$ we $\frac{\partial U}{\partial x}$ şeýle kiçi bolanlygy üçin $U^2 \approx 0$, $U_x^2 \approx 0$, $UU_x \approx 0$ bolar diýip hasap etjekdiris.

Kirşe onuň yrgyldaýan tekizliginde $Ou$ oka parallel güýçler täsir edýär diýip kabul edeliň. Kirşiň yrgyldaýan gurşawynyň garşylyk güýçlerini hasap etmäliň (*1-nji çyzgy*).




**1-nji çyzgy**

Kirşiň erkin $(x_1, x_2)$ bölegini saýlap alalyň. Yrgyldy wagtynda ol bölek $M_1M_2$ duga deformirlenýän bolsun.

Islendik $t$ wagtda $M_1M_2$ duganyň uzynlygy

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + U_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S$$

bolar, ýagny deformasiýa wagtynda uzalma bolmaýar. Onda kirşiň bellibir nokadyndaky $\vec{T}$ dartyş güýjüniň ululygy Gukuň kanunyna laýyklykda wagta baglylykda üýtgemeýär, ýagny $\vec{T} = \vec{T}(x)$ bolýar.

Indi biziň çaklamalarymyzda $\vec{T}$ dartyş güýjüniň $x$-e hem bagly däldigini, ýagny $\vec{T} = T_0 = \text{const}$ bolýandygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, kirşiň $M_1M_2$ bölegine $M_1$ we $M_2$ nokatlarda kirşe geçirilen galtaşýanlar boýunça ugrukdyrylan galtaşma güýçleri, inersiýa güýji we daşky güýçler täsir edýärler. Bu güýçleriň $x$ oka proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmaly. Biz diňe kese yrgyldylara garaýarys, diýmek, inersiýa güýçleri we daşky güýçler OU oka parallel ugrukdyrylandyr, onda

$$T(x_1) \cdot \cos\alpha(x_1) - T(x_2) \cdot \cos\alpha(x_2) = 0,$$

bu ýerde $\alpha(x) - t$ wagtda kirşiň $x$ absisaly nokadynda geçirilen galtaşýan göni bilen $x$ okuň položitel ugrunyň arasyndaky burçdur. Ýöne biziň çaklamamyzda

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + U_x^2}} \approx 1.$$

Diýmek, $T(x_1) = T(x_2)$.

Biz $x_1$ we $x_2$ nokatlaryň erkinliginden $T$ dartyş güýjüniň $x$-e bagly däldigini aldyk. Şeýlelik bilen, $x$ we $t$-niň islendik bahalarynda $T = T_0$ diýip hasap etmek bolýar.

Indi $U(x, t)$ funksiýanyň kanagatlandyrýan differensial deňlemesini getirip çykaralyň. Onuň üçin Dalamber prinsipinden peýdalanalyň. Ol prinsipiň esasynda kirşiň saýlanyp alnan käbir bölegine täsir edýän güýçler deňagramlaşmalydyr.

Kirşiň erkin $M_1M_2$ bölegine garalyň we ol bölege täsir edýän ähli güýçleriň $OU$ oka proýeksiýalarynyň jeminiň nola deň bolmagynyň şertini tapalyň.

$M_1$ we $M_2$ nokatlarda täsir edýän dartyş güýçleriniň proýeksiýalarynyň jemi

$$V_1 = T_0\,[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)]$$

bolýar. Biziň çaklamamyzda

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} \approx \frac{U_x}{\sqrt{1+U_x^2}} \approx U_x.$$

Onda

$$V_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

Indi

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx$$

bolýandygyny nazarda tutup, alarys:

$$V_1 = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx. \tag{7.1}$$

Kirşe täsir edýän daşky güýjüň çyzykly dykyzlygyny *p(x,t)* diýip belläliň, onda $M_1\ M_2$ bölege täsir edýän daşky güýjüň *OU* okuna proýeksiýasy

$$V_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx \tag{7.2}$$

bolar.

Goý, $\rho\ (x)$ – kirşiň çyzykly dykyzlygy bolsun, onda $M_1M_2$ bölegiň inersiýa güýji

$$V_3 = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dt \tag{7.3}$$

bolar.

Ýokarda aýdylanlaryň esasynda kirşiň $M_1M_2$ bölegine täsir edýän güýçleriň *OU* oka (7.1) – (7.3) proýeksiýalaryň jemi nola deň bolmaly, ýagny

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + p(x,t)\right]dx = 0.$$

Bu ýerden $x_1$ we $x_2$-niň erkinliginden integral astyndaky funksiýanyň kirşiň her bir nokady üçin islendik $t$ wagtda nola deň bolmalydygy gelip çykýar, ýagny

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + p(x,t). \tag{7.4}$$

Bu deňlemä **kirşiň yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

Eger kiriş birjynsly, ýagny $\rho(x)$ = const bolsa, onda (7.4) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{7.5}$$

görnüşde ýazylýar,

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho},\ f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

(7.5) deňlemä **birjynsly kirşiň mejbury yrgyldysy** diýilýär.

Eger daşky güýç täsir etmeýän bolsa, onda $p(x, t) = 0$ we (7.5) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{7.6}$$

görnüşi alar. (7.6) deňlemä **kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

## §8. Membrananyň yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

**Kesgitleme.** Erkin egreldip bolýan dartylan gabyga (plýonka) membrana diýilýär.

Goý, deňagramlylyk ýagdaýynda membrana $xy$ tekizliginde ýerleşen we käbir $D$ ýaýlany eýeleýän bolsun. Mundan başga hem membrana onuň gyralaryna goýlan deňölçegli $T$ dartyş güýjüniň täsirinde ýerleşýär diýeliň. Bu diýildigi, eger membrana boýunça islendik ugra çyzyk geçirsek, onda ol çyzygyň elementi bilen bölünen iki bölegiň arasyndaky özara täsir edýän güýç elementiň uzynlygyna proporsional we onuň ugruna perpendikulýar: çyzygyň $dS$ elementine täsir edýän güýjüň ululygy $TdS$ bolar.

Membrananyň her bir nokadynyň $xy$ tekizlige perpendikulýar $OU$ oka parallel hereket edýän kese yrgyldysyna garalyň. Onda membrananyň $(x, y)$ nokadynyň $U$ süýşmesi $x, y$ we $t$-e bagly funksiýa bolar.

Membrananyň kiçi yrgyldysyna garap, $U(x, y, t)$ funksiýa we onuň $x, y$ boýunça hususy önümlerini, olaryň kwadratlaryny hem-de köpeltmek hasyllaryny ol ululyklaryň özleri bilen deňeşdireniňde hasap etmän bolar ýaly, kiçi diýip güman etjekdiris.

Membrananyň deňagramlylyk ýagdaýynda $l$-ýapyk egri bilen çäklenen $\sigma$ bölegini alalyň. Haçan-da membrana deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylanda bu bölek $l'$ giňişlik çyzygy bilen çäklenen $\sigma'$ üste deformirlener. $\sigma'$ üstüň $t$ wagtdaky meýdanyny hasaplalyň:

$$\sigma' = \oiint_{\sigma} \sqrt{1+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \approx \oiint_{\sigma} dxdy = \sigma.$$

Şeýlelik bilen, biziň çaklamamyzda yrgyldy wagtynda membrananyň islendik böleginiň meýdanynyň üýtgemegini hasaba almasak hem bolýar we membrananyň islendik bölegi ilkibaşdaky $T$ dartyş güýjüniň täsiri astynda ýerleşýär diýip hasap etmek bolýar.

Membrananyň yrgyldysynyň deňlemesini getirip çykaralyň. Membrananyň erkin $\sigma'$ bölegine garalyň. Membrananyň bu bölegine onuň galan bölegi tarapyndan $l'$ egriniň normaly boýunça ugrukdyrylan, membrananyň üstüne galtaşýan tekizlikde ýatan, deňölçegli paýlanan $T$ dartyş güýji täsir edýär. Membrananyň $\sigma'$ bölegini çäklendirýän $l'$ egrä goýlan dartyş güýjüniň $U$ oka proýeksiýasyny tapalyň. $dS'$ bilen $l'$ egriniň dugasynyň elementini belgiläliň. Bu elemente ululygy boýunça $T \cdot dS'$-e deň dartyş güýji täsir edýär. $\overline{T}$ dartyş wektoryň $OU$ ok bilen emele getirýän burçunyň kosinusy, biziň çaklamamyzyň esasynda, $\frac{\partial U}{\partial n}$-e deň, $n$-deňagramlylyk ýagdaýynda membrananyň $\sigma$ bölegini çäklendirýän $l$ egrä daşky normalyň ugry. Bu ýerden $l'$ egriniň $dS'$ elementine goýlan dartyş güýjüniň $OU$ oka proýeksiýasynyň

$$T\frac{\partial U}{\partial n}dS'$$

deňdigi gelip çykýar. Diýmek, $l'$ egrä goýlan dartyş güýjüniň $OU$ oka proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener:

$$T\oint_{l'}\frac{\partial U}{\partial n}dS'. \tag{8.1}$$

Membrananyň kiçi yrgyldysynda $dS = dS'$ diýip hasap etmek bolar. Onda (8.1) integralda $l'$ egrini $l$ egri bilen çalşyrmak bolar. Grin formulasyny ulanyp alarys:

$$T\int_{l}\frac{\partial U}{\partial n}dS = T\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)dxdy. \tag{8.2}$$

Goý, membrana $OU$ oka parallel birlik meýdana niýetlenen $P$ $(x, y, t)$ daşky güýç täsir edýän bolsun. Onda membrananyň $\sigma'$ bölegine täsir edýän daşky güýjüň $OU$ oka proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener:

$$\iint_{\sigma}P(x,y,t)\,dxdy. \tag{8.3}$$

(8.2) we (8.3) güýçler membrananyň $\sigma'$ böleginiň

$$-\iint_{\sigma}\rho(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,dxdy$$

inersiýa güýji bilen islendik $t$ wagtda deňagramlaşmagy, $\rho$ $(x, y)$ – membrananyň üst dykyzlygy.

Şeýlelik bilen,

$$\iint_{\sigma}\left[\rho(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-T\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-P(x,y,t)\right]dxdy = 0.$$

Bu ýerden $\sigma$ meýdanyň erkinliginden

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+P(x,y,t) \tag{8.4}$$

gelip çykýar. (8.4) deňlemä membrananyň **kese yrgyldysynyň deňlemesi** diýilýär.

Eger $\rho$ $(x, y)$ = const bolsa, ýagny membrana birjynsly bolsa, onda (8.4) deňleme aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \qquad (8.5)$$

$$a^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad f(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{\rho}.$$

Eger daşky güýç $P$ $(x, y, t) = 0$ bolsa, onda (8.5) deňlemeden birjynsly membrananyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

**erkin yrgyldysynyň deňlemesi** alynýar.

## §9. Elektrik yrgyldylarynyň deňlemesini çykarmak

Elektrik geçirijiniň ugrunda $R$ garşylyk, $L$ – induktiwlik, $G$ – ýitgi we $C$ – sygym üznüksiz we endigan paýlanan bolsun. $L$ – öz-özüne induksiýa koeffisiýenti bolup, ol toguň üýtgeme tizligi bilen öz-özüne induksiýanyň EHG-sini baglanyşdyrýan proporsionallyk koeffisiýentidir, ýagny

$$U = L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

$C$ – sygym süýşme togy bilen $U$ – güýjenmäniň üýtgemesiniň tizligi arasyndaky proporsionallyk koeffisiýentidir, ýagny

$$i = C \cdot \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Garalýan $dx$ bölekde güýjenmäniň peselmegi, Omuň kanunyna laýyklykda, elektrik hereketlendiriji güýçleriň jemine deňdir:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx = iRdx + L\cdot\frac{\partial i}{\partial t}\cdot dx. \tag{9.1}$$

Geçirijiniň *dx* elementinden *dt* wagtda geçýän elektrik mukdary

$$\left[i(x,t) - i(x+dx,\, t)\right] dt = -\frac{\partial i}{\partial x}\, dxdt.$$

*dx* elementi zarýadlandyrmak üçin gerek bolan

$$C\cdot\left[U(x,t+dt) - U(x,t)\right] dx = C\frac{\partial U}{\partial t} dxdt,$$

elektrik mukdaryna we izolýasiýanyň kämil däldigi üçin ýitýän *GUdxdt* elektrik mukdaryna deňdir:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dxdt = C\frac{\partial U}{\partial t} dxdt + GU\, dxdt. \tag{9.2}$$

Şeýlelikde, (9.1) we (9.2) formulalardan **telegraf deňlemeleriniň sistemasy** diýip atlandyrylýan

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + Ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} = 0; \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\cdot\dfrac{\partial U}{\partial t} + GU = 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

sistemany alarys.

(9.3) sistemanyň birinji deňlemesini $x$, ikinji deňlemesini bolsa $t$ boýunça differensirläliň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + R\dfrac{\partial i}{\partial x} + L\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} + C\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + G\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Bu ulgamyň ikinji deňlemesinden alarys:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = -C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - G\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{9.5}$$

(9.2) we (9.5) deňliklerden peýdalanyp, (9.4) sistemanyň birinji deňlemesinden **güýjenme** üçin

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{RG}{LC}U = 0 \tag{9.6}$$

deňlemäni alarys. Edil şunuň ýaly edip **toguň güýji** üçin

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}i = 0 \tag{9.7}$$

deňlemäni alarys.

(9.6) we (9.7) deňlemelere **telegraf deňlemeleri** diýilýär. Bu ýerden görnüşi ýaly, **güýjenme we toguň güýji** şol bir

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_0\omega \tag{9.8}$$

deňlemäni kanagatlandyrýarlar, bu ýerde $a_0 = LC$, $2b_0 = RC + LG$, $c_0 = GR$.

Eger täze $V(x, t)$ funksiýany

$$\omega = \exp\left(-\frac{b_0}{a_0}t\right)\cdot V$$

diýip girizsek, onda (9.8) deňleme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b^2 V$$

ýönekeý görnüşi alar:

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \quad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0}.$$

## §10. Gyra we başlangyç şertler

Öň belläp geçişimiz ýaly ady, şeýle hem hususy önümli differensial deňlemeleriň, umuman aýdanyňda, tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Şonuň üçin hem fiziki meseleler hususy önümli differensial deňlemelere getirilen ýagdaýynda ol meseläni ýeke-täk häsiýetlendirmek üçin deňlemä käbir goşmaça şertleri birleşdirmek zerurdyr. Şeýle goşmaça şertler bolup başlangyç we gyra şertler hyzmat edýär.

Kirşiň kese yrgyldysy hakyndaky ýönekeý meselä garalyň.

Kirşiň yrgyldaýan wagty onuň başlangyç formasyna we başlangyç tizligine baglydyr, diýmek,

$$U(x, t_0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial U(x, t_0)}{\partial t} = \psi(x)$$

"başlangyç şertleri" bermeli, bu ýerde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – berlen funksiýalardyr.

**Birinji jynsly gyra şertler.** Eger $0 \le x \le l$ kirşiň uçlary berkidilen bolsa, onda

$$U(0, t) = 0,\ U(l, t) = 0 \qquad (10.1)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli. Eger kirşiň uçlary berlen kanun boýunça hereket edýän bolsa, onda

$$U(0, t) = \mu_1(t),\ U(l, t) = \mu_2(t) \qquad (10.2)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – berlen funksiýalar.

**Ikinji jynsly gyra şertler.** Eger kirşiň uçlary ýumşak (gowşak) berkidilen bolsa (uçlary OU okuň boýuna azat), onda

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad (10.3)$$

gyra şertler ýerine ýetmeli. Eger kirşiň uçlarynda $v_1(t)$, $v_2(t)$ güýçler berlen bolsa, onda gyra şertler

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = v_1(t), \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = v_2(t) \qquad (10.4)$$

görnüşde bolýarlar.

**Üçünji jynsly gyra şertler.** Eger kirşiň uçlary maýyşgak berkidilen bolsa, onda

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0, t) = 0, \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l, t) = 0, \qquad (10.5)$$

$$h_1 > 0, h_2 > 0$$

gyra şertler ýerine ýetmeli.

Eger maýyşgak berkidilen uçlar gozganýan bolsalar we olaryň başlangyç ýagdaýdan gyşarmasy degişlilikde $\overline{\theta}_1(t), \overline{\theta}_2(t)$ funksiýalar bilen berlen bolsa, onda gyra şertler

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0, t) = \overline{\theta}_1(t), \; h_1 > 0,$$

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l,t) = \overline{\theta}_2(t), \; h_2 > 0, \tag{10.6}$$

$$\overline{\theta}_1(t) = -h_1 \theta_1(t), \quad \overline{\theta}_2(t) = -h_2 \theta_2(t)$$

görnüşde bolýarlar.

(10.1), (10.3), (10.5) gyra şertlere birjynsly gyra şertler, (10.2), (10.4), (10.6) gyra şertlere bolsa birjynsly däl gyra şertler diýilýär.

Gyra şertleriň üç görnüşiniň hemmesini birleşdirip

$$\alpha \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} + \beta U(0,t) = \mu_1(t),$$

$$\gamma \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + \delta U(l,t) = \mu_2(t),$$

bu ýerde:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – hemişelikler; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$

görnüşde ýazmak bolýar.

## §11. Giperbolik deňlemeler üçin goýulýan esasy meseleler

$Q = (0, l) \times (0, T)$ gönüburçlukda

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - q(x)U + f(x, t) \tag{11.1}$$

deňlemä garalyň, $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, şunlukda, $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ funksiýalar $[0, l]$ kesimde üznüksiz funksiýalardyr.

**Gatyşyk mesele.** $Q$ gönüburçlukda (11.1) deňlemäniň

$$\alpha\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}+\beta U(0,t)=\mu_1(t),\ \gamma\frac{\partial U(l,t)}{\partial x}+\delta U(l,t)=\mu_2(t), \quad (11.2)$$

gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial U(x,t_0)}{\partial t}=\psi(x),\ 0\leq x\leq l, \qquad (11.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan, araçäkde üznüksiz differensirlenýän regulýar çözüwini tapmaly.

Meseläniň goýluşynda garşylyk bolmaz ýaly

$$f(x,t)\in C(Q), \varphi(x)\in C^1([0,l]), \psi(x)\in C([0,l]), \mu_1(t), \mu_2(t)\in C([0,T])$$

endiganlyk şertleri we goşmaça şertleriň, ýagny

$$\alpha\varphi'(0)+\beta\varphi(0)=\mu_1(0), \qquad \gamma\varphi'(l)+\delta\varphi(l)=\mu_1(l)$$

ylalaşyk şertleri ýerine ýetmeli.

Eger $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ bolsa birinji gatyşyk gyra mesele; eger $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$ bolsa ikinji gatyşyk mesele; eger-de $\alpha = 1$, $\beta = -h_1$, $\gamma = 1$, $\delta = h_2$ bolsa üçünji gatyşyk gyra mesele diýilýär.

**Koşi meselesi:** Bu meselede (11.1) deňlemä $-\infty < x < \infty$ aralykda we islendik $t > 0$ bolanda garalýar. Şonuň üçin hem $x$ boýunça hiç hili gyra şertler bolmaýar. Koşi meselesini formulirläliň:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q(x)U+f(x,t),-\infty<x<+\infty,\ t>0$$

deňlemäni we

$$U(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x),-\infty<x<+\infty$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $U(x, t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t > 0)$ funksiýany tapmaly:

$$f(x,t)\in C(t>0), \varphi(x)\in C^1(-\infty,+\infty), \psi(x)\in C(-\infty,+\infty).$$

**Gursa meselesi.** Giperbolik deňlemeler üçin goşmaça şertleri başgaça görnüşlerde goýmak mümkin. Mysal üçin, Gursa meselesi diýip atlandyrylýan meselede goşmaça şertler häsiýetlendirijilerde berilýär. Gursa meselesini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x,y)U = f(x,y) \quad (11.2)$$

deňleme üçin goýalyň.

$Q = (0, x_0) \times (0, y_0)$ gönüburçlukda (11.2) deňlemäniň, araçäkde üznüksiz, yzygiderli çözüwi bolýan we $x = 0$, $y = 0$ häsiýetlendirijilerde

$$U(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le x_0,$$

$$U(0, y) = \psi(y),\ 0 \le y \le y_0,$$

şertleri kanagatlandyrýan $U(x, y)$ funksiýany tapmaly.

## §12. Gaty izotrop jisimde ýylylyk geçirijiligiň deňlemesini çykarmak

Gaty jisime garalyň we onuň $t$-wagtda $(x, y, z)$ nokatdaky temperaturasyny $U(x, y, z, t)$ diýip belläliň. Eger jisimiň dürli bölekleri dürli temperatura eýe bolsalar, onda jisimiň gaty gyzan böleklerinden pes gyzan böleklerine tarap ýylylyk geçýär. Jisimiň içinde käbir $S$ üsti we onda $\Delta S$ kiçi elementi alalyň. Ýylylyk akymy diýip üstüň birlik meýdanyndan birlik wagtda geçýän ýylylyk mukdaryna aýdylýar we "$q$" bilen bellenilýär. Eger $\boldsymbol{n}$ bilen şu birlik meýdanyň ýylylygyň hereketiniň ugruna tarap bolan normal wektoryny bellesek, onda Furýeniň kanuny boýunça

$$q = -k\frac{\partial U}{\partial n} \quad (12.1)$$

bolar, bu ýerde $k > 0$ bolup, oňa içki ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti diýilýär. Eger $\Delta S$ elementden $\Delta t$ wagtda geçýän ýylylyk mukdaryny $\Delta Q$ diýsek, onda (12.1) boýunça

$$\Delta Q = -k\frac{\partial U}{\partial n}\cdot \Delta S\cdot \Delta t \tag{12.2}$$

bolar.

Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesini çykarmak üçin jisimiň içinden endigan ýapyk $S$ üst bilen çäklenen islendik $V$ göwrümi alalyň we bu göwrümde $[t_1, t_2]$ wagt aralygynda ýylylyk mukdarynyň üýtgemesine garalyň. Eger $n$ normal $S$ üstüň içki normaly diýsek, onda $[t_1, t_2]$ wagt aralygynda $S$ üstden, (12.2) formula boýunça $V$ göwrüme

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \oiint_S k(x,\ y,\ z)\frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$$

ýylylyk mukdary geçer.

Indi göwrümiň $\Delta V$ elementine garalyň. $\Delta t$ wagt aralygynda onuň temperaturasyny $\Delta U = U(x, y, z, t_2) - U(x, y, z, t_1)$ ululyga üýtgetmek üçin

$$\Delta Q_2 = \gamma\cdot [U(x, y, z, t_2) - U(x, y, z, t_1)]\cdot \rho\cdot \Delta V$$

ýylylyk mukdaryny harçlamaly bolar, bu ýerde $\gamma$ – jisimiň udel ýylylyk sygymy, ρ bolsa jisimiň udel dykyzlygy. Bu formuladan $V$ göwrümiň temperaturasyny – $U(x, y, z, t_1)$-den $U(x, y, z, t_2)$ -e galdyrmak üçin gerek bolan ýylylyk mukdaryny alarys:

$$Q_2 = \iiint_V \gamma\cdot\left[U(x, y,\ z,\ t_2) - U(x,\ y,\ z,\ t_1)\right]\cdot\rho\cdot dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}\, dV$$

çünki

$$U(x, y,\ z,\ t_2) - U(x,\ y,\ z,\ t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial U}{\partial t}\, dt.$$

Seredilýän jisimiň içinde ýylylyk çeşmeleriniň hem bar bolmagy mümkin. Ol ýylylyk çeşmeleriniň dykyzlygyny $F(x, y, z, t)$ diýeliň. Onda ol çeşmäniň $[t_1, t_2]$ wagt aralygynda $V$ göwrümde emele getirýän ýa-da siňdirýän ýylylyk mukdary

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t)\, dV$$

bolar. Saýlanyp alnan islendik $V$ göwrüm üçin ýylylyk mukdarynyň balansynyň deňlemesini ýazalyň:

$$Q_2 = Q_1 + Q_3,$$

ýagny

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \oiint_S k \frac{\partial U}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dV. \quad (12.3)$$

Sag bölekdäki üst boýunça integrala Ostrogradskiý-Gaussyň formulasyny ulanyp, $n$-iň içki normaldygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\oiint_S k \frac{\partial U}{\partial n} dS = -\iiint_V \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} U) dV. \quad (12.4)$$

(12.4) deňlikden peýdalanyp, (12.3) deňligi

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left[ \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - div(k \cdot \operatorname{grad} U) - F(x, y, z, t) \right] dV = 0 \quad (12.5)$$

görnüşde ýazalyň.

(12.5) deňlikde integral aşagyndaky funksiýanyň üznüksizligi, $V$ göwrümiň we $[t_1, t_2]$ kesimiň islendik bolany üçin garalýan jisimiň islendik $(x, y, z)$ nokadynda we islendik $t$ wagtda

$$\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} U) + F(x, y, z, t) \quad (12.6)$$

bolmaly. (12.6) deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \cdot \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \cdot \frac{\partial U}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t). \quad (12.7)$$

(12.6) ýa-da (12.7) deňlemä birjynsly däl izotrop jisimde ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi diýilýär. Eger jisim birjynsly bolsa, onda $\gamma$, $\rho$ we $k$ hemişelik sanlar bolýar we (12.7) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (12.8)$$

görnüşi alar,

$$a^2 = \frac{k}{\gamma\rho},\ f\left(x,y,z,t\right) = \frac{F\left(x,y,z,t\right)}{\gamma\rho}.$$

(12.8) deňlemä **ýylylyk geçirijiligiň birjynsly däl** deňlemesi diýilýär.

Eger garalýan birjynsly jisimimizde ýylylyk çeşmesi bolmasa, ýagny $F\ (x, y, z, t)$ bolsa, onda (12.8) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{12.9}$$

görnüşi alar. (12.9) deňlemä **ýylylyk geçirijiligiň birjynsly** deňlemesi diýilýär.

Hususy halda, haçan-da temperatura diňe $x$, $y$ koordinatalara we $t$ wagta bagly bolanda (12.9) deňleme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

deňlemä öwrülýär.

Çyzykly ölçegli jisim üçin ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

görnüşe eýedir.

## §13. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin goýulýan esasy meseleler

Aşakdaky deňlemä garalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f\left(x,t\right). \tag{13.1}$$

**Gatyşyk mesele.** $Q = (0,\ l) \times (0,\ T)$ gönüburçlukda (13.1) deňlemäniň

$$U\ (x,\ 0) = \varphi\ (x),\ 0 \le x \le T$$

başlangyç şerti we

$$\alpha \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} + \beta U(0,t) = \mu_1(t),\ \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0;$$

$$\gamma \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + \delta U(l,t) = \mu_2(t),\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ berlen funksiýalar.

**Koşi meselesi.** $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ ýarym tekizlikde (13.1) deňlemäniň

$$U(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x)$ berlen üznüksiz funksiýa.

## §14. Laplas deňlemesine getirýän meseleler

Içinde ýylylyk çeşmesi ýok izotrop birjynsly jisimde ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{14.1}$$

görnüşe eýedir.

Goý, jisimiň $(x, y, z)$ içki nokatlarynda temperatura durnuklaşan bolsun, ýagny wagtyň geçmegi bilen üýtgemesin. Onda $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ we (14.1) deňleme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{14.2}$$

görnüşi alar. (14.2) deňlemä Laplas deňlemesi diýilýär. Şeýlelik bilen, (14.2) Laplas deňlemesiniň çözüwi durnuklaşan birjynsly jisimiň $U(x, y, z)$ temperaturasyny kanagatlandyrýar. $U(x, y, z)$ funksiýany kesgitlemek üçin diňe wagta bagly bolmadyk gyra şertiň berilmegi ýeterlik.

Garalýan ýaýlada (14.2) deňlemäniň araçägindäki bahasy boýunça çözüwini kesgitlemek meselesine Dirihle meselesi diýilýär.

Garalýan ýaýlada (14.2) deňlemäniň araçäkdäki normal önüminiň bahasy boýunça çözüwini kesgitlemek meselesine Neýmon meselesi diýilýär.

## §15. Kowalewskaýa teoremasy

Ilki bilen, aşakdaky iki kesgitlemäni bereliň:

1. $U(x, t)$ funksiýa görä differensial deňleme

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k} = \Phi\left( x, t, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \dots \frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha} U}{\partial t^{\alpha_0} \partial x^{\alpha}} \right) \tag{15.1}$$

görnüşe eýe bolsun. Eger $\Phi$ funksiýa k-dan uly bolmadyk we $t$ boýunça $(k–1)$-den uly bolmadyk önümi saklaýan bolsa, onda (1) deňlemä $t$ boýunça normal görnüşde diýilýär:

$$\alpha_0 + \alpha \le k, \alpha_0 \le k - 1.$$

Mysal üçin, tolkun deňlemesi, Laplas deňlemesi we ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi $x$, $y$ we $z$ boýunça normal görnüşdedir; tolkun deňlemesi bolsa $t$ boýunça hem normal görnüşdedir.

2. Eger $x_0$ nokadyň etrabynda $f(x)$ funksiýany deňölçegli ýygnanýan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n} (x - x_0)^2$$

derejeli hatar görnüşde aňladyp bolýan bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $x_0$ nokatda analitik funksiýa diýilýär.

(15.1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar:

(15.1) deňlemäniň

$$U\big|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \cdots, \frac{\partial^{k-1} U}{\partial t^{k-1}}\bigg|_{t=t_0} = \varphi_{k-1}(x) \tag{15.2}$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ funksiýalar käbir $D \subset R^2$ köplükde berlen funksiýalardyr.

**1-nji teorema**. (Kowalewskaýa teoremasy). Eger $x_0$ nokadyň käbir etrabynda $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$ funksiýalar analitik we $\Phi\left(x, t, U, \cdots, U_{\alpha_0 \alpha}\right)$ funksiýa käbir $\left(x_0, t_0, \varphi_0\left(x_0\right), \cdots, \varphi_\alpha\left(x_0\right)\right)$ nokadyň etrabynda analitik funksiýa bolsa, onda (15.1)–(15.2) Koşi meselesiniň çözüwi bardyr, özi hem analitik funksiýalaryň klasynda ýeke-täkdir.

## §16. Koşi meselesi. Häsiýetlendiriji

Aşakdaky giperbolik deňlemä garalyň:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} + F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (16.1)$$

Şunlukda, $a_{ik} = a_{ki}$, $a_{ik}$ – funksiýalar käbir $D$ ýaýlada kesgitlenen hakyky funksiýalar diýip kabul edeliň.

Goý, $D$ ýaýlada ýeterlikçe endigan $(n - 1)$ ölçegi $S$ üst we ol üstüň her bir nokadynda $S$ üste galtaşmaýan hem-de $S$ üst bilen hereket edilende çalt üýtgeýän $l$ egri berlen bolsun.

Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar: (16.1) deňlemäniň

$$\begin{cases} U\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\Big|_l = \varphi_0\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), \\ \cdots\cdots \; \cdots\cdots\cdots \; \cdots\cdots \; \cdots\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots\cdots\cdots. \\ \left.\dfrac{\partial U\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)}{\partial x_n}\right|_l = \varphi_n\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \end{cases} \quad (16.2)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

(16.2) Koşi şertleri $U\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ funksiýany we onuň birinji tertipli önümlerini $S$ üstde doly kesgitleýär.

Aşakdaky soraga jogap bereliň: (16.1) differensial deňleme bilen, (16.2) Koşi şertlerini peýdalanyp, $U\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ funksiýanyň ikinji we soňraky önümlerini tapyp bolarmy?

Ilki bilen Koşi şertleriniň ýörite görnüşde berlen ýagdaýyna garalyň:

$$U\Big|_{x_1=x_1^0}=\varphi_0\left(x_2,\cdots,x_n\right),\frac{\partial U}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1=x_1^0}=\varphi_1\left(x_2,\cdots,x_n\right); \qquad (16.3)$$

ýagny başlangyç şert $x_1 = x_1^0$ tekizlikde berlen we $l$ egriniň ugry diýip normal alnan. (16.3) başlangyç şert $x_1 = x_1^0$ tekizlikde ähli birinji tertipli önümleri we $U_{x_1 x_1}$ önümden galan ikinji tertipli önümleri tapmaga mümkinçilik berýär. $U_{x_1 x_1}$ önümi tapmak üçin $x_1 = x_1^0$ belgileme girizip, (16.1) deňlemeden peýdalanalyň. Iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

$$\text{I. } a_{11}\left(x_1^0,\, x_2,\cdots,x_n\right)\neq 0. \qquad \text{II. } a_{11}\left(x_1^0,\, x_2,\cdots,x_n\right)=0.$$

I ýagdaýda $x_1 = x_1^0$ tekizlikde $U_{x_1 x_1}$ önümi we ondan uly önümleri birbahaly kesgitläris.

II ýagdaýda $x_1 = x_1^0$ tekizlikde ýa mümkin däl deňligi ýa-da toždestwo alarys.

Indi umumy ýagdaýa garalyň. Koşi şertleri käbir $S$ üstde berlen bolsun. $S$ üstüň deňlemesi

$$\omega_i\left(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\right)=0 \qquad (16.4)$$

görnüşde berlen bolsun. $S$ üstüň – golaý töwereginde

$$\xi_i=\omega_i\left(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\right),\; i=1,2,\cdots,n. \qquad (16.5)$$

$\xi_1,\, \xi_2,\, \cdots,\, \xi_n$ täze üýtgeýän ululyklary girizeliň, şunlukda, $S$ üstde $\omega_i\left(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n\right)=0$ funksiýalaryň özgertmesiniň ýakobiany noldan tapawutly bolar ýaly saýlanyp alyndy. Önümleriň

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_k}=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_k}\cdot\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_i\partial x_k}$$

bahalaryny (16.1) deňlemede goýup, alarys:

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2}+\cdots=0 \tag{16.6}$$

bu ýerde

$$\bar{a}_{11}=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}. \tag{16.7}$$

Ýazylmadyk agzalar özünde $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$ önümi saklanoklar. (16.4) we (16.5) deňlikden görnüşi ýaly, özgerdilen (16.6) deňleme üçin başlangyç şertler $\xi_1 = 0$ tekizlikde, ýagny ýokardaky ýörite görnüşde berilýär. Şeýlelik bilen, (16.7) deňlikden görnüşi ýaly, (16.4) üstde Koşi şertiniň berilmegi $S$ üstde ikinji tertipli önümi kesgitlemeklik üçin kesgitsizligiň alynmagy $\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ üstüň $\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c.$ şertde

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}=0 \tag{16.8}$$

deňligi kanagatlandyrmagy zerur we ýeterlikdir.

$\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c.$ üste (16.1) deňlemäniň häsiýetlendiriji üsti diýilýär ýa-da gysgaça häsiýetlendirijisi diýilýär.

(16.8) deňleme daşyndan göreniňde birinji tertipli differensial deňleme ýaly, ýöne ol kesgitlemesine görä beýle däl. Hakykatdan hem (16.5) deňlik $\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c.$ $e$ görä toždestwolaýyn däl-de, diňe $\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c.$ şertde ýerine ýetmeli.

Goý, (16.8) deňlik $x_1, x_2, \cdots, x_n$ üýtgeýän ululyklara görä toždestwolaýyn ýerine ýetýän bolsun. Onda (16.8) deňleme birinji tertipli hususy önümli differensial deňleme bolar we onuň hemişelik sandan tapawutly islendik çözüwi diňe bir häsiýetlendirijini däl-de, häsiýetlendirijileriň maşgalasyny berer:

$$\omega_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=c.$$

Bu ýerde: $c$ – hemişelik san.

Eger $S$: $\omega_1 = 0$ üstde (16.8) deňlik ýerine ýetmese, onda $U$ funksiýanyň ikinji önümi S üstde kesgitlener. Bu ýagdaýda (16.5) özgertmeden alnan (16.6) deňlemäni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} = \sum_{i,k=2}^{n} b_{ik} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \sum_{i=2}^{n} b_{ik} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} + \cdots$$

görnüşde ýazmak bolar, şunlukda, $S$ üst $\xi_1 = 0$ tekizlige geçer. Bu bolsa $S$ üstde berlen Koşi şertini $\xi_1 = 0$ tekizlikde berlen Koşi şerti bilen çalşylýandygyny aňladýar.

Eger $S$ üst häsiýetlendiriji bolsa, onda $U(x_1, \cdots, x_n)$ funksiýa we onuň birinji tertipli önümleri ol üstde käbir baglanyşykda bolýar.

## §17. Adamar mysaly

Eger käbir meseläniň çözüwi: 1) bar; 2) ýeke-täk; 3) durnukly, ýagny şertiň az üýtgemegine meseläniň çözüwiniň hem az üýtgemesi degişli bolsa, onda ol meselä **korrekt goýlan mesele** diýilýär. Eger 1–3 şertleriň iň bolmanda biri ýerine ýetmese, onda ol meselä **korrekt däl** ýa-da **korrekt goýulmadyk** mesele diýilýär.

Meseläniň korrekt däl bolmagynyň esasy sebäbi şertleriň oňaýsyz alynmagydyr. Bu aýdylanlary anyk mysalda düşündireliň.

Adamar mysaly diýlip atlandyrylýan mysaldan görnüşi ýaly, elliptik deňleme üçin Koşi meselesi korrekt däldir. Goý, $U(x, y)$ funksiýa

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

deňlemäni we

$$U(x, y)\Big|_{y=0} = \varphi(x), \left.\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x).$$

Koşi şertlerini kanagatlandyrýan bolsun.

$$v(x, y) = U(x, y) + \frac{\sin nx \cdot \mathrm{sh} ny}{n^2}$$

funksiýa hem Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Hakykatdan hem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sin nx \cdot \mathrm{sh} ny \right) + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \sin nx \cdot \mathrm{sh} ny \right) = 0.$$

Mundan başga $v$ $(x,\ y)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrýar:

$$v(x,y)\big|_{y=0} = \left(U(x,y) + \frac{\sin\ nx \cdot \text{sh}ny}{n^2}\right)\Bigg|_{y=0} = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\sin\ nx \cdot \text{ch}ny}{n^2}\right)\Bigg|_{y=0} = \psi(x) + \frac{\sin nx}{n}.$$

$U$ $(x,\ y)$ we $v$ $(x,\ y)$ funksiýalar üçin başlangyç şertleriň tapawudyny tapalyň:

$$\left|v(x,y) - U(x,y)\right|\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\left|\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|\Bigg|_{y=0} = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Şeýlelik bilen, ýeterlik uly $n$ san üçin başlangyç şertler ýeterlik kiçidir, emma berlen çözüwler üçin bolsa

$$\left|v(x,y) - U(x,y)\right| = \left|\frac{\sin nx \cdot \text{sh}ny}{n^2}\right|$$

tapawut $x \neq 0$, $y > 0$ bolanda ýeterlik uludyr, sebäbi

$$\frac{\text{sh}ny}{n^2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \to \infty.$$

Diýmek, çözüw durnukly däl. Onda kesgitlemä görä, elliptik deňleme üçin Koşi meselesi korrekt däldir.

# III BAP
# ELLIPTIK DEŇLEMELER

## §18. Laplas deňlemesi, onuň fundamental çözüwi

Elliptik deňlemeler stasionar, ýagny wagta görä üýtgemeýän dürli fiziki hadysalar öwrenilende ýüze çykýar we aşakdaky görnüşe eýe:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \qquad (18.1)$$

Laplas deňlemesi elliptik deňlemeleriň ýönekeý görnüşidir. Bilşimiz ýaly, Laplas deňlemesini birjynsly izotrop jisimiň durnuklaşan $U(x, y, z)$ temperaturasynyň funksiýasy kanagatlandyrýar.

**1-nji kesgitleme.** Eger $U(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada ikinji tertipli üznüksiz önümlere eýe bolup, $D$ ýaýlada her bir nokadynda (18.1) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýan bolsa, onda $U(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada **garmonik** funksiýa diýilýär.

Birjynsly däl

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-f\left(x,y,z\right), f=\frac{F}{a^2}$$

deňlemä Puasson deňlemesi diýilýär. Tekizlikde Laplas we Puasson deňlemeleri degişlilikde aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0; \qquad (18.2)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f(x, y).$$

**2-nji kesgitleme.** Laplas deňlemesiniň bir geometrik üýtgeýän ululyga, has takygy $M$ ($x$, $y$, $z$) erkin nokatdan $M_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$) berlen nokada çenli

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

uzaklyga bagly $U(r)$ çözüwine onuň fundamental ýa-da ýönekeý çözüwi diýilýär.

Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwini tapalyň. Onuň üçin

$$x = x_0 + r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = y_0 + r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = z_0 + \cos\theta,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

sferik koordinatalar ulgamyny girizip, (18.1) Laplas deňlemesini

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (18.3)$$

görnüşde ýazalyň. Kesgitlemä görä fundamental çözüw diňe $r$ ululyga baglydyr. Şonuň üçin (18.3) deňleme

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0$$

görnüşi alar. Bu ýerden

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0 \ \Rightarrow\ r^2 \frac{dU}{dr} = C_1$$

ýa-da

$$\frac{dU}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \Rightarrow U(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

$C_1 = -1$, $C_2 = 0$ bahalary goýup, giňişlikde Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwini

$$U(x,y,z)=U(r)=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \qquad (18.4)$$

görnüşde alarys. (18.4)-den görnüşi ýaly, bu fundamental çözüw $M_0$ ($x_0$, $y_0$, $z_0$) nokatdan başga nokatlarda garmonik funksiýadyr.

