H.M. Hojanyýazow

MATEMATIKA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2015

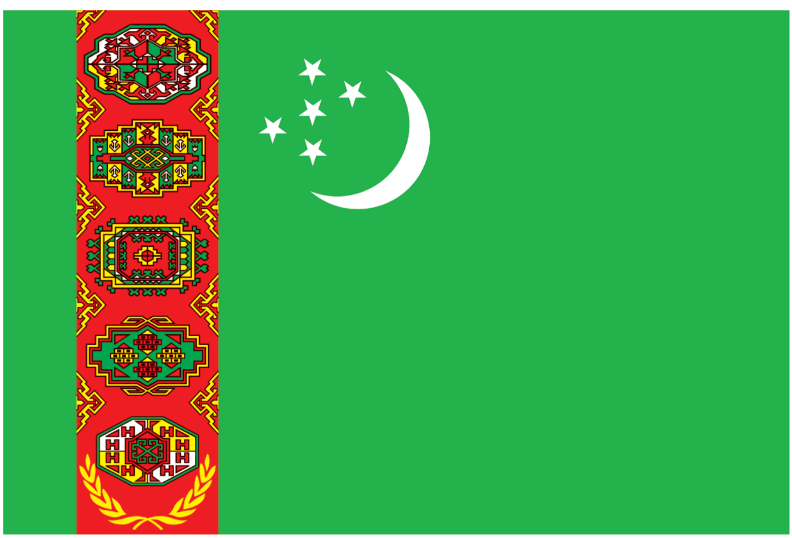
UOK 510:378
H 54

Hojanyýazow H.M.
H 54 **Matematika.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.

TDKP № 310, 2015 KBK 22.1 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

SÖZBAŞY

Berkarar döwletiň bagtyýarlyk döwründe Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ylym, bilim ulgamyny mundan beýläk-de ösdürmek we kämilleşdirmek baradaky Kararlarydyr, Permanlary okuw mekdepleriniň ähli derejelerinde, şol sanda ýokary okuw mekdeplerinde okuw maksatnamalaryny täzeden gözden geçirip, olary döwrüň ösen talaplaryna laýyklykda işläp taýýarlamaga hem-de şol okuw maksatnamalarynyň esasynda okuw kitaplaryny we okuw gollanmalaryny ýazmaga uly itergi berdi.

Watanymyzyň geljegi bolan ösüp gelýän ýaş nesli ylymly, bilimli, akylly, paýhasly hünärmenler edip ýetişdirmek başlangyç synplardan başlanýar. Sebäbi başlangyç synplarda ähli bilimleriň düýbi tutulýar. Diýmek, başlangyç synp mugallymlarynyň hünär taýýarlygy dünýäniň ösen döwletleriniň derejesinde bolmalydyr.

Matematika adamzat durmuşynda onuň gündelik amaly işleriniň netijesinde ýüze çykan ilkinji ylymdyr diýip hasap edilýär we ol biziň günlerimize çenli köp asyrlyk taryhy ösüş ýoluny geçdi. Şonuň üçin kitapda teoretiki maglumatlar bilen bir hatarda, matematika ylmynyň ösüş taryhyna degişli gyzykly maglumatlar berilýär.

Size hödürlenýän bu okuw kitaby ýokary okuw mekdepleriniň «Başlangyç bilimiň mugallymçylygy» hünäriniň matematika dersiniň okuw maksatnamasy esasynda taýýarlanyldy.

Kitap ýedi bapdan ybarat bolup, olarda berilýän okuw maglumatlary sada, düşnükli hem-de ylmy dilde beýan edildi.

Başlangyç synp mugallymynyň matematiki taýýarlygy «Köplükler we olaryň üstünde amallar» diýen bölümden başlanýar. Şeýle-de, köplükleriň berliş usullaryna, olaryň üstünde geçirilýän amallara, häsiýetlerine aýratyn üns berilýär.

«Matematiki logikanyň elementleri» diýen bölümde talyplara diňe bir logikanyň esasy düşünjelerini öwretmek bilen çäklenmän, eýsem, olaryň umumy logiki sowatlylygyny kämilleşdirmegi göz öňünde tutulýar.

Deňlemeleri we deňsizlikleri çözmek usuly öwredilende, olaryň has çylşyrymlylaryny çözmeklige ýykgyn etmän, eýsem, talyplaryň ýönekeý deňlemeleri we deňsizlikleri matematiki teoriýanyň esasynda çözüp bilmeklerini gazanmagy göz öňünde tutulýar. Gatnaşyk diýen bölüm iki köplügiň elementleriniň we bir köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyk diýen düşünjeleri öz içine alýar. Binar gatnaşygynyň berlişine hususan-da gatnaşygyň iki üýtgeýän ululykly deňlemeleriň kömegi bilen berlişine aýratyn üns berilýär.