Indi (18.2) deňlemäniň fundamental çözüwini tapalyň. Onuň üçin

$$x=x_0+r\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\varphi,$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

formulalaryň kömegi bilen polýar koordinatalar sistemasyny girizip, (18.2) Laplas deňlemesini

$$\Delta_2 U\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (18.5)$$

görnüşde ýazalyň. Fundamental çözüwiň kesgitlemesine görä, ol diňe $r$ üýtgeýän ululyga baglydyr, diýmek, $\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0.$ Şeýle çözüwler üçin (18.5) deňleme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)=0$$

görnüşi alar. Bu ýerden

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=0\ \Rightarrow r\frac{dU}{dr}=C_1\ \Rightarrow\ \frac{dU}{dr}=\frac{C_1}{r}$$

ýa-da

$$U(r)=C_1\ln r+C_2.$$

$C_1=-1$, $C_2=0$ bahalar üçin fundamental çözüwi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$U(x,y)=U(r)=\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}. \qquad (18.6)$$

(18.6) funksiýa ($x_0$, $y_0$) nokatdan başga nokatlarda garmonik funksiýadyr.

**Bellik.** Fundamental çözüw $M_0\neq M$ bolanda $M_0$ berlen nokadyň koordinatalary boýunça hem Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

## §19. Grin formulalary

Goý, $D$ – üçölçegli giňişlikde bölek-endigan $S$ üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsun. Bilşimiz ýaly

$$P\ (x,\ y,\ z),\ Q\ (x,\ y,\ z),\ R\ (x,\ y,\ z)\ \in\ C^1(D)\ \cap C(\bar{D})$$

funksiýalar üçin

$$\iiint\limits_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau =$$

$$= \oiint\limits_S \big( P \cos(n,x) + Q \cos(n,y) + R \cos(n,z) \big)\, dS. \qquad (19.1)$$

Gaus-Ostrogradskiý formulasy adalatlydyr, bu ýerde: $d\tau = dxdydz$ $D$ – ýaýlanyň elementi, ***n*** bolsa $S$ üste geçirilen daşky normaldyr.

Grin formulalaryny getirip çykarmak üçin

$$U(x,y,z),\ V(x,y,z) \in C^2\left(D\right) \cap C^1\left(D\right)$$

funksiýalara garalyň.

$$P = U\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Q = U\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad R = U\frac{\partial V}{\partial z}$$

funksiýalar üçin (19.1) Gaus-Ostrogradskiý formulasyndan peýdalanyp alarys:

$$\iiint\limits_D U \Delta V d\tau = \oiint\limits_S U \frac{\partial V}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_D \left[ \frac{\partial U}{\partial x}\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\ \frac{\partial V}{\partial z} \right] d\tau, \ (19.2)$$

bu ýerde: $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplas operatory, $d\tau = dxdydz$ üstüň elementi, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – daşky normalyň ugry boýunça önüm. (19.2) formula Griniň birinji formulasy diýilýär.

(19.2) formulada $U$ we $V$ funksiýalaryň orunlaryny çalşyryp alarys:

$$\iiint\limits_D V \Delta U d\tau = \oiint\limits_S V \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_D \left[ \frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\ \frac{\partial U}{\partial z} \right] d\tau. (19.3)$$

Indi (19.2) formuladan (19.3) formulany aýralyň. Alarys:

$$\iiint_D [U\Delta V - V\Delta U]\, d\tau = \oiint_S \left[ U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \qquad (19.4)$$

Alnan (19.4) formula **Griniň ikinji formulasy** diýilýär.

**Bellik.** Eger $D$ ýaýla birnäçe ýapyk üstler bilen çäklenen hem bolsa Grin formulalaryny ulanmak bolýar. Bu halda üst integrallary $D$ ýaýlany çäklendirýän üstleriň hemmesi boýunça alynýar. $D$ ýaýlanyň daşky normalynyň bolsa bu ýaýlany içinden çäklendirýän üstlerde üstüň içine ugrukdyrylandygyny belläliň.

$U(x, y)$ we $V(x, y)$ iki üýtgeýänli funksiýalar üçin hem Grin formulalary ýerine ýetýär. L ýapyk egri çyzyk bilen çäklenen $D$ ýaýlada Griniň ikinji formulasy

$$\iint_D \left(U\Delta_2 V - V\Delta_2 U\right) dxdy = \oint_L \left( U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

görnüşe eýedir, bu ýerde $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$,– Laplas operatory, $\frac{\partial}{\partial n} - L$ egrä geçirilen ***n*** daşky normalyň ugry boýunça önüm.

## §20. Garmonik funksiýanyň integral görnüşi

Griniň ikinji funksiýasy iki gezek üznüksiz differensirlenýän islendik funksiýanyň integral görnüşini tapmaga mümkinçilik berýär.

**1-nji teorema.** Eger $D$ – bölek-endigan $S$ üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsa we $U(x, y, z) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ şertler ýerine ýetse, onda

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta U}{r}\, d\tau, \quad (20.1)$$

bu ýerde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – $D$ ýaýlanyň içinde ýatan $M_0$ $(x_0, y_0, z_0)$ berlen nokatdan erkin $M$ $(x, y, z)$ nokada çenli uzaklyk, ***n*** bolsa $S$ üste geçirilen daşky normal.

**Subudy.** $V = \dfrac{1}{r}$ funksiýa garalyň. Bu funksiýa erkin $M\ (x,\ y,\ z)$ nokat berlen $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ nokat bilen gabat gelende tükeniksizlige öwrülýär. Şonuň üçin hem $U\ (x, y, z)$ we $V\ (x, y, z)$ funksiýalara bütin $D$ ýaýlada ikinji Grin formulasyny ulanmak bolmaýar. $D$ ýaýladan merkezi $M_0$ nokatda bolan $\rho$ radiusly $K\ (M_0, \rho)$ şary kesip aýralyň. $D$ ýaýlanyň galan bölegini $D_\rho$ bilen belläliň. Indi $D_\rho$ ýaýlada $U$ we $V$ funksiýalar üçin Griniň ikinji formulasyny ulanmak bolýar, sebäbi

$$U(x, y, z),\ V(x, y, z) \in C^2\left(D_\rho\right) \cap C^1\left(\bar{D}_\rho\right).$$

$K\ (M_0, \rho)$ şaryň sferasyny $\sigma_\rho$ bilen belgiläliň we $S \cup \sigma_\rho$ araçäkli ýaýlada $U,\ V = \dfrac{1}{r}$ funksiýalar üçin ikinji Grin formulasyny ulanyp, alarys:

$$\iiint\limits_{D_\sigma}\left[U\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\Delta U\right] d\tau = \oiint\limits_{S}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial n}\right] dS +$$

$$+\oiint\limits_{S}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial n}\right] dS.$$

$V = \dfrac{1}{r}$ – Laplas deňlemesiniň fundamental çözüwi, şonuň üçin $D_r$ ýaýlada

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \Rightarrow \iiint\limits_{D_\rho} U\Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\tau = 0.$$

Şeýlelik bilen, (20.2) formula aşakdaky görnüşi alar:

$$-\iiint\limits_{D_\rho}\frac{\Delta U}{r}\,d\tau = \oiint\limits_{S}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial n}\right] dS +$$

$$+\oiint\limits_{\sigma}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\right] dS. \tag{20.3}$$

Indi $\rho$ radiusy nola ymtyldyryp predele geçeliň. Onda soňky (20.3) formulanyň çep böleginde bütin $D$ ýaýla boýunça integral alarys. Formulanyň sag bölegindäki $S$ üst boýunça integral $\rho$ bagly däl.

Indi sag bölekdäki ikinji goşulyja garalyň. $\sigma_\rho$ sferada $\frac{1}{r}$ funksiýa hemişelik, ýagny

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{\sigma_\rho} = \frac{1}{\rho}$$

$\sigma_\rho$ sferada daşky normal $D_\rho$ ýaýladan çykýar we ol sferanyň radiusyna gapma-garşy ugrukdyrylandyr, şonuň üçin

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\sigma_\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^2}$$

we

$$\oiint\limits_{\sigma_\rho} U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{U(M_\rho)}{\rho^2}\oiint\limits_{\sigma_\rho} dS = \frac{U(M_\rho)}{\rho^2} 4\pi\rho^2 = 4\pi U(M_\rho), \quad (20.4)$$

bu ýerde $M_\rho - \sigma_\rho$ sferanyň käbir nokadydyr.

$U$ ($x$, $y$, $z$) funksiýanyň birinji tertipli önümleriniň $\bar{D}$ ýapyk ýaýlada üznüksizliginden olaryň çäklenendigi gelip çykýar. Diýmek, şeýle bir $A > 0$ san bar bolup

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(n,z)\right| \le A$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Onda

$$\left|\oiint\limits_{\sigma_\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} dS\right| \le \frac{1}{\rho}\oiint\limits_{\sigma_\rho}\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| dS \le \frac{A}{\rho}\oiint dS = \frac{A}{\rho}4\pi\rho^2 = 4\pi\rho A. \quad (20.5)$$

Indi (20.3) formulada $\rho\to 0$ bolanda predele geçip, (20.4) deňligi we (20.5) deňsizligi göz önünde tutup alarys:

$$-\iiint\limits_D \frac{\Delta U}{r} d\tau = \oiint\limits_S \left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right] dS + 4\pi U(M_0). \quad (20.6)$$

Sebäbi $\rho\to 0$ bolanda $\sigma_\rho$ sfera $M_0$ nokada ýygnanýar. (20.6) formuladan bolsa (20.1) formula gelip çykýar. Teorema subut edildi.

(20.1) formuladan garmonik funksiýa üçin örän möhüm integral görnüşi almak bolýar.

**2-nji teorema.** $D$ ýaýlada garmonik $U \in C^1(\bar{D})$ funksiýa üçin

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS \qquad (20.7)$$

integral görnüş adalatlydyr.

**Subudy.** Eger $U(x, y, z)$ funksiýanyň $D$ ýaýlada garmonikligini ($\Delta U = 0$) we $\bar{D}$ ýapyk ýaýlada üznüksiz differensirlenýändigini göz öňünde tutsak, teoremanyň tassyklamasy (20.1) formuladan gelip çykýar.

Tekizlikde garmonik funksiýanyň integral görnüşi

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \left[ \ln \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r} \right) \right] dS$$

formula bilen aňladylýar, bu ýerde $L$ ýapyk çyzyk $D$ ýaýlany çäklendirýän çyzykdyr.

## §21. Garmonik funksiýanyň esasy häsiýetleri

Goý, $D$ – giňişlikde $S$ endigan üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla bolsun. Garmonik funksiýanyň integral görnüşini we Grin formulalaryny peýdalanyp, garmonik funksiýanyň esasy häsiýetlerini subut edeliň.

**1-nji teorema.** (normal önümden integral). Eger $U(x, y, z) \in C^1(\bar{D})$ garmonik funksiýa bolsa, onda onuň normal önüminden $S$ üst boýunça integral nola deňdir:

$$\oiint\limits_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0 \qquad (21.1)$$

**Subudy.** $U(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada garmonik funksiýa we $\bar{D} = D \bigcup S$ ýaýlada üznüksiz differensirlenýär, ýagny $U(x, y, z)$ funksiýa üçin Grin formulalaryny ulanmak bolýar. Şonuň üçin birinji Grin formulasynda $V = 1$ goýup, (21.1) deňligi alarys. Teorema subut edildi.

**2-nji teorema** (differensirlenmek). Eger $U(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlada garmonik bolsa, onda ol funksiýa $D$ ýaýlada tükeniksiz gezek differensirlenýär.

**Subudy.** Hakykatdan hem $(x_0, y_0, z_0)$ nokat $D$ ýaýlanyň içki nokady bolsun. Ol nokady durşuna $D$ ýaýlanyň içinde ýatan $S_1 \subset D$ üst bilen gurşalyň. $U(x, y, z)$ funksiýa $D$ ýaýlanyň garmonik funksiýadyr, onda ol funksiýa $S_1$ üst bilen çäklenen ýaýlada hem garmoniki funksiýadyr. Şunlukda, $U(x, y, z)$ funksiýa $S_1$ üste çenli ikinji tertipli üznüksiz önüme eýedir. (20.7) formulany ulanyp alarys:

$(x_0, y_0, z_0) \notin S_1$ bolany üçin

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

üznüksiz funksiýadyr hem-de $x_0$, $y_0$, $z_0$ üýtgeýän ululyklar boýunça islendik tertipdäki üznüksiz önüme eýedir. Diýmek, (21.2) formulanyň sag bölegini integral astynda $x_0$, $y_0$, $z_0$ üýtgeýänler boýunça $m$ gezek ($m$ – islendik natural san) differensirlemek bolýar. Bu ýerden bolsa teoremanyň tassyklamasy gelip çykýar.

**3-nji teorema** (orta baha hakyndaky teorema). Eger $U(x, y, z)$ funksiýa $K(M_0, \rho)$ şarda garmoniki, $\bar{K}(M_0, \rho)$ şarda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýanyň $K(M_0, \rho)$ şaryň sferasyndaky orta bahasy onuň sferanyň merkezindäki bahasyna deňdir.

**Subudy.** $\bar{K}(M_0, \rho)$, $R_1 < R$ ýapyk şarda $U(x, y, z)$ funksiýa iki gezek üznüksiz differensirlenýär. $K_1(M_0, R_1)$ şara (20.7) formulany ulanyp alarys:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S_{R_1}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS. \qquad (21.3)$$

$S_{R_1}$ sferada $r$ ululyk $R_1$ hemişelik sana deňdir, ýagny

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{S_{R_1}} = \frac{1}{R_1}.$$

$S_{R_1}$ üste daşky normalyň ugry şaryň radiusynyň ugry bilen gabat gelýändigi üçin alarys:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{S_{R_1}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R_1} = -\frac{1}{R_1^2}.$$

Şeýlelik bilen, (21.3) formula

$$U\left(M_0\right) = \frac{1}{4\pi R_1}\oiint\limits_{R_1}\frac{\partial U}{\partial n}dS + \frac{1}{4\pi R_1^2}\oiint\limits_{S_{R_1}} UdS$$

görnüşi alar, ýa-da (21.1) deňligiň esasynda

$$U\left(M_0\right) = \frac{1}{4\pi R_1^2}\oiint U\,dS.$$

Soňky deňlikde $R_1 \to R$ bolanda predele geçip, alarys:

$$U\left(M_0\right) = \frac{1}{4\pi R_1^2}\oiint\limits_{S_R} UdS = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} U\left(R,\,\theta,\varphi\right)\sin\,\theta\, d\,\theta\, d\varphi. \quad (21.4)$$

Teorema subut edildi.

**4-nji teorema** (maksimum prinsipi). Eger *U(M)* funksiýa:

1. *D* ýaýlada garmoniki ($\Delta U = 0$).

2. $\bar{D} = D \cap S$ ýaýlada üznüksiz.

3. $U\,(M) \neq \text{const}$

bolsa, onda ol özüniň iň uly we iň kiçi bahalaryny *D* ýaýlanyň *S* araçäginde kabul edýär.

**Subudy.** $U\,(M)$ funksiýanyň $\bar{D} = D \cap S$ ýaýlada üznüksizliginden onuň maksimumynyň barlygy gelip çykýar. Teoremany tersinden subut edeliň. Goý, $U\,(M)$ funksiýa özüniň in uly bahasyny $M_0 \in D$ içki nokatda kabul edýän bolsun:

$$\max_{\bar{D}} U\left(M\right) = U\left(M_0\right) = A.$$

Tutuşlygyna *D* ýaýlanyň içinde ýatan, merkezi $M_0$ nokatda bolan $R_0$ radiusly $S_0$ sfera guralyň. Onda orta baha hakyndaky teorema boýunça

$$A = U(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \oiint_{S_0} U(P)\, dS.$$

$\max_{\bar{D}} U(M) = A$ bolany üçin $U(P)\big|_{S_0} \le A$ bolar. $S_0$ sferada $U$ ($M$) funksiýanyň $A$-dan kiçi bahany alyp bilmeýändigini görkezeliň. Goý, käbir $P_0 \in S_0$ nokatda $U(P_0) - A\ 2\delta < A$ bolsun, onda $U(M)$ funksiýanyň üznüksizligi esasynda, alarys:

$$U(P) < A - \delta \qquad \forall P \in S_0^1 \subset S_0.$$

$S_0'' = S_0 - S_0^1$ diýip belgiläliň, onda

$$A = U(M_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2}\left[\iint_{S_0^1} U(P)\, dS + \iint_{S_0''} U(P)\, dS\right] <$$

$$< \frac{1}{4\pi R^2}\left[(A-\delta)|S_0'| + A|S_0''|\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}\left[\left(|S_0'| + |S_0''|\right) - \delta|S_0'|\right] = A - \frac{\delta|S_0'|}{4\pi R^2} < A.$$

Alnan gapma-garşylyk $U(M)\big|_{M\in S_0} = A$ bolmalydygyny görkezýär. $P_0$ – erkin nokatdyr. Şonuň üçin hem $\bar{K}(M_0, R_0)$ şarda $U(M) = A$.

Indi erkin $N$ nokady alalyň we $U$ ($N$) = $A$ bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin $M_0$ we $N$ nokatlary $L \subset D$ egri çyzyk bilen birikdireliň. Goý, $d > 0$ – $L$ egriden $S$ araçäge çenli iň gysga uzaklyk bolsun. Ýokarda subut edileniň esasynda $\bar{M}\left(M_0, \frac{d}{2}\right)$ şarda $U(N) = U(M_0) = A$ bolar. Goý, $M_1$ nokat $L$ egriniň $\bar{K}\left(M_0, \frac{d}{2}\right)$ şaryň sferasy bilen iň soňky kesişme nokady bolsun, $U(M_1) = A$. Ýokarda subut edileniň esasynda $\bar{K}\left(M_1, \frac{d}{2}\right)$ şarda $U$ ($M$) = $A$ alarys. Şeýle şarlaryň gutarnykly sanyny gurmak bilen $L$ egrini şarlar bilen örteris.

*N* nokat bolsa iň soňky şaryň içine düşer. Şonuň üçin $U(N) = A$ bolar. Şeýlelik bilen, $U(M)$ funksiýa içki nokatda özüniň in uly bahasyny (maksimumyny) kabul edýär diýip, $U(M) = A$ bahany aldyk. Bu bolsa teoremanyň 3 şertine garşy gelýär.

Indi $U(M)$ funksiýa özüniň iň kiçi bahasyny (minimumyny) hem $S$ araçäkde kabul edýändigini görkezeliň.

Goý, $U(M)$ funksiýa özüniň minimumyna $M_0 \in D$ içki nokatda eýe bolýan bolsun. Bu bolsa $(-U(M))$ funksiýanyň özüniň maksimumyna $D$ ýaýlanyň içki nokadynda eýe bolýandygyny aňladýar we teoremanyň subut edilen birinji bölegine garşy gelýär. Şeýlelik bilen, ýapyk ýaýlada üznüksiz garmoniki funksiýa özüniň ekstremal bahalaryny ýaýlanyň araçäginde kabul edýär ýa-da ol funksiýa hemişelik sana deňdir. Teorema subut edildi.

Maksimum prinsipden aşakdaky netijeler gelip çykýar.

**1-nji netije.** Eger $U(M)$ funksiýa $D$ ýaýlada garmoniki, $\bar{D} = D \bigcup S$ ýaýlada üznüksiz we $U(M)\big|_{M\in S} = 0$ bolsa, onda $D$ ýaýlada

$$U(M) \equiv 0.$$

**Subudy**. Şerte görä

$$U_{\min} = U_{\text{mak}} = 0.$$

Bilşimiz ýaly, $U_{\min} \le U \le U_{\text{mak}}$, bu ýerden $U(M) \equiv 0 \;\; \forall M \in D$ gelip çykýar.

**2-nji netije.** Eger $U_1(M)$, $U_2(M)$ funksiýalar $D$ ýaýlada garmoniki, $\bar{D} = D \bigcup S$ ýaýlada üznüksiz we $\left(U_1(M) - U_2(M)\right)\big|_S \le 0$ bolsa, onda $D$ ýaýlada

$$U_1(M) - U_2(M) \le 0.$$

**Subudy.** $U(M) = U_1(M) - U_2(M)$ tapawuda garalyň. Bu funksiýa $D$ ýaýlada garmoniki, $\bar{D} = D \bigcup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we $U(M)\big|_{M\in S} \le 0.$ Maksimum prinsipine görä $U(M)$ funksiýa özüniň maksimumyny $S$ üstde kabul edýär, şoňa görä-de

$$U(M)\big|_{M\in D} \le 0 \;\Rightarrow \left(U_1(M) - U_2(M)\right)\big|_{M\in D} \le 0.$$

**3-nji netije.** Eger $U_1$ $(M)$, $U_2$ $(M)$ funksiýalar $D$ ýaýlada garmoniki, $\bar{D} = D \bigcup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we

$$\left|U_1(M)\right|\Big|_{M\in S} \le U_2(M)\Big|_{M\in S}$$

bolsa, onda $D$ ýaýlada

$$\left|U_1(M)\right| \le U_2(M).$$

**Subudy.** Şerte görä

$$-U_2(M)\Big|_S \le U_1(M)\Big|_S \le U_2(M)\Big|_S$$

Bu ýerden

$$\left(-U_2(M) - U_1(M)\right)\Big|_S \le 0, \ \left(U_1(M) - U_2(M)\right)\Big|_S \le 0$$

$-U_2$ $(M) - U_1$ $(M)$, $U_1$ $(M) - U_2$ $(M)$ funksiýalar üçin 2-nji netijäni ulanyp, alarys:

$$\left(-U_2(M) - U_1(M)\right)\Big|_D \le 0, \ \left(U_1(M) - U_2(M)\right)\Big|_D \le 0.$$

Bu ýerden

$$-U_2(M) \le U_1(M), \qquad\qquad -U_1(M) \le U_2(M),$$

Soňky iki deňsizligi birleşdirip, islendik $M \in D$ üçin alarys:

$$-U_2(M) \le U_1(M) \le U_2(M) \quad \Rightarrow \quad \left|U_1(M)\right| \le U_2(M).$$

## §22. Dirihle we Neýman gyra meselesiniň goýluşy

Eger proses stasionar ýa-da wagta bagly däl bolsa, onda temperaturanyň $U$ $(x, y, z)$ paýlanyşy durnuklaşyp, wagtyň geçmegi bilen üýtgemeýär, şonuň üçin hem ol

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \qquad (22.1)$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Iki üýtgeýänli Laplas deňlemesi

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (22.2)$$

görnüşe eýe.

Goý, giňişlikde $S$ ýapyk üst bilen çäklenen $D^+$ içki ýaýla we $D^-$ daşky ýaýla berlen bolsun. (22.1) deňleme, şeýle hem (22.2) deňleme üçin içki we daşky Dirihle we Neýman meseleleri aşakdaky ýaly goýulýar.

**Mesele.** $D^+$ (içki Dirihle meselesi). Aşakdaky

1. $D^+$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz.
2. $D^+$ ýaýlada $\Delta\ U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan.
3. $U(x, y, z)|_S = f(x, y, z), f$ – berlen funksiýa.

şertleri kanagatlandyrýan $U(x, y, z)$ funksiýany tapmaly.

**Mesele.** $D^-$(daşky Dirihle meselesi). Aşakdaky

1. $D^- \cup S$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz.
2. $D^-$ ýaýlada $\Delta\ U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan.
3. $U(x, y, z)|_S = f(x, y, z), f$ – berlen funksiýa.
4. $M \to \infty$ bolanda $U(x, y, z) \to 0$, ýagny $M(x, y, z)$ nokat tükeniksizlige ymtylanda $U(x, y, z)$ funksiýa nola ymtylýar.

şertleri kanagatlandyrýan $U(x, y, z)$ funksiýany tapmaly.

**Mesele.** N$^+$ (içki Neýman meselesi).

$\bar{D}^+$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we

$$\left.\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial n}\right|_S = f(x,y,z),\ f - \text{berlen funksiýa,}$$

bu ýerde $n - S$ üstüň normaly, şerti kanagatlandyrýan garmoniki, ýagny (22.1) deňlemäniň çözüwi bolýan $U(x, y, z)$ funksiýany tapmaly.

**Mesele.** $D^-$ (daşky Neýman meselesi.) $D^- \cup S$ ýaýlada üznüksiz we

$$\left.\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial n}\right|_S = f(x,y,z),$$

bu ýerde $f$ – berlen funksiýa, $n$ – $S$ üstüň normaly, şerti kanagatlandyrýan garmoniki $U(x, y, z)$ funksiýany tapmaly.

(22.2) deňleme üçin hem Dirihle we Neýman meseleleri edil şunuň ýaly goýulýar.

## §23. Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligi

**1-nji teorema.** Içki we daşky Dirihle meselesiniň çözüwi ýeke-täkdir.

**Subudy.** Ilki bilen içki Dirihle meselesine garalyň.

Goý, meseläniň $U_1\ (x, y, z)$ we $U_2\ (x, y, z)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda $U\ (x, y, z) = U_1\ (x, y, z) - U_2\ (x, y, z)$ tapawut aşakdaky şertleri kanagatlandyrýar:

1) $\bar{D}^+$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz;

2) $\bar{D}^+$ ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan;

3) $U\ (x, y, z)|_S = 0$.

Eger $U\ (x, y, z) \neq 0$ we iň bolmanda bir nokatda $U > 0$ bolsa, onda ol funksiýa özüniň maksimumyna ýaýlanyň içinde eýe bolar. Bu bolsa maksimum prinsipine garşy gelýär. Edil şonuň ýaly $U < 0$ bolup bilmez. Diýmek,

$$U\ (x, y, z) = U_1\ (x, y, z) - U_2\ (x, y, z) \equiv 0$$

ýagny

$$U_1\ (x, y, z) \equiv U_2\ (x, y, z).$$

Indi daşky Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini görkezeliň.

Goý, meseläniň $U_1\ (x, y, z)$ we $U_2\ (x, y, z)$ iki çözüwleri bolsun. Onda $U\ (x, y, z) = U_1\ (x, y, z) - U_2\ (x, y, z)$ tapawut

1. $D^- \bigcup S$ ýaýlada kesgitlenen we üznüksiz.
2. $D^-$ ýaýlada $\Delta U = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan.
3. $U\ (M)|_S = 0$.
4. $M \to \infty$ bolanda $U\ (M) \to 0$,

şertleri kanagatlandyrýar. $U$ funksiýa üçin hem 4) şert ýerine ýetýär, onda islendik $\varepsilon \to \infty$ san üçin $R^*$ sany $r \geq R^*$ bolanda

$$|U\ (x, y, z)| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlap almak bolýar, bu ýerde $r - M$ nokatdan koordinat başlangyjyna çenli uzaklyk. Goý, $\bar{M}(x, y, z)$ nokat $D^-$

ýaýlanyň erkin nokady bolsun. $\bar{M}(x,y,z)$ nokady we $S$ üsti durşuna öz içinde saklaýan, merkezi koordinat başlangyjynda we $r \geq R$ radiusly $S_r$ sferany guralyň. Onda maksimum prinsipine görä $S_r$ sfera we $S$ üst bilen çäklenen $D_1$ ýaýlanyň $\bar{M}$ nokadynda $U(\bar{M}) < \varepsilon$ deňsizlik dogrudyr. ε sanyň erkinliginden bolsa $U < 0$ deňsizlik dogrudyr. $\bar{M}$ nokat $D^-$ ýaýlanyň erkin nokady, şonuň üçin hem $\bar{D}^-$ ýaýlada $U \equiv 0$, ýagny $U_1 \equiv U_2$. Bu bolsa daşky Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edýär.

## §24. Tegelekde polýar koordinatlara geçip üýtgeýän ululyklary bölme usuly bilen Dirihle meselesini çözmek

$S$: $x^2 + y^2 = R^2$ töwerek bilen çäklenen içki we daşky ýaýlalary degişlilikde $D^+$, $D^-$ bilen belgiläliň. $D^+$ we $D^-$ ýaýlalarda içki we daşky Dirihle meselelerine (**mesele** $D^+$ we **mesele** $D^-$) garalyň.

**Mesele $D^+$.** $D^+$ ýaýlada

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{24.1}$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýan, $\bar{D}^+$ ýapyk ýaýlada üznüksiz we

$$U(x,y)\big|_S = f(x,y),\ f(x,y) \in C^1(S) \tag{24.2}$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan $U(x, y)$ funksiýany tapmaly.

**Mesele $D^-$.** $D^-$ ýaýlada (24.1) deňlemäni kanagatlandyrýan, $D^- \cup S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz, tükeniksizlikde çäklenen we (24.2) gyra şerti kanagatlandyrýan $U(x, y)$ funksiýany tapmaly.

### 1. Formal çözüwi gurmak

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ formulalar bilen $(r, \varphi)$ polýar koordinatalara geçip, (24.1)-(24.2) meseläni

$$\Delta_2 U \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{24.3}$$

$$U(r,\varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi),\ f(\varphi+2\pi) = f(\varphi) \tag{24.4}$$

görnüşde ýazalyň.

$U\ (r,\ \varphi)$ çözüwiň üznüksizliginden we tükeniksizlikde çäklenenliginden onuň periodikligi: $U\ (r,\ \varphi + 2\pi) = U\ (r,\ \varphi)$ we çäklenendigi: şeýle bir $A > 0$ san bar bolup islendik $(r,\ \varphi)$ üçin $|U\ (r,\ \varphi)| < A$ gelip çykýar.

Dirihle meselesini Furýe usuly bilen çözeliň. Onuň üçin (24.3) deňlemäniň periodik we çäklenen çözüwini

$$U\ (r,\ \varphi) = T\ (r)\ \Phi\ (\varphi) \tag{24.5}$$

görnüşde gözläliň. $U\ (r,\ \varphi)$ funksiýanyň periodikliginden we çäklenenliginden

$$\Phi\ (\varphi + 2\pi) = \Phi\ (\varphi) \tag{24.6}$$

$$|T\ (r)| < A \tag{24.7}$$

gelip çykýar.

(24.5) görnüşdäki çözüwi ( 24.3) Laplas deňlemesinde goýup, alarys:

$$\frac{1}{r}\left(rT'(r)\right)'\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}T(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

ýa-da

$$\Phi(\varphi)\left[r^2T''(r) + rT'(r)\right] + T(r)\Phi''(\varphi) = 0.$$

Üýtgeýän ululyklary bölüp alarys:

$$\frac{r^2T''(r) + rT'(r)}{T(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Alnan deňligiň çep bölegi diňe $r$-e bagly, sag bölegi bolsa $\varphi$-e baglydyr. Deňligiň ýerine ýetmegi üçin bu gatnaşyklaryň ikisi hem käbir hemişelik sana deň bolmaly. Ol hemişelik sany $\lambda^2$ bilen belläp, alarys:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0; \tag{24.8}$$

$$r^2T''(r)+rT'(r)-\lambda^2T(r)=0. \qquad (24.9)$$

Eger hemişelik sany $-\lambda^2$ bilen bellän bolsak, onda (24.8) deňlemeden

$$\Phi(\varphi)=C_1e^{\lambda\varphi}+C_2e^{-\lambda\varphi}$$

çözüwi alarys, bu bolsa periodik çözüw däldir. (24.8) deňlemäniň umumy çözüwi

$$\Phi(\varphi)=A'\cos\lambda\varphi+B'\sin\lambda\varphi$$

görnüşe eýe. (24.6) gyra şertden peýdalanyp, $\lambda = k$, $k = 1,2,3,...$ taparys.

Indi $\lambda = 0$ ýagdaýa garalyň. $\lambda = 0$ bolanda (24.8) deňlemeden alarys:

$$\Phi''(\varphi)=0 \;\Rightarrow\; \Phi(\varphi)=A_0^1+B_0^1\varphi$$

şertden bolsa $B_0^1=0$ bolmalydygy gelip çykýar.

Şeýlelik bilen, (24.8), (24.6) meseläniň $\lambda^2 = k^2$ hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi$$

$$k = 0, 1, 2, ....$$

görnüşe eýe.

$k = \lambda$, $k \neq 0$ bolanda (24.9) deňlemäniň çözüwini $T(r) = r^\mu$ görnüşde gözläliň, $\mu$-näbelli san. Bu çözüwi (24.9) deňlemede goýup alarys

$$r^2 \mu(\mu-1) r^{\mu-2} + r\,\mu r^{\mu-1} - k^2 r^\mu = 0$$

ýa-da

$$\mu(\mu-1)+\mu-k^2=0 \quad \Rightarrow \quad \mu=\pm k.$$

(24.9) deňlemäniň $r^k$, $r^{-k}$ hususy çözüwleri çyzykly bagly däldir. Onda onuň umumy çözüwi

$$T_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}$$

görnüşde bolar. $\lambda = k = 0$ bolsa (24.9) deňleme

$$r^2 T''(r) + rT'(r) = 0$$

görnüşi alar. Bu deňlemäni integrirläp, onuň umumy çözüwini taparys:

$$T_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Çözüwiň çäklenendigini talap edýän (24.7) şertden $C_0 = 0$, $T_0(r) = D_0$ bolýandygy görünýär. Sebäbi lnr funksiýa $r = 0$ nokadyň etrabynda ($D^+$ mesele üçin) we tükeniksizlikde ($D^-$ mesele üçin) çäklenmedikdir; şeýlelik bilen, $k = 0, 1, 2, \cdots$. bahalar üçin tapylan çözüwleriň görnüşleri $k = 0$ bolanda hem dogrudyr.

$\Phi_k(\varphi)$, $T_k(r)$ funksiýalary (24.5) formulada goýup (24.3) deňlemäniň periodik çözüwlerini

$$U_k(r, \varphi) = \left(A_k^1 \cos k\varphi + B_k^1 \sin k\varphi\right)\left(C_k r^k + D_k r^{-k}\right), \; k = 0, 1, 2, \cdots$$

görnüşde ýazalyň. Çözüwiň çäklenen bolmagy, ýagny (24.7) şertiň ýerine ýetmegi üçin $D^+$ ýaýlada $D_k = 0$, $D^-$ ýaýlada bolsa $C_k = 0$ diýip almaly.

Şeýlelik bilen, Laplas deňlemesiniň $2\pi$ – periodly hususy periodiki çözüwleri aşakdaky görnüşe eýe:

$$U_k(r,\varphi) = r^k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad \left(mesele\ D^+\right)$$

$$U_k(r,\varphi) = r^{-k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad \left(mesele\ D^-\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Eger-de hususy çözüwlerden düzülen hatar we ony $r, \varphi$ boýunça iki gezek differensirlenip alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda bu hususy çözüwlerden düzülen hatar hem Laplas deňlemesiniňçözüwi bolýar. (24.1) we (24.2) meseläniň çözüwini

$$U(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad \left(mesele\ D^+\right) \quad (24.10)$$

$$U(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \qquad \left(mesele\ D^-\right) \quad (24.11)$$

görnüşde gözläliň.

$A_k$ we $B_k$ koeffisiýentleri kesgitlemek üçin (24.4) gyra şertden peýdalanalyň:

$$U(R,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} R^{k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)=f(\varphi) \quad \left(mesele\ D^+\right)(24.10')$$

$$U(R,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} R^{-k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)=f(\varphi) \quad \left(mesele\ D^-\right).(24.11')$$

$f(\varphi)$ funksiýanyň Furýe hataryna garalyň:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\beta\right) \qquad (24.12)$$

bu ýerde

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi;$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos k\psi\, d\psi; \qquad (24.13)$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin k\psi\, d\psi;$$

$$k=1.2.3,\cdots.$$

(24.10′) we (24.12), (24.11′) we (24.12) hatarlary deňeşdirip alarys:

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\ A_k=\frac{\alpha_k}{R^k},\ B_k=\frac{\beta_k}{R^k} \qquad \left(mesele\ D^+\right)$$

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\ A_k=\alpha_k R^k,\ B_k=\beta_k R^k \qquad \left(mesele\ D^-\right)$$

$A_k$ we $B_k$ koeffisiýentleriň bahalaryny (24.10), (24.11′) hatarlarda goýup, tegelek üçin Dirihle meselesiniň formal çözüwlerini alarys:

$$U(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)\quad\left(mesele\ D^+\right)(24.14)$$

$$U(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi)\quad\left(mesele\ D^-\right)(24.15)$$

## 2. Usulyň esaslandyrylyşy

Indi biz (24.14), (24.15) hatarlaryň ýygnanýandygyny we $D^+$, $D^-$ ýaýlalarda (24.3), (24.4) Dirihle meseleleriniň degişlilikde çözüwleri bolýan funksiýalary kesgitleýändigini görkezmeli.

Şerte görä $f(\varphi)\in C^1([0,2\pi])$, diýmek,

$$\left|\frac{\alpha_0}{2}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\alpha_k|+|\beta_k|\right)$$

hatar ýygnanýar we $\left|\frac{r}{R}\right|\le 1$ bolanda $D^+$ ýaýlada (24.14) hatar üçin, $\left|\frac{R}{r}\right|\le 1$ bolanda bolsa $D^-$ ýaýlada (24.15) hatar üçin mažorant hatar bolýar. Şonuň üçin (24.14), (24.15) hatarlar deňölçegli ýygnanýarlar, hem ol hatarlarda agzama-agza predele geçmek bolýar.

$r\to R$ bolanda (24.14), (24.15) hatarlaryň sag böleklerinde $f(\varphi)$ funksiýa üçin Furýe hatarlary alynýar, diýmek,

$$\lim_{r\to R}U(r,\varphi)=f(\varphi)\quad\forall\varphi$$

ýagny (24.4) gyra şert ýerine ýetýär.

(24.14), (24.15) hatarlaryň Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygyny görkezeliň.

(24.14) hatary $r$ we $\varphi$ boýunça iki gezek differensirläp, alarys:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{R^2}\sum\limits_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(\dfrac{r}{R}\right)^{k-2}(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi);\\ \sum\limits_{k=2}^{\infty}k^2\left(\dfrac{r}{R}\right)^k(-\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi).\end{cases}\qquad(24.16)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^k N, \qquad N = \max_k \left(|\alpha_k| + |\beta_k|\right), \; r_0 < R,$$

hatar ýygnanýar (Dalamber nyşany boýunça) we $r \le r_0 < R$ bolanda (24.16) hatarlar üçin mažorant hatar bolýar. Diýmek, (24.16) hatarlar deňölçegli ýygnanýar we (24.14) hatary agzama-agza differensirlemek amaly kanunalaýykdyr. (24.14) hataryň her bir agzasynyň (24.3) deňlemäniň çözüwi bolany üçin umumylaşdyrylan superpozisiýa prinsipi esasynda (24.14) hatar $D^+$ ýaýlada ($r < R$) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

(24.15) hataryň $D^-$ ýaýlada ($r > R$) Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygy şuňa meňzeş görkezilýär.

Şeýlelik bilen, (24.14) funksiýa $D^+$ meseläniň $\bar{D}^+$ ýapyk ýaýlada, (24.15) funksiýa bolsa $D^-$ meseläniň $\bar{D}^-$ ýapyk ýaýlada üznüksiz çözüwi bolýar.

### 3. Puasson integraly

Tegelek üçin içki we daşky Dirihle meseleleriniň (24.14), (24.15) çözüwlerini integral görnüşinde hem ýazmak bolýar. Onuň üçin ol hatarlary

$$U(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \left(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \cos k\varphi\right) \tag{24.17}$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$q = \begin{cases} \dfrac{r}{R} & \left(mesele\ D^+\right) \\ \dfrac{R}{r} & \left(mesele\ D^-\right) \end{cases} \qquad 0 \le q < 1.$$

$\alpha_k$ we $\beta_k$ koeffisiýentleriň bahalaryny (24.13) formuladan alyp (24.17) hatara goýalyň:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} q^k \left( \cos k\varphi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos k\psi d\psi + \sin k\varphi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin k\psi d\psi \right).$$

Integrallary birleşdirip, integrirlemegiň we jemlemegiň tertibini üýtgedip, alarys:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \sum q^k \cos k\,(\psi - \varphi)\, d\psi, \qquad (24.18)$$

$\cos k\tau = \dfrac{e^{ik\tau} + e^{-ik\tau}}{2}$ Eýler formulasyndan peýdalanyp

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k\tau$$

jemi tapalyň.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k\tau = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \, \frac{e^{ik\tau} + e^{-ik\tau}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ik\tau} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \, e^{-ik\tau}.$$

$|q| < 1$ bolanda alnan hatarlar tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýa bolýar, şonuň üçin

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos k\tau = \frac{1}{2} \, \frac{qe^{i\tau}}{1 - qe^{i\tau}} + \frac{1}{2} \, \frac{qe^{-i\tau}}{1 - qe^{i\tau}} =$$

$$= \frac{q}{2} \cdot \frac{\left(e^{i\tau} + e^{-i\tau}\right) 2q}{1 - q\left(e^{i\tau} + e^{-i\tau}\right)} = \frac{q \cos\tau - q^2}{1 - 2q \cos\tau - q^2}.$$

Bu deňligi peýdalanyp, (24.18) deňligi

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{q \cos(\psi - \varphi) - q^2}{1 - 2q \cos(\psi - \varphi) + q^2} d\psi$$

görnüşde ýazalyň we integrallary birleşdireliň, netijede alarys:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \, \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos(\psi - \varphi) + q^2} \, d\psi. \qquad (24.19)$$

(24.19) integralda $q=\frac{r}{R}, \quad q=\frac{R}{r}$ diýip (24.3), (24.4) Dirihle meselesiniň çözüwini Puasson integraly görnüşinde alarys:

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{R^2-r^2}{1-2rR\,\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi \qquad \left(mesele\ \ D^+\right),$$

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{r^2-R^2}{1-2rR\,\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\psi \qquad \left(mesele\ \ D^-\right).$$

## §25. Gönüburçlukda Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesi

Goý, $Q = \{0 < x < p,\ 0 < y < q$ – gönüburçluk berlen bolsun. Bu ýaýlada içki Dirihle meselesine garalyň.

**Mesele *D*$^+$.** $Q$ gönüburçlukda

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0. \tag{25.1}$$

Laplas deňlemesiniň araçägine çenli üznüksiz we

$$U(x, y)\big|_{y=0} = \varphi(x),\ U(x, y)\big|_{y=q} = \psi(x); \tag{25.2}$$

$$U(x, y)\big|_{x=0} = 0,\ U(x, y)\big|_{x=p} = 0, \tag{25.3}$$

bu ýerde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ üznüksiz funksiýalar bolup,

$$\varphi(0) = \varphi(p) = \psi(0) = \psi(p) = 0$$

ylalaşyk şertlerini kanagatlandyrýarlar, gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Bu meseläni Furýe usuly bilen çözeliň. Onuň üçin bu (25.1) – (25.3) meseläniň çözüwini

$$U(x, y) = X(x)\ Y(y) \neq 0 \tag{25.4}$$

görnüşde gözläliň. Onda (25.3) şertden peýdalanyp, alarys:

$$\begin{cases} U(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \;\Rightarrow X(0) = 0; \\ U(p,y) = X(p)Y(y) = 0 \;\Rightarrow X(p) = 0. \end{cases} \quad (25.5)$$

Indi (25.4) çözüwi (25.1) deňlemede goýalyň:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe $x$ ululyga bagly bolup, sag bölegi bolsa diňe $y$ ululyga baglydyr. Şonuň üçin bu deňlik diňe ondaky gatnaşyklar hemişelik sana deň bolanda dogrudyr. Ol hemişelik sany $\mu$ harpy bilen belläp, alarys:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0, \quad (25.6)$$

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0. \quad 25.7$$

Biz $X(x)$ funksiýa üçin

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \quad (25.6)$$

$$X(0) = 0, \qquad X(p) = 0 \quad (25.5)$$

Şturm-Liubill meselesini aldyk.

Aşakdaky hallara garalyň:

a) Goý, $\mu > 0$ bolsun. Onda (25.6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\mu}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}\cdot x} \quad (25.8)$$

bolar. (25.5) gyra şertleri göz öňünde tutup, (25.8) umumy çözüwdäki $C_1$ we $C_2$ erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys:

$$X(0) = 0 \;\Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \;\Rightarrow C_2 = -C_1. \quad (25.9)$$

$$X(p) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 e^{\sqrt{\mu}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\mu}\cdot x} = 0 \;\Rightarrow C_1\left(e^{\sqrt{\mu}\cdot x} + e^{-\sqrt{\mu}\cdot x}\right) = 0. \, (25.10)$$

Bu ýerden $e^{\sqrt{\mu}\cdot x}+e^{-\sqrt{\mu}\cdot x}\neq 0$ bolany üçin (25.10) deňlikden $C_1 = 0$. (25.9) deňlikden bolsa $C_2 = 0$ gelip çykýar. Şeýlelikde, biz bu halda

$$X(x) \equiv 0$$

çözüw aldyk. Bu bolsa (25.4) şerti kanagatlandyrmaýar. Diýmek, alnan çözüw bizi gyzyklandyrmaýar.

b) Goý, $\mu = 0$ bolsun. Onda bu halda (25.6) deňleme

$$X''(x) \equiv 0$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

görnüşde bolar. Indi (25.5) şerti göz öňünde tutup, $C_1$ we $C_2$ erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys:

$$X(0) = 0 \;\Rightarrow C_2 = 0,$$
$$X(p) = 0 \;\Rightarrow C_1 p = 0.$$

Bu ýerden $p \neq 0$ bolany üçin $C_2 = 0$. Diýmek, bu halda hem

$$X(x) \equiv 0$$

çözüw aldyk.

ç) Goý, $\mu < 0$, ýagny $\mu = -\lambda^2 < 0$ bolsun. Onda (25.6) deňleme

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{25.11}$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \tag{25.12}$$

görnüşde bolar. Indi (25.5) şerti peýdalanyp, $C_1$ we $C_2$ erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$X(p) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 \sin \lambda p = 0.$$

Eger soňky deňlikde $C_2 = 0$ diýsek, onda $X(x) \equiv 0$ görnüşli çözüw alarys. Şonuň üçin $C_2 \neq 0$ diýip,

$$\sin \lambda p = 0$$

görnüşli trigonometrik deňleme alarys. Bu ýerden

$$\lambda_n^2 = \left( \frac{n\pi}{p} \right)^2 \qquad (25.13)$$

hususy bahalary, (25.12) umumy çözüwden bolsa

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{p} x, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \qquad (25.14)$$

görnüşli hususy funksiýalary alarys. Şeýlelikde, (25.6), (25.5) Şturm-Liuwill meselesiniň hususy bahalary we hususy funksiýalary degişlilikde (25.13) we (25.14) görnüşdedir.

$\mu = -\lambda^2 < 0$ bolanda (25.7) deňleme

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$$

görnüşi alar. Onuň umumy çözüwi bolsa

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{p} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p}$$

görnüşde bolar.

Tapylan $X_n(x)$, $Y_n(y)$, funksiýalary (25.4) deňlikde goýup hem-de superpozisiýa prinsipinden peýdalanyp, (25.1)-(25.3) meseläniň $A_n$ we $B_n$ erkin hemişeliklere bagly çözüwini alarys:

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{p} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{p} y \right) \sin \frac{n\pi}{p} x. \qquad (25.15)$$

Indi (25.2) şerti peýdalanyp, $A_n$ we $B_n$ erkin hemişelikleri tapalyň. Alarys:

$$U(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{p} x,$$

$$U(x,q)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{q}q+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{p}q\right)\sin\frac{n\pi}{p}x. \quad (25.15)$$

Alnan bu deňliklere berlen *j(x)* we *Φ(x)* funksiýalaryň Furýe hatary hökmünde garap alarys:

$$A_n=\frac{2}{p}\int_0^p \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx,$$

$$A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{q}q+B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{p}q=\frac{2}{p}\int_0^p \psi(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx.$$

Bu sistemany çözüp, $A_n$ we $B_n$ erkin hemişelikleri taparys, soňra olary (25.15) deňlikde goýup bolsa, berlen (25.1) – (25.3) meseläniň çözüwini alarys.

## §26. Gönüburçlukda Puasson deňlemesi üçin Dirihle meselesi

*Q* gönüburçlukda Puasson deňlemesi üçin Dirihle meselesine garalyň.

**Mesele $D^+$.** *Q* gönüburçlukda

$$\Delta_2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=g(x,y). \quad (26.1)$$

Puasson deňlemesiniň

$$U(x,y)|_{y=0}=\varphi(x),\ U(x,y)|_{y=q}=\psi(x); \quad (26.2)$$

$$U(x,y)|_{x=0}=f(y),\ U(x,y)|_{x=p}=F(y) \quad (26.3)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Bu (26.1)–(26.3) meseläniň çözüwini

$$U(x,y)=V_1(x,y)+V_2(x,y)+W(x,y) \quad (26.4)$$

görnüşde gözlläliň. Onda (26.4) çözüwi (26.1) deňlemede we (26.2), (26.3) gyra şertlerde goýup, alarys:

$$\Delta_2 V_1 + \Delta_2 V_2 + V_2 W = g(x, y);$$

$$(V_1 + V_2 + W)|_{y=0} = \varphi(x);$$

$$(V_1 + V_2 + W)|_{y=q} = \psi(x);$$

$$(V_1 + V_2 + W)|_{x=0} = f(y);$$

$$(V_1 + V_2 + W)|_{x=p} = F(y).$$

Indi $V_1$ we $V_2$ funksiýalary degişlilikde aşakdaky şertleri kanagatlandyrar ýaly edip saýlalyň:

$$\begin{cases} \Delta_2 V_1 = 0, \\ V_1\big|_{y=0} = \varphi(x), \qquad V_1\big|_{y=q} = \psi(x) \\ V_1\big|_{x=0} = 0,\ V_1\big|_{x=p} = 0 \end{cases} \tag{26.5}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 V_2 = 0 \\ V_2\big|_{y=0} = 0,\ \ V_2\big|_{y=q} = 0 \\ V_2\big|_{x=0} = f(y),\ V_2\big|_{x=p} = F(y) \end{cases} \tag{26.6}$$

Onda *W(x,y)* funksiýa

$$\Delta_2 W = g(x, y) \tag{26.7}$$

deňlemäniň

$$W|_{y=0} = W|_{y=q} = W|_{x=0} = W|_{x=p} = 0 \tag{26.8}$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwidir.

Biz (26.5) we (26.6) meseleleri ýokarda çözdük. Şonuň üçin garalýan (26.1)-(26.3) meseläni çözmekligi (26.7)-(26.8) meseläni çözmeklige getirdik.

Indi (26.7), (26.8) meseläniň çözüwini degişli birölçegli Şturm-Liuwilli meselesiniň hususy funksiýalary boýunça ýazylan hatar görnüşinde gözläliň:

$$W(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y)\sin\frac{k\pi}{p}x. \tag{26.9}$$

$W(x, y)$ funksiýa $W(0, y) = W(p, y) = 0$ gyra şertleri kanagatlandyrýar, ýöne onuň (26.8) gyra şertleri doly kanagatlandyrmagy üçin

$$Y_k(0) = Y_k(q) = 0 \tag{26.10}$$

şertleri hem talap etmelidiris.

Indi $g(x, y)$ funksiýany $\sin\frac{k\pi}{p}x$ funksiýalar boýunça hatara dagydyp, soňra ony we (26.9) çözüwi (26.7) deňlemede goýup, alarys:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 Y_k(y)\sin\frac{k\pi}{p}x+\sum_{k=1}^{\infty}Y_k''(y)\sin\frac{k\pi}{p}x=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(y)\sin\frac{k\pi}{p}x,$$

bu ýerde

$$g_k(x,y)=\frac{2}{p}\int_0^p g(x,y)\sin\frac{k\pi}{p}x\,dx.$$

Furýe hataryna dagytmaklygyň ýeke-täkliginden

$$Y_k''(y)-\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 Y_k(y)=g_k(y) \tag{26.11}$$

deňlemäni aldyk.

Şeýlelikde, $Y_k(y)$ funksiýany tapmak üçin (26.11), (26.10) meseläni aldyk.

Goý, $\overline{Y}_k(y)$ funksiýa (26.11) birjynsly däl deňlemäniň haýsy hem bolsa bir hususy çözüwi bolsun. Onda onuň umumy çözüwi

$$Y_k(y)=A_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi}{p}y+B_k\mathrm{sh}\frac{k\pi}{p}y+\overline{Y}_k(y) \tag{26.12}$$

görnüşde bolar. Indi (26.10) gyra şertleri peýdalanyp, alarys:

$$\begin{cases} Y_k(0)=0 \;\Rightarrow\; A_k+\overline{Y}_k(0)=0; \\ Y_k(q)=0 \;\Rightarrow\; A_k \operatorname{ch}\dfrac{k\pi}{p}q+B_k\, sh\dfrac{k\pi}{p}q+\overline{Y}_k(q)=0. \end{cases} \qquad (26.13)$$

Bu (26.13) sistemany çözüp $A_k$, $B_k$ koeffisiýentleri taparys, soňra olary (26.12) deňlikde goýup, (26.12), (26.10) gyra meseläniň çözüwini alarys. Ol çözüwi bolsa (26.9) deňlikde goýup, (26.7)–(26.8) meseläniň çözüwini taparys.

Şeýlelikde, goýlan (26.1)–(26.3) meseläniň çözüwi (26.4) deňlik arkaly hatar görnüşinde ýazylýar. Eger-de bu hatar deňölçegli ýygnanyp, ony $x$ we $y$ boýunça agzama-agza iki gezek differensirlemek hem mümkin bolsa, onda ol regulýar çözüwdir.

## §27. Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesiniň Grin funksiýasy we onuň käbir häsiýetleri

### 1. Dirihle meselesiniň Grin funksiýasy

Goý, $D-S$ ýapyk üst bilen çäklenen tükenikli ýaýla, $U(M)=U(x,y,z)$ bolsa $D$ ýaýlada garmoniki funksiýa bolsun. Onda belli bolşy ýaly

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\oiint_D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS \qquad (27.1)$$

formula ýerine ýetýär, bu ýerde $r-M_0\in D$ nokatdan $M\subset S$ erkin üýtgeýän nokada çenli uzaklyk.

Bilşimiz ýaly, Dirihle meselesinde $S$ araçäkde diňe $U(M)|_S$ funksiýa berilýär, normal boýunça $\left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_S$ önüm bolsa berilmeýär (näbelli).

Eger (27.1) deňlikde normal boýunça önüm integral astyndan ýok bolar ýaly özgertme edip bilsek, onda ol deňlik $D$ ýaýlada $U(M)|_S$ bahasy belli garmoniki funksiýany tapmaklyga, ýagny Dirihle meselesiniň çözüwini ýazmaklyga mümkinçilik berer.

$D$ ýaýlada garmoniki $g(M,M_0)\in C^1(\overline{D})$ funksiýa garalyň. $U(M)$ we $g(M,M_0)$ funksiýalara (19.4) ikinji Grin formulasyny ulanyp alarys:

$$0=\oiint_S\left[U(M)\frac{\partial g(M,M_0)}{\partial n}-g(M,M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS. \quad (27.2)$$

(27.1) deňlikden (27.2) deňligi aýralyň:

$$U(M_0)=$$

$$=\oiint_S\left[\left(g(M,M_0)+\frac{1}{4\pi r}\right)\frac{\partial U(M)}{\partial n}-U(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(g(M,M_0)+\frac{1}{4\pi r}\right)\right]dS.$$

Indi

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M,M_0) \quad (27.3)$$

belgileme girizip, soňky deňligi

$$U(M_0)=\oiint_S\left[G(M,M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}-U(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\right]dS \quad (27.4)$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden görnüşi ýaly, eger $g$ $(M, M_0)$ funksiýany $G(M, M_0)|_S = 0$ bolar ýaly saýlap alsak, onda $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S$ integral aşagyndan ýok bolar.

**Kesgitleme.** Eger $G$ $(M, M_0)$ funksiýa:

1°. $M$ nokada görä funksiýa hökmünde $D$ ýaýlanyň $M_0$ nokadyndan başga ähli nokatlarynda garmoniki;

2°. $G(M, M_0)|_{M\in S} = 0$;

3° $$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M,M_0), \quad (27.3)$$

bu ýerde: $r = |M, M_0|$, $g$ $(M, M_0)$ – $D$ ýaýlada garmoniki funksiýa; şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa Laplas deňlemesi üçin Dirihle meselesiniň **Grin funksiýasy** diýilýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, Grin funksiýasyny gurmaklyk onuň

$$\Delta g(M,M_0)=0,\quad g(M,M_0)\big|_S=-\frac{1}{4\pi r}\ (M_0\in D)$$

Dirihle meselesiniň çözüwi bolýan g (M, $M_0$) regulýar bölegini tapmaklyga getirilýär.

(27.4) formuladan aşakdaky tassyklama gelip çykýar:

Eger $D$ ýaýlada Grin funksiýasy bar bolsa we

$$\Delta U(M)=0,\quad U(M)\big|_S=f(M) \tag{27.5}$$

Dirihle meselesiniň $\bar{D}$ ýapyk ýaýlada özüniň birinji tertipli önümleri bilen birlikde üznüksiz çözüwi bar bolsa, onda ol çözüw

$$U(M_0)=\oiint_S f(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\,dS \tag{27.6}$$

formula görnüşinde berilýär.

Göräýmäge (27.6) formula peýdasyz (manysyz) ýaly, sebäbi bir Dirihle meselesi başga bir Dirihle meselesi bilen çalşyrylýar. Ýöne beýle däldir. Köp möhüm ýaýlalar üçin Grin funksiýasyny, diýmek, (27.5) Dirihle meselesiniň çözüwini anyk görnüşde ýazmak bolýar.

(27.6) formuladan Dirihle meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkliginiň we durnuklylygynyň gelip çykýandygyny belläliň.

Daşky Dirihle meselesi üçin Grin funksiýasy ýokardaky ýaly girizilýär (kesgitlenýär).

**Bellik.** (27.6) formula getirilip çykarylanda Dirihle meselesiniň $\bar{D}=D\subset S$ ýapyk ýaýlada üznüksiz differensirlenýän çözüwi bar diýip güman edildi. Eger $S$ – Lýapunow üsti diýip atlandyrylýan üst bolsa, onda A.M. Lýapunowyň derňewleri (27.6) formulanyň Dirihle meselesiniň $U(M)\in C(\bar{D})$ çözüwini hem berýändigini görkezýär.

## 2. Grin funksiýasynyň häsiýetleri

**1-nji häsiýet.** Eger Grin funksiýasy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

**Subudy**. $D$ ýaýlada

$$G_1(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g_1(M,M_0),$$

$$G_2(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g_2(M,M_0)$$

iki sany Grin funksiýasy bar diýip güman edeliň. Onda

$$g\,(M, M_0) = G_1\,(M, M_0) - G_2\,(M, M_0) = g_1\,(M, M_0) - g_2\,(M, M_0)$$

funksiýa $D$ ýaýlada garmoniki we

$$g\,(M, M_0)|_{M\in S} = 0$$

ýeke-täklik teoremasyndan

$$g\left(M, M_0\right) \equiv 0 \;\Rightarrow G_1\left(M, M_0\right) \equiv G_2\left(M, M_0\right)$$

gelip çykýar.

**2-nji häsiýet.** $G\,(M, M_0)$ Grin funksiýasy $D$ ýaýlanyň içinde položiteldir.

**Subudy**. $M_0$ nokatdyň etrabynda $\frac{1}{r}$ fundamental çözüw çäksiz artýar, ýagny $M \to M_0$ bolanda $\frac{1}{r} \to \infty$, $g\,(M, M_0)$ funksiýa üznüksiz we çäklenen, şonuň üçin $\delta > 0$ san bar bolup, merkezi $M_0$ nokatda bolan $\delta$ radiusly $S\,(M_0, \delta) = S_\delta$ sferanyň üstünde

$$G\left(M, M_0\right)\Big|_{M\in S_\delta} = \left(\frac{1}{4\pi r} + g\left(M, M_0\right)\right)\Bigg|_{M\in S_\delta} > 0$$

alarys. $G\,(M, M_0)$ funksiýa $S$ üstde nola öwrülýär:

$$G\,(M, M_0)|_{M\in S} = 0.$$

Bu ýerden garmoniki funksiýanyň maksimum prinsipinden $G\,(M, M_0)$ funksiýanyň $D$ ýaýlada položiteldigi gelip çykýar.

**3-nji häsiýet.** Grin funksiýasy simmetrikdir, ýagny

$$G\,(M, M_0) \equiv G\,(M_0, M). \tag{27.7}$$

**Subudy**. $D$ ýaýladan $M_1, M_2$ erkin nokatlary alalyň we $D$ ýaýladan $K\,(M_1, \varepsilon)$, $K\,(M_2, \varepsilon)$ şarlary aýralyň. Bu şarlaryň üstlerini degişlilikde $S_1$, $S_2$ bilen belgiläliň. $S \cup S_1 \cup S_2$ araçäkli $D_\varepsilon$ ýaýlada $U = G\,(M, M_1)$, $V = G\,(M, M_2)$ funksiýalar garmoniki funksiýalardyr. Bu funksiýalara $D_\varepsilon$ ýaýlada (19.4) ikinji Grin formulasyny ulanalyň. Alarys:

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon} \left[G\left(M, M_1\right)\Delta G\left(M, M_2\right) - G\left(M, M_2\right)\Delta G\left(M, M_1\right)\right]d\tau =$$

$$= \oiint\limits_{S \cup S_1 \cup S_2} \left[ G(M, M_1) \frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} - G(M, M_2) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} \right] dS. \quad (27.8)$$

$D_\varepsilon$ ýaýlada $\Delta G\,(M, M_1) = 0$, $\Delta G\,(M, M_1) = 0$, şonuň üçin $D_\varepsilon$ ýaýla boýunça integral nola deňdir. $G\,(M, M_1)|_{M \in S} = 0$ gyra şertleriň esasynda $S$ üst boýunça integral hem nola deňdir. Bu aýdylanlaryň esasynda (27.8) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$\oiint\limits_{S_1} \left[ G(M, M_1) \frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} - G(M, M_2) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} \right] dS =$$

$$= \oiint\limits_{S_2} \left[ G(M, M_2) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} - G(M, M_1) \frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} \right] dS. \quad (27.9)$$

(27.9) deňligiň çep bölegini özgerdeliň. $S_1$ sferada $\frac{1}{r}$ fundamental çözüw $\frac{1}{\varepsilon}$ hemişelik bahany kabul edýär:

$$\left. \frac{1}{r} \right|_{M \in S_1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Şonuň üçin

$$G(M, M_1)\Big|_{M \in S_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} + \left. \frac{\partial g(M, M_1)}{\partial n} \right|_{M \in S_1}. \qquad (27.10)$$

$S_1$ sfera $M \in S_1$ nokatda geçirilen ***n*** daşky ($D_\delta$ ýaýladan çykýan) normal sferanyň radiusy boýunça onuň garşysyna ugrukdyrylandyr, şoňa görä

$$\left. \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right|_{M \in S_1} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

diýmek,

$$\left. \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} \right|_{M \in S_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \left. \frac{\partial g(M, M_1)}{\partial n} \right|_{M \in S_1}, \qquad (27.11)$$

bu ýerde: $\frac{\partial g(M, M_1)}{\partial n}$ üznüksiz funksiýa, sebäbi $g\ (M,\ M_1)$ funksiýa $D$ ýaýlada garmonikdir. $\frac{\partial G(M_2)}{\partial n}$ $G\ (M,\ M_1)$ funksiýalar $S_1$ sferada üznüksiz. Şeýlelik bilen, $S_1$ üst boýunça integralda integral astyndaky funksiýa üznüksiz funksiýadyr. (27.10), (27.11) deňliklerden peýdalanyp we orta baha hakyndaky teoremany ulanyp, alarys:

$$\oiint_{S_1}\left[G(M, M_1)\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} - G(M, M_2)\frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n}\right]dS =$$

$$= \left[\left(A + g\left(M^*, M_1\right)\right)\frac{\partial G\left(M^*, M_1\right)}{\partial n} - G\left(M^*, M_1\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial g(M^*, M_1)}{\partial n}\right)\right]4\pi\varepsilon^2,$$

bu ýerde: $M^* - S_1$ sferanyň käbir nokady. $\varepsilon \to 0$ bolanda $S_1$ sfera $M_1$ nokada ýygnanýar, $M^* - M_1$, $A\varepsilon^2 \to 0$, şoňa görä-de

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oiint_{S_1}\left[G(M, M_1)\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} - G(M, M_2)\frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n}\right]dS = -G(M_1, M_2). \qquad (27.12)$$

Şeýle pikir ýöretmäni ulanyp, $S_2$ üst boýunça integral üçin alarys:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oiint_{S_1}\left[G(M, M_2)\frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} - G(M, M_1)\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n}\right]dS = -G(M_2, M_1). \qquad (27.13)$$

Indi (27.8) deňlikde $\varepsilon \to 0$ bolanda predele geçip we (27.12), (27.13) deňlikleri göz öňünde tutup, alarys:

$$G\ (M_1,\ M_2) \equiv G\ (M_2,\ M_1).$$

Bu ýerden, $M_1$ we $M_2$ nokatlaryň erkinligi esasynda (27.7) deňlik gelip çykýar.

**Netije.** Grin funksiýasy M nokat üýtgemeýän bolsa, onda ol $M_0$ ($M \neq M_0$) nokadyň koordinatalary boýunça Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

**Bellik.** Tekizlikde Grin funksiýasy

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(M, M_0), \qquad r = |M_0 M|$$

görnüşe eýedir. $L$ ýapyk egri çyzyk bilen çäklenen $D$ tekiz ýaýlada içki Dirihle meselesiniň çözüwi bolsa

$$U(M_0) = -\oint_L f(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS, \quad U\langle M\rangle\big|_{M\in L} = f(M)$$

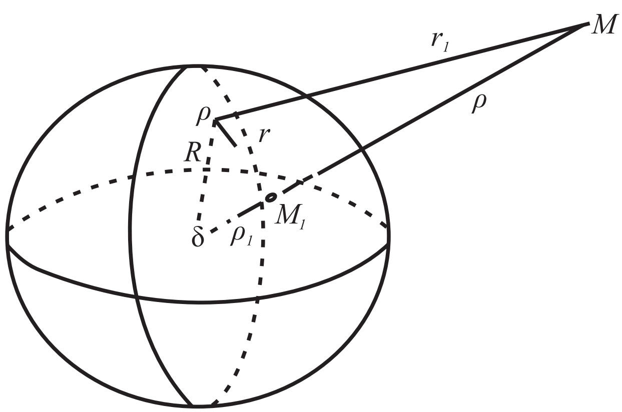
görnüşde ýazylýar.

# §28. Şar üçin içki Dirihle meselesini Grin funksiýasynyň kömegi bilen çözmek. Puasson integraly

## 1. Şar üçin Grin funksiýasy

Goý, şaryň içinde garmoniki, ýapyk şarda üznüksiz we şaryň $S$ üstünde berlen $f(P)$ üznüksiz bahany kabul edýän $U(M) = U(x, y, z)$ funksiýany tapmaly bolsun.

Bu meseläni çözmek üçin, ilki bilen, şar üçin Grin funksiýasyny guralyň. Goý, $R$ – merkezi $O$ nokatda bolan şaryň radiusy bolsun.




**2-nji çyzgy**

Şaryň içinde ýerleşen $M_1$ nokadyň üstünden şaryň radiusyny geçireliň we ony

$$\rho_1 \rho = R^2 \tag{28.1}$$

deňlik ýerine ýetýänçä dowam etdireliň hem-de alnan kesimiň ahyrky nokadyny $M$ harpy bilen belläliň, bu ýerde $\rho_1 = OM_1$, $\rho = OM$ (*2-nji çyzgy*).

Şunlukda, $M_1$ nokada kesgitli $M$ nokady degişli edýän (28.1) özgertmä radiusa rers özgertme diýilýär, $M$ nokada bolsa $M_1$ nokat bilen çatrymly (сопряженный) ýa-da şaryň sferasyna görä simmetrik nokat diýilýär.

Şarda $P$ ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) nokady alalyň we ol nokatdan $M$, $M_1$ nokatlara çenli uzaklyklary degişlilikde $r$, $r_1$ bilen belgiläliň. $P$ nokat şaryň üstünde ýatanda $r$ we $r_1$ uzaklyklaryň arasyndaky gatnaşygy tapalyň. Onuň üçin $OPM$ we $OPM_1$ üçburçluklara garalyň. Bu üçburçluklar meňzeşdirler, sebäbi $O$ depedäki burc umumy, oňa sepleşýän taraplar bolsa (28.1) deňlik esasynda proporsionaldyr:

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1}.$$

Üçburçluklaryň meňzeşliginden alarys:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}$$

ýa-da

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}, \ (P \in S) \tag{28.2}$$

gatnaşyk gelip çykýar.

Indi şar üçin Grin funksiýasynyň

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1} \tag{28.3}$$

görnüşe eýedigini görkezeliň.

Hakykatdan hem, $G$ ($P$, $M$) funksiýa $P$ nokada görä funksiýa hökmünde şaryň içinde, $M$ nokatdan başga nokatlarda, garmoniki funksiýa, $M$ nokatda bolsa tükeniksizlige öwrülýär. (28.2) deňlikden görnüşi ýaly, şaryň üstünde ol nola öwrülýär. Şeýlelik bilen, (28.3) deňlik boýunça kesgitlenýän funksiýa Dirihle meselesiniň Grin funksiýasynyň ähli şertlerini kanagatlandyrýar.

## 2. Puasson integraly

Tapylan (28.3) Grin funksiýasyny (27.6) formulada goýup, alarys:

$$U(M) = -\frac{1}{4\pi}\oiint_S f(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)dS. \qquad (28.4)$$

(28.4) formulany özgerdeliň. Alarys:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\xi)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\eta)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\zeta)=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\xi)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\eta)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos(n,\zeta)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\xi-x}{r}\cos(n,\xi)+\frac{\eta-y}{r}\cos(n,\eta)+\frac{\zeta-z}{r}\cos(n,\zeta)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left[\cos(r,\xi)\cos(n,\xi)+\cos(r,\eta)\cos(n,\eta)+\right.$$

$$\left.+\cos(r,\zeta)+\cos(r,\zeta)\cos(n,\zeta)\right]=-\frac{1}{r^2}\cos(r,n).$$

Edil şuňa meňzeşlikde alarys:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1,n).$$

Şeýlelik bilen,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_2}\right)=-\frac{1}{r^2}\cos(r,n)+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1,n). \qquad (28.5)$$

*OMP* we *OM*$_1$*P* üçburçluklardan kosinuslar teoremasyny peýdalanyp, alarys:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(r, n),$$

$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2r_1R\cos(r_1,n).$$

Bu ýerden cos ($r$, $n$) we cos ($r_1$, $n$) tapalyň:

$$\cos(r,n)=\frac{R^2+r^2+\rho^2}{2rR},\ \cos(r_1,n)=\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2r_1R}.$$

Bu tapylan bahalary (28.5) formulada goýup, alarys:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_2}\right)=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2\rho r_1^2}=$$

$$=\left\{\rho_1=\frac{R^2}{\rho},\ r_1=\frac{R}{\rho}r\right\}=$$

$$=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+\dfrac{R^2}{\rho^2}r^2-\dfrac{R^4}{\rho^2}}{2R^4r^3}=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{\rho^2R^2+R^2r^2-R^4}{2R^3r^3}=$$

$$=\frac{2\rho^2-2R^2}{2Rr^3}=\frac{\rho^2-R^2}{Rr^3}.$$

Normal boýunça önümiň tapylan aňlatmasyny (28.4) formulada goýup, alarys:

$$U(M)=\frac{1}{4\pi}\oiint_S f(P)\frac{R^2-\rho^2}{Rr^3}\,dS. \qquad (28.6)$$

(28.6) formula **Puasson formulasy** diýilýär.

Şeýlelik bilen, eger şar üçin içki Dirihle meselesiniň çözüwi bar bolup, ol çözüw özüniň birinji tertipli önümleri bilen birlikde ýapyk şarda üznüksiz bolsalar, onda ol çözüw (28.6) Puasson formulasy arkaly ýazylýar.

### 3. Puasson formulasynyň esaslandyrylyşy

Eger *f* (*P*) funksiýa üznüksiz bolsa, onda (28.6) Puasson formulasynyň şar üçin içki Dirihle meselesiniň çözüwi bolýandygyny subut edeliň. Onuň üçin (28.6) formuladaky integralyň şaryň içinde garmoniki funksiýa bolýandygyny we (28.6) formula bilen kesgitlenýän *U* (*M*) funksiýanyň ýapyk şarda üznüksizdigini hem-de şaryň *S* üstünde berlen üznüksiz *f* (*P*) bahany kabul edýändigini görkezmeli, ýagny *M* nokat *S* üstde alnan erkin *P* nokada ymtylanda *U* (*M*) funksiýanyň bahasy *f* (*P*) baha ymtylmaly.

$\rho < R$ bolanda $U\,(M)$ funksiýanyň garmonikligi aşakdaky deňlikden gelip çykýar:

$$\Delta\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)=\Delta\left(\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}\right)-\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$$=-2R\Delta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=2R\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=0 \quad (P\in S).$$

Şaryň üstünden erkin $N$ nokady alalyň we $M \to N$ bolanda $U\,(M) \to f\,(M)$ bolýandygyny görkezeliň. Getirilip çykarylyşyndan görnüşi ýaly, (28.6) formula $f\,(P) \equiv 1$ hususy halda hem dogrudyr. Bu ýagdaýda Dirihle meselesiniň çözüwüniň bardygy aýdyňdyr, özi hem ol çözüw

$$U\,(M) = U\,(x, y, z) \equiv 1.$$

Şeýlelik bilen,

$$1=\oiint\limits_S \frac{1}{4\pi R}\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \qquad (28.7)$$

(28.7) deňligiň iki bölegini hem $f\,(N)$ funksiýa köpeldeliň we (28.6) Puasson formulasyndan aýralyň:

$$U(M)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_S \left[f(P)-f(N)\right]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \qquad (28.8)$$

$N$ nokady radiusy 2 $\delta$ bolan şar bilen gurşalyň, özünem $\delta$ sany $S$ sferanyň şu şaryň içine düşýän hemme nokatlarynda $f\,(P)$ funksiýanyň üznüksizligi esasynda

$$\left|f(P)-f(N)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (28.9)$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly ýeterlikçe kiçi edip alalyň, $\varepsilon > 0$ – ýeterlikçe kiçi erkin san. $\sigma$ bilen $S$ sferanyň merkezi $N$ nokatda bolan 2 $\delta$ radiusly şaryň içine düşýän bölegini belläliň, galan bölegini bolsa $S - \sigma$ bilen belläliň. Onda (28.8) deňligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$U(M) - f(N) =$$
$$= \frac{1}{4\pi R} \oiint_{\sigma} \left[ f(P) - f(N) \right] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS +$$
$$+ \frac{1}{4\pi R} \oiint_{S-\sigma} \left[ f(P) - f(N) \right] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS. \qquad (28.10)$$

(28.10) deňligiň sag bölegindäki goşulyjylaryň her birini aýratynlykda bahalandyralyň. (28.9) deňsizligiň we (28.7) deňligiň esasynda alarys:

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} \left[ f(P) - f(N) \right] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{4\pi R} \oiint_{S} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (28.11)$$

(28.11) deňsizlik şaryň içindäki islendik $M$ nokat üçin ýerine ýetýär. (28.10) deňligiň sag bölegindäki ikinji integraly bahalandyralyň. Onuň üçin merkezi $N$ nokatda bolan $\delta$ radiusly täze şar guralyň. Goý, $M$ nokat $N$ nokada ýakynlaşyp, şu şaryň içinde ýatan bolsun. Eger $P$ nokat $S - \sigma$ üstde ýatan bolsa, onda $M$ nokadyň şeýle ýagdaýynda $r = |MP| > \delta$ deňsizlik ýerine ýeter, $f(P)$ funksiýa $S$ sferanyň üstünde üznüksiz, diýmek, ol çäklenendir, ýagny $|f(P)| \leq K$.

Şeýlelik bilen, (28.10) deňligiň sag bölegindäki ikinji integral aşakdaky ýaly bahalandyrylar:

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S-\sigma} \left[ f(P) - f(N) \right] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| \leq \frac{K}{2\pi R} \iint_{S-\sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} \leq$$
$$\leq \frac{K\left(R^2 - \rho^2\right)}{2\pi R \delta^3} \oiint_{S} dS = \frac{2KR\left(R^2 - \rho^2\right)}{\delta^3}.$$

$M \to N$ bolanda $R^2 - \rho^2 \to 0$, onda

$$\left| \frac{1}{4\pi R} \iint_{S-\sigma} \left[ f(P) - f(N) \right] \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (28.12)$$

(28.11) we (28.12) deňsizlikleriň esasynda (28.10) deňlikden alarys:

$$|U(M) - f(N)| < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ erkin san, şonuň üçin hem soňky deňsizlikden

$$\lim_{M \to N} U(M) = f(N)$$

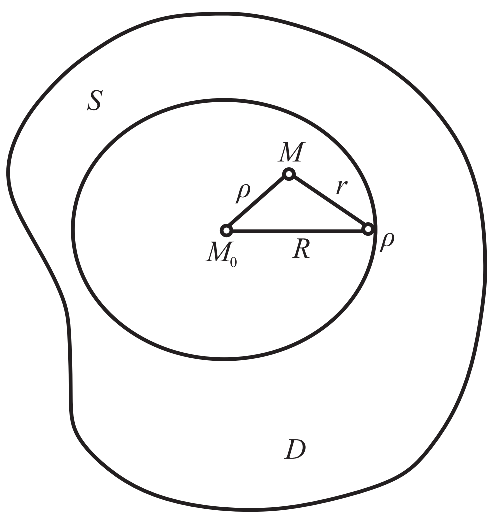
gelip çykýar.

Merkezi $O$ nokatda bolan sferik koordinatalary girizeliň. Goý, $(\theta', \varphi')$ – $P$ nokadyň burç koordinatalary bolsun. $(\rho, \theta, \varphi)$ – $M$ nokadyň sferik koordinatalary bolsun, $\gamma$ – bilen $OP$ we $OM$ wektorlaryň arasyndaky burçy belläliň. Onda (28.6) Puasson formulasy aşakdaky görnüşi alar:

$$U(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta', \varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi'}{(R^2 - 2R\rho \cos \gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

## 4. Puasson integralynyň netijeleri

$D$ ýaýlanyň içinde otrisatel däl $U(M)$ garmonik funksiýa garalyň. $D$ ýaýlanyň käbir $M_0$ nokadynyň daşyndan merkezi $M_0$ nokatda bolan, durşuna $D$ ýaýlanyň içinde ýatan, $R$ radusly $S$ sferany guralyň. $M$ bilen $S$ sferanyň içinde ýatan käbir nokady belgiläliň (*3-nji çyzgy*).




**3-nji çyzgy**

$M_0MP$ üçburçlukdan alarys:

$$R-\rho \le R+\rho;$$

$$(R-\rho)^3 \le r^3 \le (R+\rho)^3;$$

$$\frac{1}{(R+\rho)^3} \le \frac{1}{r^3} \le \frac{1}{(R-\rho)^3};$$

$$\frac{1}{4\pi R}\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2} \le \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3} \le \frac{1}{4\pi R}\frac{R+\rho}{(R+\rho)^2}.$$

Soňky deňsizligi $U(P)$ funksiýa köpeldip alarys:

$$\frac{1}{4\pi R}\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}U(P) \le \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}U(P) \le \frac{1}{4\pi R}\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}U(P)$$

ýa-da

$$\frac{1}{4\pi R}\oiint_S \frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\,U(P)dS \le \frac{1}{4\pi R^2}\oiint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}U(P)dS \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi R^2}\oiint_S \frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}U(P)\,dS.$$

Soňky deňsizlikden Puasson integralyny ulanyp alarys:

$$\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\frac{1}{4\pi R}\oiint_S U(P)\,dS \le U(M) \le \frac{R+\rho}{(R-\rho)^2}\,\frac{1}{4\pi R}\oiint_S U(P)\,dS.$$

Orta baha hakynda teoremany ulanyp alarys:

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}U(M_0) \le U(M) \le \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}U(M_0). \qquad (28.13)$$

(28.13) deňsizlige **Garnak deňsizligi** diýilýär. Bu deňsizlik funksiýanyň $S$ sferanyň içinde ýatan nokatdaky bahasyny ol sferanyň merkezindäki bahasy bilen bahalandyrýar.

**Teorema.** Bütin giňişlikde garmonik funksiýa toždestwolaýyn nola deňdir.

**Subudy**. Goý, $U$ ($M$) funksiýa bütin giňişlikde garmonik funksiýa bolsun. Merkezi koordinata başlangyjynda bolan erkin radusly $S$ sferany guralyň. Bu sferanyň içinde $U$ ($M$) garmonik funksiýa sferanyň üstündäki bahasynyň, ýagny Puasson formulasynyň kömegi bilen aňladyp bilner. Alarys:

$$U(M) = \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} U(P)\, dS.$$

Indi $R$ sany $|U\,(P)| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly saýlalyň, bu mümkin, sebäbi $U$ ($P$) $\to$ 0. Eger-de $P \to \infty$ bolanda, onda (28.14) deňlikden alarys:

$$|U(M)| = \left| \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S U(P) \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS \right| \le \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S |U(P)| \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS <$$
$$< \varepsilon \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = \varepsilon,$$

sebäbi

$$\frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = 1.$$

Diýmek, $|U\,(P)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ sanyň erkinliginden $U$ ($M$) = 0. $M$ nokadyň erkinligi üçin bütin san okunda $U$ ($M$) $\equiv$ 0. Teorema subut edildi.

## §29. Şar üçin daşky Dirihle meselesi

Goý, $R$ – merkezi $O$ nokatda bolan şaryň radiusy bolsun we ol şaryň $S$ üstünde erkin, üznüksiz $f$ ($P$) funksiýa berlen bolsun.

Şar üçin daşky Dirihle meselesiniň çözüwi

$$U(M) = \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_S \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} f(P)\, dS, \tag{29.1}$$

$$\rho = |OM|, r = |MP|, \rho \to R$$

Puasson integraly bilen berilýär.