Geljekki başlangyç synp mugallymlarynyň geometriki taýýarlygy esasy geometriki düşünjelere seretmek we «Geometriki özgertmeler» bölüminiň soraglaryny özleşdirmek arkaly amala aşyrylýar.

«Otrisatel däl bitin sanlar» bölümi öwredilende talyplara otrisatel däl bitin sany kesgitlemeklige iki dürli çemeleşmäni öwretmegi, otrisatel däl bitin sanlary kesgitlemäge aksiomatiki çözmekde ilki bilen, Peanonyň aksiomalaryny peýdalanmagy hem-de goşmagy we köpeltmegi aksiomatiki kesgitlemegi saýlap aldyk. Şu bölümde natural san we nol san düşünjelerini şonuň ýaly-da jem, tapawut, köpeltmek hasyl, paý diýen düşünjeleri öwretmek esasy orny tutýar.

Hasaplanyş sistemalary bilen baglanyşykly soraglar öwredilende, onluk hasaplaýyş sistemasynda sanlaryň üstünde geçilýän amallara köp üns berdik.

«San baradaky düşünjäni giňeltmek. Ululyklar we olary ölçemek» bölümi öwretmek kesimleri ölçemek düşünjesine esaslanyp öwredilýär. Şonuň üçin ilki bilen položitel hakyky sanlar öwredilýär, soňra ululyklar we olary ölçemek düşünjesi girizilip, nol san we otrisatel hakyky sanlar öwredilýär.

I bap

KÖPLÜKLER TEORIÝASYNYŇ WE KOMBINATORIKANYŇ ELEMENTLERI

§1. Köplükler barada esasy düşünjeler

1. Köplük düşünjesi

Köplükler teoriýasy XIX asyryň soňunda görnükli nemes matematigi Georg Kantor tarapyndan esaslandyryldy. Bu teoriýanyň esasy düşünjeleri we usullary häzirki wagtda diňe bir matematikanyň dürli pudaklaryna däl, eýsem, beýleki ylymlaryňam köpüsine ornaşdyryldy we üstünlikli ulanylýar.

Täze düşünje kesgitlenende öňden anyk, belli düşünjelerden peýdalanýarlar. Şonuň üçin ähli düşünjelere kesgitleme bermek mümkin däl. Käbir düşünjelere esasy düşünje hökmünde kesgitleme berilmän kabul edilýär. Biz eýýäm geometriýanyň mekdep kursunda şeýle düşünjeler bolan nokat, göni çyzyk, tekizlik we başgalar bilen tanyşdyk.

«Köplük», «köplügiň elementleri» baradaky düşünjeler matematikanyň esasy düşünjeleridir. Bu düşünjeler kesgitlenmeýär, olaryň manysyny mysallaryň kömegi bilen düşündirmek bolar.

Köplük diýlende, biz haýsy-da bolsa bir häsiýet (nyşan) boýunça birleşdirilen zatlaryň (obýektleriň) toplumyna, ýygyndysyna düşünýäris. Köplügi düzýän zatlara (obýektlere) onuň elementleri diýilýär.

Köplükler baş latyn harplary A, B, C, …, Z bilen, olaryň elementleri bolsa, setir latyn harplary a, b, c, …, z bilen bellenilýär. Köplügiň ýazgysynda $\{\ldots\}$ görnüşli ýaýlardan peýdalanarys.

Köplügi düzýän elementleriň sanyna baglylykda tükenikli we tükeniksiz köplükler bolýarlar. Eger köplügiň elementleriniň mukdar sany käbir natural san bilen çäklenen bolsa, onda oňa tükenikli köplük diýilýär.

1-nji mysal

a) 1-den 100-e çenli natural sanlaryň köplügi (tükenikli köplük);

b) Ýer şarynyň tokaýlaryndaky agaçlaryň köplügi (tükenikli köplük);

ç) tekizlikdäki ähli üçburçluklaryň köplügi (tükeniksiz köplük);

d) ähli bitin sanlaryň köplügi (tükeniksiz köplük).

Köplük we onuň elementleriniň arasynda «degişli bolmak» gatnaşygy bardyr. Eger a element A köplüge degişli (A köplük a elementi özünde saklaýan) bolsa, onda ol $a \in A$ görnüşinde bellenilýär. $a \notin A$ ýa-da $a \,\overline{\in}\, A$ belgiler a elementiň A köplüge degişli däldigini aňladýar.

Köplükleriň elementleri ýazylanda tertip saklanylmaýar: $\{1, 2, 3\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{3, 2, 1\}$ ýazgylar şol bir üç elementli köplügi aňladýar.

Hiç bir elementi özünde saklamaýan köplüge boş köplük diýilýär. Boş köplük Ø belgi bilen belgilenilýär. Meselem, $x^2 + 1 = 0$ deňlemäniň hakyky kökleriniň köplügi boş köplükdir. Burçlarynyň jemi 180º-dan tapawutly üçburçluklar hem boş köplügi emele getirýärler.