Hakykatdan hem, $\rho > R$ bolanda, ýagny şaryň daşynda (29.1) integral bilen kesgitlenýän $U(M)$ funksiýanyň

$$\Delta U(M) = 0$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýandygyny §28-däki ýaly subut etmek bolýar. Indi $M \to \infty$ bolanda $U(M)$ funksiýanyň nola deňölçegli ymtylýandygyny görkezmeli. $M$ nokady $\rho > 2R$ ýa-da $R < \dfrac{\rho}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly koordinatalar başlangyjyndan ýeterlikçe daşda alalyň. Onda $r > \rho - R$ deňsizligiň esasynda

$$r > \rho - R > \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}.$$

Bu ýerden

$$\frac{1}{r^3} < \frac{8}{\rho^3}$$

we

$$\frac{\rho^2 - R^2}{r^3} < \frac{8\left(\rho^2 - R^2\right)}{\rho^3} < \frac{8}{\rho}.$$

Diýmek,

$$\left|U(M)\right| < \frac{1}{\rho}\frac{2}{\pi R}\oiint\limits_S \left|f(P)\right| dS = \frac{C}{\rho}$$

bu ýerde

$$C = \frac{2}{\pi R}\oiint\limits_S \left|f(P)\right| dS.$$

Soňky deňsizlikden görnüşi ýaly, $\rho \to \infty$ $(M \to \infty)$ bolanda $U(M)$ funksiýanyň nola ymtylýandygy görünýär. $M \to N$ $(N \in S)$ bolanda

$U(M) \to f(N)$ bolýandygyny görkezmek üçin (29.1) integraly sferik koordinatalarda ýazalyň:

$$U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{\rho^2 - R^2}{\left(R^2 - 2R\rho\cos\gamma + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \quad (29.2)$$

bu ýerde: $(\rho, \theta, \varphi)$ – $M$ nokadyň sferik koordinatalary, $(\theta', \varphi')$ – $P$ nokadyň burç sferik koordinatalary, $\gamma = \angle MOP$. $M(\rho, \theta, \varphi)$ (nokatda radiusa ters özgertme (inwersiýa) edeliň. Özgerdilen $M_1$ $(\rho_1, \theta, \varphi)$ nokat $OM$ göniniň üstünde, şaryň merkezinden $\rho_1$ daşlykda, onuň içinde ýatar we

$$\rho\rho_1 = R^2$$

şerti kanagatlandyrar.

Indi (29.2) integraly

$$U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\rho_1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2 - \rho_1^2}{\left(R^2 - 2R\rho_1 + \rho_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \quad (29.3)$$

görnüşde ýazalyň: $(\rho_1 < R)$. $M(\rho, \theta, \varphi)$ nokat $S$ sferanyň üstünde ýatan erkin $N(\rho, \theta, \varphi)$ nokada ymtylanda $M_1$ $(\rho_1, \theta, \varphi)$ nokat hem şaryň içinden şol $N(\rho, \theta, \varphi)$ nokada ymtylar. Şarda içki Dirihle meselesi üçin alnan netijäniň esasynda, $M_1 \to N$ bolanda alarys:

$$\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2 - \rho_1^2}{\left(R^2 - 2R\rho_1 + \rho_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \to f(N).$$

Onda $M \to N$ bolanda $\rho_1 \to R$ bolýandygyny göz öňünde tutup, (29.3) formulanyň sag bölegi hem $f(N)$ baha ymtylar diýip tassyklamak bolýar.

Şeýlelikde, (29.1) Puasson integraly bilen kesgitlenýän $U(M)$ funksiýa şar üçin daşky Dirihle meselesiniň ähli talaplaryny kanagatlandyrýar, ýagny onuň çözüwini berýär.

## §30. Garmonik funksiýanyň önümleriniň tükeniksizlikde özlerini alyp baryşlary

Goý, $U(M)$ – $S$ ýapyk üst bilen çäklenen $D$ ýaýlada garmonik funksiýa bolsun. Koordinatalar başlangyjyny $D^+$ ýaýlanyň içinde ýerleşdireliň. Merkezi koordinatalar başlangyjynda we $R$ radiusy $S$ üsti durşuna öz içinde saklar ýaly ýeterlik uly $S_R$ sferany guralyň. $U(M)$ funksiýa $D^-$ ýaýlada garmonik, diýmek, ol $S_R$ sferanyň daşynda we üstünde garmonik funksiýadyr. Şonuň üçin $U(M)$ funksiýany $S_R$ sferanyň daşynda

$$U(M)=\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{S_R} U(P)\frac{\rho^2-R^2}{r^3}dS \quad (\rho>R). \tag{30.1}$$

Puasson integraly görnüşinde aňlatmak bolýar, bu ýerde

$$\rho=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$r=|MP|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

§29-da $U(M)$ funksiýa üçin $\rho$ – ýeterlik uly bolanda

$$|U(M)|\le\frac{C}{\rho},\quad C=\frac{1}{\pi R}\oiint\limits_{S_R}|U(M)|dS$$

bahalandyrmany aldyk.

Indi (30.1) deňligi $x$ boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{S_R} U(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\right)dS \quad (r\ne 0) \tag{30.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\right)=\frac{2x}{r^3}-\frac{3(\rho^2-R^2)}{r^4}\,\frac{x-\xi}{r}.$$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ önümi bahalandyralyň. Goý, $M$ nokat $\rho>2R$, ýagny $R<\frac{\rho}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly koordinatalar başlangyjyndan ýeterlik daşda bolsun. Onda

$$r \ge \rho - R > \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} < \frac{2}{\rho}.$$

$|x| \le \rho,\ \frac{|x-\xi|}{r} \le 1$ bolýandygyny belläliň. Bu bahalandyrmalary göz öňünde tutup alarys:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\right)\right| \le \frac{2|x|}{r^3} + \frac{3\left(\rho^2 - R^2\right)}{r^4}\frac{|x-\xi|}{r} < \frac{6\rho}{\rho^3} + \frac{48\rho^2}{\rho^4} = \frac{64}{\rho^2}.$$

Soňky bahalandyrmany peýdalanyp, (30.2)-den alarys:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \frac{64}{\rho^2}\,\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{S_R}\left|U\left(P\right)\right| dS = \frac{A}{\rho^2};$$

$$A = \frac{16}{\pi R}\oiint\limits_{S_R}\left|U\left(P\right)\right|\, dS.$$

Şuňa meňzeşlikde

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| < \frac{A}{\rho^2}.$$

Şeýlelik bilen, $D^-$ ýaýlada garmonik $U(M)$ funksiýa üçin ýaýlanyň koordinatalar başlangyjyndan ýeterlik daşlaşan nokatlary üçin

$$\left|U\left(M\right)\right| < \frac{A}{\rho}, \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \ \left|\frac{\partial U}{\partial z}\right| < \frac{A}{\rho^2} \qquad (30.3)$$

bahalandyrmalar ýerine ýetýär.

## §31. Neýman meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligi barada

**1-nji teorema.** Içki Neýman meselesiniň çözüwi hemişelik goşulyjy takyklygynda ýeke-täkdir.

**Subudy.** Goý, $U_1(M)$ we $U_1(M)$ – $D^+$ ýaýlada içki Neýman meselesiniň şol bir

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial n}\right|_S = f(N), \ \left.\frac{\partial U_2}{\partial n}\right|_S = f(N)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan iki sany çözüwleri bolsun. Onda olaryň tapawudy $U = U_1 - U_2$ funksiýa $D^+$ ýaýlada

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{31.1}$$

şerti kanagatlandyrýan garmonik funksiýa bolar.

$V \equiv U$ diýip (19.2) birinji Grin formulasyndan peýdalanalyň, onda

$$\oiint_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS = \iiint_{D^+}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

(31.1) şert esasynda bu deňligiň çep bölegi nola deňdir, diýmek, deňligiň sag bölegi hem nola deňdir:

$$\iiint_{D^+}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0.$$

Bu ýerden $U(M)$ funksiýanyň we onuň birinji tertipli önümleriniň üznüksizligi esasynda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

gelip çykýar. Soňky deňliklerden görnüşi ýaly, $U(M)$ funksiýa x, $y$, $z$ üýtgeýän ululyklara bagly däldir, ýagny

$$U(M) \equiv \text{const} \quad \Rightarrow \quad U_1(M) \equiv U_2(M) + C.$$

Teorema subut edildi.

Içki Neýman meselesiniň mydama çözüwiniň bolmaýandygyny belläliň. Onuň çözüwiniň bolmagy üçin

$$\oiint_S \frac{\partial U}{\partial n}dS = \oiint_S f(N) = 0$$

şertiň ýerine ýetmegi zerurdyr. Bu şertiň zerurlygy garmonik funksiýanyň häsiýetlerinden gelip çykýar.

Laplas deňlemesiniň

$$\left|U\left(M\right)\right| < \frac{A}{\rho^{n-2}}, \qquad n = 2,3$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $U$ ($M$) çözüwine **tükeniksizlikde regulýar** diýilýär.

**2-nji teorema.** Daşky Neýman meselesiniň tükeniksizlikde yzygiderli çözüwi ýeke-täkdir.

**Subudy.** Goý, $U_1$ ($M$) we $U_2$ ($M$) – daşky Neýman meselesiniň şol bir gyra şerti kanagatlandyrýan iki sany çözüwleri bolsun. Onda ol çözüwleriň $U = U_1 - U_2$ tapawudy $D^-$ tükeniksiz ýaýlada

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0$$

şerti kanagatlandyrýan garmonik funksiýa bolar. $D^+$ ýaýlany içinde saklaýan $S_R$ sferany guralyň. $D_1$ bilen bolsa $S$ we $S_R$ üstler bilen çäklenen ýaýlany belläliň. Birinji Grin formulasynda $V \equiv U$ diýip, soňra ony $D_1$ ýaýla üçin ulanyp, alarys:

$$\oiint_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS + \oiint_S U\frac{\partial U}{\partial n}dS = \iiint_{D_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau. \quad (31.3)$$

Bu ýerde $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0$ bolany üçin birinji goşulyjy nola deňdir. $U$ ($M$) funksiýa tükeniksizlikde yzygiderli bolany üçin ýeterlikçe uly $R$ – radiusda (31.2) bahalandyrmalar ýerine ýetýär. Alarys:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\cos\left(n,x\right) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\left(n,y\right) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\left(n,z\right)\right| < \frac{3A}{\rho^2}.$$

Ýeterlik uly $R$ üçin $S_R$ sfera boýunça integrirlenýän ikinji goşulyjyny bahalandyralyň:

$$\left|\oiint\limits_{S_R} U\frac{\partial U}{\partial x}dS\right| \le \oiint\limits_{S_R}|U|\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|dS < \frac{3A^2}{R^3}\oiint\limits_{S_R}dS = \frac{3A^2}{R^3}4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Indi (31.3) deňlikde $R \to \infty$ bolanda predele geçip, alarys:

$$\iiint\limits_{D^-}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0.$$

Bu ýerden

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; U(x, y, z) = \text{const}.$$

Indi $M \to \infty$ bolanda $U(M) \to 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\text{const} = 0.$$

Bu bolsa

$$U(M) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad U_1(M) \equiv U_2(M)$$

bolýandygyny aňladýar. Teorema subut edildi.

# IV BAP
# POTENSIALLAR NAZARYÝETI

## §32. Göwrüm potensialynyň kesgitlenilişi

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

funksiýa $M$ ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) nokatda ýerleşdirilen birlik massanyň potensialyny aňladýar we ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) nokada görä Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Bu funksiýadan parametr boýunça alnan integrallara potensiallar diýip atlandyrylýar.

Goý, käbir $M_0$ ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) nokatda $m_0$ massa ýerleşdirilen bolsun. Bütindünýä dartylma kanuny boýunça $M$ ($x$, $y$, $z$) nokatda ýerleşdirilen $m$ massa

$$\vec{F}=-\gamma\frac{m_0}{r^2}\vec{r}_0$$

dartyş güýji täsir eder, $\vec{r}_0=\frac{\vec{r}}{r}-M_0M$ ugry boýunça birlik wektor, $\vec{r}=M_0M, \gamma$ – grawitasion hemişelik. Sistemany $\gamma = 1$ bolar ýaly saýlap alalyň we $m = 1$ diýeliň:

$$\vec{F}=-\frac{m_0}{r^2}\vec{r}_1.$$

Bu güýjüň koordinat oklaryna proýeksiýasy aşakdaky ýaly kesgitlener:

$$\begin{cases} X = F\cos\alpha = -\dfrac{m_0}{r^3}(x-\xi); \\ Y = F\cos\beta = -\dfrac{m_0}{r^3}(y-\eta); \\ Z = F\cos\gamma = -\dfrac{m_0}{r^3}(z-\zeta) \end{cases} \tag{32.1}$$

bu ýerde: $\alpha,\ \beta,\ \gamma - \vec{F}$ güýjüň koordinat oklary bilen emele getirýän burçlary.

Güýç meýdanynyň potensialyny we

$$\vec{F} = \mathrm{grad}U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$

deňlik bilen kesgitlenýän $U$ ($x$, $y$, $z$) funksiýany girizeliň. Ýokarda seredilen mysalymyzda

$$U = \frac{m_0}{r}.$$

$n$ material nokadyň potensialy

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_0}{r_i}$$

formulanyň kömegi bilen aňladylýar.

Goý, $\rho$ ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) dykyzlykly $D$ jisim berlen bolsun. Onda $M$ ($x$, $y$, $z$) nokadyň $D$ jisime dartýan güýjüniň komponentleri

$$\begin{cases} X = -\displaystyle\iiint_D \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau; \\ Y = -\displaystyle\iiint_D \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{y-\eta}{r^3}\,d\tau; \\ Z = -\displaystyle\iiint_D \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{z-\zeta}{r^3}\,d\tau, \end{cases} \tag{32.2}$$

bu ýerde: $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta$. $M$ ($x$, $y$, $z$) nokadyň potensialy

$$U(M)=\iiint\limits_D \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{r}\,d\tau$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Eger $D$ tekizlikde üznüksiz paýlanan $\mu$ ($\xi$, $\eta$) dykyzlykly ýaýla bolsa, onda $\rho$ ($x$, $y$) nokadyň dartyş güýjüniň komponentleri iki gat integral bilen aňladylýar:

$$X=-2\iint\limits_D \mu(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi d\eta,$$

$$Y=-2\iint\limits_D \mu(\xi,\eta)\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi d\eta.$$

$p$ ($x$, $y$) nokadyň potensialy bolsa

$$U(p)=U(x,y)=2\iint\limits_D \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta.$$

Eger $P$ ($M$) dykyzlyk çäklenen, ýagny $C>0$ san bar bolup, $|P(M)|<C$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda (32.2) we (32.3) hususy däl integrallar $D$ ýaýlanyň içinde ýatan $M$ ($x$, $y$, $z$) nokatda ýygnanýar. Munuň şeýledigi (32.2) integral üçin

$$\left|\rho\frac{x-\xi}{r^3}\right|=\left|\frac{\rho}{r^2}\right|\frac{x-\xi}{r}\le\frac{C}{r^2},\qquad \alpha=2<3$$

deňsizlikden, (32.3) integral üçin bolsa

$$\left|\frac{\rho}{r}\right|\le\frac{C}{r},\ \alpha=1<3$$

deňsizlikden gelip çykýar.

$U$ ($M$) potensial we dartyş güýjüniň $X$, $Y$, $Z$ komponentleri bütin giňişlikde üznüksiz funksiýalardyr.

## §33. Göwrüm potensialynyň birinji önümi

$$X(M) = -\iiint\limits_{D} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau_p;$$

$$X(M) = -\iiint\limits_{D} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau_p;$$

$$X(M) = -\iiint\limits_{D} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau_p$$

integrallaryň aşagyndaky funksiýalar

$$U(M) = \iiint\limits_{D} \rho(\xi,\eta,\zeta)\frac{1}{r_{MP}}d\tau_p$$

integralyň aşagyndaky funksiýanyň degişli argumenti boýunça önümi bolup durýar.

Eger $M$ nokat $D$ ýaýla degişli däl bolsa, onda $U$ ($M$) integraly integral aşagynda differensirlemek kanuny we

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

$D$ ýaýlanyň daşynda $U$ ($M$) potensialyň ýokary tertipli önümleri hem integral aşagynda differensirlemegiň kömegi bilen hasaplamak bolýar. Şonuň üçin $U$ ($M$) potensial $D$ ýaýlanyň daşynda

$$\Delta\, U\,(M) = 0$$

Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar**.**

$M$ nokat $D$ ýaýlanyň içinde ýatýan hem $U$ ($M$) potensialyň birinji tertipli önümini integral aşagynda differensirlemek arkaly hasap bolýandygyny görkezeliň.

Goý, $\rho\,(x, y, z)$ dykyzlyk çäklenen bolsun: $|\rho\,(x, y, z)| < C$ san üçin $\exists\delta > 0$ san tapylyp $|\Delta x| < \delta$ deňsizlik ýerine ýetende

$$\left|\frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini görkezeliň.

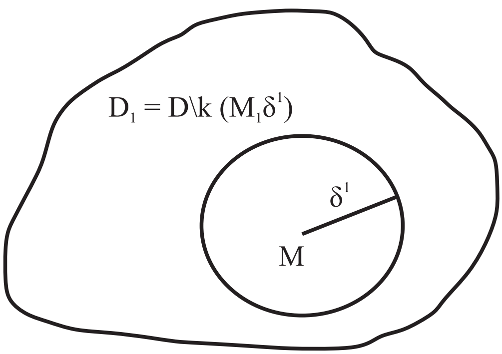
*M* nokady merkezi *M* nokatda bolan radusly $K\,(M, \delta^1)$ şar bilen gurşalyň we $U\,(M)$ potensialy iki goşulyja böleliň:

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M);$$

bu ýerde $U_1\,(M)$ goşulyjy $K\,(M, \delta^1)$ şar boýunça integrirlemegi, $U_2\,(M)$ goşulyjy bolsa $D_1 = D - K\,(M, \delta^1)$ ýaýla boýunça integrirlemäge degişli (*4-nji çyzgy*). Onda

$$\frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{U_1(x+\Delta x, y, z) - U_1(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{U_2(x+\Delta x, y, z) - U_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$




**4-nji çyzgy**

*M* nokat $D_1$ ýaýla degişli däl, şonuň üçin

$$X = X_1 + X_2$$

diýeliň, onda

$$\left|\frac{U(x+\Delta x, y, z)}{\Delta x} - X\right| \le \left|\frac{U_2(x+\Delta x, y, z) - U_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2\right| + \quad (33.1)$$

$$+ |X_1| + \left|\frac{U_1(x+\Delta x, y, z) - U_1(x, y, z)}{\Delta x}\right|.$$

Soňky deňsizlikden goşulyjylaryň her biriniň $\frac{\varepsilon}{3}$-den kiçidigini görkezeliň:

$$|X_1| = \left| \iiint_D \rho \frac{x-\xi}{r^3} d\tau \right| < C \iiint_D \frac{d\tau}{r^3} =$$

$$= C\int_0^{\delta'}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr}{r^2} = 4\pi\delta' C < \frac{\varepsilon}{3} \tag{33.2}$$

$$|S| = \left| \frac{U_1(x+\Delta x, y, z) - U_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{K(M,\delta')} \rho \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) d\tau \right| = \left| \frac{1}{\Delta x} \iiint_{K(M,\delta')} \rho \frac{r-\rho}{r\rho} d\tau \right|$$

bu ýerde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$

$$\rho\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

$MM_1\,P$ üçburçlukdan $|r - \rho| < |\Delta x|$, şonuň üçin

$$|S| < C \iiint_{K(M,\delta')} \frac{d\tau}{r \cdot \rho} \le \frac{C}{2} \left\{ \iiint_{K(M,\delta')} \frac{d\tau}{r} + \iiint_{K(M,\delta')} \frac{d\tau}{\rho} \right\} = 6C\pi\delta' < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{33.3}$$

$\delta'$ sany (33.3) deňsizlikden kesgitläp (33.2) we (33.3) deňsizlikleriň ikisini hem kanagatlandyrýarys. (33.1) deňsizlik $\varepsilon > 0$ san $|\Delta x| < \delta''$ deňsizlik ýerine ýetende

$$\left| \frac{U_2(x+\Delta x, y, z) - U_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| \le \varepsilon$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar. Şeýlelik bilen, $X = \frac{\partial U}{\partial x}$. $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ deňsizlikler şuňa meňzeş subut edilýär.

## §34. Göwrüm potensialynyň ikinji önümi

Eger

$$\iiint_D \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) d\tau = -\iiint_D \rho(\xi, \eta, \zeta)\left(\frac{1}{r_{MP}^3} - 3\frac{\left(x-\xi^2\right)}{r_{MP}^5}\right) d\tau$$

diýip alsak, onda alynýan integrallar dargaýarlar. Göwrüm potensialyny

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $U_1(M)$ – $K(M, \delta)$ şar boýunça, $U_2(M) - D_1 = D - K(M, \delta)$ ýaýla boýunça integrirlemekligi aňladýar.

Goý, $\rho\ (\xi, \eta, \zeta)$ dykyzlyk üznüksiz we differensirlenýän bolsun. $M$ nokat $D_1$ ýaýla degişli däl, onda

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \iiint_{D_1} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P. \tag{34.1}$$

$U_1\ M$ potensial $M$ nokatda birinji tertipli önüme eýe we ol önümi integral aşagyndaky differensirlemek arkaly hasaplamak bolýar:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \iiint_{K\left(M,\delta^1\right)} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P = -\iiint_{K\left(M,\delta^1\right)} \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P.$$

Ostrogradskiý-Gauss formulasyna görä

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\oiint_S \frac{\rho}{r} \cos \alpha dS + \iiint_{K(M,\delta')} \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \xi};$$

bu ýerde: $S - K\ (M, \delta)$ şaryň sferasy, $\alpha - S$ üste daşky normal. Alarys:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x} = -\oiint_S \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \cos a dS + \iiint_{K(M,\delta')} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau \tag{34.2}$$

(34.2) deňligiň sag bölegindäki goşulyjylary bahalandyralyň. Alarys:

$$\left| \iiint\limits_{K(M,\delta)} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P \right| < C_1 \iiint\limits_{K(M,\delta)} \frac{d\tau_P}{r^2}\, 4\pi C_1 \delta. \tag{34.3}$$

Birinji goşulyjy üçin orta baha hakyndaky teoremany ulanyp alarys:

$$-\oiint\limits_S \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \cos a dS = \oiint\limits_S \rho \frac{x-\xi}{r^3} \cos a dS = -\oiint\limits_S \rho \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} =$$

$$= -\frac{\rho^*}{3} \oiint\limits_S \frac{1}{r^2}\left(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\right) dS = -\frac{4\pi}{3} \rho^*$$

ýagny

$$-\oiint\limits_S \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \cos a dS = -\frac{4\pi}{3} \rho^* \tag{34.4}$$

bu ýerde: $\rho^* - \rho$ funksiýanyň $S$ sferanyň üstünde orta arifmetik bahasy.

Islendik $\delta > 0$ san üçin

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \tag{34.5}$$

deňlik dogry. (34.2), (34.3), (34.4) formulalardan peýdalanyp (34.5) deňlikde $\delta \to 0$ bolanda pridele geçip alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \iiint\limits_D \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P. \tag{34.6}$$

Edil şuňa meňzeş edip

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \iiint\limits_D \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P \tag{34.7}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \iiint\limits_D \rho(\xi,\eta,\zeta) \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau_P \tag{34.8}$$

deňlikler görkezilýär. (34.6), (34.7), (34.8) deňliklerden görnüşi ýaly, göwrüm potensialynyň ikinji tertipli önümleri Puasson deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

## §35. Goşa gatlagyň potensialy we onuň häsiýetleri

Lýapunow üsti boýunça paýlama, $\mu$ $(N)$ dykyzlykly goşa gatlagyň potensialyna garalyň:

$$W(M) = -\oiint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \oiint_S \mu(N) \frac{\cos\varphi}{r^2} dS \qquad (35.1)$$

bu ýerde önüm $S$ üstüň $N$ $(\xi, \eta, \zeta)$ nokatdaky $\boldsymbol{n}$ daşky normal boýunça alynýar, $r$ wektor $M$ $(x, y, z)$ nokatdan $N$ $(\xi, \eta, \zeta)$ nokada ugrukdyrylan: $\varphi = (r, n)$.

Goşa gatlagyň potensialy $S$ üstüň daşynda ähli tertipli önüme eýe we Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar. Goşa gatlagyň potensialynyň tükeniksizlikde nola ymtylýandygyny görkezeliň. Koordinat başlangyjyny $S$ üst bilen çäklenen $D$ ýaýlanyň içinde alalyň. Onda

$$MN \geq OM - ON$$

ýa-da

$$r \geq R - ON$$

$L$ bilen $S$ üstüň koodinat başlangyjyna çenli iň uzyn aralygy belläliň. Onda

$$r \geq R - L.$$

$M$ nokat koordinat başlangyjyndan $R \geq 2L$ ýa-da $L \leq \dfrac{R}{2}$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly daşlykda ýerleşen bolsun. Onda

$$\left|W(M)\right| \le \oiint\limits_S \left|\mu(N)\right| \frac{|\cos\varphi|}{r^2}\, dS \le \frac{4}{R^2} \oiint\limits_S \left|\mu(N)\right| dS = \frac{A}{R^2};$$

bu ýerde

$$A = 4\oiint\limits_S \left|\mu(N)\right| dS.$$

Diýmek, goşa gatlagyň potensialy tükeniksizlikde $\frac{1}{R^2}$ ýaly nola ymtylýar.

(1) goşa gatlagyň potensialy bütin giňişlikde kesgitlenendir.

$\mu$ ($M$) = 1 bolanda goşa gatlagyň potensialyna garalyň. Onda

$$W_1(M) = -\oiint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \oiint\limits_S \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS. \qquad (35.2)$$

Goý, $N$ nokat $S$ üstüň daşynda ýatan bolsun. $\frac{1}{r}$ funksiýa $S$ üstüň içinde garmonik, diýmek,

$$W_1(M) = -\oiint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = 0, \qquad M \text{ nokat } S \text{ üstüň daşynda.}$$

Goý, $M$ nokat $S$ üstüň içinde ýatsyn. $M$ nokady merkezi $M$ nokatda bolan $\rho$ radiusly $C_\rho$ sfera bilen gurşalyň. $S$ we $C_\rho$ sferalar bilen çäklenen $D'$ ýaýlada $\frac{1}{r}$ garmonik funksiýa. Onda

$$\oiint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \oiint\limits_{C_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = 0.$$

$C_\rho$ sferada $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C_\rho} = -\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C_\rho} = \frac{1}{\rho^2}$ deňlik ýerine ýetýär. Onda

$$\oiint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{1}{\rho^2} \oiint\limits_{C_\rho} dS = 0$$

ýa-da

$$\oiint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 4\pi = 0.$$

Diýmek,

$$W_1(M) = -\oiint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + 4\pi, \ M \text{ nokat } S \text{ üstüň içinde.}$$

$M$ nokat $S$ üstüň üstünde ýatýar. (2) goşa gatlagyň potensialynyň göni bahasyny tapalyň. Merkezi $M$ nokatda bolan $\rho \le d$ radiusly $C_\rho$ sferany guralyň. Bu sfera $S$ üstüň käbir bölegini $S-\sigma$ bilen belgiläliň. Hususy däl integralyň kesgitlemesine görä

$$\lim_{\rho\to 0} \oiint_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \oiint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS. \qquad (35.3)$$

Goý, $C'_\rho - C_\rho$ sferanyň $S$ üstüň içinde ýatan bölegi bolsun. $S-\sigma$ we $C'_\rho$ sferalar bilen çäklenen ýaýla garalyň. $M$ nokat bu ýaýla degişli däl, onda bu ýaýlada $\dfrac{1}{r}$ garmonik funksiýa. Şeýlelik bilen,

$$\iint_{S-\sigma} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS + \iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = 0$$

ýa-da (35.3) deňlik esasynda

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\lim_{\rho\to 0} \iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS_P.$$

Merkezi $M$ nokatda bolan sferik koordinatalary girizeliň. Alarys:

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{C'_\rho} = \frac{1}{\rho^2} \qquad \text{we} \quad dS_P = \rho^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Onda

$$\iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS_P = \int_0^{2\pi} \int_{\theta(\varphi)}^{0} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[1+\cos\theta(\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi)\, d\varphi.$$

Bu ýerden alarys:

$$\lim_{\rho\to 0} \iint_{C'_\rho} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS_P = 2\pi,$$

sebäbi

$$\lim_{\rho\to 0} \int_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi)\, d\varphi = -2\pi, M \text{ nokat } S \text{ üste degişli.}$$

Diýmek, aşakdaky dogrudyr:

$$W_1(M) = \oiint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \begin{cases} 0, M \text{ nokat } S \text{ üstüň daşynda;} \\ 2\pi, \ M \text{ nokat } S \text{ üstüň üstünde;} \\ 4\pi, \ M \text{ nokat } S \text{ üstüň içinde.} \end{cases} \quad (35.4)$$

(35.4) integrala Gauss integraly diýilýär.

(35.4) formulada görnüşi ýaly, $\mu$ ($N$) = 1 bolanda goşa gatlagyň potensialy $S$ üstden geçende üzülýär. Indi islendik $\mu$ ($N$) dykyzlykly potensiýalynyň hem üzülýändigini görkezeliň.

**Teorema.** $W$ ($M$) goşa gatlagyň potensialy $M$ nokat $S$ üstüň $N_0$ nokadyna daşyndan we içinden ymtylanda pridele eýe. Eger $W$ ($M$) goşa gatlagyň potensialynyň pridel bahalaryny daşyndan ymtylanda $W_d$ ($N_0$), içinden ymtylanda bolsa $W_i$ ($N_0$) bilen belgilesek, onda aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$W_d(N_0) = \oiint_S \mu(N) \frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0) = W(N_0) - 2\pi\mu(N_0);$$

$$W_i(N_0)=\oiint_S \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}dS+2\pi\mu(N_0)=W(N_0)+2\pi\mu(N_0),$$

bu ýerde: $\varphi_0 - \vec{r} = \overrightarrow{N_0N}$ ugur bilen $S$ üstüň $N$ nokadyndaky $\boldsymbol{n}$ daşky normalyň arasyndaky burç.

**Subudy:** Goý, $N_0$ – $S$ üstüň fiksirlenen nokady bolsun. $W$ ($M$) goşa gatlagyň potensialyny aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$W(M)=\oiint_S\left[\mu(N)-\mu(N_0)\right]\frac{\cos\varphi}{r^2}dS+\mu(N_0)\oiint_S\frac{\cos\varphi}{r^2}dS=$$

$$=W_0(M)+\mu(N_0)\,W_1(M). \qquad (35.5)$$

Goý, $S$ üstüň daşyndan we içinden $M\to N_0$ bolsun. $W_0$ ($M$) goşa gatlagyň potensialyna garalyň. $S$ üstüň $N_0$ nokadyny kesip geçende hem $W_0$ ($M$) funksiýanyň üznüksizligini görkezeliň.

Goý, $\varepsilon>0$ erkin san bolsun. $\mu$ ($N$) funksiýa üznüksiz, onda $S$ üstüň $N_0$ nokady saklaýan bölek $\sigma_0$ üsti bar bolup

$$\left|\mu(N)-\mu(N_0)\right|<\frac{\varepsilon}{4K} \qquad (35.6)$$

deňsizlik dogrudyr, $K$ – hemişelik.

$S$ üsti $\sigma_0$ we $S-\sigma_0$ görnüşde ýazyp alarys:

$$W_0(M)=W_0^{(1)}(M)+W_0^{(2)}(M), \qquad (35.7)$$

bu ýerde

$$W_0^{(1)}(M)=\iint_{\sigma_0}\left[\mu(N)-\mu(N_0)\right]\frac{\cos\varphi}{r^2}dS,$$

$$W_0^{(2)}(M)=\iint_{S-\sigma_0}\left[\mu(N)-\mu(N_0)\right]\frac{\cos\varphi}{r^2}dS.$$

$M$ nokadyň islendik ýagdaýynda

$$\left|W_0^{(1)}(M)\right|\le\iint_{\sigma_0}\left|\mu(N)-\mu(N_0)\right|\frac{\cos\varphi}{r^2}dS,$$

(35.6) deňligiň esasynda alarys:

$$\left|W_0^{(1)}(M)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (35.8)$$

(35.7) deňlikden alarys:

$$W_0(M) - W_0(N_0) = W_0^{(1)}(M) - W_0^{(1)}(N_0) + W_0^{(2)}(M) - W_0^{(2)}(N_0),$$

bu ýerde

$$\left|W_0(M) - W_0(N_0)\right| \le \left|W_0^{(1)}(M)\right| + \left|W_0^{(1)}(N_0)\right| + \left|W_0^{(2)}(M) - W_0^{(2)}(N_0)\right|$$

ýa-da (35.7) deňsizlik esasynda

$$\left|W_0(M) - W_0(N_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|W_0^{(2)}(M) - W_0^{(2)}(N_0)\right|.$$

$N_0$ nokat ýakyn $M$ nokatlar üçin

$$\left|W_0^{(2)}(M) - W_0^{(2)}(N_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

diýmek,

$$\left|W_0(M) - W_0(N_0)\right| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýlelik bilen,

$$\lim_{M \to N_0} W_0(M) = W_0(N_0).$$

Eger $M \to N_0$ içinde bolanda, onda

$$\lim_{M \to N_0} W_0(M) = W_0(N_0) + 4\pi\mu(N_0). \qquad (35.9)$$

Goý, (35.5) formulada $M$ nokat $S$ üstüň $N_0$ nokady bilen gabat gelsin. Onda

$$W(N_0) = W_0(N_0) + 2\pi\mu(N_0). \qquad (35.10)$$

(35.9) we (35.10) deňlikleri deňeşdirip alarys:

$$W_i(N_0) = W_0(N_0) + 2\pi\mu(N_0).$$

Goý, $S$ üstüň daşynda $M \to N_0$ bolsun. Onda

$$\lim_{M \to N_0} W(M) = W_d(N_0) = W_0(N_0),$$

şonuň üçin hem (35.10) deňlik esasynda alarys:

$$W_d(N_0) = W(N_0) - 2\pi\mu(N_0).$$

## §36. Ýönekeý gatlagyň potensialy we onuň häsiýetleri

### 1.Ýönekeý gatlagyň potensialy

Lýapinow boýunça paýlanylan üznüksiz $\mu(N)$ dykyzlykly ýönekeý gatlagyň potensialyna garalyň:

$$U(M) = \oiint_S \frac{\mu(N)}{r} dS, \qquad (r = MN). \tag{36.1}$$

Giňişligiň $S$ üste degişli däl ähli $M(x, y, z)$ nokatlarda ýönekeý gatlagyň potensialy islendik tertipli önüme eýe we Laplas deňlemesini kanagatlandyrýar.

Geçen mowzukdaky ýaýla edip tükeniksizlikdäki ýönekeý gatlagyň potensialynyň nola $\frac{1}{R}$ ýaly ymtylýandygyny görkezmek bolýar, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**Teorema.** Üznüksiz dykyzlykly ýönekeý gatlagyň potensialy bütin giňişlikde üznüksiz funksiýadyr.

**Subudy.** $S$ üste degişli däl $M$ nokatlarda ýönekeý gatlagyň potensialy $U(M)$ üznüksiz funksiýa. $S$ üste degişli nokatlarda hem $U(M)$ funksiýanyň üznüksizligini görkezeliň. Onuň üçin $S$ üstüň nokatlarynda (36.1) integralyň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezeliň. Goý, $N_0$ nokat $S$ üstüň erkin nokady bolsun. $N_0$ nokatda ýerli koordinat sistemasyny girizeliň. Goý, $\varepsilon > 0$ san berlen $\sigma_1$ üst $\xi^2 + \eta^2 \le d_1^2$ $\left( d_1 \le \frac{d}{4} \right)$ şeti kanagatlandyrýan $S$ üstüň bölegi bolsun. $N_0$ nokadyň käbir etrabynda $M$ nokat nähili hem ýerleşende

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| < \varepsilon \tag{36.2}$$

deňsizlik ýerine ýeter ýaly $d_1$ sany saýlap alyp bolýandygyny görkezeliň. Alarys:

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| \le 2A \iint\limits_{\sigma_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1}, \tag{36.3}$$

bu ýerde $\sigma_1$ – merkezi $N_0$ nokatda bolan $d_1$ radiusly töwerek, $\rho_1$ – $MN$ kesimiň $N_0$ nokatda $S$ üste galtaşýan tekizlige bolan $M_1 N_1$ proýeksiýanyň uzynlygy; $|\mu(N)| \le A$. $M$ nokat merkezi $N_0$ nokatda bolan $d_1$ radiusly sferanyň içinde ýatan bolsun. $M_1$ nokat $\sigma'_1$ tegelege degişli we eger $(\xi, \eta)$ tekizlikde merkezi $M_1$ nokatda bolan 2 $d_1$ radiusly $\sigma''_1$ tekizlige alsak, onda ol $d_1$ tegelegi saklar. (36.3) deňsizlikde alarys:

$$\left| \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r} dS \right| \le 2A \iint\limits_{\rho_1 \le 2d_1} \frac{d\xi d\eta}{\rho_1} = 2A \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2d_1} \frac{\rho_1 d\xi d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1.$$

Bu bahalandyrma $S$ üste $N_0$ nokadyň ýerleşişine bagly däl. $d_1$ sany $8\,\pi A d_1 < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly berkidip, merkezi $N_0$ nokat bolan $d_1$ radiusly şarda $M$ nokadyň ýerleşişine bagly bolmaýan (36.2) bahalandyrmany alarys. Bu bolsa (36.1) integralyň $N_0$ nokatda deňölçegli ýygnanýandygyny aňladýar. Şeýlelik bilen, $S$ üste degişli $N_0$ nokatda $U(M)$ üznüksiz funksiýa.

Teorema subut edildi.

### 2. Ýönekeý gatlagyň potensialynyň normal boýunça önümi

Goý, $n_0$ – $S$ üstüň käbir $N_0$ nokadynda geçirilen daşky normalyň ugry bolsun. $M$ nokat $S$ üste degişli däl diýip ýönekeý gatlagyň (36.1) potensialynyň $n_0$ ugry boýunça önümini tapalyň.

$\frac{1}{r}$ köpeldijä diňe $M$ nokada bagly, diýmek, differensirlemegi integral astynda geçirmek bolar:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial n_0} = \oiint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \oiint_S \mu(N) \frac{\cos\psi}{r^2}\, dS, \quad (36.4)$$

bu ýerde $\psi = (r, n_0)$. $M$ nokat $S$ üstüň $N_0$ nokady bilen gabat gelende hem (36.4) integral bardyr.

Ýönekeý gatlagyň potensialynyň normal boýunça önümi kesgitli pridele eýedir we ol prideller üçin aşakdaky deňlikler dogrudyr:

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_i = \oiint_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\, dS + 2\pi\mu(N_0); \quad (36.5)$$

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_d = \oiint_S \mu(N) \frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\, dS + 2\pi\mu(N_0) \quad (36.6)$$

bu ýerde $r_0 = |\overrightarrow{N_0 N}|, \;\; \psi_0 = (r_0, n_0)$.

(36.5) we (36.6) deňliklerden görnüşi ýaly, ýönekeý gatlagyň potensialynyň normal boýunça önümi aşakdaky böküşe eýedir:

$$\left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(N_0)}{\partial n_0}\right)_d = 4\pi\mu(N_0).$$

# V BAP
# GIPERBOLIK DEŇLEMELER

## §37. Dalamber formulasy

Bilşimiz ýaly, kirşiň erkin yrgyldysy

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{37.1}$$

deňleme bilen ýazylýar, bu ýerde $T$ – kirşe täsir edýän dartyş güýji, $\rho$ – kirşiň çyzykly dykyzlygy. (37.1) deňleme üçin Koşi meselesini goýalyň.

**Koşi meselesi.** $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ ýarymtekizlikde (37.1) deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial x} = \psi(x) \tag{37.2}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ – berlen funksiýalar.

(37.1) deňlemäniň çözüwini tapmak üçin ony kanonik görnüşe getireliň. (37.1) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň:

$$(dx)^2 - (adt)^2 = 0 \;\Rightarrow\; dx \pm a \cdot dt = 0.$$

Bu deňlemeleri integrirläp alarys:

$$x - at = C_1, x + at = C_2$$

$\xi$, $\eta$ täze üýtgeýän ululyklary

$$\xi = x - at, \eta = x + at$$

formulalaryň kömegi bilen girizeliň. Alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a\frac{\partial U}{\partial \xi} + a\frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

Önümleriň tapylan aňlatmalaryny (37.1) deňlemede goýup, kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesini

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0$$

görnüşde ýazalyň. $\xi$ boýunça integrirläp alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = g(\eta),$$

bu ýerde: $g(\eta)$ – differensirlenýän erkin funksiýa. Soňky deňlemäni $\eta$ boýunça integrirläp alarys:

$$U(\xi,\eta) = \int g(\eta)\,d\eta + f_1(\xi),$$

$\int g(\eta)\,d\eta = f_2(\eta)$ belgileme girizip, (37.3) deňlemäniň umumy çözüwini

$$U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

görnüşde ýazalyň. Köne $x$, $t$ üýtgeýän ululyklara geçip, (37.1) deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \qquad (37.4)$$

bu ýerde: $f_1, f_2$ – iki gezek differensirlenýän erkin funksiýalar.