Köplük bir elementden ybarat bolup biler. Ýöne, a element bilen bu ýeke-täk elementiň $\{a\}$ köplügini berk tapawutlandyrmak gerek. Bu ýerde a – element, $\{a\}$ bolsa, a elementden düzülen bir elementli köplügi aňladýar.

2. Köplükleriň berliş usullary

Islendik elementiň (obýektiň) käbir köplüge degişlidigini ýa-da degişli däldigini anyklamak mümkin bolsa, onda köplük berlipdir diýilýär.

Köplükleriň berlişiniň iki usulyna seredeliň.

1. Sanap geçme usuly

Köplük özüniň ähli elementlerini sanap geçmek usuly bilen berilýär. Meselem, $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Bu usul diňe tükenikli, onda-da elementleriniň sany köp bolmadyk köplükleri bermek üçin ulanylýar.

2. Köplügiň elementlerine mahsus bolan umumy häsiýeti görkezmek bilen bermek usuly

Köplügi onuň hemme elementlerine mahsus bolan tapawutlandyryjy häsiýeti görkezmek bilen bermek bolýar. Bu häsiýet käbir elementiň seredilýän köplüge degişlidigini ýa-da degişli däldigini berkarar edýär. Köplükler bu usul bilen berlende şeýle ýazgydan peýdalanylýar: $A = \{x|P(x)\}$.

Ýazgyny şeýle okamak mümkin: «A köplük P häsiýetli x elementlerden düzülipdir». Bu ýerde figuralaýyn ýaýlar «köplük», dik çyzyk bolsa «şeýle ..., ýagny» sözlerini aňladýarlar.

2-nji mysal

a) $A = \{x|x$ – iki belgili san$\}$ – ähli iki belgili sanlaryň köplügi.

b) $B = \{x|x > 0\}$ – ähli položitel hakyky sanlaryň köplügi.

2-nji mysaldan görnüşi ýaly, köplügi bermegiň seredilýän usuly bilen hem tükenikli, hem tükeniksiz köplükleri bermek mümkin.

Şol bir köplügi öz elementleriniň dürli häsiýetlerini görkezmek bilen bermek bolar. Meselem, kwadratlaryň köplügini taraplary deň bolan gönüburçluklar hökmünde-de, burçlary göni romblar hökmünde-de bermek bolýar.

Käbir köplükler iki usul bilen hem berlip bilner. Meselem, 25 we 32 sanlaryň aralygyndaky natural sanlaryň köplügini $A = \{x|25 < x < 32\}$ ýa-da $A = \{26, 27, 28, 29, 30, 31\}$ görnüşinde bermek bolar.

Başlangyç synp okuwçylary matematika sapaklarynda köplügi bermegiň bir usulyndan beýlekisine geçmek bilen baglanyşykly gönükmeleri ýerine ýetirýärler. Meselem, «11 sandan uly we 20 sandan kiçi sanlary ýazyň», «5-den kiçi sanlary ýazyň» we ş.m.

3. Bölek köplük. Deň köplükler

Goý, iki A we B köplükler berlen bolsun.

1-nji kesgitleme. Eger B köplügiň her bir elementi şol bir wagtda A köplüge hem degişli bolsa, onda B köplüge A köplügiň bölek köplügi diýilýär we

$$B \subset A \tag{2}$$

görnüşde ýazylýar.

Eger $B \subset A$ bolup, A köplükde B köplüge degişli bolmadyk iň bolmanda bir element bar bolsa, onda B köplüge A köplügiň hususy bölek köplügi diýilýär.

Bölek köplügiň kesgitlemesinden $A \subset A$ bolýandygy gelip çykýar. Ondan başga-da, $\varnothing \subset A$ hasaplanylýar.

A we $\varnothing$ köplüklere A köplügiň hususy däl bölek köplükleri diýilýär.

A köplügiň elementlerini käbir goşmaça häsiýetleri boýunça toparlap, olardan A köplügiň bölek köplüklerini düzmek bolar.

Hususan-da, köplügiň elementlerine mahsus bolan umumy häsiýeti görkezip bermek usuly hem bölek köplük düşünjesine esaslanýar.

3-nji mysal

a) eger A – başlangyç bilimiň mugallymçylygy bölüminiň talyplarynyň köplügi, B – şol bölümiň 1-nji ýyl talyplarynyň köplügi bolsa, onda $B \subset A$ bolar;

b) goý, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 7\}$ bolsun. Onda, $B \subset A$ emma $C \not\subset A$;

ç) goý, A köplük dörtburçluklaryň köplügi bolsun. Onda, dörtburçluklaryň içinden jübüt-jübütden parallel bolan dörtburçluklary (parallelogramlary) saýlap, A köplügiň bölek köplügi bolan B köplügi düzmek bolar.