Eger (37.1)–(37.2) Koşi meselesiniň çözüwi bar diýip güman etsek, onda ol çözüwi $f_1$ we $f_2$ funksiýalary (37.2) şertler kanagatlanar ýaly saýlap, (37.4) görnüşde almak bolar. Alarys:

$$U(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \qquad (37.5)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial x} = -a\, f_1'(x) + a\, f_2'(x) = \psi(x). \qquad (37.6)$$

$f_1$ we $f_2$ funksiýalary tapmak üçin (32.6) deňligi integrirläliň:

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)\,dz + C, \qquad C = \text{const}. \qquad (37.7)$$

(32.5) we (32.7) deňliklerden alarys:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)\,dz - C, \qquad (37.8)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)\,dz + C. \qquad (37.9)$$

(37.8), (37.9) deňliklerde $x$ ululygy $x - at$ we $x + at$ ululyklar bilen çalşyp alarys:

$$f_1(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)\,dz - C,$$

$$f_2(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)\,dz + C.$$

Tapylan funksiýalary (37.4) formulada goýup we integrallary birleşdirip, Dalamber formulasyny alarys:

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \qquad (37.10)$$

Eger $\varphi(x)\in C^2(E_1)$, $\psi(x)\in C^1(E_1)$ bolsa, onda Dalamber formulasynyň (37.1)–(37.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýändigini gös-göni barlamak arkaly göz ýetirmek bolýar.

## 1. Meseläniň korrektligi

(37.1)–(37.2) Koşi meselesiniň korrektligine göz ýetirmek üçin ol meseläniň çözüwiniň barlygyny, ol çözüwiň ýeke-täkligini we durnuklydygyny görkezmeli. Dalamber formulasynyň getirilip çykarylyşyndan çözüwiň barlygynyň gelip çykýandygyny belläliň. Hakykatdan hem, $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiýalardan tapylan (37.5), (37.6) sistemany ýazmak bilen biz eýýäm (37.1) deňlemäniň (37.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bar diýip hasap edýäris.

(37.1)–(37.2) meseläniň çözüwiniň barlygyna (37.10) funksiýany (37.1) deňlemä we (37.2) başlangyç şertlere goýmak arkaly göz ýetirmek bolýar. Çözüwiň ýeke-täkligi Dalamber formulasynyň gurluşyndan gelip çykýar. Hakykatdan hem, eger meseläniň ýene bir $U_1(x, t)$ çözüwi bar bolsa, onda ol çözüwi (37.1) deňlemäniň hemme çözüwlerini özünde saklaýan (37.4) görnüşde aňlatmak bolar. Öňki pikir ýöretmämizi gaýtalap, ol çözüwi (37.10) görnüşe getireris, bu bolsa çözüwiň ýeke-täkligini subut edýär.

Koşi meselesiniň $-\infty < x +\infty$, $0 < t \leq T$ ýaýlada çözüwiniň durnuklylygy, ýagny başlangyç şertlere üznüksiz baglydygy Dalamber formulasyndan gelip çykýar. Hakykatdan hem, goý, $U_1(x, t)$ Koşi meselesiniň

$$U_1(x,0)=\varphi_1(x), \qquad \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial x}=\psi_1(x), \qquad (-\infty<x<\infty)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun, bu ýerde

$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)|<\varepsilon,\ |\psi(x)-\psi_1(x)|<\varepsilon,\ \varepsilon>0\ (-\infty<x<+\infty).$$

$U_1(x, t)$ çözüwi (37.10) görnüşde ýazalyň we $|U(x, t) - U_1(x, t)|$ tapawudy bahalandyralyň:

$$\left|U(x,t)-U_1(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\left|\varphi(x-at)-\varphi_1(x-at)\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi(x+at)-\varphi_1(x+at)\right| + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\psi(z)-\psi_1(z)\right|dz <$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2a}\varepsilon\cdot 2at < \varepsilon(1+T).$$

Şerte görä, $\varepsilon > 0$ ýeterlikçe kiçi, $T$ – gutarnykly san, diýmek, $\varepsilon\ (1 + T)$ köpeltmek hasyly ýeterlikçe kiçi san, bu bolsa Koşi meselesiniň çözüwiniň durnuklydygyny aňladýar.

## 2. Göni we ters tolkunlar

Dalamber formulasyny özgerdip

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(z)dz\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)dz\right]$$

görnüşde ýazalyň we

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(z)dz\right] = f_1(x-at),$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(z)dz\right] = f_2(x+at)$$

belgilemeler girizip, (37.1)-(37.2) meseläniň çözüwini

$$U(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \qquad (37.11)$$

görnüşde ýazalyň. Bu formulanyň her bir goşulyjysyna aýratynlykda garalyň. Goý, $f_2 \equiv 0$ bolsun, ýagny kirşiň süýşmesi

$$U_1(x,t) = f_1(x-at) \qquad (37.12)$$

formula bilen kesgitlenýän bolsun.

Gözegçi $t = 0$ başlangyç wagtda kirşiň $x = C$ nokatdan çykyp $x$ okunyň položitel ugruna $a$ tizlik bilen hereket edýär, ýagny onuň abssissasy $x - at = C$ ýa-da $x = C + at$ kanun boýunça üýtgeýär diýeliň. Şeýle gözegçi üçin kirşiň (37.12) formula bilen kesgitlenýän süýşmesi islendik wagt $f_1$ $(C)$ hemişelige deň bolar.

$U_1$ $(x, t) = f_1$ $(x - at)$ funksiýanyň kesgitleýän hadysasyna **göni tolkunyň ýaýramasy** diýilýär. Şeýlelik bilen, (37.12) çözüw $x$ okunyň položitel ugruna $a$ tizlik bilen ýaýraýan **göni** tolkundyr. Edil şunuň ýaly $U_2$ $(x, t) = f_2$ $(x + at)$ çözüw $x$ okunyň otrisatel ugruna $a$ tizlik bilen ýaýraýan **ters** tolkundyr.

Şeýlelik bilen, (37.11) çözüw göni we ters tolkunlaryň jemidir.

Ýokarda aýdylanlar $t$ pursatda kirşiň formasynyň grafigini gurmaga mümkinçilik berýär. Onuň üçin $f_1$ $(x)$ funksiýanyň grafigini saga, $f_2$ $(x)$ funksiýanyň grafigini bolsa çepe $at$ ululyga süýşürip, $f_1$ $(x - at)$ we $f_2$ $(x + at)$ funksiýalaryň grafiklerini alýarys. Kirşiň grafigini almak üçin bu egrileriň ordinatalarynyň algebraik jemini gurmak ýeterlikdir.

## §38. Bagly, kesgitleniş we täsir ediş ýaýlasy

(37.1) deňlemäniň bagly däl üýtgeýänleriniň $Oxt$ tekizligine **faza tekizligi**, Koşi şerti berilýän $t = 0$ çyzyga bolsa **başlangyç egri** diýilýär.

$M_0$ $(x_0, t_0)$ nokatdan çykýan

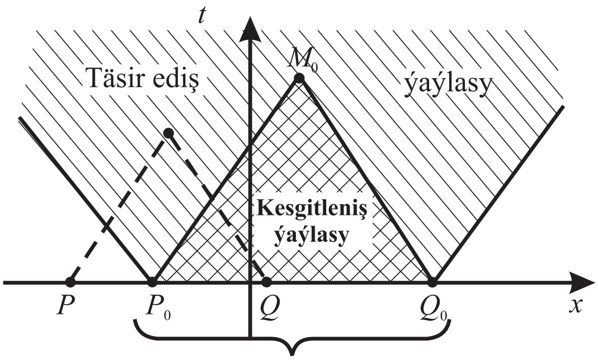
$$x - at = x_0 - at_0,\ x + at = x_0 + at_0$$

häsiýetlendirijiler başlangyç egrini $P_0$ $(x_0 - at_0, 0)$, $Q_0$ $(x_0 + at_0, 0)$ nokatlarda kesýärler. Dalamber formulasynda $x = x_0$, $t = t_0$ diýip, ony

$$U\left(M_0\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(P_0\right) + \varphi\left(Q_0\right)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{P_0Q_0} \psi\left(z\right)dz$$

görnüşde ýazalyň. Bu formuladan görnüşi ýaly, $M_0$ $(x_0, t_0)$ nokatda Koşi meselesiniň çözüwi $\varphi$ funksiýanyň $P_0$, $Q_0$ nokatlardaky bahalary; $\psi$ funksiýanyň bolsa $P_0$, $Q_0$ kesimdäki bahasy bilen doly kesgitlenýär. $M_0$ nokatdan çykýan häsiýetlendirijileriň başlangyç egriden kesip alýan bölegine $M_0$ nokadyň **bagly** ýaýlasy diýilýär. Garalýan meselede $M_0$ nokadyň bagly ýaýlasy $0x$ okunyň $P_0$, $Q_0$ kesimi bolýar.

Eger (37.2) başlangyç şertler bilen 0*x* okunda däl-de, $P_0Q_0$ kesimde berlen bolsa, onda Dalamber formulasyndan görnüşi ýaly, (37.1)–(37.2) meseläniň çözüwi depeleri $M_0$ $P_0$, $Q_0$ nokatlarda bolan üçburçlukda kesgitlener. $M \notin \Delta P_0Q_0M_0$ nokatda çözüw kesgitlenip bilmez, sebäbi onuň *PQ* bagly ýaýlasy $P_0Q_0$ kesime degişli däl.




**5-nji çyzgy. Bagly ýaýlasy**

Şonuň üçin $P_0$ $Q_0$, $M_0$ häsiýetlendiriji üçburçluga $P_0$ $Q_0$ kesimdäki başlangyç şertler boýunça çözüwiň **kesgitleniş** ýaýlasy diýilýär. *Oxt* tekizligiň $P_0$ $Q_0$ kesimde berlen başlangyç şertleriň meseläniň çözüwine täsir edýän nokatlarynyň bölegine **täsir ediş** ýaýlasy diýilýär (*5-nji çyzgy*). $P_0$ $Q_0$ kesimiň täsir ediş ýaýlasy $P_0$ $Q_0$ kesimiň we $P_0$ $Q_0$ nokatlardan geçýän häsiýetlendirijileriň aralygydyr.

## §39. Birjynsly däl deňleme

Kirşiň yrgyldysynyň birjynsly däl deňlemesi üçin Koşi meselesine garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \qquad (39.1)$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \quad (39.2)$$

Meseläniň çözüwini $U = U_1 + U_2$ jem görnüşde gözläliň. Bu jemi (39.1) deňlemede we (39.2) başlangyç şertlerde goýup alarys:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right) + f(x,t),$$

$$U_1(x,0) + U_2(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial t} = \psi(x).$$

$U_1\ (x, t)$ funksiýany birjynsly deňlemäniň birjynsly däl başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar ýaly saýlap alalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}; \\ U_1(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial U_1(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \end{cases} \tag{39.3}$$

onda $U_2\ (x, t)$ funksiýa üçin aşakdaky mesele alnar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + f(x,t); \\ U_2(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial U_2(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{39.4}$$

Bilşimiz ýaly, (39.3) meseläniň çözüwi Dalamber formulasy bilen kesgitlenýär.

(39.4) meseläniň çözüwini tapmak üçin aşakdaky kömekçi meselä garalyň:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \ V(x,0) = 0, \ \frac{\partial V(x,\tau)}{\partial t} = f(x,\tau), \ t > \tau \tag{39.5}$$

$t_1 = t - \tau$ täze üýtgeýän ululyk girizip, (39.5) meseläni

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t_1^{\,2}} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \ V(x,0) = 0, \ \frac{\partial V(x,0)}{\partial t_1} = f(x,\tau), t > 0$$

görnüşde ýazalyň. Soňky meseläniň çözüwi Dalamber formulasy boýunça tapylýar:

$$V=\frac{1}{2a}\int_{x-at_1}^{x+at_1} f(z,\tau)\,dz.$$

$t$ üýtgeýän ululyga geçip, (34.5) meseläniň çözüwini

$$V(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz$$

görnüşde alarys. Indi (39.4) meseläniň çözüwiniň

$$U_2(x,t)=\int_0^t V(x,t;\tau)\,d\tau \tag{39.6}$$

görnüşde kesgitlenýändigini görkezeliň.

(39.6) funksiýany differensirläp we $V$ $(x,$ $t;$ $\tau)$ funksiýa üçin başlangyç şertleri peýdalanyp, alarys:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}=V(x,t;t)+\int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}d\tau=\int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=\left.\frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t}+\int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[f\big(x+a(t-\tau),\tau\big)a+f\big(x-a(t-\tau),\tau\big)a\Big]\Big|_{\tau=t}+\int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau=$$

$$=f(x,t)+\int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial t^2}d\tau,$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x}=\int_0^t \frac{\partial V(x,t;\tau)}{\partial x}d\tau,\quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t;\tau)}{\partial x^2}d\tau.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, (39.6) funksiýa (39.4) meseläniň çözüwi bolýar. Şeýlelik bilen, (39.1)–(39.2) meseläniň çözüwini aşakdaky görnüşde alarys:

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,d\,z.$$

## §40. Ýarymçäkli kiriş ýagdaýy

$x \geq 0$ ýarymçäkli gönüde kirşiň yrgyldysyna garalyň. Bu ýagdaýda mesele aşakdaky ýaly goýulýar:

kirşiň yrgyldysynyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ 0 < x < +\infty, \ t > 0 \qquad (40.1)$$

deňlemesiniň

$$U(0,t) = \mu(t)\left(\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \upsilon(t)\right), \ (t \geq 0) \qquad (40.2)$$

gyra şerti we

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x < +\infty \qquad (40.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

Ilki bilen, kirşiň yrgyldysynyň deňlemesiniň tükeniksiz gönüde kesgitlenen çözüwiniň häsiýetleri baradaky iki sany lemmany subut edeliň.

**1-nji lemma.** Eger (40.1)–(40.3) meselede $\varphi$ $(x)$ we $\psi$ $(x)$ funksiýalar $x = 0$ nokada görä täk funksiýalar bolsalar, onda (37.10) Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U$ $(x, t)$ funksiýa

$$U\ (0,\ t) = 0$$

şerti kanagatlandyrýar.

**2-nji lemma.** Eger (40.1)-(40.2) meselede $\varphi$ $(x)$ we $\psi$ $(x)$ funksiýalar $x = 0$ nokada görä jübüt funksiýalar bolsa, onda (37.10 ) Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U$ $(x, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0$$

şerti kanagatlandyrýar.

1-nji lemmany subut edeliň. Şerte görä $\varphi$ $(x)$ we $\psi$ $(x)$ funksiýalar $x = 0$ nokada görä täk funksiýalar, ýagny

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),\ \psi(x) = -\psi(-x).$$

$x = 0$ we $t > 0$ bolanda (37.10 ) formuladan alarys:

$$U(0,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(at) + \varphi(-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(z)\,dz = 0,$$

sebäbi birinji goşulyjy $\varphi(x)$ funksiýanyň täkliginiň esasynda nola deň, ikinji goşulyjy bolsa täk funksiýadan koordinat başlangyjyna görä simmetrik kesim boýunça alnan integralyň nola deňliginiň esasynda nola deň.

2-nji lemma hem şuňa meňzeş subut edilýär. $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň jübütlik şerti

$$\varphi(x) = \varphi(-x),\ \psi(x) = \psi(-x)$$

görnüşde ýazylýar. Jübüt funksiýanyň önüminiň täk funksiýa bolýandygyny belläliň:

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x),\ \psi'(x) = -\psi'(-x).$$

(37.10 ) formuladan alarys:

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[-\varphi'(-at) + \varphi'(at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\psi(at) - \psi(-at)\right] = 0\ \ t > 0,$$

sebäbi birinji goşulyjy $\varphi'(x)$ funksiýanyň täkligi, ikinji goşulyjy bolsa $\psi(x)$ funksiýanyň jübütligi üçin nola deň.

Bu lemmalaryň kömegi bilen aşakdaky meseleleri çözmek bolýar: (40.1) deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x),\quad 0 \le x < +\infty$$

başlangyç we

$$U(0,t) = 0,\ t > 0$$

gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

$\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň täk dowam etdirmesi bolan $\Phi(x)$ we $\Psi(x)$ funksiýalara garalyň:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases},\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi-(x), & x<0.\end{cases}$$

(32.10) Dalamber formulasynyň esasynda

$$U(x,0)=\Phi(x),\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\Psi(x)$$

şerti kanagatlandyrýan $U(x, t)$ funksiýa

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz \qquad (40.4)$$

görnüşde ýazylýar. (40.4) deňlik bilen kesgitlenýän funksiýa islendik $x$ we $t>0$ üçin kesgitlenendir. 1-nji lemmanyň esasynda

$$U(0, t)=0.$$

Mundan başga hem bu funksiýa $t=0$, $x>0$ bolanda

$$\begin{cases}U(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\Psi(x)=\psi(x),\end{cases} \qquad x>0$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar. Şeýlelik bilen, alnan $U(x, t)$ funksiýa diňe $x\geq 0$, $t\geq 0$ üçin goýlan meseläniň hemme şertlerini kanagatlandyrýan funksiýadyr.

Öňki $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiýalara geçip, aşakdaky ýaly ýazmak bolar:

$$U(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz,\ t<\dfrac{x}{a},\ x>0,\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz,\ t>\dfrac{x}{a},\ x>0.\end{cases}$$

Eger

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0$$

gyra şert berlen bolsa, onda $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň jübüt dowam etdirmeleri bolan

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases}, \quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

funksiýalary alyp, kirşiň yrgyldysynyň deňlemesiniň $x \geq 0$ ýaýlada (34.3) başlangyç şertleri we $U_x(0, t) = 0$ gyra şerti kanagatlandyrýan

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz$$

ýa-da

$$U(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz, & t<\dfrac{x}{a}\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz+\int_{0}^{at-x}\psi(z)\,dz\right], & t>\dfrac{x}{a}.\end{cases} \tag{40.5}$$

çözüwini alarys.

Indi umumy ýagdaýa garalyň. Onuň üçin (40.1) deňlemäniň

$$\bar{U}(x,0)=0,\ \frac{\partial\bar{U}(x,0)}{\partial t}=0,$$

$$\bar{U}(0,t)=\mu(t),\ t>0$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Bu meseläniň çözüwini

$$\bar{U}(x,t)=f(x-at)$$

görnüşde gözläliň. $f$ funksiýany gyra şertden peýdalanyp kesgitläliň:

$$\bar{U}(0,\ t)=f(-at)=\mu(t),$$

bu ýerden

$$f(z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right).$$

Şeýlelik bilen,

$$\bar{U}(x,t)=\mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Ýöne bu funksiýa diňe $x - at \leq 0$ ýaýlada kesgitlenen, sebäbi $\mu\,(t)$ funksiýa $t \geq 0$ üçin kesgitlenen.

$\bar{U}(x,t)$ funksiýany argumentleriň islendik bahalarynda kesgitlemek üçin $\mu\,(t)$ funksiýany $t$-niň otrisatel bahalarynda $\mu\,(t) \equiv 0$, $t < 0$ diýip dowam etdireliň. Onda

$$\bar{U}(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

funksiýa argumentleriň islendik bahalary üçin kesgitlener we birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrar.

Bu funksiýanyň we (40.5) funksiýanyň jemi (40.1)-(40.3) meseläniň çözüwini berer:

$$U(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz, \; t < \dfrac{x}{a} \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(z)\,dz, \; t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

## §41. Gursa meselesi

Maglumatlary häsiýetlendiriji çyzyklarda berlen ýönekeý meselä garalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = f(x,y), \\ U(x,0) = \varphi(x), \\ U(0,y) = \psi(y). \end{cases} \qquad (41.1)$$

Goşmaça şertler (41.1) deňleme üçin häsiýetlendiriji çyzyklar bolýan $x = 0$, $y = 0$ gönülerde berlen. $\varphi\,(x)$ we $\psi\,(x)$ funksiýalar differensirlenýän funksiýalar we $\varphi\,(0) = \psi\,(0)$ ylalaşyk şertini kanagatlandyrýar diýip güman edeliň. (41.1) deňlemäni $x$ we $y$ boýunça yzygiderli integrirläp alarys:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial U(0,y)}{\partial y}+\int_0^x f(\xi,y)\,d\xi,$$

$$U(x,y)=U(x,0)+U(0,y)-U(0,0)+\int_0^y d\eta\int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi$$

ýa-da

$$U(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0)+\int_0^y d\eta\int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi. \qquad (41.2)$$

Şeýlelik bilen, ýönekeý deňleme üçin garalýan meseläniň çözüwini (41.2) anyk görnüşde ýazmak bolýar. (41.2) formuladan meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligi we barlygy gelip çykýar.

Bilşimiz ýaly, käbir şertler ýerine ýetende, iki üýtgeýänli ikinji tertipli çyzykly giperbolik deňlemeleri

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+c(x,y)U=f(x,y) \qquad (41.3)$$

kanonik görnüşe getirmek bolýar. (41.3) deňleme üçin Gursa meselesi diýip atlandyrylýan meselä garalyň.

**Gursa meselesi:** $Q = (x_0, x) \times (y_0, y)$ gönüburçlukda (41.3) deňlemäniň $Q$ ýaýlada üznüksiz, yzygiderli çözüwi bolan we

$$U(x, y_0) = \varphi(x),\ U(x_0, y) = \psi(y) \qquad (41.4)$$

goşmaça şertleri kanagatlandyrýan U $(x, y)$ funksiýany tapmaly,

$$\varphi(x_0) = \psi(y_0), \qquad a, b, c, f \in C^1(Q);$$

$$\varphi(x) \in C^1([x_0, x]),\ \psi(y) \in C^1([y_0, y]).$$

(41.3), (41.4) meseläni integral deňlemeleriň sistemasyna getireliň.

$$V=\frac{\partial U}{\partial x},\quad W=\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (41.5)$$

täze funksiýalary girizip, (41.3) deňlemäni oňa deňgüýçli üç deňlemeler sistemasy görnüşde ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y} = f - aV - bW - cU; \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} = f - aV - bW - cU, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = W. \end{cases} \qquad (41.6)$$

(41.4) şertden alarys:

$$\begin{cases} V(x, y_0) = \dfrac{\partial U(x, y_0)}{\partial x} = \varphi'(x); \\ W(x_0, y) = \dfrac{\partial U(x_0, y)}{\partial y} = \psi'(y); \\ U(x, y_0) = \varphi(x). \end{cases} \qquad (41.7)$$

(41.6) sistemanyň birinji we üçünji deňlemelerini $[y_0, y]$ kesim, ikinji deňlemesini bolsa $[x_0, x]$ kesim boýunça integrirläp hem-de (41.7) şertleri ulanyp, aşakdaky integral deňlemeleriň sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} V(x, y) = \varphi'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} f(x, \eta)\, d\eta - \int\limits_{y_0}^{y} (aV + bW + cU)(x, \eta), \\ W(x, y) = \psi'(x) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y)\, d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} (aV + bW + cU)(\xi, y)\, d\xi, \\ U(x, y) = \varphi(x) + \int\limits_{y_0}^{y} W(x, \eta)\, d\eta. \end{cases} \qquad (41.8)$$

### 1. Meseleleriň ekwiwalentligi

Gursa meselesiniň integral deňlemeleriň sistemasyna ekwiwalentdigini görkezeliň. Goý, $U(x, y)$ funksiýa (41.3)–(41.4) meseläniň çözüwi bolsun.

(41.5) orun çalyşmanyň kömegi bilen (41.3), (41.4) sistemany (41.6), (41.7) toždestwolara getirmek bolýar. (41.6) sistemany integrirläp, (41.8) integral deňlemeleriň sistemasyny alarys, ýagny ($U$, $V$, $W$) – integral deňlemeleriň sistemasynyň üznüksiz çözüwi. Tersine, goý, ($U$, $V$, $W$) – (41.8) sistemanyň üznüksiz çözüwi bolsun. (41.8) sistemadan görnüşi ýaly, ($U$, $V$, $W$) funksiýa (41.7) şertleri kanagatlandyrýar. (41.8) sistemada integral aşagyndaky aňlatma üznüksiz, diýmek, (41.8) sistemany differensirlemek bolýar. Birinji we üçünji deňlemeleri $y$ boýunça, ikinji deňlemäni bolsa $x$ boýunça differensirläp, (41.6) (41.7) toždestwolar bilen gabat gelýän täze toždestwolaryň sistemasyna geleris. Diýmek, ($U$, $V$, $W$) – (41.6), (41.7) meseläniň çözüwi (41.6), (41.7) mesele bolsa (41.3), (41.4) Gursa meselesine ekwiwalentdir. Meseläniň ekwiwalentligi subut edildi.

## 2. (41.8) sistemanyň çözülişi

(41.8) sistemany Pikaryň yzygiderli ýakynlaşma usuly bilen çözeliň. Nolunjy ýakynlaşmany aşakdaky ýaly saýlap alalyň:

$$\begin{cases} V_0(x,y) = \varphi'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} f(x,\eta)\,d\eta, \\ W_0(x,y) = \psi'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi,y)\,d\xi, \\ U_0(x,y) = \varphi(x), \end{cases} \tag{41.9}$$

onda soňky ýakynlaşmalar aşakdaky ýaly gurlar:

$$\begin{cases} V_k(x,y) = V_0(x,y) - \int\limits_{y_0}^{y} \left(aV_{k-1} + bW_{k-1} + cU_{k-1}\right)(x,\eta)\,d\eta, \\ W_k(x,y) = W_0(x,y) - \int\limits_{x_0}^{x} \left(aV_{k-1} + bW_{k-1} + cU_{k-1}\right)(\xi,y)\,d\xi, \\ U_k(x,y) = U_0(x,y) + \int\limits_{y_0}^{y} W_{k-1}(x,\eta)\,d\eta, k = 1,2,... \end{cases} \tag{41.10}$$

$\{V_k\}$, $\{W_k\}$, $\{U_k\}$ yzygiderlikleriň deňölçegli ýygnanýandygyny subut etmek üçin

$$V_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(V_k - V_{k-1}\right),\ W_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(W_k - W_{k-1}\right),\ U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k - U_{k-1}\right) \tag{41.11}$$

hatarlary girizeliň. Bu hatarlaryň $n$-nji bölek jemleri $V_n$, $W_n$, $U_n$ bilen gabat gelýär.

(41.10) sistemadan alarys:

$$\begin{cases} V_{k+1} - V_k = -\int\limits_{y_0}^{y} \left[ a\left(V_k - V_{k-1}\right) + b\left(W_k - W_{k-1}\right) + c\left(U_k - U_{k-1}\right) \right](x,\eta)\, d\eta, \\ W_{k+1} - W_k = -\int\limits_{x_0}^{x} \left[ a\left(V_k - V_{k-1}\right) + b\left(W_k - W_{k-1}\right) + c\left(U_k - U_{k-1}\right) \right](\xi, y)\, d\xi, \\ U_{k+1} - U_k = \int\limits_{y_0}^{y} \left[ W_k - W_{k-1} \right](x,\eta)\, d\eta, k = 1,2,3,\cdots \end{cases} \quad (41.12)$$

$k = 1,2,\cdots$ bolanda $\bar{D}$ ýaýlada aşakdaky bahalandyrmalaryň ýerine ýetýändigini görkezeliň:

$$\left|V_k - V_{k-1}\right| < A^{k-1} B \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\left|W_k - W_{k-1}\right| < A^{k-1} B \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (41.13)$$

$$\left|U_k - U_{k-1}\right| < A^{k-1} B \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

bu ýerde

$$A = \max_D \left(1, M\right), \quad M = \max_D \left(|a| + |b| + |c|\right), B - \text{käbir hemişelik san.}$$

$k = 1$ bolanda bahalandyrmalaryň ýerine ýetýändigi äşgärdir. (41.13) deňsizliklerde $k$-ni $k + 1$ bilen çalşyranyňda hem ýerine ýetýändigini görkezeliň. (41.12) we (41.13) deňsizliklerden alarys:

$$\left|V_{k+1} - V_k\right| < \int\limits_{y_0}^{y} A^{k-1} B \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^{k-1}}{(k-1)!} \left(|a| + |b| + |c|\right) d\eta \le$$

$$\le A^k B \left( \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^k}{k!} - \frac{\left(x - x_0\right)^k}{k!} \right) \le A^k B \, \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^k}{k!}.$$

$|W_{k+1} - W_k|$, $|U_{k+1} - U_k|$ üçin hem şuňa meňzeş görkezilýär.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k B \frac{\left(x + y - x_0 - y_0\right)^k}{k!}$$

hatar *(x, y)* tekizlikde ýygnanýar. Munuň şeýledigini, mysal üçin, Dalamber nyşanyny ulanyp görkezmek bolýar. (41.13) deňsizliklerden Weýerştrasyň nyşany esasynda, (41.11) hatarlaryň, şonuň ýaly hem $\{V_k\}$, $\{W_k\}$, $\{U_k\}$ yzygiderlikleriň $\bar{Q}$ ýaýlada deňölçegli ýygnanýandyklary gelip çykýar. (41.10)-da predele geçip, (41.8) integral deňlemeler ulgamynyň ($U$, $V$, $W$) çözüwini taparys. Üznüksiz funksiýalaryň deňölçegli predeli hökmünde ($U$, $V$, $W$) çözüw $\bar{Q}$ ýaýlada üznüksizdir, diýmek, $U(x, y)$ funksiýa (41.3)–(41.4) Gursa meselesiniň çözüwidir.

### 3. Çözüwiň ýeke-täkligi

(41.8) sistemanyň ($U_1$, $V_1$, $W_1$) we ($U_2$, $V_2$, $W_2$) iki sany üznüksiz çözüwi bar diýeliň, onda

$$U = U_1 - U_2,\ V = V_1 - V_2,\ W = W_1 - W_2$$

tapawutlar

$$\begin{cases} V = -\int\limits_{y_0}^{y} (aV + bW + cU)(x,\eta)\, d\eta, \\ W = -\int\limits_{x_0}^{x} (aV + bW + cU)(\xi,y)\, d\xi, \\ U = \int\limits_{y_0}^{y} W(x,\eta)\, d\eta \end{cases} \qquad (41.14)$$

birjynsly sistemanyň çözüwi bolar. $U = V = W \equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň. ($U$, $V$, $W$) çözüwiň $\bar{Q}$ ýaýlada üznüksizliginden onuň çäklenendigi gelip çykýar:

$$|U| < B,\ |V| < B,\ |W| < B.$$

(41.14) sistemanyň birinji deňlemesinden alarys:

$$|V| \le B\int\limits_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|)\, d\eta < AB\,\frac{(x + y - x_0 - y_0)^2}{1!}.$$

$|W|$, $|U|$ üçin hem şuňa meňzeş deňsizlik ýerine ýetýär. Induksiýa usulyny ulanyp, (41.14) sistemany we alnan deňsizlikleri peýdalanyp islendik $n$ üçin alarys:

$$|V| < A^n B \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|W| < A^n B \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|U| < A^n B \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}.$$

Soňky deňsizliklerden $U \equiv V \equiv W \equiv 0$ gelip çykýar, ýagny ($U_1$, $V_1$, $W_1$) we ($U_2$, $V_2$, $W_2$) çözüwler gabat gelýärler. Diýmek, (41.3)-(41.4) Gursa meselesiniň çözüwi ýeke-täkdir.

## §42. Çatyrymlanan operator

Aşakdaky

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y) \tag{42.1}$$

operatora garalyň.

Eger $V(x, y) \cdot LU(x, y) - U(x, y)\, L^* V(x, y)$ aňlatmany käbir wektoryň dwirgensiýasy görnüşde aňladyp bolýan bolsa, ýagny

$$V \cdot LU - U \cdot L^* V = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$$

bolar ýaly $Q(x, y)$ $P(x, y)$ funksiýalar bar bolsa, onda $L^*$ operatora $L$ operatora **çatyrymlanan** operator diýilýär.

$L$ operatora çatyrymlanan $L^*$ operatory tapalyň. $V \cdot LU$ aňlatmada aşakdaky özgertmeleri edeliň:

$$V \cdot cU = cV \cdot U,$$

$$V \cdot b\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(bV \cdot U) - \frac{\partial}{\partial y}(bV) \cdot U,$$

$$V\cdot a\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(aV\cdot U\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(aV\right)\cdot U,$$

$$V\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(V\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(V\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(V_yU\right)-V_{xy}U\right]$$

Bu deňlikleri goşup alarys:

$$V\cdot LU\equiv U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(aV\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(bV\right)+cV\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U+aVU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V\frac{\partial U}{\partial x}+bVU\right)=$$

$$=U\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial V}{\partial x}-b\frac{\partial V}{\partial y}+\left(c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)V\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U+aVU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V\frac{\partial U}{\partial x}+bVU\right).$$

$$L^*\equiv\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}+\left(c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right),$$

$$Q=-V_yU+aVU,\ P=VU_x+bUV$$

belgilemeler girizip

$$V\cdot LU-U\cdot L^*V=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}$$

bolýandygyny görmek bolýar, ýagny $L^*$ operator $L$ operatora çatyrymlanan operatordyr. $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}$ aňlatmany goşup we aýryp, funksiýalary başga görnüşde ýazalyň:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}U+aVU+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(UV\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[V\frac{\partial U}{\partial x}+bVU-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(VU\right)\right].$$

Şeýlelik bilen, aşakdaky toždestwony alarys:

$$VLU - UL^{*}V =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[ -\frac{\partial V}{\partial y}U + aVU + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[ V\frac{\partial U}{\partial x} + bVU - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(VU) \right] \quad (42.2)$$

## §43. Riman usuly

Eger Koşi meselesiniň çözüwi bar bolsa, onda Riman usuly ol çözüwi tapmaklyga we ony integral görnüşde aňlatmaga mümkinçilik berýär.

$$LU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(x,y)U = f(x,y) \quad (43.1)$$

deňlemä garalyň. Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi $dx \cdot dy = 0$ görnüşe eýe, şonuň üçin hem deňlemäniň häsiýetlendirijileri koordinat oklaryna parallel bolan $x$ = const, $y$ = const gönülerdir.

$0xy$ tekizlikde koordinat oklaryna parallel bolan göni çyzyklar bilen birden köp bolmadyk nokatda kesişýän $AB$ egri çyzyk berlen bolsun. (43.1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

**Koşi meselesi.** (43.1) deňlemäniň

$$U\big|_{AB} = \varphi, \; \frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{AB} = \psi \quad (43.2)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde $\overline{n} - AB$ egriniň normal wektory.

Tekizlikde erkin $M(x_0, y_0)$ nokady alalyň we ol nokatdan $AB$ egri bilen degişlilikde $P$ we $Q$ nokatlarda kesişýän $x = x_0$, $y = y_0$ häsiýetlendirijileri geçireliň. Bu häsiýetlendiriji çyzyklar we $PQ$ duga bilen çäklenen ýaýlany $D$ bilen belläliň.

(43.2) toždestwonyň iki bölegini hem $D$ ýaýla boýunça integrirläp we

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{PQMP} Pdx + Qdy.$$

Grin formulasyny ulanyp, alarys:

$$\iint\limits_D \left[ VLU - UL^* V \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[ -\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}(UV) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[ V\frac{\partial U}{\partial x} + bUV - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV) \right] \right\} dxdy =$$

$$= \int\limits_{PQMP} \left( -V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV) \right) dx + \left( -\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV) \right) dy.$$

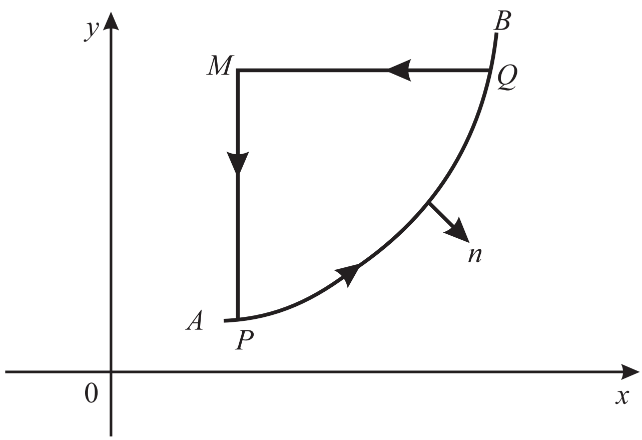
*D* ýaýlanyň *PQMP* araçägini *PQ*, *QM*, *MP* böleklere bölüp we *QM* kesimde $dy = 0$, *MP* kesimde bolsa $dx = 0$ bolýandygyny nazarda tutup, alarys (*6-njy çyzgy*)

$$\iint\limits_D \left[ VLU - UL^* V \right] dxdy =$$

$$= \int\limits_{PQ} \left( -V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV) \right) dx + \left( -\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV) \right) dy +$$

$$+ \int\limits_{QM} \left( -V\frac{\partial U}{\partial x} - bUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV) \right) dx + \tag{43.3}$$

$$+ \int\limits_{MP} \left( -\frac{\partial V}{\partial y}U + aUV + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV) \right) dy.$$




**6-njy çyzgy**

Soňky iki goşulyjyny özgerdeliň:

$$\int_{QM}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x}-bVU+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(UV)\right)dx=$$

$$=\int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-bV\right)Udx+\frac{1}{2}(UV)_M+\frac{1}{2}(UV)_Q,$$

$$\int_{MP}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}U+aVU+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(UV)\right)dy=$$

$$\int_{MP}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}+aV\right)U\,dy+\frac{1}{2}(UV)_P-\frac{1}{2}(UV)_M.$$

Bu ýerde $(UV)_P$ aňlatma $UV$ köpeltmek hasylynyň $P$ nokatdaky bahasyny aňladýar. Integrallaryň bu bahalaryny (43.3) formulada goýup, $PQ$ duga boýunça integraly özgerdip we $(UV)_M$ görä çözüp alarys:

$$(UV)_M=\frac{(UV)_P+(UV)_Q}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial V}{\partial x}-2bUV\right)dx+\left(-U\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}V+2aUV\right)dy+$$

$$+\int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-bV\right)Udx-\int_{MP}\left(\frac{\partial V}{\partial y}-aV\right)Udy-$$

$$-\iint_D\left[VLU-UL^*V\right]dxdy. \qquad (43.4)$$

Goý, $U(x, y)$ (43.1) deňlemäniň (43.2) şertleri kanagatlandyrýan çözüwi we $V(x, y)$ funksiýa bolsa

$$L^*V\equiv\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(aV)-\frac{\partial}{\partial y}(bV)+cV=0 \qquad (43.5)$$

çatyrymlanan deňlemäniň haýsy hem bolsa bir çözüwi bolsun. Onda (43.4) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$(UV)_M = \frac{(UV)_P + (UV)_Q}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial x} - 2bUV\right)dx + \left(-U\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}V + 2aUV\right)dy +$$

$$+\int_{QM}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - bV\right)Udx - \int_{MP}\left(\frac{\partial V}{\partial y} - aV\right)U\,dy - \iint_D V\,f\,dxdy. \quad (43.6)$$

(43.6) formuladaky $QM$ we $MP$ häsiýetlendirijileriň boýuna alynýan integrallara $U$ ($x$, $y$) funksiýanyň näbelli bahasy girýär. Ol integrallary ýok etmek üçin (43.5) deňlemäniň aşakdaky üç şerti kanagatlandyrýan çözüwini alalyň:

1. $\frac{\partial V}{\partial x} - bV = 0 \quad QM$ häsiýetlendirijide.

2. $\frac{\partial V}{\partial y} - aV = 0 \quad MP$ häsiýetlendirijide.

3. $V = 1$ $M$ nokatda.

$V$ ($x$, $y$) funksiýany ýokardaky ýaly saýlap alsak, (43.6) formula

$$(UV)_M = \frac{(UV)_P + (UV)_Q}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{PQ}\left(-V\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial V}{\partial x} - 2bUV\right)dx + \left(-U\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}V + 2aUV\right)dy -$$

$$-\iint_D V\,f\,dxdy \quad (43.7)$$

görnüşi alar. (43.7) formula **Riman formulasy** diýilýär. (43.7) formula (43.1),(43.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýär, sebäbi $PQ$ duganyň boýuna alynýan integralyň astynda belli funksiýalar saklanýar. Hakykatdan hem, $V$ ($x$, y) funksiýa ýokarda kesgitlendi, $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ funksiýalar bolsa (43.2) şertiň esasynda $AB$ egri çyzykda kesgitlenen. Eger $s$ – $AB$ egriniň dugasy bolsa, onda

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{AB} = \left.\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\cos(s,x) + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cos(s,y)\right)\right|_{AB} = \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_{AB} = \left.\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\cos(n,x) + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cos(n,y)\right)\right|_{AB} = \psi(x) \end{cases} \tag{43.8}$$

$$\begin{vmatrix} \cos(s,x) & \cos(s,y) \\ \cos(n,x) & \cos(n,y) \end{vmatrix} \neq 0.$$

şonuň üçin hem (43.8) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bardyr.

(43.5) deňlemäniň 1-3 şertleri kanagatlandyrýan çözüwi üýtgeýänleriň iki jübütine, ýagny $x$, $y$ jübütine we fiksirlenen $x_0$, $y_0$ jübüte bagly funksiýadyr. Şonuň üçin

$$V = R\,(x, y; x_0, y_0)$$

belgileme girizeliň. Onda (43.5) deňleme we 1-3 şertler aşakdaky görnüşde ýazylar:

$$L^* R \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(aR) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0 \tag{43.9}$$

1°. $\dfrac{\partial R(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x} = b(x, y_0)\,R(x, y_0; x_0, y_0),$

2°. $\dfrac{\partial R(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y} = a(x_0, y)\,R(x_0, y;\ x_0,, y_0),$

3°. $R\,(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1.$

(43.6) formula bolsa

$$U(M) = \frac{U(P)R(P,M) + U(Q)R(Q,M)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{QP}\left(R\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial R}{\partial x} + 2bUR\right)dx -$$

$$-\left(R\frac{\partial U}{\partial y} - U\frac{\partial R}{\partial y} + 2aUR\right)dy - \iint_D R\,f\,dxdy \tag{43.10}$$

görnüşi alar.