Bellik. «$\in$» we «$\subset$» belgiler ulanylanda köplükleriň elementleriniň hem köplükler bolup biljekdigini unutmaly däldiris. «$\subset$» belgi diňe iki köplügiň arasynda goýulýar. «$\in$» belgi bolsa elementiň (ol öz gezeginde köplük hem bolup biler) we köplügiň arasynda goýulýar.

4-nji mysal

$A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ köplük berlen bolsun. Onda,

a) $a \in A$; b) $\{a\} \in A$; ç) $a \subset A$; d) $b \subset A$; e) $\{b\} \in A$; ä) $\{a, b\} \subset A$; f) $\{a, b\} \in A$ tassyklamalar dogrumy? 1-nji kesgitlemä we mysalyň şertine laýyklykda a); b); ä); f) tassyklamalar dogry. ç); e); d) tassyklamalar bolsa nädogrudyr.

2-nji kesgitleme. Eger A we B köplükler üçin, şol bir wagtda $B \subset A$ we $A \subset B$ bolýan bolsa, onda A we B köplüklere deň köplükler diýilýär we $A = B$ görnüşde ýazylýar.

Bu kesgitlemeden köplükleriň deňdigini subut etmegiň bir usuly gelip çykýar. $A = B$ deňligi subut etmek üçin birinjiden $B \subset A$, ikinjiden $A \subset B$ bolýandygyny görkezmek zerur hem ýeterlikdir. Ýagny islendik $x \in A$ bolýanlygyndan $y \in A$ gelip çykýandygyny we islendik $y \in B$ bolýanlygyndan $y \in A$ gelip çykýandygyny tassyklamak gerek.

Bellik. Köplükler teoriýasynda «deň köplükler» düşünjesi köplükleriň gabat gelmegi manysynda ulanylýar. Ýagny eger A we B köplükler deň bolsalar, onda olar dürli hili bellenen şol bir köplükdir. Şu nukdaýnazardan, meselem, üç tegelekden we üç kwadratdan ybarat köplükler gabat gelmeýändikleri üçin özara deň däldirler.

5-nji mysal

$A = \{a, b, c\}$ we $B = \{a, \{b, c\}\}$ köplükler deňmi?

B köplükde b elementiň ýokdugy sebäpli, A we B köplükler özara deň däldirler. Köplükleriň özara gabat gelmeýändiklerini subut etmegiň şu usulyny umumylaşdyryp meseleler çözülende giňden ulanylýan tassyklama alarys. Köplükleriň haýsy-da bolsa birinde beýlekisine degişli elementleriň iň bolmanda biri ýok bolsa, onda bu köplükler özara deň däldirler.

Goý, A köplük tükenikli bolsun we onuň n elementi bar diýeliň.

Teorema. n elementli A köplügiň ähli bölek köplükleriniň sany 2^n-e deňdir.

Goý, $n = 1$ bolsun, ýagny $A = \{a\}$. Onda, A köplügiň iki $2^1 = 2$; $\varnothing$ we $\{a\}$ bölek köplükleri bardyr. Edil şeýle $n = 2$, $n = 3$ bolanda A köplügiň bölek köplükleriniň sanynyň degişlilikde, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ bolýandygyny hasaplamak kyn däldir. Dogrudan-da, eger $A = \{a, b, c\}$ elementlerden ybarat bolsa, onda onuň bölek köplükleriniň : $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$; $\{a, b, c\}$ jemi sany $2^3 = 8$-e deňdir.

Goý, indi A köplügiň n elementi bar we onuň bölek köplükleriniň sany 2^n-e deň diýeliň. A köplüge ýene käbir elementi goşalyň. Onda, onuň elementleriniň sany $(n + 1)$-e deň bolar. Bu ýagdaýda A köplügiň bölek köplükleriniň sany nähili üýtgär?

Täze goşulan element öňki 2^n sany bölek köplükleriň her biri bilen bilelikde ýene 2^n bölek köplügi emele getirer we netijede, bölek köplükleriň jemi sany $2^n + 2^n = 2^{n+1}$-e deň bolar. Diýmek, A köplügiň bölek köplükleriniň sany diňe A köplügiň elementleriniň sanyna baglydyr; A köplük n elementden ybarat bolsa, onuň bölek köplükleriniň sany 2^n-e barabardyr.

A köplügiň ähli bölek köplükleriniň toplumyna A köplügiň **buleany** diýilýär we ol $P(A)$ bilen bellenýär. Şeýlelikde, $P(A) = \{A_\alpha | A_\alpha \subset A\}$.