1°–3° şertleri integrirläp alarys:

$$\begin{cases} R(x,y_0;\,x_0,y_0)=\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} b(\tau,y_0)\,d\tau\right); \\ R(x_0,y;\,x_0,y_0)=\exp\left(\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0,\tau)\,d\tau\right). \end{cases} \tag{43.11}$$

(43.9) deňlemäniň (43.11) şertleri kanagatlandyrýan çözüwine **Riman funksiýasy** diýilýär. Ol funksiýa Gursa meselesiniň çözüwi hökmünde bardyr we ýeke-täkdir.

## §44. Telegraf deňlemesi üçin Koşi meselesi

Telegraf deňlemesi diýip

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2U \tag{44.1}$$

deňlemä aýdylýar.

(44,1) deňlemäniň Koşi şertlerini

$$U(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x) \tag{44.2}$$

kanagatlandyrýan çözüwini tapmak üçin Riman usulyny ulanalyň.

(44.1) deňlemede $\xi$ we $\eta$ üýtgeýän ululyklary

$$\xi=\frac{b}{a}(x+at),\ \eta=\frac{b}{a}(x-at) \tag{44.3}$$

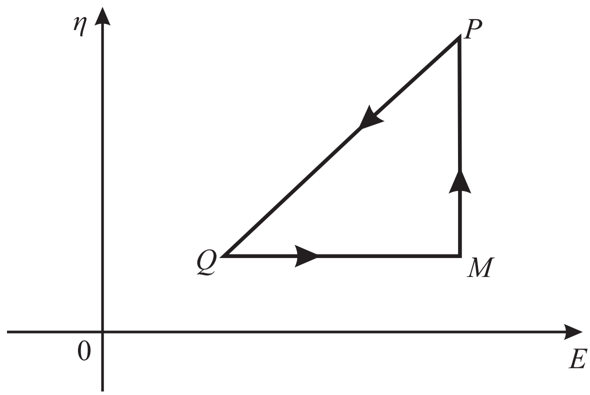
formulalaryň kömegi bilen girizip, kanonik görnüşe geçireliň. Onda ol deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$LU\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4}U=0. \tag{44.4}$$

Täze üýtgeýänlerde $t=0$ göni çyzyk

$$\xi=\eta \tag{44.5}$$

bissektrisa bolar (*7-nji çyzgy*).




**7-nji çyzgy**

(44.3) formuladan alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{1}{b}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Şeýlelik bilen, (44.2) şertleriň esasynda alarys:

$$U(\xi,\eta)\big|_{\eta=\xi}=\varphi\left(\frac{a}{b}\xi\right), \tag{44.6}$$

$$\left(\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}-\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi}=\frac{1}{b}\psi\left(\frac{a}{b}\xi\right). \tag{44.7}$$

(43.10) Riman formulasyndaky $a=0$, $b=0$, $f=0$ diýip we **(**44.5**)** deňligi göz öňünde tutup alarys:

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{U(\xi_0,\xi_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\xi_0)+U(\eta_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\eta_0,\eta_0)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi}R(\xi_0,\eta_0;\xi,\xi)\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi}d\xi-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}U(\xi,\xi)\left(\frac{\partial R}{\partial \xi}-\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)\Bigg|_{\eta=\xi}d\xi. \tag{44.8}$$

Indi $R$ ($\xi$, $\eta$; $\xi_0$, $\eta_0$) Riman funksiýasyny tapalyň, ol funksiýa çatyrymly

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4}R=0 \tag{44.9}$$

deňlemäni kanagatlandyrmaly we $MP$, $MQ$ häsiýetlendirijilerde birlige öwrülmeli.

(44.9) deňlemäniň çözüwini

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\omega(\lambda), \qquad \lambda=\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}$$

görnüşde gözläliň. Bu aňlatmany (44.9) deňlemede goýup $R$ ($\xi$, $\eta$; $\xi_0$, $\eta_0$) funksiýany

$$\omega''(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\omega'(\lambda)+\omega(\lambda)=0 \tag{44.10}$$

ady differensial deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görýäris. (44.10) deňlemäniň hususy çözüwi bolup nolunjy tertipli

$$I_0(\lambda)=1-\frac{\lambda^4}{2^2}+\frac{\lambda^6}{(2\cdot4)^2}-\frac{\lambda^8}{(2\cdot4\cdot6)^2}+\cdots \tag{44.11}$$

Bessel funksiýasy hyzmat edýär. (44.11) dargytmadan görnüşi ýaly,

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=I_0(\lambda) \tag{44.12}$$

diýip, (44.9) deňlemäniň

$$R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=1,$$
$$R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=1$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini alarys, ýagny (44.12) deňlik bilen kesgitlenýän funksiýa $MP$, $MQ$ kesgitleýjide birlige öwrülýär.

Diýmek, Riman funksiýasy guruldy, ol aşakdaky görnüşe eýe:

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=I_0\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}. \tag{44.13}$$

Bu ýerden alarys:

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \xi}\right|_{\eta=\xi}=\left.\frac{\partial I_0}{\partial \lambda}\frac{\partial I_0}{\partial \xi}\right|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi-\eta_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}I_0'(\lambda)\Big|_{\eta=\xi}$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \eta}\right|_{\eta=\xi}=\left.\frac{\partial I_0}{\partial \lambda}\frac{\partial I_0}{\partial \eta}\right|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}}I_0'(\lambda)\Big|_{\eta=\xi},$$

bu ýerde

$$\left.\left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=\xi}=\frac{1}{2}\frac{\xi-\eta_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}I_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right). \quad (44.14)$$

Indi (44.6), (44.7), (44.14) deňlikleri (44.8) formulada goýup we

$$U(\xi_0,\xi_0)=\varphi\left(\frac{a}{b}\xi_0\right),\ U(\eta_0,\eta_0)=\varphi\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)$$

deňlikleri göz öňünde tutup alarys:

$$U(\xi_0,\eta_0)=\frac{\varphi\left(\frac{a}{b}\xi_0\right)+\varphi\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\eta_0}^{\xi_0}I_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right)\psi\left(\frac{a}{b}\xi\right)d\xi-$$

$$-\frac{\xi_0-\eta_0}{4}\int_{\eta_0}^{\xi_0}\varphi\left(\frac{a}{b}\xi\right)\frac{I_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right)}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}\,d\xi.$$

$x$ we $t$ köne üýtgeýänlere geçip (0 belgileme taşlanylan) hem-de $z=\frac{a}{b}\xi$ orun çalşyrma edip, (44.1) deňlemäniň (44.2) şerti kanahatlandyrýan çözüwini alarys:

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-a^2t^2}\right)dz+$$

$$+\frac{bt}{2}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\frac{I_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2-x^2t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2-x^2t^2}}dz.$$

# §45. Tolkunyň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täklik teoremasy

## 1. Koşi meselesiniň goýluşy

Bilşimiz ýaly

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}\right)+f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,t\right) \quad (45.1)$$

deňlemä **tolkunyň deňlemesi** diýilýär. (45.1) deňleme üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

**Koşi meselesi.** $\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,t\right)$ üýtgeýänleriň $t>0$ ýarymgiňişliginde (45.1) deňlemäni we

$$U\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,0\right)=\varphi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),$$

$$\frac{\partial U\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan

$$U\left(x_1,x_2,\cdots,x_n t\right)\in C\left(t>0\right)\bigcap C^1\left(t\geq 0\right)$$

funksiýany tapmaly:

$$\varphi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in C^1\left(E_n\right),\ \psi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in C\left(E_n\right),$$

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n t\right)\in C\left(E_n\right).$$

## 2. Ýeke-täklik teoremasy

Tolkunyň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Ýönekeýlik üçin $a=1$ diýeliň, munuň üçin deňlemede $t$ -ni $\frac{t}{a}$ bilen çalşyrmak ýeterlik. Kesgitlilik üçin üç baglanyşyksyz üýtgeýänli ýagdaýa, ýagny

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \tag{45.2}$$

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y),\frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y) \tag{45.3}$$

meselä garalyň.

Iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň klasynda (45.2), (45.3) Koşi meselesiniň ýeke-täk çözüwiniň bardygyny subut edeliň. Tersine güman edeliň. Goý, (45.2), (45.3) meseläniň $U_1(x, y, t)$ we $U_2(x, y, t)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $U = U_1 - U_2$ tapawudy (45.2) deňlemäniň

$$U(x,y,0)=0, \qquad \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=0 \tag{45.4}$$

birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

$(x, y)$ islendik bahasynda we islendik $t > 0$ üçin $U(x, y, t) \equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň. $(x, y, t)$ üç ölçegli giňişlige garalyň we erkin $M_0(x_0, y_0, t_0)$ $(t_0 > 0)$ nokady alalyň. Depesi $M_0$ nokatda bolan

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$$

konusy $t = 0$ tekizlik bilen kesişdireliň. Goý, $D$ – konusyň gapdal üsti we $t = 0$ tekizligiň konusyň içinde ýatan bölegi bilen çäklenen ýaýla bolsun.

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

aňlatmada aşakdaky özgertmeleri edeliň:

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right],$$

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right].$$

Netijede, alarys:

$$2\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Soňky deňligi $D$ ýaýla boýunça integrirläliň. Çep böleginiň integraly nola deň bolar, sebäbi $U(x, y, t)$ funksiýa (45.2) deňlemäniň çözüwi. Alarys:

$$0=\iiint_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}d\tau,$$

bu ýerde $d\tau = dxdydz$. Ostrogradskiniň formulasyndan peýdalanyp, $D$ ýaýla boýunça integraly üst boýunça integrala özgerdeliň. $\Gamma$ bilen konusyň gapdal üstüni, $\sigma$ bilen bolsa onuň esasyny belläliň. (40.4) başlangyç şertleriň esasynda $\sigma$ – de

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}=0,$$

şonuň üçin hem $\Gamma$ boýunça integral galar

$$\iint_\Gamma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n,t)\,dS-$$

$$\iint_\Gamma\left[2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,x)-2\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial t}\cos(n,y)\right]dS=0,$$

ýa-da

$$\iint_{\Gamma} \frac{1}{\cos(n,t)} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,x) \right]^2 - \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \cos(n,x) + \right.$$

$$+ \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,y) \right]^2 -$$

$$\left. - \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \cos^2(n,y) + \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 \cos^2(n,t) \right\} dS = 0. \qquad (45.5)$$

Häsiýetlendiriji konusyň $\Gamma$ gapdal üstünde

$$\cos^2 (n, t) - \cos^2 (n, t) - \cos^2 (n, y) = 0.$$

Şonuň üçin (45.5) formula aşakdaky görnüşi alar:

$$\iint_{\Gamma} \frac{1}{\cos(n,t)} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,x) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{\partial U}{\partial y} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,t) \right]^2 \right\} dS = 0. \qquad (45.6)$$

$\Gamma$ üstde $\cos(n,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ we integral astyndaky funksiýa üznüksiz hem-de otrisatel däl. Şonuň üçin hem (45.6) deňlikden ol funksiýanyň nola deňligi gelip çykýar, ýagny

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,y) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cos(n,t) - \frac{\partial U}{\partial t} \cos(n,y) = 0,$$

ýa-da

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\cos(n,x)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\cos(n,y)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial t}}{\cos(n,t)} = \lambda. \qquad (45.7)$$

Goý, $\vec{l}$ – konusyň käbir emele getirijisi bolsun. (45.7) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\left(\vec{l}, x\right) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\left(\vec{l}, y\right) + \frac{\partial U}{\partial t}\cos\left(\vec{l}, t\right) =$$

$$= \lambda\left[\cos(n,x)\cos\left(\vec{l}, x\right) + \cos(n,y)\cos\left(\vec{l}, t\right) + \cos(n,t)\cos\left(\vec{l}, t\right)\right] =$$

$$= \lambda\cos\left(n, \vec{l}\right) = 0$$

sebäbi konusyň emele getirijisi normal bilen elmydama gönüburç emele getirýär. Diýmek, $\bar{l}$ emele getirijiniň boýuna

$$U(x, y, t) = \text{const.}$$

$\bar{l}$ emele getiriji $t = 0$ tekizlik bilen kesişende $U(x, y, t) = 0$ şonuň üçin $\bar{l}$ emele getirijiniň boýuna $U(x, y, t) = 0$. Bu deňlik $M_0$ nokatda hem ýerine ýetýär. $M_0$ erkin nokat, şonuň üçin hem

$$U(x, y, t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad U_1(x, y, t) \equiv U_2(x, y, t).$$

## §46. Kirhgof formulasy

Tolkunyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \tag{46.1}$$

birjynsly deňlemesiniň

$$U(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \frac{\partial U(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z) \tag{46.2}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga garalyň, bu ýerde $\varphi$ özüniň üçünji tertibe çenli, $\psi$ bolsa özüniň ikinji tertibe çenli önümleri bilen birlikde üznüksiz funksiýalar.

Ilki bilen

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^M} \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_\tau \tag{46.3}$$

funksiýanyň (46.1) deňlemäniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň, bu ýerde $S_{at}^M$ – merkezi $M(x, y, z)$ nokatda bolan $r = at$ radiusly sfera.

$S_{at}^{M}$ sferanyň nokatlarynyň koordinatalary

$$\xi = x + \alpha\, at,\ \eta = y + \beta at,\ \zeta = z + \gamma at$$

görnüşde aňladylyp bilner, $(\alpha, \beta, \gamma) - S_{at}^{M}$ sferanyň radiusynyň ugrukdyryjy kosinuslary:

$$\alpha = \sin\theta \cos\varphi,\ \beta = \sin\theta \sin\varphi,\ \gamma = \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Bu çalyşmadan soň $S_{at}^{M}$ sfera merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik $S_1$ sfera geçer, bu sferalaryň degişli $d\sigma_r$ we $d\sigma_1$ elementleriniň meýdanlary aşakdaky ýaly baglanyşykda bolar:

$$d\sigma_t = r^2\, \sigma_1 = a^2\, t^2\, d\sigma_1 = a^2\, t^2 \sin\theta d\theta d\psi.$$

Onda (46.3) integral

$$U(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \mu(x + \alpha\, at, y + \beta at,\ z + \gamma at)\, d\sigma_1 \qquad (46.4)$$

görnüşi alar. Bu ýerden, eger $\mu$ $(\xi, \eta, \zeta)$ funksiýa özüniň ikinji tertibe çenli önümleri bilen birlikde üznüksiz bolsa, onda $U$ $(x, y, z, t)$ funksiýanyň ikinji tertipli üznüksiz önüme eýedigini görmek kyn däl.

(46.4) formuladan alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_1 \qquad (46.5)$$

ýa-da, $S_{at}^{M}$ sfera geçip alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}^{M}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r.$$

(46.4) formulany $t$ boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \mu(x + \alpha\, at, y + \beta at, z + \gamma at)\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{at}{4\pi} \iint_{S_1} \left( \alpha \frac{\partial \mu}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \mu}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) d\sigma_\tau. \qquad (46.6)$$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ önümi hasaplamak üçin (46.6) deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iint\limits_{S_{at}^{M}}\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\mu}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\right)d\sigma_{\tau}.$$

Ostrogradskiý formulasyny ulanyp, soňky deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iint\limits_{D_{at}^{M}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$

bu ýerde $D_{at}^{M}$ – merkezi $M\,(x, y, z)$ nokatda bolan $r = at$ radiusly şar.

$$I=\iint\limits_{D_{at}^{M}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

diýip alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{U}{t}+\frac{\mathrm{I}}{4\pi at}.$$

Bu aňlatmany $t$ boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 t}=-\frac{U}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}=$$

$$=-\frac{U}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{U}{t}+\frac{I}{4\pi at}\right)-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{I}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (46.7)$$

$\dfrac{\partial U}{\partial t}$ önümi hasaplalyň. Onuň üçin $I$ integralda merkezi $M\,(x, y, z)$ nokatda bolan $(\rho, \varphi, \theta)$ sferik koordinatalara geçeliň:

$$I=\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta d\theta d\varphi d\rho.$$

$t$ boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)(at)^2\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= a\iint_{S_{at}^M}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \qquad (46.8)$$

(46.7) we (46.8) deňliklerden alarys:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\iint_{S_{at}^M}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \qquad (46.9)$$

(46.5) we (46.9) deňlikleri deňeşdirip, iki gezek üznüksiz differensirlenýän islendik $\mu\,(x, y, z)$ funksiýa üçin, (46.3) deňlik bilen kesgitlenýän $U\,(x, y, z, t)$ funksiýanyň (46.1) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl. (46.4) we (46.6) formulalardan görnüşi ýaly, (46.3) deňlik bilen kesgitlenýän $U\,(x, y, z, t)$ funksiýa

$$U(x,y,z,0)=0,\ \frac{\partial U(x,y,z,0)}{\partial t}=\mu(x,y,z) \qquad (46.10)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar.

Eger $U\,(x, y, z, t)$ funksiýa (46.1) deňlemäniň çözüwi bolsa, onda $V(x,y,z,t)=\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t}$ funksiýa hem şol deňlemäniň çözüwi bolar. Hakykatdan hem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)-a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-a^2\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)\right]=0.$$

$V(x, y, z, t)$ funksiýanyň

$$V\left(x,y,z,0\right)=\mu\left(x,y,z\right),\ \frac{\partial V\left(x,y,z,0\right)}{\partial t}=0 \qquad (46.11)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygyny görmek kyn däl.

Indi (46.10) başlangyç şertler ýagdaýynda $\mu(x, y, z) = \psi(x, y, z)$, (46.11) başlangyç şertler ýagdaýynda bolsa $\mu(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$ diýip we alnan çözüwleri goşup, (46.1) deňlemäniň (46.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini alarys.

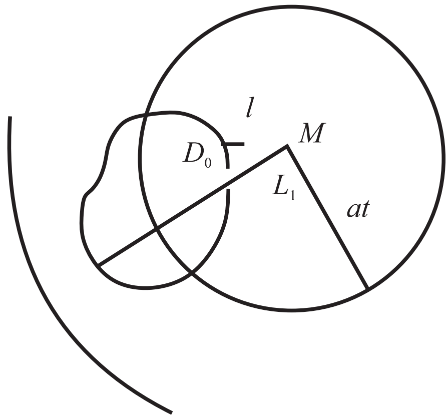
Şeýlelik bilen, (46.1) deňlemäniň (46.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi aşakdaky görnüşde alarys:

$$U\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{r}d\sigma_{r}\right)+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi\left(\xi,\eta,\zeta\right)}{r}d\sigma_{r}. \qquad (46.12)$$

(41.12) formula **Kirhgof formulasy** diýilýär.

Kirhgof formulasy üç ölçegli giňişlikde tolkunyň ýaýraýşyny fiziki taýdan düşündirmäge mümkinçilik berýär.

Goý, başlangyç şertler giňişlikde lokallaşdyrylan bolsun, ýagny gutarnykly $\bar{D}_0$ ýaýlanyň daşynda $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ bolsun. $M\left(x,y,z\right)\notin\bar{D}_0$ nokady alalyň we ony soňra üýtgetmäliň (fiksirläliň). $L$ we $l$ bilen $M(x, y, z)$ nokatdan $D_0$ ýaýlanyň $S$ üstüne çenli degişlilikde iň daş we iň golaý uzaklyklary belläliň. $at < l$ ýa-da $t<\frac{l}{a}$ bolsa $S_{at}^{M}$ sfera $D_0$ ýaýlanyň daşynda ýatýar, şonuň üçin $S_{at}^{M}$ sferada $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ funksiýalaryň ikisi hem nola deň we Krihgof formulasyndan $U(x, y, z, t) \equiv 0$ alarys, ýagny başlangyç şertler $M(x, y, z)$ nokada gelip ýetişenoklar, $t<\frac{l}{a}$ pursatda $S_{at}^{M}$ sfera $S$ üste galtaşýar we tolkunyň öňki fronty $M(x, y, z)$ nokatdan geçýär, $t<\frac{l}{a}$ pursatdan başlap $t=\frac{L}{a}$ pursata çenli $S_{at}^{M}$ sfera $S$ üsti kesýär we $U(x, y, z, t) \neq 0$. $t=\frac{L}{a}$ pursatdan başlap $S_{at}^{M}$ sferanyň $S$ üst bilen umumy nokady bolanok we $U(x, y, z, t) = 0$. $t=\frac{L}{a}$ pursat bolsa $M(x, y, z)$ nokatdan tolkunyň yzky frontunyň geçmesi degişli (*8-nji çyzgy*).




**8-nji çyzgy**

Şeýlelik bilen, giňişlikde lokallaşdyrylan başlangyç şertler her bir $M$ $(x, y, z)$ nokatda

$$\frac{l}{a} < t < \frac{L}{a}$$

wagt aralygynda bolup geçýän lokallaşdyrylan hereket döredýärler (Gýugens prinsipi).

## §47. Silindrik tolkunlar. Gaýtma usuly

$\varphi$ $(x, y, z)$, $\psi$ $(x, y, z)$ funksiýalaryň diňe $x$, $y$ üýtgeýän ululyklara bagly bolan hususy halyna garalyň, ýagny olar $z$ okuna parallel bolan her bir gönüde özleriniň hemişelik bahalaryny saklaýan bolsun. Eger $M$ $(x, y, z)$ nokady $z$ okuna parallel süýşürseň, onda (46.12) Krihgof formulasynyň sag bölegindäki integrallaryň bahasy üýtgemez, ýagny $U$ $(x, y, z)$ funksiýa hem z-e bagly bolmaz we (46.12) formula

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \qquad (47.1)$$

deňlemäniň

$$U(x,y,0)=\varphi(x,y), \frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x,y) \qquad (47.2)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini berer. (46.12) çözüwe $xy$ tekizlikde seretmek bolýar. Onuň üçin (46.12) formuladaky $S_{at}^{M}$ sfera boýunça integrallary $xy$ tekizliginde ýatan töwerek boýunça integrallara özgertmeli. $xy$ tekizliginden $M$ $(x, y)$ nokady alalyň. $(\xi, \eta, \zeta)$ koordinatalary

$$\xi = x+\alpha\, at, \eta = y+\beta at, \zeta = z+\gamma at$$

formulalar bilen kesgitlenýän nokat $z = 0$ bolanda merkezi $M$ $(x, y, 0)$ nokatda bolan $at$ radiusly $S_{at}^{M}$ sferanyň üýtgeýän nokatlary bolar. Ol sferanyň $xy$ tekizlikden aşakda we ýokarda ýatan bölekleri tekizlige merkezi $M$ $(x, y)$ nokatda bolan $at$ radiusly $C_{at}^{M}$ tegelek görnüşinde proýektirlenýärler. Sferanyň we onuň proýeksiýasynyň $d\sigma_r, dC_{at}^{M}$ elementleriniň meýdanlary

$$dC_{at}^{M}=\cos(n,z)\,d\sigma_r$$

deňlik bilen baglanyşykly, bu ýerde $n - S_{at}^{M}$ sfera geçirilen normal wektoryň ugry, ýagny $z$ oky bilen ýiti burç emele getirýän radiusy. Eger $N$ sferanyň üýtgeýän nokady, $N_1$ onuň $xy$ tekizlige proýeksiýasy bolsa, onda

$$\cos(n,z)=\frac{|NN_1|}{|MN|}=\frac{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at},$$

bu ýerde $(\xi,\eta)-C_{at}^{M}(\xi,\eta)$ tegelegiň üýtgeýän nokadynyň koordinatalary. (46.12) formulany özgertmäniň netijesinde alarys:

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{C_{at}^{M}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{C_{at}^{M}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^{2}-(\xi-x)^{2}-(\eta-y)^{2}}}. \qquad (47.3)$$

(47.1) deňlemäniň (47.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini berýän (47.3) formula Puasson formulasy diýilýär.

$\varphi$ $(x, y)$ we $\psi$ $(x, y)$ başlangyç oýanmalar $xy$ tekizligiň $S$ kontur bilen çäklenen $D$ gutarnykly ýaýlasynda noldan tapawutly, ýaýlanyň daşynda bolsa nola deň bolsun. Goý, $M$ $(x, y)$ nokat $D$ ýaýlanyň daşynda ýatan bolsun. $M$ $(x, y)$ nokatdan $S$ kontura çenli iň golaý uzaklygy $l$ bilen, iň daş uzaklygy bolsa $L$ bilen belläliň. $t < \frac{l}{a}$ bolsa $C_{at}^{M}$ tegelegiň $D$ ýaýla bilen umumy nokady ýok, $\varphi$ $(x, y)$ we $\psi$ $(x, y)$ funksiýalar bütin $C_{at}^{M}$ tegelekde nola deň we (47.3) formulanyň esasynda $U(x, y, t) = 0$ – $M$ $(x, y)$ nokada tolkun heniz gelip ýetişenok. $t < \frac{l}{a}$ pursatda $M$ nokada tolkunyň öňki fronty gelýär. $t < \frac{L}{a}$ bahalar üçin $C_{at}^{M}$ tegelek $D$ ýaýlany öz içinde saklaýar we (47.3) formulanyň esasynda

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint_{D}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^{2}-(\xi-x)^{2}-(\eta-y)^{2}}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint_{D}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^{2}-(\xi-x)^{2}-(\eta-y)^{2}}}. \qquad (47.4)$$

Bu ýagdaýda $t = \frac{L}{a}$ wagtdan soň üç ölçegli ýagdaýdaky ýaly $U(x, y, t)$ funksiýa nola öwrülmeýär. Ýöne maýdalawjyda $a^2 t^2$ = nyň barlygyny nazarda tutup, $t \to \infty$ bolanda $U(x, y, t) \to 0$ diýip tassyklap bilýäris. Şeýlelik bilen, başlangyç oýanmalar tekizlikde lokallaşan bolanda hereket wagt boýunça lokallaşan däldir. Bu ýagdaýda öňki fronty bar bolup, yzky fronty bolsa ýok tolkun döreýär (Gýugens prinsipi ýerine ýetmeýär).

## §48. Birjynsly däl deňleme üçin Koşi meselesi

Aşakdaky meselä garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+f\left(x,y,t\right), \tag{48.1}$$

$$U\left(x,y,0\right)=\varphi\left(x,y\right),\ \frac{\partial U\left(x,y,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x,y\right). \tag{48.2}$$

Bu meseläniň çözüwini

$$U(x, y, t) = U_1(x, y, t) + U_2(x, y, t) \tag{48.3}$$

jem görnüşde gözläliň. (48.3) jemi (48.1) deňlemede we (48.2) başlangyç şertlerde goýup alarys:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right)+f\left(x,y,t\right),$$

$$U_1(x, y, 0) + U_2(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$\frac{\partial U_1\left(x,y,0\right)}{\partial t}+\frac{\partial U_2\left(x,y,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x,y\right).$$

Goý, $U_1(x, y, t)$ funksiýa

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right),\\ U_1\left(x,y,0\right)=\varphi\left(x,y\right),\\ \dfrac{\partial U_1\left(x,y,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x,y\right).\end{cases} \tag{48.4}$$

meseläniň çözüwi bolsun. Onda $U_2(x, y, t)$ funksiýa

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right)+f\left(x,y,t\right),\\ U_2\left(x,y,0\right)=0,\\ \dfrac{\partial U_2\left(x,y,0\right)}{\partial t}=0.\end{cases} \tag{48.5}$$

meseläniň çözüwi bolar.

(48.4) meseläniň çözüwi (47.3) Puasson formulasy bilen berilýär.

(48.5) meseläniň çözüwini tapmak üçin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right), \quad t > \tau \\ V\big|_{t=\tau} = 0, \quad \dfrac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} = f(x, y, \tau) \end{cases} \tag{48.6}$$

kömekçi meselä garalyň. (48.6) meseläniň çözüwini, $t$-ni $t - \tau$ bilen çalşyryp, Puasson formulasyny ulanyp ýazmak bolýar, sebäbi başlangyç şertler $t = 0$ bolanda däl-de, $t = \tau$ bolanda berilýär. Alarys:

$$V(x, y, t; \tau) = \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C^M_{at(t-\tau)}} \frac{f(\xi, \eta, \tau)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \tag{48.7}$$

Indi

$$U_2(x, y, t) = \int_0^t V(x, y, t; \tau)\, d\tau \tag{48.8}$$

formula bilen kesgitlenýän $U_2$ $(x, y, t)$ funksiýanyň (48.5) meseläniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň.

Hakykatdan hem, (48.8) formuladan alarys:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) d\tau. \tag{48.9}$$

(48.8) aňlatmany $t$ boýunça differensirläp alarys:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = V(x, y, t; \tau)\big|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}\, d\tau. \tag{48.10}$$

Bu ýerde integralyň daşyndaky agza başlangyç şertiň esasynda nola deň. $t$ boýunça ýene bir gezek differensirläp alarys:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \frac{\partial V(x, y, t; \tau)}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} + \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\, d\tau,$$

özünem integralyň daşyndaky agza başlangyç şertiň esasynda $f(x, y, t)$ funksiýa deň, ýagny

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = f\left(x,y,t\right) + \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} d\tau. \qquad (48.11)$$

(48.9), (48.11) formulalardan we (48.5) meseläniň deňlemesinden $U\ (x, y, t)$ funksiýanyň (48.5) deňlemäni kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Başlangyç şertleriň ýerine ýetýändigi (48.8) we (48.10) formulalardan görünýär.

$U_1\ (x, y, t)$ we $U_2\ (x, y, t)$ funksiýalaryň aňlatmalaryny (48.3) formulada ornuna goýup, (48.1) deňlemäniň (48.2) başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini aşakdaky görnüşde alarys:

$$U\left(x,y,t\right) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{C_{at}^M} \frac{\varphi\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta}{\sqrt{\left(at\right)^2 - \left(\xi - x\right)^2 - \left(\eta - y\right)^2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}^M} \frac{\psi\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta}{\sqrt{\left(at\right)^2 - \left(\xi - x\right)^2 - \left(\eta - y\right)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \iint\limits_{C_{at(t-\tau)}^M} \frac{f\left(\xi,\eta;\tau\right) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2\left(t-\tau\right)^2 - \left(\xi - x\right)^2 - \left(\eta - y\right)^2}}.$$

## §49. Umumylaşdyrylan çözüw düşünjesi

Ýönekeýlik üçin kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşi meselesine garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \qquad (49.1)$$

$$U\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad \frac{\partial U\left(x.\ 0\right)}{\partial t} = \psi\left(x\right),\ -\infty < x + \infty. \qquad (49.2)$$

Bilşimiz ýaly, Dalamber formulasy $\varphi\ (x) \in C^2\ (E_1)$, $\psi\ (x) \in C^2\ (E_1)$ bolanda (49.1)-(49.2) Koşi meselesiniň çözüwini berýär we ol çözüw $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiýalara üznüksiz bagly bolýar. Dalamber formulasy bilen kesgitlenýän $U(x, t)$ funksiýa $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiýalar diňe üznüksiz bolanda hem olara üznüksiz bagly bolýar. Ýöne ol funksiýa kirşiň yrgyldysynyň (49.1) deňlemesini kanagatlandyrmaýar, sebäbi $U(x, t)$ funksiýanyň gerekli tertipdäki önümleri bolmaýar.

$\varphi(x) \in C^1(E_1)$, $\psi(x) \in C(E_1)$ bolanda $U(x, t)$ funksiýanyň olara üznüksiz baglydygyndan peýdalanyp, umumylaşdyrylan çözüw düşünjesi girizilýär.

$\varphi(x) \in C^1(E_1)$, $\psi(x) \in C(E_1)$ funksiýalara deňölçegli ýygnanýan $\varphi_k(x) \in C^2(E_1)$, $\psi_k(x) \in C^1(E_1)$ funksiýalara garalyň. Onda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \; U(x,0) = \varphi(x), \; \frac{\partial U(x.0)}{\partial t} = \psi(x)$$

Koşi meselesiniň çözüwi bardyr we ol çözüw

$$U_k(x,t) = \frac{\varphi_k(x-at) + \varphi_k(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_k(z)\,dz$$

Dalamber formulasy bilen berilýär. Soňky deňlikde predele geçip alarys:

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz.$$

Alnan $U(x, t)$ funksiýa Koşi meselesiniň **umumylaşdyrylan çözüwi** diýilýär. Umumylaşdyrylan çözüwiň Dalamber formulasy bilen aňladylyşyndan, onuň başlangyç şertleri kanagatlandyrýandygy gelip çykýar.

Şeýlelik bilen, Koşi meselesiniň umumylaşdyrylan çözüwi diýip $\varphi_k(x) \in C^2(E_1)$, $\psi_k(x) \in C^1(E_1)$ funksiýalar $\varphi(x) \in C^1(E_1)$, $\psi(x) \in C(E_1)$ funksiýalara deňölçegli ýygnananda $U_k(x, t)$ yzygiderli çözüwleriň $U(x, t)$ deňölçegli predeline aýdylýar.

## §50. Giperbolik deňlemeler üçin gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligi, başlangyç maglumatlar bilen üznüksiz baglylygy

### 1. Meseläniň goýluşy

$Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$ gönüburçlukda

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) - q(x)U + f(x,t) \qquad (50.1)$$

deňlemä garalyň, bu ýerde $\rho\ (x)$, $p\ (x)$, $\rho'\ (x)$, $q\ (x)$ – $[0,\ l]$ kesimde üznüksiz funksiýalar, şunlukda,

$$\rho\ (x) > \rho_0 > 0,\ p\ (x) > p_0 > 0,\ q\ (x) \geq 0.$$

(50.1) deňleme üçin birinji, ikinji we üçünji gatyşyk mesele diýip atlandyrylýan meseleler aşakdaky ýaly goýulýar.

**Birinji gatyşyk mesele.** $Q$ gönüburçlukda (50.1) deňlemäniň $\bar{Q}$ ýapyk gönüburçlukda üznüksiz

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \qquad (50.2)$$

başlangyç şertleri we

$$U\ (0,\ t) = \mu_1\ (t),\ U\ (l,\ t) = \mu_2\ (t)\ (0 \leq t \leq T) \qquad (50.3)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0), \psi(0) = \mu_1'(0), \psi(l) = \mu_2'(0).$$

**Ikinji gatyşyk mesele**. $Q$ gönüburçlukda (50.1) deňlemäniň $\bar{Q}$ gönüburçlukda üznüksiz, (50.2) başlangyç şertleri we

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = v_1(t), \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = v_2(t) \qquad (50.4)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

**Üçünji gatyşyk mesele**. $Q$ gönüburçlukda (50.1) deňlemäniň $\bar{Q}$ gönüburçlukda üznüksiz, (50.2) başlangyç şertleri we

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x} - h_1 U(0,t) = \theta_1(t), \\ \dfrac{\partial U(l,t)}{\partial x} + h_2 U(l,t) = \theta_2(t), \\ h_1 > 0, \qquad h_2 > 0, \end{cases} \qquad (50.5)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

## 2. Ýeke-täklik teoremasy

$Q$ gönüburçlukda iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalaryň toparynda gatyşyk meseleleriň çözüwleriniň ýeke-täkligini subut edeliň.

Goý, (50.1), (50.2), (50.3) gatyşyk meseläniň $U_1(x, t)$ we $U_2(x, t)$ iki sany çözüwi bar bolsun. Onda olaryň $V(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ tapawudy

$$\rho(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right) - q(x)V \tag{50.6}$$

birjynsly deňlemäniň

$$V(x,0) = 0, \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0, \tag{50.7}$$

$$V(0, t) = 0,\ V(l, t) = 0 \tag{50.8}$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. $\bar{Q}$ gönüburçlukda $V(x, t) \equiv 0$ bolýandygyny görkezeliň.

Energiýa integralyna garalyň:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + p(x)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + q(x)V^2\right]dx \tag{50.9}$$

(50.7) başlangyç şertleriň esasynda $E(0) = 0$. (50.6) deňlemäniň (50.8) gyra şertleri kanagatlandyrýan islendik çözüwi üçin $E(t)$ funksiýanyň hemişelikdigini görkezeliň. Hakykatdan hem, (50.9) deňligi differensirläp alarys:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^t \left[\rho(x)\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + p(x)\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + q(x)V\frac{\partial V}{\partial t}\right]dx.$$

Ortaky agzany bölekler boýunça integrirläp alarys:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^t \left[\rho(x)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial V}{\partial t}\right) + q(x)V\right]\frac{\partial V}{\partial t}dx + \left.\left(p(x)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right|_{x=0}^{x=l}. \tag{50.10}$$

Bu ýerden (50.6) deňlemäniň we (50.8) gyra şertleriň esasynda

$$\frac{dE(t)}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad E(t)=\text{const}$$

gelip çykýar. $E$ (0) = 0 bolanlygy üçin $E$ (t) ≡ 0. Onda (50.9) deňlikden alarys:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}=0 \;\Rightarrow\; V(x,t)=0.$$

(50.7) başlangyç şertiň esasynda $t$ = 0 bolanda $V$ ($x$, $t$) nola deň. Şonuň üçin hem $\bar{Q}$ gönüburçlukda $V$ ($x$, $t$) ≡ 0. Diýmek, $U_1$ ($x$, $t$) = $U_2$ ($x$, $t$).

Ikinji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Goý, (50.1), (50.2), (50.4) meseläniň $U_1$ ($x$, $t$) we $U_2$ ($x$, $t$) iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $V$ ($x$, $t$) = $U_1$ ($x$, $t$) – $U_2$ ($x$, $t$) tapawudy (50.6) deňlemäniň (50.7) başlangyç şertleri we

$$\frac{\partial V(0,t)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial V(l,t)}{\partial x}=0 \tag{50.11}$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. (50.10) deňlikden (50.6) deňlemäniň we (50.11) gyra şertiň esasynda

$$\frac{dE(t)}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad E(t)=\text{const}$$

gelip çykýar. Ýene-de $E$ (0) = 0 bolany üçin $E$ ($t$) = 0. Onda (50.9) deňlikden

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad V(x,t)=\text{const}.$$

Bu ýerden (50.7) başlangyç şertiň esasynda $\bar{Q}$ ýaýlada $V(x, t) \equiv 0$ bolýandygy gelip çykýar. Diýmek, $U_1$ ($x$, $t$) ≡ $U_2$ ($x$, $t$), ýagny ikinji gatyşyk gyra meseläniň çözüwi ýeke-täkdir.

Indi üçünji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň. Goý, (50.1), (50.2), (50.5) meseläniň $U_1$ $(x, t)$ we $U_2$ $(x, t)$ iki çözüwi bar bolsun. Onda ol çözüwleriň $V(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ tapawudy (50.6) deňlemäniň (50.7) başlangyç şertleri we

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(0,t)}{\partial x} - h_1 V(0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial V(l,t)}{\partial x} + h_2 V(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (50.12)$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. (50.6) deňlemäni we (50.12) gyra şertleri peýdalanyp, (50.10) deňlikden alarys:

$$\frac{dE(t)}{dt} = p(l)\frac{\partial V(l,t)}{\partial x}\,\frac{\partial V(l,t)}{\partial t} - p(0)\frac{\partial V(0,t)}{\partial x}\,\frac{\partial V(0,t)}{\partial t} =$$

$$= -h_2 p(l)V(l,t)\frac{\partial V(l,t)}{\partial t} - h_1 p(0)V(0,t)\,\frac{\partial V(0,t)}{\partial t}$$

ýa-da

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[h_2 p(l)V^2(l,t) + h_1 p(0)V^2(0,t)\right].$$

Soňky deňligi $[0, t]$ kesimde integrirläp alarys:

$$E(t) - E(0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[h_2 p(l)V^2(l,t) - h_2 p(l)V^2(l,0) + h_1 p(0)V^2(0,t) - h_1 p(0)V^2(0,0)\right]$$

Bu ýerden (50.7) başlangyç şertleriň esasynda

$$E(t) = -\frac{1}{2}\left[h_2 p(l)V^2(l,t) + h_1 p(0)V^2(0,t)\right] \le 0$$

(50.9) formulanyň sag bölegindäki integralyň astyndaky funksiýanyň otrisatel däldiginden $E(t) \ge 0$ gelip çykýar. Diýmek, $E(t) = 0$. Onda (50.9) formuladan alarys:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

ýagny

$$V(x, t) = \text{const}.$$

Bu ýerden

$$V\left(x,0\right)=0 \;\Rightarrow\; V(x,t)\equiv 0 \;\Rightarrow\; U_1\left(x,t\right)\equiv U_2\left(x,t\right).$$

Şeýlelik bilen, üçünji gatyşyk gyra meseläniň ýeke-täkligi subut edildi.