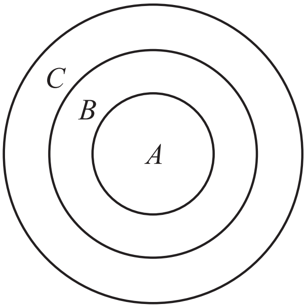
Berlen köplükde bellenen häsiýetli elementleriň bölek köplügini tapawutlandyrmak başarnygy diňe bir matematikada däl, eýsem, gündelik durmuşda hem wajypdyr. «Köplük», «Bölek köplük» düşünjeleri matematikanyň başlangyç kursunda gös-göni öwrenilmeýär, ýöne käbir köplügiň bölegini bölüp aýyrmaga degişli meseleleri okuwçylar köp çözýärler. Meselem: «9-dan 20-ä çenli sanlaryň köplüginiň bir bölegi berlipdir. Beýleki galan sanlary tapmaly», «Berlen üçburçluklaryň içinden gönüburçly üçburçluklary saýlap görkeziň» we ş.m.

Şeýle mysallary çözmek köplügi käbir nyşanlaryň kömegi bilen häsiýetlendirmek, berlen köplükde käbir nyşan boýunça bölek köplügi tapawutlandyrmak, şol bir köplükde dürli bölek köplükleri görmek ýaly başarnyklary kemala getirýär. Köplügiň bölek köplükleriniň sanyny hasaplamaga degişli gönükmeler hem peýdalydyr, sebäbi olar okuwçylarda kombinatoriki pikirlenmäniň döremegine we kem-kemden ösmegine getirýär.

4. Köplükleriň tekizlikde şekillendirilişi. Uniwersal köplük

Köplükler teoriýasynyň dilinde islendik geometrik figura nokatlaryň köplügi hökmünde kabul edilýär. Şu nukdaýnazardan islendik geometrik figurany tekizligiň ýa-da giňişligiň bölek köplügi hökmünde kesgitläp bolar. Şeýlelikde, her bir geometrik figura üçin şol figura mahsus bolan we ony beýlekilerden tapawutlandyrýan häsiýet görkezilýär. Meselem: «Töwerek – bu tekizlikde berlen nokatdan (merkez) berlen aralyga (radius) deňdaşlaşan ähli nokatlaryň köplügidir».

Köplükleriň we olaryň häsiýetleriniň manysynyň has düşnükli bolmagy üçin Eýleriň tegelekleri diýlip atlandyrylýan çyzgylardan peýdalanýarlar. Bu çyzgylarda köplükler elementleriniň sanyna bagly bolmazdan ýapyk çyzygyň içki nokatlarynyň toplumy görnüşinde şekillendirilýär.



1-nji surat

1-nji suratda A, B we C köplükler şekillendirilen. Bu suratdan $A \subset B$, $B \subset C$ we $A \subset C$ bolýandygy görünýär.

Köplenç, seredilýän ähli köplükler käbir I köplügiň bölek köplükleri bolup durýarlar. Şeýle ýagdaýda bu I köplüge uniwersal köplük diýilýär.

6-njy mysal

a) goý, I başlangyç bilimiň mugallymçylygy bölüminiň talyplarynyň köplügi bolsun. Onda I köplük aşakdaky köplükler üçin uniwersal köplükdir:

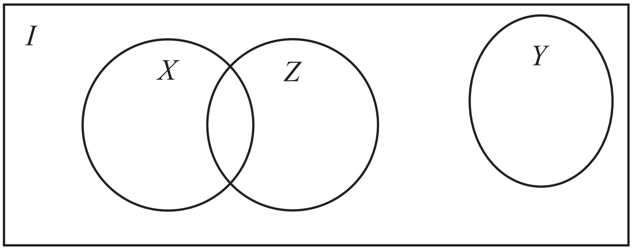
A – başlangyç bilimiň mugallymçylygy bölüminiň 1-nji ýyl talyplarynyň köplügi;

B – başlangyç bilimiň mugallymçylygy bölüminde okaýan oglanlaryň köplügi;

C – başlangyç bilimiň mugallymçylygy bölüminde okaýan gyzlaryň köplügi we ş.m.

b) ähli parallelogramlaryň I köplügi gönüburçluklaryň, romblaryň, kwadratlaryň köplükleri üçin uniwersal köplükdir.

Uniwersal köplük tekizlikde gönüburçluk, bölek köplükler bolsa tegelekler görnüşinde şekillendirilýär (*2-nji surat*).



2-nji surat

5. San köplükleri

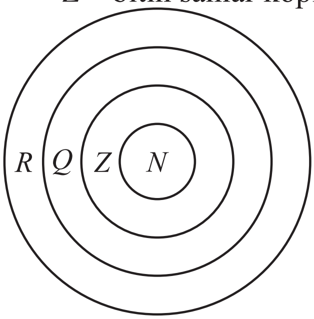
Eger köplügiň elementleri sanlar bolsa, onda oňa san köplügi diýilýär. Matematikanyň mekdep kursunda birnäçe tükeniksiz san köplükleri öwrenilýär. Olar üçin ýörite bellik kabul edilendir:

N – natural sanlar köplügi, $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$;

Z – bitin sanlar köplügi, $Z = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$;

Q – rasional sanlar köplügi;

R – hakyky sanlar köplügi.