### 3. Çözüwiň başlangyç şertlere üznüksiz baglylygy

**1-nji teorema.** Goý, $U_1(x, t)$ we $U_2(x, t)$ funksiýalar $\bar{Q}$ gönüburçlukda (50.1) deňlemäniň (50.3) birmeňzeş gyra şertleri we

$$U_1\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right), \qquad \frac{\partial U_,\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi_1\left(x\right),$$

$$U_1\left(x,0\right)=\varphi_2\left(x\right), \qquad \frac{\partial U_2,\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi_2\left(x\right),$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan iki sany çözüwi bolsun. Eger $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ tapawutlar we $\varphi'(x)$ önüm $[0, l]$ kesimde absolýut ululyklary boýunça ýeterlik kiçi bolsa, onda $U(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ tapawut hem $Q$ gönüburçlukda absolýut ululygy boýunça ýeterlik kiçidir.

**Subudy.** $V(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ tapawut

$$\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p\left(x\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right)-q\left(x\right)U \qquad (50.13)$$

birjynsly deňlemäniň

$$U(0, t) = 0,\; U(l, t) = 0 \qquad (50.14)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right), \frac{\partial U\left(x,0\right)}{\partial t}=\psi\left(x\right) \qquad (50.15)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýar.

Ýene-de energiýa integralyna garalyň:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx.$$

Bilşimiz ýaly, $E$ ($t$) funksiýa (50.13) deňlemäniň (50.14) gyra şertleri kanagatlandyrýan islendik çözüwinde hemişelik alamatyny saklaýar. Şeýlelik bilen, $E(t)=E(0)$, $(0\le t\le T)$ ýa-da (50.15) başlangyç şertleriň esasynda

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx=$$

$$=\int_0^t\left[\rho(x)\psi^2(x)+p(x)\varphi'^2(x)+q(x)\varphi^2(x)\right]dx.$$

Goý,

$$M=\max_{[0,l]}\{\rho(x),p(x),q(x)\}$$

bolsun, onda

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx\le$$

$$\le M\int_0^l\left[\psi^2(x)+\varphi'^2(x)+\varphi^2(x)\right]dx$$

şerte görä deňsizligiň sag bölegi ýeterlik kiçi. Şonuň üçin hem islendik $t\in[0,T]$ üçin alarys:

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+q(x)U^2\right]dx<\varepsilon^2.$$

Bu ýerden

$$\int_0^l p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx<\varepsilon^2.$$

Alarys:

$$U(x,t)-U(0,t)=\int_0^x \frac{\partial U}{\partial x}\,dx,$$

$$|U(x,t)|\le \int_0^x \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|dx=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\,\sqrt{p(x)}\,\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|dx\le$$

$$\le\left[\int_0^x \frac{dx}{p(x)}\int_0^x p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\le\left[\int_0^l \frac{dx}{p(x)}\int_0^l p(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}<K\varepsilon,$$

bu ýerde: $K$ – hemişelik san. Şeýlelik bilen, $U(x, t)$ funksiýa $Q$ gönüburçlukda ýeterlik kiçi. Teorema subut edildi.

**Bellik.** Çözüwiň başlangyç şertlere üznüksiz baglydygyny ikinji we üçünji gyra şertler üçin hem subut etmek bolýar.

## §51. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin birinji gyra mesele. Furýe usuly

Üýtgeýän ululyklary bölme ýa-da Furýe usuly hususy önümdäki differensial deňlemeleri çözmekde giňden ýaýran usullaryň biridir. Bu usuly uçlary berkidilen kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin beýan edeliň.

Goý,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l,\ t>0 \qquad (51.1)$$

deňlemäniň

$$U(0, t)=0,\ U(l, t)=0 \qquad (51.2)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\ \psi(x) \qquad (51.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun.

## 1. Formal çözüwiň gurluşy

Ilki bilen (51.1) deňlemäniň toždestwolaýyn noldan tapawutly, (51.2) birjynsly gyra şertleri kanagatlandyrýan we

$$U(x, t) \equiv X(x)\, T(t) \tag{51.4}$$

köpeltmek hasyly görnüşde aňladyp bolýan hususy çözüwini tapalyň.

(51.4) görnüşdäki çözüwi (51.1) deňlemede goýup alarys:

$$X(x)\, T''(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

ýa-da

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \tag{51.5}$$

(51.4) funksiýanyň (51.1) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin (51.5) gatnaşyk $0 < x < l$, $t > 0$ üýtgeýän ululyklaryň islendik bahasynda ýerine ýetmeli. (51.5) deňligiň sag bölegi diňe $t$ – e bagly funksiýa, çep bölegi bolsa diňe $x$ – bagly funksiýa. Diýmek, deňligiň ýerine ýetmegi üçin gatnaşyklaryň ikisi hem şol bir hemişelik sana deň bolmaly, ol hemişeligi – $\lambda$ bilen belläliň:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda. \tag{51.6}$$

(51.6) gatnaşyklardan $X(x)$, $T(t)$ funksiýalary kesgitlemek üçin

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \tag{51.7}$$

$$T(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,\ T(t) \neq 0, \tag{51.8}$$

ady differensial deňlemeleri alarys. (51.2) şertlerden $X(x)$ funksiýa üçin gyra şertleri alarys:

$$U(0, t) = X(0)\, T(t) = 0,\ U(l, t) = X(l)\, T(t) = 0,$$

bu ýerden görnüşi ýaly, $X(x)$ funksiýa

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \tag{51.9}$$

gyra şertleri kanagatlandyrmaly.

Şeýlelik bilen, $X(x)$ funksiýany kesgitlemek üçin ýönekeý hususy baha hakyndaky mesele alyndy: $\lambda$ parametriň

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{51.10}$$

meseläniň noldan tapawutly çözüwi bolar ýaly bahalaryny we ol çözüwleri tapmaly. $\lambda$ parametriň şeýle bahalaryna (51.10) meseläniň **hususy bahalary**, olara degişli çözüwlere bolsa **hususy funksiýalary** diýilýär.

(51.10) meseläniň hususy bahalaryny we hususy funksiýalaryny tapalyň. Onuň üçin $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ üç ýagdaýa aýratynlykda garalyň.

**1.** $\lambda < 0$ bolanda (51.7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}\cdot x}$$

görnüşde ýazylýar. $C_1$ we $C_2$ – erkin henişelik sanlar. (51.9) gyra şertlerden alarys:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot l} = 0.$$

Bu ýerden

$$C_2 = -C_1,\ \ C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\cdot l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot l}\right) = 0.$$

$\sqrt{-\lambda}\cdot l$ – hakyky we položitel, şonuň üçin $e^{\sqrt{-\lambda}\cdot l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot l} \neq 0$. Onda

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0,$$

diýmek,

$$X(x) = 0.$$

**2.** $\lambda = 0$ bolanda (51.7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

görnüşe eýe. (51.9) gyra şertlerden alarys:

$$X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 \cdot l + C_2 = 0,$$

ýagny

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0,$$

diýmek,

$$X(x) \equiv 0.$$

$\lambda > 0$ bolanda (51.7) deňlemäniň umumy çözüwini

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

görnüşde ýazmak bolýar. (51.9) gyra şertleri ulanyp alarys:

$$X(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

$$X(l) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Bu ýerden

$$C_1 = 0,\ C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot l = 0.$$

Eger $X(x) \neq 0$ boljak bolsa $C_2 \neq 0$ bolmaly, şonuň üçin hem

$$\sin\sqrt{\lambda} \cdot l = 0,$$

ýa-da

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots.$$

Diýmek, (51.10) meseläniň toždestwolaýyn noldan tapawutly çözüwi diňe

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

bahalar üçin mümkin. Bu hususy bahalara

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

$C_n$ – erkin hemişelik, hususy funksiýalar degişli.

Şeýlelik bilen, $\lambda$ parametriň diňe

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots. \qquad (51.11)$$

bahalarynda (51.10) meseläniň hemişelik köpeldijä çenli takyklykda kesgitlenýän

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (51.12)$$

noldan tapawutly çözüwi bar. $\lambda$ parametriň (51.11) bahalaryna (51.8) deňlemäniň

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at$$

çözüwleri degişli, $A_n$, $B_n$ – erkin hemişelikler.

$X_n(x)$ $T_n(t)$ funksiýalary (51.4) deňlikde goýup, (51.1) deňlemäniň (51.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan

$$U_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

hususy çözüwlerini alarys.

Umumylaşdyrylan superpozisiýa prinsipinden peýdalanyp, (51.1)–(51.3) meseläniň formal çözüwini

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (51.13)$$

görnüşde ýazalyň.

(51.13) hatary $t$ boýunça formal differensirläliň:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}at + B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (51.14)$$

we (51.13 ), (51.14) funksiýalaryň (51.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrmagyny talap edeliň:

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (51.15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}x \qquad (51.16)$$

(51.15), (51.16) hatarlar degişlilikde $\varphi$ ($x$) we $\psi$ ($x$) funksiýalar üçin Furýe hatarlarydyr, şonuň üçin

$$A_n \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (51.17)$$

$A_n$, $B_n$ hemişelikleri (51.13) hatarda goýup, (51.13)-(51.3) meseläniň formal çözüwini alarys.

## 2. Furýe usulyny esaslandyrma

Ilki (51.13) deňlik bilen kesgitlenýän $U$ ($x$, $t$) funksiýanyň üznüksizdigini görkezmeli, bu ýerden $U$ ($x$, $t$) funksiýanyň başlangyç we gyra şertleri kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Onuň üçin $U$ ($x$, $t$) funksiýany kesgitleýän hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik, sebäbi ol hataryň umumy agzasy üznüksiz funksiýa, üznüksiz funksiýalardan düzülen deňölçegli ýygnanýan hatar bolsa üznüksiz funksiýany kesgitleýär.

$$|U_n(x, t)| \le |A_n| + |B_n|$$

deňsizligiň esasynda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|A_n| + |B_n|\right) \qquad (51.18)$$

san hatary (51.13) hatar üçin mažorant hatar bolýar. Eger (51.18) mažorant hatar ýygnanýan bolsa, onda (51.13) hatar deňölçegli ýygnanýar, ýagny $U(x, t)$ üznüksiz funksiýadyr.

$\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}$ funksiýanyň başlangyç şerti kanagatlandyrýandygyna göz ýetirmek üçin ol funksiýanyň üznüksizdigini görkezmeli. Onuň üçin (51.14) hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny ýa-da

$$\frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|A_n|+|B_n|\right) \qquad (51.19)$$

mažorant hataryň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik.

$U(x, t)$ funksiýanyň (51.1) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmek üçin (51.13) hatary $x$ we $t$ boýunça iki gezek agzama-agza differensirläp bolýandygyny görkezmeli. Onuň üçin bolsa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}at + B_n \sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

hatarlaryň deňölçegli ýygnanýandygyny ýa-da hemişelik köpeldijä çenli takyklykdaky

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(|A_n|+|B_n|\right) \qquad (51.20)$$

san hatarynyň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{l}{na\pi}\psi_n,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

bolýandygyny nazara alsak, (51.18), (51.19), (51.20) hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \varphi_n, \quad k = 0, 1, 2 \tag{51.21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \cdot \psi_n, \quad k = -1, 0, 1 \tag{51.22}$$

hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik. (51.21), (51.22) hatarlaryň ýygnanýandygyny görkezmek üçin Furýe hatarynyň belli häsiýetlerinden peýdalanalyň.

Eger $2l$ periodik $F(x)$ periodik funksiýa $k$-njy tertipli üznüksiz önüme eýe bolup, $(k + 1)$-nji tertipli önümi bölek-üznüksiz bolsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|a_n| + |b_n|\right)$$

hatar ýygnanýar, $a_n$, $b_n$ – Furýe koeffisiýentleri.

Eger diňe $(0, l)$ aralykda berlen $f(x)$ funksiýanyň $\sin \frac{na}{l} x$ funksiýalar boýunça dagytmasyna garasak, onda ýokardaky şertler $f(x)$ funksiýany täk dowam etdirip alnan $F(x)$ funksiýa üçin ýerine ýetmeli.

$f(x)$ funksiýany täk dowam etdirip alnan $F(x)$ funksiýanyň üznüksiz bolmagy üçin $x = 0$, $x = l$ nokatlarda $f(0) = f(l) = 0$ bolmaly. $F(x)$ funksiýanyň birinji tertipli önümi $x = 0$, $x = l$ nokatlarda üznüksiz. Umuman, jübüt tertipli önümleriň üznüksiz bolmagy üçin

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0, \qquad k = 0, 2, 4, \cdots, 2n$$

şertleriň ýerine ýetmegini talap etmeli.

Şeýlelik bilen, (51.21) hataryň ýygnanmagy üçin $\varphi(x)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

1. $\varphi(x)$ funksiýanyň ikinji tertibe çenli önümleri üznüksiz, üçünji tertipli önümi bolsa bölek-üznüksiz bolmaly we

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

(51.22) hataryň ýygnanmagy üçin $\psi(x)$ funksiýa aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

2. $\psi$ $(x)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän, bölek-üznüksiz ikinji tertipli önüme eýe bolmaly we

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Şeýlelik bilen, aşakdaky teorema subut edildi.

**1-nji teorema.** Eger $\varphi$ $(x)$ funksiýa $[0, l]$ kesimde iki gezek üznüksiz differensirlenýän bölek-üznüksiz üçünji tertipli önüme eýe we

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0.$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, $\psi$ $(x)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän, bölek-üznüksiz ikinji tertipli önüme eýe we

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda (51.13) formula bilen kesgitlenýän $U$ $(x, t)$ funksiýa ikinji tertipli üznüksiz önüme eýe, (51.1) deňlemäni, (51.2) gyra şertleri, (51.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrýar. Özünem (51.13) hatary $x$, $t$ boýunça iki gezek agzama-agza differensirlemek bolýar we alnan hatarlar absolýut hem-de deňölçegli ýygnanýar.

## §52. Şturm-Liuwil meselesi. Hususy bahalar we hususy funksiýalar

### 1. Meseläniň goýluşy

Matematiki fizikanyň deňlemeleri üçin gatyşyk meseleleri Furýe usuly bilen çözmeklik Şturm-Liuwil meselesi diýlip atlandyrylýan meselä getirýär.

Aşakdaky giperbolik deňlemä garalyň:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right] - q(x)U, \qquad (52.1)$$

bu ýerde $p$ $(x)$, $p'$ $(x)$, $\rho$ $(x)$, $q$ $(x)$ – $[0, l]$ kesimde üznüksiz funksiýalar, özünem $p$ $(x) \geq 0$.

Goý, (52.1) deňlemäniň

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x}+\beta U(0,t)=0,\ \ a^2+\beta^2\neq 0, \\ \gamma\dfrac{\partial U(l,t)}{\partial x}+\delta U(l,t)=0,\ \ \gamma^2+\delta^2\neq 0 \end{cases} \qquad (52.2)$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x,0)=\varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (52.3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

Ilki bilen (52.1) deňlemäniň noldan tapawutly, (52.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini

$$U(x, t) = X(x)\, T(t) \qquad (52.4)$$

köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň. (52.4) çözüwi (52.1) deňlemede goýalyň:

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]-q(x)X(x)T(t)=\rho(x)X(x)T''(t)$$

ýa-da

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}. \qquad (52.5)$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe $x$ ululyga, sag bölegi bolsa diňe $t$ ululyga bagly. Şonuň üçin hem (52.5) deňlik gatnaşyklaryň bahalary hemişelik bolanda mümkin, ol hemişeligi $-\lambda$ bilen belläliň. Onda (52.5) deňlikden iki sany ady differensial deňleme alarys:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \qquad (52.6)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0. \qquad (52.7)$$

(52.1) deňlemäniň (52.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan (52.4) görnüşdäki noldan tapawutly çözüwini almak üçin $X(x)$ funksiýanyň

$$\begin{cases}\alpha X'(0)+\beta X(0)=0,\\ \gamma X'(l)+\delta X(l)=0\end{cases} \qquad (52.8)$$

gyra şertleri kanagatlandyrmagy zerur.

(52.7) deňlemäniň (52.8) gyra şertleri kanagatlandyrýan noldan tapawutly çözüwini tapmaklyga Şturm-Liuwil gyra meselesi ýa-da hususy baha hakyndaky mesele diýilýär. $\lambda$ parametriň (52.7)–(52.8) gyra meseläniň noldan tapawutly çözüwi bolýan bahalaryna Şturm-Liuwil meselesiniň **hususy bahalary**, olara degişli çözüwlerine bolsa **hususy funksiýalary** diýilýär. (52.7) deňlemäniň we (52.8) gyra şertleriň çyzyklylygy hem-de birjynslylygy üçin hususy funksiýalar hemişelik köpeldiji takyklygynda kesgitlenýär. Berlen $\lambda$ hususy baha degişli çyzykly bagly däl hususy funksiýalaryň sanyna onuň **kratnylygy** diýilýär. Eger $\lambda$ hususy bahanyň kratnylygy bire deň bolsa, onda oňa ýönekeý hususy baha diýilýär.

Eger

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_s(x)dx=0, \qquad k\neq s$$

bolsa, onda $X_1(x),X_2(x),\cdots,\ x\in(0,l)$ funksiýalaryň toplumyna $[0,\ l]$ kesimde ***ρ* (*x*) agram bilen ortogonal** diýilýär.

## 2. Hususy bahalaryň we hususy funksiýalaryň häsiýetleri

**1-nji häsiýet.** (52.7)–(52.8) gyra meseläniň hususy bahalary hasaply köplükdir.

**2-nji häsiýet.** (52.7)–(52.8) Şturm-Liuwil meselesiniň hususy bahalarynyň hemmesi ýönekeýdir, ýagny her bir hususy baha diňe bir hususy funksiýa degişlidir.

**Subudy**. Goý, käbir $\lambda$ hususy baha iki sany çyzykly bagly däl $X_1(x)$, $X_2(x)$ hususy funksiýa degişli bolsun. Onda olaryň

$$X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x)$$

çyzykly kombinasiýasy hem (52.7) deňlemäniň çözüwi bolar we (52.8) şertleri kanagatlandyrar. Hususy ýagdaýda, islendik $C_1$, $C_2$ hemişelikler üçin

$$aX'(0) + \beta X(0) = 0. \qquad (52.9)$$

Başga tarapdan $X(x)$ funksiýa (52.7) deňlemäniň umumy çözüwi, sebäbi $X_1(x)$, $X_2(x)$ çyzykly bagly däl. Diýmek, $X(0) = \beta$, $X'(0) = \alpha$ bolar ýaly $C_1$, $C_2$ sanlary tapmak bolar. Onda (52.9) deňlik esasynda alarys: $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, bu bolsa $\alpha, \beta$ sanlara goýlan şerte garşy gelýär.

**3-nji häsiýet.** (52.7)-(52.8) meseläniň dürli hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary $[0, l]$ kesimde $\rho(x) > 0$ agram bilen ortogonaldyr.

**Subudy.** Goý, $\lambda_S$, $\lambda_k$ dürli hususy bahalar, $X_s(x)$, $X_k(x)$ olara degişli hususy funksiýalar bolsun. Aşakdaky toždestwolary ýazalyň:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_s'(x)\right] - q(x)X_s(x) + \lambda_s\rho(x)X_s(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right] - q(x)X_k(x) + \lambda_k\rho(x)X_k(x) = 0.$$

Bu toždestwolaryň birinjisini $X_k(x)$, ikinjisini $X_s(x)$ köpeldip, birinjiden ikinjini aýryp we $[0, l]$ kesim boýunça integrirläp, alarys:

$$\int_0^l \frac{d}{dx}\left[p(x)X_s'(x)\right]dx - \int_0^l \frac{d}{dx}\left[p(x)X_s'(x)\right]dx +$$

$$+(\lambda_s - \lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx = 0.$$

Ilkinji iki goşulyjyny bölekler boýunça integrirläliň:

$$p(x)X_s'(x)X_k(x)\Big|_0^l - \int_0^l p(x)X_s'(x)X_k'(x)dx - p(x)X_k'(x)X_s(x)\Big|_0^l +$$

$$+\int_0^l p(x)X_k'(x)X_s'(x)dx+(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l p(x)X_s(x)X_k(x)dx=0,$$

ýa-da

$$(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l p(x)X_s(x)X_k(x)dx+\left\{p(x)\left[X_s'(x)X_k(x)-X_k'(x)X_k(x)\right]\right\}\Big|_0^l=0.$$

$X_S$ $(x)$, $X_k$ $(x)$ funksiýalar (52.8) gyra şertleri kanagatlandyrýar, şonuň esasynda

$$\begin{cases}\alpha X_s'(0)+\beta X_s(0)=0,\\ \alpha X_s'(0)+\beta X_s(0)=0\end{cases}$$

deňlikleri ýazmak bolýar. Bu deňliklere $\alpha$, $\beta$ görä birjynsly sistema hökmünde garamak mümkin. Sistemanyň noldan tapawutly çözüwi bar (şerte görä $\alpha^2+\beta^2\neq 0$). Diýmek, onuň kesgitleýjisi nola deň bolmaly:

$$X_s'(0)X_k(0)-X_s(0)X_k'(0)=0.$$

Edil şunuň ýaly edip

$$X_s'(0)X_k(0)-X_s(0)X_k'(0)=0$$

bolýandygyny subut etmek bolýar. Şeýlelik bilen, alarys:

$$(\lambda_s-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx=0.$$

$\lambda_s-\lambda_k\neq 0$, onda

$$\int_0^l \rho(x)X_s(x)X_k(x)dx=0. \qquad (52.10)$$

Subut edildi.

**4-nji häsiýet.** (52.7)–(52.8) meseläniň hususy bahalarynyň ählisi hakyky sanlardyr.

**Subudy.** Goý, $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks san (52.7)–(52.8) meseläniň hususy bahasy, $X(x) = X_1(x) + iX_2(x)$ oňa degişli hususy funksiýasy bolsun. Onda

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)(X_1 + i X_2)\right] - q(x)(X_1 + i X_2) + \rho(x)(\alpha + i\beta)(X_1 + i X_2) = 0.$$

Soňky deňligiň hakyky we hyýaly bölegini nola deňläp alarys:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_1'\right] - q(x)X_1 + \alpha\rho(x)X_1 - \beta\rho(x)X_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_2'\right] - q(x)X_2 + \alpha\rho(x)X_2 - \beta\rho(x)X_1 = 0.$$

Ikinji deňligi $i$-e köpeldip, birinjiden aýralyň:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)(X_1' - i X_2')\right] - q(x)(X_1' - i X_2') + \alpha\rho(x)(X_1 - i X_2) -$$
$$-\beta\rho(x)(X_1 - i X_2) = 0,$$

ýa-da

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X^{*\prime}\right] - q(x)X^* + \bar{\lambda}\rho(x)X^* = 0.$$

Diýmek, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ san hem (52.7)-(52.8) meseläniň hususy bahasy, ol hususy baha $X^* = X_1 - iX_2$ hususy funksiýa degişli.

$X(x)$ we $X^*(x)$ hususy funksiýalara 3-nji häsiýeti ulanalyň:

$$\int_0^l \rho(x)X(x)X^*(x)\,dx = 0$$

ýa-da

$$\int_0^l \rho(x)(X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2)\,dx = 0.$$

Bu ýerden

$$\int_0^l \rho(x)\left(X_1^2+X_2^2\right)dx=0.$$

Soňky deňlikden $X_1(x)=0$, $X_2(x)=0$, ýagny $X(x)=0$. Subut edildi.

**5-nji häsiýet.** Eger gyra şertler

$$\rho(x)X(x)X'(x)\Big|_0^l \le 0$$

deňsizligi kanagatlandyrýan bolsa, onda (52.7)–(52.8) meseläniň ähli $\lambda_n$ hususy bahalary otrisatel däldir.

**Subudy**. Goý, $\lambda_k$ – (52.7)–(52.8) meseläniň hususy bahasy, $X_k(x)$ – oňa degişli hususy funksiýasy bolsun.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right]+\left[\lambda_k\rho(x)-q(x)X_k(x)\right]=0$$

toždestwony $X_k(x)$ köpeldeliň we integrirläliň:

$$\int_0^l X_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X_k'(x)\right]dx+\lambda_k\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx-\int_0^l q(x)X_k^2(x)dx=0.$$

Birinji goşulyjyny bölekler boýunça integrirläp alarys:

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)\Big|_0^l-\int_0^l p(x)X_k'^2(x)dx+$$

$$+\lambda_k\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx-\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx=0.$$

Bu deňlikden $\lambda_k \ge 0$ gelip çykýar, sebäbi birinji goşulyjy otrisatel däl, $p(x)$, $\rho(x)$, $q(x)\ge 0$.

**Netije.** Eger gyra şertler

*a*) $X(0)=0$, $X(l)=0$,

*b*) $X'(0)=0$, $X'(l)=0$,

ç) $X'(0) - h_1 X(0) = 0$, $X'(l) + h_2 X(l) = 0$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$

görnüşlerde bolsa, onda ähli hususy bahalar $\lambda_k \geq 0$.

**6-njy häsiýet.** Eger $q(x) = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, bolsa, ýagny

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, X'(l) = 0$$

bolsa, onda $\lambda = 0$ san diňe we diňe şonda (52.7)–(52.8) gyra meseläniň hususy bahasydyr.

$\lambda = \lambda_n$ bolanda (52.6) deňlemäniň umumy çözüwi

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda}t + B_n \sin\sqrt{\lambda}t$$

görnüşe eýe, bu ýerde: $A_n$, $B_n$ – erkin hemişelik sanlar.

Şeýlelik bilen, (52.4) deňlik esasynda

$$U_n(x,t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t$$

funksiýalaryň her biri (52.1) deňlemäniň (52.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(52.3) başlangyç şertleri kanagatlandyrmak üçin

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right)X_n(x) \qquad (52.11)$$

hatary düzeliň. Eger bu hatar we ony $x$, $t$ boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsalar, onda onuň jemi (52.1) deňlemäniň (52.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(52.3) başlangyç şertleriň ýerine ýetmegi üçin

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \qquad (52.12)$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x) \qquad (52.13)$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur. Şeýlelik bilen, biz erkin funksiýany (52.7)–(52.8) gyra meseläniň $X_n(x)$ hususy funksiýalary boýunça hatara dagytmak hakyndaky meselä geldik. (52.12) we (52.13) hatarlary $\rho(x) X_n(x)$ köpeldip we $x$ boýunça 0-dan $l$-e çenli integrirläp,

$A_n$, $B_n$ koeffisiýentleri tapyp bileris. Onda (52.10) deňligi nazarda tutup alarys:

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)\,dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \rho(x)X_n^2(x)\,dx.$$

Eger-de (52.10) hatar we ony $x$, $t$ boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsalar, onda $A_n$, $B_n$ koeffisiýentleriň bu bahalaryny (52.11) hatarda goýup, (52.1)–(52.3) gatyşyk meseläniň çözüwini alarys.

## §53. Birjynsly däl deňleme we birjynsly däl gyra şertler ýagdaýynda Furýe usuly bilen gatyşyk meseläni çözmek

### 1. Uçlary berkidilen kirşiň mejbury yrgyldysy

Goý, kirşiň mejbury yrgyldysynyň

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l,\ t > 0 \tag{53.1}$$

deňlemesiniň

$$U(0, t) = 0,\ U(l, t) = 0 \tag{53.2}$$

gyra şertleri we

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l \tag{53.3}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsun.

(53.1)–(53.3) meseläniň çözüwini

$$U(x, t) = V(x, t) + \omega(x, t)$$

jem görnüşde gözläliň.

Goý, $V(x, t)$ funksiýa birjynsly däl

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l,\ t > 0 \tag{53.4}$$

deňlemäniň

$$V(0, t) = 0,\ V(l, t) = 0 \tag{53.5}$$

gyra şertleri we

$$V(x,0) = 0, \quad \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{53.6}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun.

Onda $\omega(x, t)$ funksiýa birjynsly

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l,\ t > 0 \tag{53.7}$$

deňlemäniň

$$\omega(0, t) = 0,\ \omega(l, t) = 0$$

gyra şertleri we

$$\omega(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial \omega(x,0)}{\partial t} = \psi(x),\ 0 \le x \le l \tag{53.9}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

(53.7)–(53.9) meseläniň çözüwi §51-de tapyldy. Şonuň üçin hem bu ýerde (53.4)–(53.6) meseläniň çözüwini tapmaklyga garalyň. (53.4)–(53.6) meseläniň çözüwini

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{53.10}$$

hatar görnüşde gözläliň, $T_n(t)$ – häzirlikçe näbelli funksiýa.

$V(x, t)$ funksiýa (53.6) gyra şertleri kanagatlandyrýar. Indi $T_n(t)$ funksiýany (53.10) hatar (53.4) deňlemäni we (53.6) başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly kesgitläliň.

$f(x, t)$ funksiýany $(0, l)$ aralykda sinuslar boýunça Furýe hataryna dagydalyň:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{53.12}$$

bu ýerde

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{53.13}$$

(53.10) we (53.12) hatarlary (53.4) deňlemede goýalyň:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{na\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=0.$$

Soňky dagytmanyň hemme koeffisiýentleri nola deň bolmaly, ýagny

$$T_n''(t)+\left(\frac{na\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t). \quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots \tag{53.14}$$

$T_n(t)$ funksiýany kesgitlemek üçin hemişelik koeffisiýentli ady differensial deňleme aldyk. (53.7) başlangyç şertlerden alarys:

$$V(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0,$$

$$\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0.$$

Bu ýerden $T_n(t)$ funksiýa üçin

$$T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0 \tag{53.15}$$

şertleri alarys. (53.14) deňlemäniň (53.15) başlangyç şertler kanagatlandyrýan çözüwi

$$T_n(t) = \frac{l}{na\pi}\int_0^l f_n(t)\sin\frac{na\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau$$

görnüşe eýe, ýa-da $f_n$ $(t)$ funksiýalaryň ornuna onuň (53.13) aňlatmasyny goýup alarys:

$$T_n(t) = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \sin\frac{na\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \quad (53.16)$$

Eger-de (53.11) hatar we ony $x$, $t$ boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $T_n$ $(t)$ üçin tapylan aňlatmany (53.10) hatarda goýup, (53.5)–(53.7) meseläniň çözüwini alarys. Munuň şeýle bolmagy üçin üznüksiz $f$ $(x, t)$ funksiýanyň $x$ boýunça ikinji tertibe çenli üznüksiz hususy önüminiň bolmagyny we islendik $t$ üçin

$$f(0, t) = 0, f(l, t) = 0$$

şertleriň ýerine ýetmegini talap etmekligiň ýeterlikdigini görkezmek bolýar.

Ýokarda aýdylanlardan görnüşi ýaly, (53.1)-(53.3) meseläniň çözüwini $U$ $(x, t) = V$ $(x, t) + \omega$ $(x, t)$ deňlik esasynda aşakdaky hatar görnüşinde ýazmak bolýar:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{na\pi}{l}x +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{na\pi}{l}t + b_n\sin\frac{na\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

bu ýerde $T_n$ $(t)$ koeffisiýent (53.16) formula bilen kesgitlenýär:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ b_n = \frac{2}{na\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

### 2. Birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşi

Kirşiň yrgyldysynyň deňlemesi üçin birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşine garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, t > 0, \quad (53.17)$$

$$U(0,t)=\mu_1(t),\ U(0,t)=\mu_1(t),\qquad t\geq 0, \tag{53.18}$$

$$U(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ 0\leq x\leq l, \tag{53.19}$$

$$\mu_1(0)=\varphi(0),\mu_2(0)=\varphi(l),\ \mu_1'(0)=\psi(0),\mu_2'(0)=\psi(l)$$

(53.17)–(53.18) meseläni birjynsly gyra şertli meselä getirmek kyn däl. Hakykatdan hem täze $\bar{V}(x,t)$ näbelli funksiýany

$$U(x,t)=\bar{U}(x,t)+\bar{V}(x,t)$$

formulanyň kömegi bilen girizeliň. Onda $\bar{V}(x,t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial x^2}+\left[f(x,t)+a^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}\right], \tag{53.20}$$

deňlemäniň

$$\begin{cases}\bar{V}(0,t)=U(0,t)-\bar{U}(0,t)=\mu_1(t)-\bar{U}(0,t)\\ \bar{V}(l,t)=U(l,t)-\bar{U}(l,t)=\mu_2(t)-\bar{U}(l,t)\end{cases} \tag{53.21}$$

gyra şertleri we

$$\begin{cases}\bar{V}(x,0)=U(x,0)-\bar{U}(x,0)=\varphi(x)-\bar{U}(x,0),\\ \dfrac{\partial\bar{V}(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial U(x,0)}{\partial t}-\dfrac{\partial\bar{U}(x,0)}{\partial t}=\psi(x)-\dfrac{\partial\bar{U}(x,0)}{\partial t}\end{cases} \tag{53.22}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

$\bar{U}(x,t)$ funksiýany (53.18) gyra şertler ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň:

$$\bar{U}(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Bu ýerde

$$\bar{U}(0,t)=\mu_1(t),\ \bar{U}(l,t)=\mu_2(t)$$

bolýandygyny barlamak kyn däl. $\bar{U}(x,t)$ funksiýanyň aňlatmasyny (53.20)–(53.22) meselede goýup alarys:

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \left[ f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}\left(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right) \right]$$

$$\overline{V}(0,t) = 0, \overline{V}(l,t) = 0,$$

$$\overline{V}(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right], \qquad (53.23)$$

$$\frac{\partial \overline{V}(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right].$$

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\overline{f}(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}\left[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)\right],$$

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2(0) - \mu_1(0)\right],$$

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}\left[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)\right].$$

Onda (53.23) meseläni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t), \\ \overline{V}(0,t) = 0, \overline{V}(l,t) = 0, \\ \overline{V}(x,0) = \overline{\varphi}(x), \dfrac{\partial \overline{V}(x,0)}{\partial t} = \overline{\psi}(x) \end{cases} \qquad (53.24)$$

görnüşde ýazyp bileris. (53.24) meseläniň çözüliş usuly §53-iň 1-nji punktynda beýan edildi.

Birjynsly däldigi wagta bagly bolmadyk (stasionar) gatyşyk meselä garalyň.

Goý, birinji gatyşyk meseläniň umumy görnüşindäki gyra şertler we deňlemäniň sag bölegi wagta bagly däl bolsun:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x), \qquad (53.25)$$

$$\begin{cases} U(0,t) = \alpha,\ \alpha = \text{const}, \\ U(l,t) = \beta,\ \beta = \text{const}. \end{cases} \tag{53.26}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{53.27}$$

Bu meseläniň çözüwini

$$U(x, t) = \omega(x) + V(x, t) \tag{53.28}$$

jem görnüşde gözläliň. (53.28) jemi (53.25) deňlemede, (53.26) gyra şertlerde we (53.27) başlangyç şertlerde goýalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2 \omega''(x) + f(x), \\ V(0,t) + \omega(0) = \alpha, V(l,t) + \omega(l) = \beta, \\ V(x,0) + \omega(x) = \varphi(x), \dfrac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \end{cases}$$

$\omega(x)$ funksiýany

$$\begin{cases} a^2 \omega''(x) + f(x) = 0, \\ \omega(0) = \alpha,\ \omega(l) = \beta \end{cases}$$

gyra meseläniň çözüwi bolar ýaly saýlap alalyň:

$$\omega(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi \int_0^\xi \frac{f(\eta)}{a^2} d\eta - \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{f(\eta)}{a^2} d\eta.$$

Onda $V(x, t)$ funksiýa üçin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x}, \\ V(0,t) = 0,\ V(l,t) = 0, \\ V(x,0) = \overline{\varphi}(x), \dfrac{\partial V(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \end{cases}$$

bu ýerde $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - \omega(x)$ meseläniň çözüwi bolar. Bu meseläniň çözüliş usuly §51-de beýan edildi.

## §54. Köpölçegli ýagdaýda Furýe usuly

Aşakdaky deňlemä garalyň:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = LU, \qquad (54.1)$$

bu ýerde

$$LU = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) - a(x)U$$

koeffisiýentleri $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ üýtgeýänleriň gutarnykly, bir baglanyşykly $D$ ýaýlada kesgitlenen we

$$a(x) \geq 0, a_{ij} = a_{ji}, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \alpha > 0, \qquad (54.2)$$

şertleri kanagatlandyrýar.

(54.2) şertleriň ikinjisi (54.1) deňlemäniň giperbolik deňlemedigini aňladýar.

(54.1) deňleme üçin aşakdaky gatyşyk meselä garalyň: silindrde (54.1) deňlemäniň

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \qquad (54.3)$$

başlangyç şertleri we

$$U(x,t)\big|_S = 0, \qquad t \in [0,T] \qquad (54.4)$$

gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly, bu ýerde: $S - D$ ýaýlanyň araçägi.

Ilki bilen (54.1) deňlemäniň (54.4) gyra şerti kanagatlandyrýan, noldan tapawutly çözüwini

$$U(x, t) = V(x)\, T(t) \qquad (54.5)$$

köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň. (54.5) çözüwi (54.1) deňlemede goýalyň:

$$V(X)T''(t)=\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)-a_{ij}(X)V\right]T(t)$$

ýa-da

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{LV}{V}=-\lambda.$$

Soňky deňliklerden $X(x)$, $T(t)$ funksiýalary kesgitlemek üçin

$$T''(t)+\lambda T(t)=0 \qquad (54.6)$$

$$LV+\lambda V=0 \qquad (54.7)$$

deňlemeleri alarys. (54.1) deňlemäniň noldan tapawutly, (54.4) gyra şerti kanagatlandyrýan (54.5) görnüşdäki çözüwini almak üçin $V(x)$ funksiýanyň

$$V(x)|_S=0 \qquad (54.8)$$

gyra şerti kanagatlandyrmagy zerurdyr. Şeýlelik bilen, biz aşakdaky hususy baha hakyndaky meseläni aldyk:

$\lambda$ parametriň (54.7) deňlemäniň (54.8) gyra şerti kanagatlandyrýan noldan tapawutly çözüwi bolar ýaly bahalaryny tapmaly. $\boldsymbol{\lambda}$ parametriň şeýle bahalaryna (54.7)-(54.8) meseläniň **hususy bahalary**, oňa degişli çözüwlerine bolsa **hususy funksiýalary** diýilýär.

(54.7) deňlemäniň we (54.8) gyra şertiň birjynsly bolany sebäpli $V_k(x)$ hususy funksiýa hemişelik köpeldiji takyklygynda kesgitlenýär.

Hususy bahalaryň we hususy funksiýalaryň käbir häsiýetlerine garalyň.

**1-nji häsiýet.** (54.7)-(54.8) meseläniň tükeniksiz köp hususy bahasy bar:

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

**2-nji häsiýet.** (54.7)-(54.8) meseläniň dürli hususy bahalaryna degişli hususy funksiýalary özara ortogonaldyr.

**Subudy.** Goý, $\lambda_k$, $\lambda_S$ (54.7)-(54.8) meseläniň dürli hususy bahalary we $V_k$, $V_S$ olara degişli hususy funksiýalary bolsun. Aşakdaky deňlikleri ýazalyň:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) - a(x)V_k + \lambda_k V_k = 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial V_S}{\partial x_j} \right) - a(x)V_S + \lambda_S V_S = 0.$$

Bu deňlikleriň birinjisini $V_S$ funksiýa, ikinjisini $V_k$ funksiýa köpeldip, soňra birinjiden ikinjini aýryp, alnan deňligi bolsa $D$ ýaýla boýunça integrirläp alarys:

$$\int_D V_S \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) dx - \int_D V_k \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x) \frac{\partial V_S}{\partial x_j} \right) +$$

$$+(\lambda_k - \lambda_S)\int_D V_k(x) V_S(x)\,dx = 0.$$

Birinji iki goşulyjyny bölekler boýunça integrirläliň:

$$\int_S V_S \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \cos(x_i, n)\,dS - \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial V_S}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\,dx -$$

$$-\int_S V_k \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial V_S}{\partial x_j} \cos(x_i, n)\,dS + \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \frac{\partial V_s}{\partial x_j}\,dx +$$

$$+(\lambda_k - \lambda_s)\int_D V_k(x) V_s(x)\,dx = 0,$$

bu ýerde: $n - S$ üste geçirilen daşky normal. Onda

$$(\lambda_k - \lambda_s)\int_D V_k(x) V_s(x)\,dx = 0.$$

Şerte görä $\lambda_k - \lambda_S \neq 0$, onda

$$\int_D V_k(x) V_S(x)\,dx = 0.$$

Subut edildi.

**3-nji häsiýet.** (54.7)–(54.8) meseläniň hususy bahalary otrisatel däldir.

**Subudy.** Goý, $\lambda_k$ – (54.7)–(54.8) meseläniň hususy bahasy, $V_k(x)$ – funksiýa oňa degişli hususy funksiýasy bolsun.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right) - a(x)V_k + \lambda_k V_k = 0$$

deňligiň iki bölegini hem $V_k(x)$ funksiýa köpeldeliň we alnan deňligi $D$ ýaýla boýunça integrirläliň:

$$\lambda_k \int_D V_k^2(x)\,dx = -\int_D V_k \sum_{i,j=}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right)dx + \int_D a(x)V_k^2(x)\,dx.$$

Soňky deňligiň sag bölegindäki birinji integraly bölekler boýunça integrirläp we $V_k(x)|_S = 0$ şerti peýdalanyp alarys:

$$\lambda_k \int_D V_k^2(x)\,dx = \int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}\,dx + \int_D a(x)V_k^2(x)\,dx.$$

(54.2) şertiň esasynda alarys:

$$\lambda_k \int_D V_k^2(x)\,dx \geq \int_D \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_D a(x)V_k^2(x)\,dx.$$

Bu ýerden $\lambda_k \geq 0$ gelip çykýar. Subut edildi.