3-nji surat

Bu san köplüklerini tekizlikde şeýle şekillendirmek bolar (*3-nji surat*).

San köplüklerini ýa-da olaryň bölek köplüklerini kesimleriň üsti bilen hem aňlatmak bolar. Bu kesimler üçin şeýle bellik girizýäris. Bu ýerde a we b hakyky sanlar kesimiň uçlaryny aňladýar:

$A = \{x|a \le x \le b\}$ $[a, b]$ ýapyk kesim;

$A = \{x|a < x < b\}$ (a, b) açyk kesim;

$A = \{x|a < x \le b\}$ $(a, b]$ aşakdan açyk we ýokardan ýapyk kesim;

$A = \{x|a \le x < b\}$ $[a, b)$ aşakdan ýapyk we ýokardan açyk kesim;

$A = \{x|x > a\}$ $(a, +\infty)$ aşakdan açyk we ýokardan çäksiz kesim;

$A = \{x|x \ge a\}$ $[a, +\infty)$ aşakdan ýapyk we ýokardan çäksiz kesim;

$A = \{x|x < a\}$ $(-\infty, a)$ aşakdan çäksiz we ýokardan açyk kesim;

$A = \{x|x \le a\}$ $(-\infty, a]$ aşakdan çäksiz we ýokardan ýapyk kesim.

Başlangyç synplarda kiçi ýaşly mekdep okuwçylary natural sanlar köplüginiň dürli bölek köplüklerini: täk we jübüt natural sanlary, berlen natural sanyň bölüjileriniň köplügini, ýönekeý we düzme sanlary we ş.m. öwrenýärler. Şu nukdaýnazardan natural sanlaryň köplügi arifmetika üçin uniwersal köplükdir, onda natural sanlaryň elementleriniň we bölek köplükleriniň häsiýetleri öwrenilýär.

§2. Köplükler üstünde amallar

Köplükleriň üstünde dürli amallary geçirip, berlen köplüklerden täze köplükleri emele getirip bolýar.

1. Köplükleriň birleşmesi

1-nji kesgitleme. A we B köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan ähli elementleriň C köplügine bu köplükleriň **birleşmesi** diýilýär we $C = A \cup B$ görnüşinde bellenýär. Bu ýerde $\cup$ – birleşme amalynyň belgisi.

Şeýlelikde,

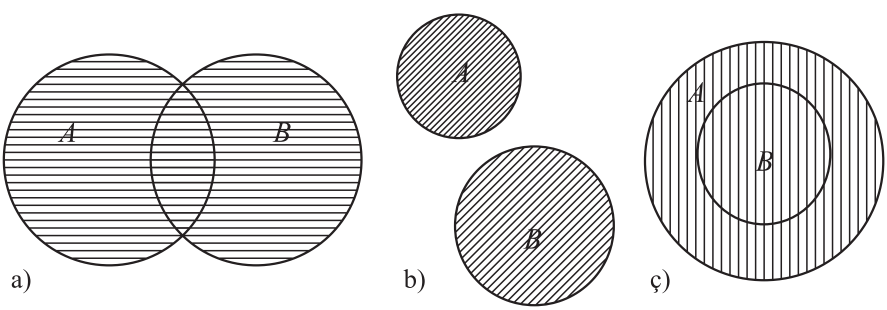
$$C = A \cup B = \{x | x \in A \text{ ýa-da } x \in B\}. \qquad (1)$$

Köplükleriň birleşmesi hemişe bardyr we ol ýeke-täkdir.

Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen köplükleriň birleşmesi tekizlikde şeýle şekillendirilýär (*4-nji surat*).

A we B köplükleriň ikisini-de degişli elementler köplügiň diňe bir gezek hasaba alynýar.

Eger A we B köplükler tükenikli bolup, olaryň elementleri sanamak usuly bilen berlen bolsa, onda $A \cup B$ köplügi düzmek üçin, bu elementleriň hemmesini ýazmak gerek. Eger A we B köplükler elementlerine mahsus umumy häsiýetler bilen berlen bolsalar, onda $A \cup B$ köplügi düzmek üçin, bu häsiýetler «ýa-da» baglaýjy bilen baglanyşdyrylýar.



4-nji surat

2. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

1-nji mysal

a) goý, $A = [1; 2; 3; 4; 5\}$ we $B = \{2; 3; 5; 7\}$ köplükler berlen bolsun. Onda, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$;

b) goý, A – täk natural sanlaryň köplügi, B – bolsa 3-e kratny natural sanlaryň köplügi bolsun. Onda $A \cup B$ köplük özünde 3-e kratny ýa-da täk natural sanlary saklaýar: $\{1, 3, 5, 6, 7, 9,\ldots\}$.

Köplükleriň birleşmesi amaly şeýle häsiýetlere eýedir:

1. Islendik A we B köplük üçin, kommutatiwlik (orun çalşyrma) kanuny ýerine ýetýändir: $A \cup B = B \cup A$.

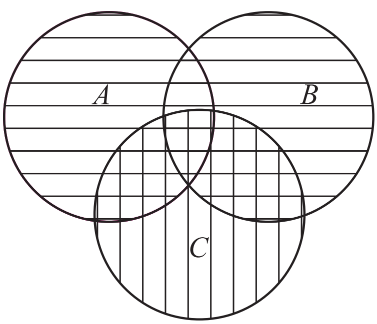
2. Islendik A, B, C köplükler üçin assosiatiwlik (utgaşdyrma) kanuny ýerine ýetýändir: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3. Eger $B \subset A$ bolsa, onda $A \cup B = A$. Hususan-da, islendik köplük üçin: $A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup I = I$.

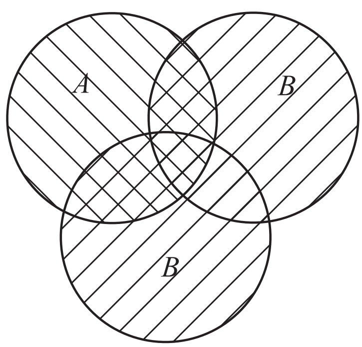
Köplükleriň birleşmesiniň 1-nji we 3-nji häsiýetleri gös-göni 1-nji kesgitlemeden gelip çykýar. Birleşmäniň assosiatiwlik kanunynyň dogrudygyna Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen aňsat göz ýetirmek bolar (*5-nji surat*).

Köplükleriň birleşmesiniň assosiatiwlik kanuny skobkalary taşlap ýazmaga mümkinçilik berýär.

Köplükleriň islendik (tükenikli ýa-da tükeniksiz) sanynyň birleşmesi $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$, $n \in N$ bilen bellenilýär. $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ köplük, A_α köplükleriň iň bolmanda birine degişli bolan ähli elementleriň toplumydyr. Me-



$(A \cup B) \cup C$



$A \cup (B \cup C)$

5-nji surat

selem, natural sanlaryň N köplügi birbelgili (A_1), ikibelgili (A_2), …, köpbelgili (A_k), … köplükleriň birleşmesidir.

2. Köplükleriň kesişmesi

2-nji kesgitleme. A we B köplükleriň şol bir wagtda ikisine-de degişli bolan ähli elementleriň C köplügine bu köplükleriň **kesişmesi** diýilýär we $C= A \cap B$ görnüşinde bellenýär. Bu ýerde «∩» – kesişme amalynyň belgisi.

Şeýlelikde,

$$C= A \cap B = \{x|x \in A \text{ we } x \in B\}. \qquad (2)$$

Köplükleriň kesişmesi hemişe bardyr we ol ýeke-täkdir. Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen köplükleriň kesişmesini tekizlikde şeýle şekillendirmek bolar (*6-njy surat*).

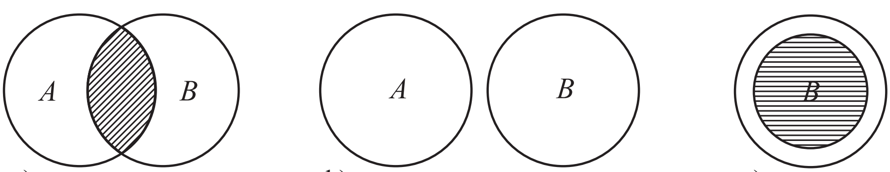
A we B köplükleriň umumy elementleri ýok bolsa, $A \cap B = \varnothing$ diýlip hasaplanylýar.

Eger A we B köplükler tükenikli bolup, olaryň elementleri sanamak usuly bilen berlen bolsa, onda $A \cap B$ köplügi düzmek üçin, A we B köplükleriň umumy elementleri ýazylýar. Eger A we B köplükler elementlerine mahsus umumy häsiýetler bilen berlen bolsalar, onda bu $A \cap B$ köplügi düzmek üçin, bu häsiýetler «we» baglaýjy bilen baglanyşdyrylýar.

2-nji mysal

a) goý, $A = \{a. b, c, \Delta\}$ we $B = \{c, \Delta, d, \square\}$ köplükler berlen bolsun. Onda, $A \cap B = \{\Delta, c\}$.

b) goý, A – ähli gönüburçluklaryň köplügi, B – ähli romblaryň köplügi bolsun. Onda, $A \cap B$ – şol bir wagtda gönüburçluk we romb bolýan, ýagny ähli dörtburçluklaryň köplügi bolar.



a) b) ç)

6-njy surat

Köplükleriň kesişmesi amaly şeýle häsiýetlere eýedir:

1. Islendik A we B köplükler üçin kommutatiwlik (orun çalşyrma) kanuny ýerine ýetýändir: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

2. Islendik A, B, C köplükler üçin assosiatiwlik (utgaşdyrma) kanuny ýerine ýetýändir: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3. Eger $A \subset B$, bolsa, onda $A \cap B = A$. Hususan-da, islendik A köplük üçin, $A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap I = A$.