$\lambda = \lambda_k$ bolanda (54.6) deňleme

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\cdot t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\cdot t,\ k = 1, 2, \cdots$$

görnüşdäki çözüwe eýe, $A_k$, $B_k$ – erkin hemişelik sanlar.

Şeýlelik bilen, (54.5) esasynda

$$U_k(x,t) = V_k(x)T_k(t) = \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right)V_k(x)$$

görnüşdäki funksiýalar (54.1) deňlemäniň (54.4) gyra şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolar.

Aşakdaky hatary düzeliň:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)V_k(x). \qquad (54.9)$$

(54.3) başlangyç şertleri kanagatlandyryp alarys:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kV_k(x),\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sqrt{\lambda_k}V_k(x),$$

bu ýerden

$$A_k=\frac{1}{\|V_k\|^2}\int_D\varphi(x)V_k(x)\,dx,\quad A_k=\frac{1}{\|V_k\|^2}\int_D\varphi(x)V_k(x)\,dx.$$

Eger (54.9) hatar we ony $x$, $t$ boýunça iki gezek differensirläp alnan hatarlar deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $A_k$, $B_k$ koeffisiýentleriň tapylan bahalaryny goýup, (54.1), (54.3), (54.4) meseläniň çözüwini alarys.

# VI BAP
# PARABOLIK DEŇLEMELER

## §55. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin maksimum prinsipi

### 1. Maksimum prinsipi

Matematiki fizikanyň deňlemeleri üçin mesele goýlanda esasy soraglaryň biri olaryň korrektligi, ýagny goýlan meseläniň çözüwiniň barlygy, ol çözüwiň ýeke-täkligi we durnuklylygydyr. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin çözüwiň ýeke-täkligi we durnuklylygy baradaky sorag maksimum prinsipiniň kömegi bilen çözülýär. Ol prinsipi beýan edeliň.

**1-nji teorema** (maksimum prinsipi). $\bar{Q} = \left(0 \le x \le l\right) \times \left(0 \le t \le T\right)$ gönüburçlukda kesgitlenen we üznüksiz, $Q = (0 < x < l) \times (0 < t \le T)$ gönüburçlukda ýylylyk geçirijiligiň

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (55.1)$$

deňlemesini kanagatlandyrýan $U(x, t)$ funksiýa özüniň iň uly we iň kiçi bahalaryny ýa-ha $t = 0$ başlangyç pursatda, ýa-da $Q$ gönüburçlugyň gapdal taraplarynda ($x = 0$ ýa-da $x = l$ bolanda) kabul edýär.

**Subudy.** Ilki bilen teoremanyň birinji bölegini, ýagny iň uly baha üçin subut edeliň. $U(x, t)$ funksiýanyň $Q$ gönüburçlukda üznüksiz bolany üçin iň uly bahany kabul edýär. Goý, $U(x, t)$ özüniň iň uly bahasyny $(x_0, t_0)$, $(0 < x < l) \times (0 < t \le T)$ nokatda kabul edýän bolsun:

$$\max_{\bar{Q}} U(x,t) = U(x_0,t_0) = M.$$

$U(x, t)$ çözüwiň $t = 0$ $(0 \le x \le l)$ ýa-da $x = 0$ ýa-da $x = l$ $(0 \le t \le T)$ bolandaky iň uly bahasy $m$ we $m < M$ diýeliň.

Maksimumyň zerurlyk şertinden alarys: eger $t_0 < T$ bolsa, onda

$$\frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 U(x_0,t_0)}{\partial x^2} \le 0.$$

Eger $U(x, t)$ funksiýa maksimum bahany $t_0 = T$ bolanda kabul edýän bolsa, onda $U(x, t)$ funksiýa $T$ nokadyň çepinde artýan bolmaly, diýmek, $t_0 = T$ bolanda

$$\frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial t} \ge 0; \ \frac{\partial U(x_0,t_0)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial^2 U(x_0,t_0)}{\partial x^2} \le 0.$$

Aşakdaky kömekçi funksiýany girizeliň:

$$V(x,t) = \frac{M-m}{2l^2}(x-x_0)^2 + U(x,t).$$

$t = 0$ ýa-da $x = 0$ ýa-da $x = l$ bolanda

$$V(x,t) \le \frac{M-m}{2l^2} l^2 + m = \frac{M+m}{2} < M$$

we

$$V(x_0, t_0) = U(x_0, t_0) = M.$$

Diýmek, $V(x, t)$ funksiýa iň uly bahany ýa-ha gönüburçlugyň içki nokadynda ýa-da $t = T$ bolanda kabul edýär. Goý, $U(x, t)$ funksiýa iň uly bahany $(x_1, t_1)$, $(0 < x_0 < l) \times (0 < t_1 \le T)$ nokatda kabul edýän bolsun. Onda

$$\frac{\partial V(x_1,t_1)}{\partial t} \ge 0; \quad \frac{\partial^2 V(x_1,t_1)}{\partial x^2} \le 0.$$

Bu ýerden

$$\frac{\partial V\left(x_1,t_1\right)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V\left(x_1,t_1\right)}{\partial x^2}\geq 0.$$

Başga tarapdan, $V(x, t)$ funksiýany (55.1) deňlemede goýup we $U(x, t)$ funksiýanyň şol deňlemäniň çözüwidigini nazarda tutup alarys:

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{M-m}{l^2}\right)=-a^2\frac{M-m}{l^2}<0.$$

Şeýlelik bilen, biz gapma-garşylyga geldik we $U(x, t)$ funksiýa iň uly bahany $(x_0, t_0)$ nokatda kabul edýär diýip eden gümanymyz ýalan bolup çykdy.

Teoremanyň iň kiçi baha hakyndaky bölegini subut etmek üçin $U(x, t)$ funksiýany $-U(x, t)$ funksiýa bilen çalşyrmak ýeterlik. $U(x, t)$ funksiýanyň iň kiçi bahany kabul edýän nokadynda $-U(x, t)$ funksiýa iň uly bahany kabul edýär, özünem $-U(x, t)$ funksiýa hem (55.1) deňlemäniň çözüwi bolýar. Teorema subut edildi.

Bu teoremadan aşakdaky netijeler gelip çykýar.

**1-nji netije**. Eger ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň $U_1(x, t)$ we $U_2(x, t)$ iki çözüwi

$$U_1(x, 0)\leq U_2(x, 0),\ U_1(0, t)\leq U_2(0, t),\ U_1(l, t)\leq U_2(l, t)$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda islendik $x$, $t$ $(0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq T)$ üçin

$$U_1(x, t)\leq U_2(x, t)$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

**Subudy.** Hakykatdan hem $V(x, t) = U_2(x, t) - U_1(x, t)$ tapawut maksimum prinsipiniň hemme şertlerini kanagatlandyrýar we

$$V(x, 0)\geq 0,\ V(0, t)\geq 0,\ V(l, t)\geq 0.$$

Şonuň üçin

$$V(x, t)\geq 0,\ 0\leq x\leq l,\ 0\leq t\leq T.$$

Sebäbi tersine bolsa, onda $V(x, t)$ funksiýa $0 < x < l$, $0 < t \leq T$ ýaýlada otrisatel minimuma eýe bolar. Onda $U_1(x, t) \leq U_2(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

**2-nji netije.** Eger ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň $U_1(x, t)$, $U(x, t)$ $U_2(x, t)$ üç çözüwi

$$U_1(x, t) \leq U(x, 0) \leq U_2(x, 0),$$

$$U_1(0, t) \leq U(0, t) \leq U_2(0, t)$$

$$U_1(l, t) \leq U(l, t) \leq U_2(l, t)$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$U_1(x, t) \leq U(x, t) \leq U_2(x, t),\ 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T,$$

deňsizlik ýerine ýetýär.

Bu tassyklamany subut etmek üçin 1-nji netijäni

$$U_1(x, t),\ U(x, t) \text{ we } U(x, t),\ U_2(x, t)$$

funksiýalar üçin ulanmak ýeterlik.

**3-nji netije**. Eger ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň $U_1(x, t)$ we $U_2(x, t)$ çözüwleri

$$\left|U_1(x,0) - U_2(x,0)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|U_1(0,t) - U_2(0,t)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|U_1(l,t) - U_2(l,t)\right| < \varepsilon$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$|U_1(x, t) - U_2(x, t)| < \varepsilon,\ 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T.$$

Bu netijäni subut etmek üçin 2-nji netijäni ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň

$$-(U_1 - U_2),\ \varepsilon,\ U_1 - U_2$$

üç çözüwi üçin ulanmak ýeterlik.

## 2. Ýeke-täklik teoremasy

Maksimum prinsipinden peýdalanyp, birinji gatyşyk meseläniň çözüwiniň ýeke-täkligini subut edeliň.

**2-nji teorema.** Aşakdaky

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), 0 < x < l, 0 < t \le T, \tag{55.2}$$

$$U\,(0,\, t) = \mu_1\,(t), \qquad U\,(l,\, t) = \mu_2\,(t) \qquad 55.3)$$

$$U\,(x,\, 0) = \varphi\,(x) \tag{55.4}$$

meseläniň çözüwi $\bar{Q} = \left(0 \le x \le l\right) \times \left(0 \le t \le T\right)$ ýaýlada ýeke-täkdir.

**Subudy.** Goý, (55.2)-(55.4) meseläniň $U_1\,(x,\, t)$ we $U_2\,(x,\, t)$ iki sany çözüwi bar bolsun, onda $V\,(x,\, t) = U_1\,(x,\, t) - U_2\,(x,\, t)$ funksiýa ýylylyk geçirijiligiň birjynsly deňlemesiniň

$$V\,(0,\, t) = 0,\ V\,(l,\, t) = 0,\ V\,(x,\, 0) = 0$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Şonuň üçin hem maksimum prinsipine laýyklykda

$$V\,(x,\, t) \equiv 0$$

ýa-da

$$U_1\,(x,\, t) \equiv U_2\,(x,\, t).$$

Teorema subut edildi.

**3-nji teorema.** (55.2)–(55.4) gatyşyk meseläniň üznüksiz çözüwi $\bar{Q}$ – ýaýlada durnuklydyr.

**Subudy**. Goý, $U\,(x,\, t)$ funksiýa (55.2)–(55.4) meseläniň çözüwi, $U^*\,(x,\, t)$ bolsa (55.2) deňlemäniň

$$U^*\left(0,t\right) = \mu_1^*\left(t\right),\ U^*\left(l,t\right) = \mu_2^*\left(t\right),\ U^*\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right)$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolsun, bu ýerde $\mu_1^*\left(t\right),\ \mu_2^*\left(t\right), \varphi\left(x\right)$ funksiýalar degişlilikde $0 \le t \le T$, $0 \le x \le l$ kesimlerde üznüksiz funksiýalar we

$$\left|\mu_1^*(t) - \mu_1(t)\right| < \varepsilon, 0 \le t \le T,$$

$$\left|\mu_2^*(t) - \mu_2(t)\right| < \varepsilon, 0 \le t \le T,$$

$$\left|\varphi(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon, \qquad 0 \le x \le l.$$

$V(x, t)$ $\mathrm{U}^*(x, t) - U(x, t)$ funksiýa ýylylyk geçirijiligiň birjynsly deňlemesiniň

$$\left|V(0,t)\right| = \left|\mu_1^*(t) - \mu_1(t)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|V(l,t)\right| = \left|\mu_2^*(t) - \mu_2(t)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|V(x,0)\right| = \left|\varphi(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon,$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Onda maksimum prinsipinden gelip çykýan 3-nji netijä laýyklykda

$$|V(x, t)| < \varepsilon, \ 0 \le x \le l, \ 0 \le t \le T,$$

ýa-da

$$|U^*(x, t) - U(x, t)| < \varepsilon, \ 0 \le x \le l, \ 0 \le t \le T.$$

Teorema subut edildi.

## §56. Ýylylyk geçirijiliginiň deňlemesi üçin birinji gatyşyk gyra meselesini Furýe usuly bilen çözmek

### 1. Birjynsly meseläniň çözüwi

Goý,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ 0 < t \le T \tag{56.1}$$

birjynsly deňlemäniň

$$U(0, t) = 0, U(l, t) = 0 \tag{56.2}$$

birjynsly gyra şertleri we

$$U(x, 0) = \varphi(x) \tag{56.3}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

(56.1)-(56.3) meseläniň formal çözüwini Furýe usuly bilen tapalyň. (56.1) deňlemäniň (56.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan noldan tapawutly çözüwini

$$U(x, \mathrm{t}) = X(x)\, T(t) \tag{56.4}$$

görnüşde gözläliň. (56.4) görnüşdäki çözüwi (56.1) deňlemede goýup alarys:

$$X(x)\, T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

ýa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Deňligiň çep bölegi diňe $t$ bagly, sag bölegi bolsa $x$ ululyga baglydyr. Deňligiň ýerine ýetmegi üçin gatnaşyklaryň ikisi hem şol bir hemişelige deň bolmaly; ol hemişeligi $-\lambda$ bilen belläp alarys:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \tag{56.5}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{56.6}$$

(56.4) çözüw gyra şertleri kanagatlandyrmaly, şoňa görä (56.2) şertlerden alarys:

$$U(0, t) = X(0)\, T(t) = 0, \qquad U(0, t) = X(0)\, T(t) = 0$$

bu ýerden

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \tag{56.7}$$

Şeýlelik bilen, *X(x)* funksiýany kesgitlemek üçin birjynsly kirşiň yrgyldysy hakyndaky meselede derňelen hususy baha hakyndaky (56.6)–(56.7) mesele alyndy. Şol ýerde $\lambda$ parametriň diňe

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, n = 1,\ 2,\ 3,\cdots$$

bahalarynda (56.6)–(56.7) meseläniň noldan tapawutly çözüwiniň barlygy we ol çözüwleriň

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\cdots$$

görnüşdedigi görkezilipdi. $\lambda = \lambda_n$ bahalara (56.5) deňlemäniň

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\cdots$$

çözüwleri degişli. $X_n$ ($x$), $T_n$ ($x$) funksiýalary (56.4) çözüwde goýup, (56.1) deňlemäniň (56.2) gyra şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwlerini alarys:

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

(56.1)-(56.3) meseläniň çözüwini tapmak üçin

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (56.8)$$

hatary düzeliň. (56.3) başlangyç şertiň ýerine ýetmegini talap edip alarys:

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Soňky hatar berlen $\varphi$ ($x$) funksiýanyň (0, $l$) aralykda sinuslar boýunça Furýe hataryna dagytmasyny berýär. $A_n$ koeffisiýentler belli bolan

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (56.9)$$

formula bilen kesgitlenýär. $A_n$ koeffisiýentleriň bahalaryny (56.8) hatarda goýup, (56.1)–(56.3) meseläniň formal çözüwini alarys.

## 2. Usulyň esaslandyrylyşy

Koeffisiýentleri (56.9) formula bilen kesgitlenýän (56.8) hataryň (56.1)–(56.3) meseläniň çözüwi bolmagy üçin $\varphi$ ($x$) funksiýanyň kanagatlandyrmaly şertlerini tapalyň.

**1-nji teorema**. Eger $\varphi$ ($x$) funksiýa [0, $l$] kesimde üznüksiz, ikinji tertipli bölek-üznüksiz önüme eýe we

$$\varphi(0) = \varphi(l)$$

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda (56.8) hatar (56.1)-(56.3) gatyşyk meseläniň $(0 \le x \le l) \times (0 \le t \le T)$ ýaýlada üznüksiz çözüwi bolýar we $0 < t_1 \le T$, $0 \le x \le l$ bolanda tükeniksiz differensirlenýär.

**Subudy**. $\varphi$ ($x$) funksiýa goýlan şertlerden

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$$

hataryň ýygnanýandygy gelip çykýar. Islendik $t>0$ üçin

$$\left| A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2} \sin\frac{n\pi}{l}x \right| \le |A_n|$$

ýaýlada deňsizlik ýerine ýetýär. Diýmek, (56.8) hatar $(0 \le x \le l) \times (0 < t_1 \le t \le T)$ gönüburçlukda deňölçegli ýygnanýar we üznüksiz $U$ ($x$, $t$) funksiýany kesgitleýär. $U$ ($x$, $t$) funksiýanyň $(0 \le x \le l) \times (0 < t_1 \le t \le T)$ gönüburçlukda tükeniksiz differensirlenýändigini subut etmek üçin onuň $m + k$ tertipli önümini hasaplalyň we alnan hataryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezeliň:

$$\frac{\partial^{m+k}U}{\partial t^m \partial x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^m \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m+k} a^{2m} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x + k\frac{\pi}{2}\right). \qquad (56.10)$$

$\varphi\,(x)$ funksiýanyň $A_n$ Furýe koeffisiýenti çäklenen. Şonuň üçin

$$\left|A_n(-1)^m\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m+k} a^{2m}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x+k\frac{\pi}{2}\right)\right|\le An^{2m+k}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t},$$

$A$ – käbir hemişelik, $0 < t_1 \le t$.

Dalamber nyşanynyň esasynda

$$\sum_{n=1}^{\infty} An^{2m+k}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t} \qquad (56.11)$$

hatar ýygnanýar. Hakykatdan hem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n+1)^{2m+k}e^{-\left(\frac{n+1}{l}\pi a\right)^2 t_1}}{An^{2m+k}e^{-\left(\frac{n+1}{l}\pi a\right)^2 t_1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2m+k}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(2n+1)t_1}=0<1.$$

(56.11) hatar (56.10) hatar üçin mažorant hatar, diýmek, (56.10) hatar deňölçegli ýygnanýar we (56.8) hatary agzama-agza differensirlemek mümkinçiligini peýdalanyp (56.8) hatar (56.1) deňlemäni we (56.2) gyra şertleri kanagatlandyrýar diýip jemläp bilýäris. (56.3) başlangyç şert çözüwiň gurluşy boýunça ýerine ýetýär. Teorema subut edildi.

## §57. Ýylylyk geçirijiliginiň deňlemesi üçin birjynsly däl mesele

Parabolik deňlemeler üçin birjynsly däl gatyşyk meseleler çözülende hem, giperbolik deňlemelerdäki ýaly, Furýe usulyny ulanmak bolýar.

Goý,

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t), 0<x<l,\ t>0 \qquad (57.1)$$

birjynsly däl deňlemäniň

$$U(0, t) = \mu_1(t),\ U(l, t) = \mu_2(t) \tag{57.2}$$

birjynsly däl gyra şertleri we

$$U(x, 0) = \varphi(x) \tag{57.3}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

(57.1)–(57.3) meseläniň çözüwini

$$U(x, t) = \omega(x, t) + V(x, t) \tag{57.4}$$

jem görnüşde gözläliň we $\omega(x, t)$ funksiýany (57.2) gyra şertler ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň:

$$\omega(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Onda $V(x, t)$ funksiýa üçin

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f_1(x,t),\ f_1(x,t) = f(x,t) - \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t}, \tag{57.5}$$

$$V(0, t) = 0,\ V(l, t) = 0, \tag{57.6}$$

$$V(x, 0) = \varphi_1(x),\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - \omega(x, 0) \tag{57.7}$$

meseläni alarys.

(57.5)–(57.7) meseläniň çözüwini

$$V(x, t) = V_1(x, t) + V_2(x, t)$$

jem görnüşde gözläliň, bu ýerde $V_1(x, t)$ funksiýa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ V_1(0,t) = 0, \quad V_1(l,t) = 0, \\ V_1(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{57.8}$$

meseläniň çözüwi, $V_2$ $(x,\ t)$ funksiýa bolsa birjynsly däl deňlemäniň birjynsly gyra we birjynsly başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + f_1(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ V_2(0,t) = 0, \quad V_2(l,t) = 0, \\ V_2(x,0) = 0. \end{cases} \tag{57.9}$$

Geçen temadan bilşimiz ýaly, (57.8) meseläniň çözüwini aşakdaky hatar görnüşinde ýazylar:

$$V_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{57.10}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{57.11}$$

(57.9) meseläniň çözüwini

$$V_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{57.12}$$

hatar görnüşinde gözläliň, bu ýerde $T_n$ $(t)$ häzirlikçe näbelli funksiýa. $V_2$ $(x,\ t)$ funksiýa gyra şertleri kanagatlandyrýar, sebäbi hataryň her bir agzasy ol şertleri kanagatlandyrýar. Indi $f_1$ $(x,\ t)$ funksiýany Furýe hataryna dagydalyň:

$$f_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{57.13}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{57.14}$$

(57.12) çözüwi we (57.13) dargatmany (57.9) deňlemede goýup alarys:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x = -a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

ýa-da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=0.$$

Alnan deňlige nol funksiýanyň sinuslar boýunça hatar dargytmasy ýaly garamak mümkin, diýmek,

$$T_n'(t)+\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t)=f_n(t). \qquad (57.15)$$

$V_2(x, t)$ funksiýanyň başlangyç şerti kanagatlandyrmagy üçin

$$T_n(0)=0 \qquad (57.16)$$

şert ýerine ýetmeli.

(57.15)–(57.16) Koşi meselesiniň çözüwi

$$T_n(t)=\int_0^l f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau$$

görnüşde ýazylýar.

$T_n(t)$ funksiýany (57.12) çözüwde goýup, (57.9) meseläniň çözüwini alarys:

$$V_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \qquad (57.17)$$

$V_1(x, t)$ we $V_2(x, t)$ funksiýalary goşup, (57.5)-(57.7) meseläniň $V(x, t)$ çözüwini taparys. $\omega(x, t)$ we $V(x, t)$ funksiýalary (57.4) formulada goýup bolsa, (57.1)-(57.3) meseläniň çözüwini taparys:

$$U(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

bu ýerde $A_n$ (57.11) formula, $f_n(t)$ (57.14) formula bilen kesgitlenilýär.

## §58. Ýylylyk geçirijiliginiň deňlemesi üçin Koşi meselesiniň çözüwiniň ýeke-täkligi

### 1. Meseläniň goýluşy

Ýylylyk geçirijiliginiň deňlemesi üçin Koşi meselesi aşakdaky ýaly goýulýar.

**Koşi meselesi.** $-\infty < x < +\infty$, $o < t \leq T$ zolakda

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{58.1}$$

deňlemäniň

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{58.2}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan $U(x, t)$ çözüwini tapmaly, bu ýerde: $\varphi(x)$ – üznüksiz we çäklenen funksiýa.

### 2. Ýeke-täklik teoremasy

**1-nji teorema**. (58.1)–(58.2) Koşi meselesiniň çäklenen çözüwi ýeke-täkdir.

**Subudy**. Goý, meseläniň $U_1(x, t)$ we $U_2(x, t)$ iki çözüwi bar bolsun, onda ol çözüwleriň

$$U(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$$

tapawudy ýylylyk geçirijiliginiň birjynsly deňlemesiniň

$$U(x, 0) = 0, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Çözüwleriň çäklenendiginden $M > 0$ san bar bolup

$$|U_1(x, t)| \leq M, \ |U_2(x, t)| \leq M$$

deňsizlikleriň ýerine ýetýändigi gelip çykýar, diýmek,

$$|U(x, t)| \leq |U_1(x, t)| + |U_2(x, t)| \leq 2M.$$

Maksimum prinsipini çäklenmedik ýaýla üçin gös-göni ulanmak bolmaýar, sebäbi $U(x, t)$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahany hiç ýerde kabul etmezligi mümkin. Bu prinsipi ulanmak üçin

$$|x| \leq L, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{58.3}$$

çäkli ýaýlada

$$V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

kömekçi funksiýany girizeliň. $V(x, t)$ funksiýanyň ýylylyk geçirijiligiň birjynsly deňlemesiniň çözüwi bolýandygyny görmek kyn däl. Alarys:

$$V(x, 0) \geq U(x, 0),$$

$$V(\pm L,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2} + a^2 t\right) \geq 2M \geq \left|U(\pm L,t)\right|.$$

(58.3) ýaýlada $V(x, t) - U(x, t)$ we $V(x, t) + U(x, t)$ funksiýalara maksimum prinsipini ulanyp alarys:

$$V(x, t) - U(x, t) \geq 0,\ V(x, t) + U(x, t) \geq 0,\ |x| \leq L,\ 0 \leq t \leq T.$$

Bu ýerden

$$-V(x, t) \leq U(x, \mathrm{t}) \leq V(x, t),\ |x| \leq L,\ 0 \leq t \leq T$$

ýa-da

$$\left|U(x,t)\right| \leq V(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right), |x| \leq L, 0 \leq t \leq T.$$

Soňky deňsizlikde ($x$, t) nokady fiksirläp ýa-da berkidip, $L \to \infty$ bolanda predele geçip alarys:

$$U(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t) \equiv 0$$

ýa-da

$$U_1(x, t) \equiv U_2(x, t)$$

Teorema subut edildi.

# §59. Ýylylyk geçirijiligiň birjynsly deňlemesi üçin Koşi meselesi

## 1. Formal çözüwiň gurluşy

Goý,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, 0 < t \le T, \tag{59.1}$$

birjynsly deňlemäniň

$$U(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x + \infty \tag{59.2}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun, $\varphi(x)$ – üznüksiz we çäklenen funksiýa.

Ilki bilen, (59.1) deňlemäniň

$$U(x, t) = X(x)\, T(t) \tag{59.3}$$

görnüşdäki hususy çözüwini tapalyň. (59.3) görnüşdäki çözüwi (59.1) deňlemede goýup alarys:

$$X(x)\, T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t),$$

ýa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Şeýlelik bilen, $T(t)$, $X(x)$ funksiýalar üçin

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

deňlemeleri alarys. Bu ýerden

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \qquad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$$

$A$, $B - \lambda$ parametre bagly bolan funksiýalar. Gyra şertleriň ýoklugy üçin $\lambda$ parametr erkin.

(59.3) deňligiň esasynda

$$U_\lambda(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] \qquad (59.4)$$

funksiýa islendik $A$ ($\lambda$), $B$ ($\lambda$) üçin (59.1) deňlemäniň hususy çözüwi bolar. (59.4) deňligi $\lambda$ boýunça integrirläp alarys:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (59.5)$$

Eger integral deňölçegli ýygnanýan bolsa we ony integral astynda $t$ boýunça bir, $x$ boýunça iki gezek differensirlemek bolýan bolsa, onda (59.5) deňlik bilen kesgitlenýän $U$ ($x$, $t$) funksiýa (59.1) deňlemäniň çözüwi bolýar.

$A$ ($\lambda$), $B$ ($\lambda$) funksiýalary (59.2) başlangyç şert ýerine ýeter ýaly saýlap alalyň. (59.5) deňlikde $t = 0$ goýup, (59.2) esasynda alarys:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \qquad (59.6)$$

Deňligiň sag bölegindäki integraly $\varphi$ ($x$) funksiýa üçin

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]d\lambda.$$

Furýe integraly bilen deňeşdirip, (59.6) deňligi

$$\begin{cases} A(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi, \\ B(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \end{cases} \qquad (59.7)$$

diýip, kanagatlandyryp bolýandygyny görýäris. $A$ ($\lambda$), $B$ ($\lambda$) funksiýalaryň (59.7) aňlatmalaryny (59.5) deňlemede goýup, (59.1)–(59.2) Koşi meselesiniň formal çözüwini alarys:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right)\cos\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right)\sin\lambda x\right]e^{-\lambda^2a^2t}\,d\lambda.$$

$\xi$ boýunça integrallary birleşdirip we integrirlemegiň tertibini çalşyryp alarys:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\xi.$$

Bilşimiz ýaly,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

Eger bu ýerde $\alpha^2=\alpha^2\,t$, $\beta=\xi-x$ diýsek, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-\lambda)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Şeýlelik bilen, Koşi meselesiniň formal çözüwi üçin

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi \qquad (59.8)$$

formulany alarys.

(59.8) görnüşde ýazylan çözüwe **Puasson integraly** diýilýär.

$$G(x,t;\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \qquad t>0 \qquad (59.9)$$

funksiýanyň ýylylyk geçirijiligiň (59.1) deňlemesiniň çözüwi bolýandygyny gös-göni barlamak bilen görkezmek bolýar. (59.9) funksiýa ýylylyk geçirijiligiň (59.1) deňlemesiniň **fundamental çözüwi** diýilýär.

## 2. Usulyň esaslandyrylyşy

Indi haýsy şertler ýerine ýetende (59.8) funksiýanyň (59.1)–(59.2) Koşi meselesiniň çözüwi bolýandygyny görkezeliň.

**Lemma.** Eger $\varphi\ (x)$ funksiýa san okunda üznüksiz we çäklenen bolsa, onda (59.8) Puasson integraly $t > 0$ bolanda tükeniksiz differensirlenýän funksiýany kesgitleýär we ol funksiýanyň önümleri integral astynda differensirlemek bilen hasaplanýar.

**Subudy**. (59.8) integralyň integral astynda differensirlemäniň kanunalaýykdygyna göz ýetirmek üçin ol integralyň we ony $x$, $t$ boýunça birnäçe gezek formal differensirlenip alnan integrallaryň deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlik. (59.8) integraly $x$ we $t$ boýunça birnäçe gezek differensirläp

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, t^{-m} (\xi - x)^n e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi \tag{59.10}$$

görnüşdäki integrallaryň jemini alarys. (59.10) integralda $\dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \alpha$ orun çalşyrma edip, alarys:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(x + 2a\sqrt{t\alpha}\right) t^{-m+\frac{n+1}{2}} (2a)^{n+1} \alpha^n e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Şerte görä $\varphi\ (x)$ çäklenen funksiýa, onda $t \geq t_1 > 0$ bolanda $M > 0$ san tapylyp

$$\left| \varphi\left(x + 2a\sqrt{t\alpha}\right) t^{-m+\frac{n+1}{2}} (2a)^{n+1} \right| < M$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şeýlelik bilen,

$$I < M\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Soňky integral islendik $n$ üçin ýygnanýar, onda (59.10) integral deňölçegli ýygnanýar we (59.8) integraly integral astynda differensirlemek kanunalaýyk. Lemma subut edildi.

**1-nji teorema.** Eger $\varphi\ (x)$ san okunda üznüksiz we çäklenen bolsa, onda (59.8) Puasson integraly (59.1)-(59.2) Koşi meselesiniň yzygiderli çözüwi bolýar.

**Subudy**. Puasson integralyny

$$U\left(x,t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(x,t;\xi\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi$$

görnüşde ýazalyň. $G\ (x,\ t;\ \xi)$ funksiýa ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň çözüwi we lemma laýyklykda differensirlemäni integral astynda ýerine ýetirmek bolýar. Şoňa görä-de

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial G}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi = 0,$$

ýagny (59.8) funksiýa (59.1) deňlemäni kanagatlandyrýar.

(59.8) çözüwiň (59.2) başlangyç şerti kanagatlandyrýandygyny görkezeliň. $x$ fiksirläp $t \to +0$ bolanda $|U\ (x,\ t) - \varphi\ (x)|$ tapawudy bahalandyralyň. Puasson integralynda $\dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \alpha$ orun çalşyrma edip alarys:

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x + 2a\sqrt{t\alpha}\right)e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

Belli bolşy ýaly,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha = 1. \qquad (59.11)$$

Alarys:

$$\left|U(x,t)-\varphi\left(x\right)\right|=\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)e^{-\alpha^2}d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(x\right)e^{-\alpha^2}d\alpha\right]\leq$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

(–∞, +∞) aralyk boýunça integraly (–∞, –*N*), (–*N*, *N*), (*N*, +∞) aralyklar boýunça üç integrala böleliň:

$$\left|U(x,t)-\varphi\left(x\right)\right|\leq\int_{-\infty}^{-N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|e^{-\alpha^2}d\alpha+$$

$$+\int_{-N}^{+N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|e^{-\alpha^2}d\alpha+\int_{+N}^{+\infty}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|e^{-\alpha^2}d\alpha.$$

$\varphi$ $(x)$ funksiýanyň san okunda çäklenendiginden

$$\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|<2M$$

deňsizlik gelip çykýar. Şonuň üçin

$$\left|U(x,t)-\varphi\left(x\right)\right|\leq\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-N}^{+N}\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t\alpha}\right)-\varphi\left(x\right)\right|d\alpha+$$

$$+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{+N}^{+\infty}e^{-a^2}d\alpha$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2}d\alpha$ integral ýygnanýar. Şeýlelikde, *N* sany

$$\left|\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-a^2}d\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{3},\left|\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{+N}^{+\infty}e^{-a^2}d\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

deňsizlikler ýerine ýeter ýaly saýlap almak bolýar. Indi *N* fiksirlenen bolsun. $\varphi$ $(x)$ funksiýa san okunda üznüksiz, diýmek, ol $\left[x-2a\sqrt{t}N,x+2a\sqrt{t}N\right]$ kesimde deňölçegli üznüksiz we nola golaý islendik *t* üçin

$$\left|\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\alpha\right)-\varphi\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

deňsizlik ýerine ýeter. Şeýlelik bilen,

$$\left|U(x,t)-\varphi\left(x\right)\right|\leq\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2}\,d\alpha,$$

ýa-da nola golaý islendik $t$-ler we islendik $x$ üçin $|U(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Bu ýerden $\varepsilon$ sanyň erkinliginden

$$\lim_{t\to\infty} U\left(x,t\right)=\varphi\left(x\right)$$

gelip çykýar. Teorema subut edildi.

### 3. Çözüwiň başlangyç funksiýa üznüksiz baglylygy

Goý, $U(x, t)$ (59.1) deňlemäniň (59.2) başlangyç şerti $U_1(x, t)$ bolsa, (59.1) deňlemäniň

$$U_1(x, 0) = \varphi_1(x) \tag{59.12}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi bolsun.

Eger $(-\infty, +\infty)$ aralyga degişli islendik $x$ üçin $|\varphi(x) - \varphi_1(x)| < \varepsilon$ bolsa, onda

$$|U(x, t) - U_1(x, t)| < \varepsilon, -\infty < x + \infty, t > 0.$$

Hakykatdan hem, (59.1) deňlemäniň (59.12) başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwi (59.8) formula bilen aňladylýar. $U(x, t)$ we $U_1(x, t)$ funksiýalaryň tapawutlaryny bahalandyralyň:

$$\left|U(x,t)-U_1(x,t)\right|=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi\left(x\right)-\varphi_1\left(x\right)\right]\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

$\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$ diýip alarys:

$$\left|U(x,t) - U_1(x,t)\right| < \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \varepsilon.$$

(59.8) formuladan ýylylygyň sterženiň boýuna tükeniksiz tizlik bilen ýaýraýandygy gelip çykýar. Hakykatdan hem, goý, $\varphi(x)$ başlangyç temperatura $\alpha \le x \le \beta$ kesimde položitel we bu kesimiň daşynda nola deň bolsun. Onda temperaturanyň soňraky paýlanyşy üçin alarys:

$$U(x,t) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Bu ýerden islendik kiçi $t > 0$ üçin we islendik uly $x$ üçin $U(x, t) > 0$ bolýandygy görünýär. Bu häsiýet ýylylyk geçirijiligiň deňlemesiniň kämil däldigi, deňlemäni getirip çykarylanda peýdalanylýan fiziki nätakyklygy bilen düşündirilýär.

### 4. Fundamental çözüwiň fiziki manysy

Ýylylyk geçirijiligiň birjynsly deňlemesiniň

$$G(x,t;\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}$$

fundamental çözüwiniň fiziki manysyny anyklalyň.

Goý, $t = 0$ pursatda tükeniksiz uzyn steržende ýylylyk $U(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x)$ kanun boýunça paýlanan bolsun, bu ýerde $\varphi_\varepsilon(x) \equiv 0$ haçan-da $x \notin (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ bolsa we

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = 1.$$

Eger $t = 0$ pursatda nol temperaturasy bolan sterženiň $y$ nokadynyň $\varepsilon$ etrabyna şol bada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(\xi) c\rho d\xi = c\rho \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = c\rho$$

mukdardaky ýylylyk berilse, onda ýokarda görkezilen paýlanyşyk alynýar.

$t > 0$ pursatda steržende ýylylygyň paýlanyşy Puasson integraly bilen kesgitlenýär:

$$U_\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t;\xi)\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G(x,t;\xi)\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi.$$

Orta baha hakyndaky teoremany ulanyp we $\varphi_\varepsilon(x)$ funksiýanyň häsiýetini nazarda tutup alarys:

$$U_\varepsilon(x,t) = G\left(x,t;\xi^*\right) \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G\left(x,t;\xi^*\right),$$

$$\xi^* \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

$(x, t)$ nokady fiksirläp, $\varepsilon \to 0$ bolanda predele geçip alarys:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U_\varepsilon(x,t) = G(x,t;y).$$

Şeýlelik bilen, eger $t = 0$ pursatda nol temperaturasy bolan sterženiň $x = y$ nokadyna şol bada $c\rho$ deň mukdardaky ýylylyk berlen bolsa, onda ýylylyk geçirijiligiň $G(x, t; y)$ fundamental çözüwi $t$ bolanda steržende paýlanyşygy berýär, ýagny $G(x, t; y)$ çeşme funksiýasy bolar.

## §60. Ýylylyk geçirijiligiň birjynsly däl deňlemesi üçin Koşi meselesi

Goý, ýylylyk geçirijiligiň birjynsly däl

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \; -\infty < x < +\infty, \; t > 0 \qquad (60.1)$$

deňlemesiniň

$$U(x, 0) = 0 \tag{60.2}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmak talap edilýän bolsun.

Eger başlangyç şert nola deň däl bolsa, ýagny $U(x, 0) = \varphi(x)$ bolsa, onda

$$U(x, t) = \omega(x, t) + \varphi(x)$$

formulanyň kömegi bilen täze $\omega(x, t)$ funksiýa girizip, başlangyç şerti nola deň bolan mesele alarys:

$$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial,t} = a^2\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial x^2} + \left[f(x,t) - \varphi''(x)\right],\ \omega(x,0) = 0.$$

(60.1)-(60.2) Koşi meselesiniň çözüwini tapmak üçin

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2},\ \ t > \tau, \tag{60.3}$$

$$V(x, \tau) = f(x, \tau) \tag{60.4}$$

kömekçi meselä garalyň. (60.3)–(60.4) mesele birjynsly deňleme üçin başlangyç şert $t = 0$ bolanda däl-de, $t = \tau$ bolanda berlen Koşi meselesi. Şonuň üçin hem bu meseläniň çözüwini $t$-ni $t - \tau$ bilen çalşyp, Puasson integralynyň kömegi bilen ýazmak bolýar:

$$V(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi.$$

Indi (60.1)-(60.2) meseläniň çözüwini

$$U(x,t) = \int_0^t V(x,t;\tau)\,d\tau$$

ýa-da

$$U(x,t) = \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

görnüşde ýazmak bolýar.

# PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR


1. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Bilim – bagtyýarlyk, ruhubelentlik, rowaçlyk. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2014.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. 7-nji tom. – A., 2014.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. 8-nji tom. – A., 2015.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. 9-njy tom. – A., 2016.

5. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – Beýik Ýüpek ýolunyň ýüregi. – A.: TDNG, 2017.

6. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука,1984.

7. *Алексеев Г.В.* Классические методы математической физики. Учебное пособие.Часть 1,2. – Изд-во Дальневосточного университета, 2005.

8. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982.

9. *Бицадзе А.В., Калиниченко.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1982.

10. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980.

11. *Владимиров В.С., Жаринов В.В*. Уравнения математической физики. Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1985.

13. *Владимиров В.С. и другие*. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1982.

14. *Захаров Е.В., Дмитриева И.В., Орлик С.И.* Уравнения математической физики. – М.: Издательский центр “Академия”, 2010.

15. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М*. Уравнения в частных производных математической физики. – М., 1970.

16. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

17. *Петровский И.Г.* Лекция об уравнении с частными производными. – М., 1961.

18. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

19. *Панов Ю.Д.*, *Егоров Р.Ф.* Математическая физика. Методы решения задач. – Изд-во Уральского государственного университет а им. А.М.Горького, 2005.

20. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

21. *Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

22. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 2003.

23. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1993.

24. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968.

25. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М., 1964.

26. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

# MAZMUNY

## III BAP
## ELLIPTIK DEŇLEMELER



## IV BAP
## POTENSIALLAR NAZARYÝETI

## V BAP
## GIPERBOLIK DEŇLEMELER

## VI BAP
## PARABOLIK DEŇLEMELER

*Muhammet Meredow, Gurbannazar Kurbankulyýew,*
*Nurmyrat Durdyýew*

# MATEMATIKI FIZIKANYŇ DEŇLEMELERI

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

| | |
|---|---|
| Redaktor | *N. Kakalyýewa* |
| Teh. redaktor | *T. Aslanowa* |
| Kompýuter bezegi | *G. Ataýewa* |
| Neşir üçin jogapkär | *N. Gurbanmämmedow* |

Ýygnamaga berildi 15.02.2017. Çap etmäge rugsat edildi 13.11.2017.
Möçberi 60x90 $^{1}/_{16}$. Edebi garniturasy.
Çap listi 14,5. Şertli-çap listi 14,5. Hasap-neşir listi 11,35.
Neşir № 60. Sargyt № 8. Sany 1100.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň “Ylym” neşirýaty.
744000. Aşgabat, Türkmenbaşy şaýoly, 18.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň Tehnologiýalar merkeziniň çaphanasy.
Aşgabat, Bekrewe ýaşaýyş toplumy, 2211 (Bekrewe) köçesi, 180.