Köplükleriň kesişmesiniň 1-nji we 3-nji häsiýetleri gös-göni 2-nji kesgitlemeden gelip çykýar. Kesişme amalynyň assosiatiwlik häsiýetiniň bardygyny subut edeliň. Subutnamada iki köplügiň deňdigini anyklamaga mümkinçilik berýän bir usuldan peýdalanalyň.

a) goý, x element $(A \cap B) \cap C$ köplügiň islendik elementi bolsun. Onda $x \in A \cap B$ we $x \in C$. Bu ýerden $x \in A$ we $x \in B$ hem-de $x \in C$ ýa-da $x \in A$ we $x \in B \cap C$. Diýmek,

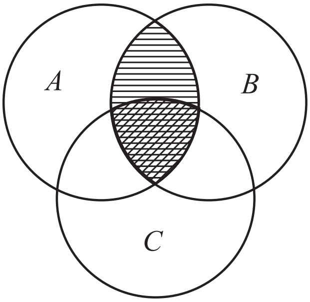
$$x \in A \cap (B \cap C) \quad \text{we} \quad (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C). \qquad (*)$$

b) goý, indi y element $A \cap (B \cap C)$ köplügiň islendik elementi bolsun. Onda $y \in A$ we $y \in B \cap C$. Bu ýerden $y \in A$ we $y \in B$ we $y \in C$ ýa-da $y \in A \cap B$. Diýmek,

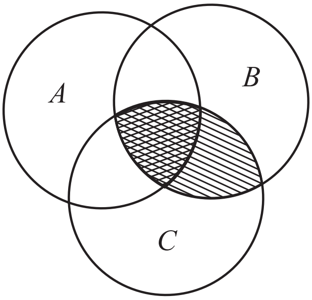
$$y \in (A \cap B) \cap C \quad \text{we} \quad A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C. \qquad (**)$$

Deň köplükleriň kesgitlemesine we (*), (**) görä $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ bolýandygyny anyklaýarys.

Köplükleriň kesişmesiniň utgaşdyrma kanunynyň Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen şekillendirmek bolar (*7-nji surat*).



$(A \cap B) \cap C$



$A \cap (B \cap C)$

7-nji surat

2-nji kesgitlemä meňzeşlikde köplükleriň islendik (tükenikli we tükeniksiz) sanynyň kesişmesi kesgitlenýär. $A_1, A_2, ..., A_\alpha, ...$ köplükler berlen bolsun. Onda, olaryň kesişmesi $\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$, $n \in N$ bilen bellenýär; $\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ köplük A_α köplükleriň her birine degişli bolan ähli elementleriň toplumydyr.

3. Köplükleriň birleşme we kesişme amallary üçin kanunlar

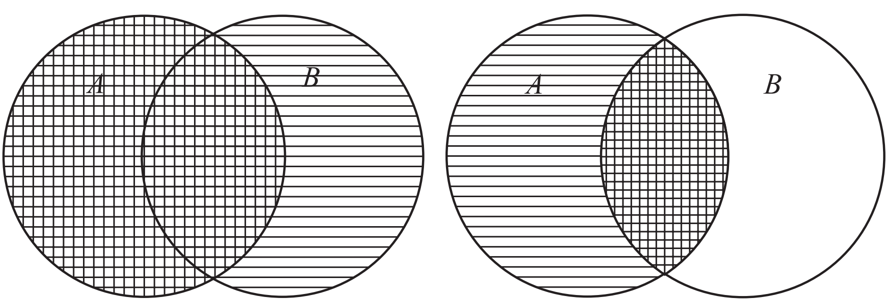
Köplükleriň üstünde geçirilýän birleşme we kesişme amallary özara distributiwdir.

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – birleşmä görä kesişmäniň paýlaşdyrma kanuny. (3)
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – kesişmä görä birleşmäniň paýlaşdyrma kanuny. (4)

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ A \cap (A \cup B) = A \\ 4.\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}\right\} \text{siňdirme kanunlary.} \qquad (5)$$

Bu kanunlaryň dogrudygyny Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen anyklap bolar. Meselem, siňdirme kanunlary tekizlikde şeýle şekillendirilýär (*8-nji surat*).

3-nji mysal. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ deňligiň subudyny getireliň.



$A \cap (A \cup B)$ $\qquad$ $A \cup (A \cap B)$

8-nji surat

1. Goý, $x \in (A \cup B) \cap C$. Onda, $x \in A \cup B$ we $x \in C$. Bu ýerden $x \in A$ ýa-da $x \in B$ we $x \in C$, diýmek, $x \in A \cap C$ ýa-da $x \in B \cap C$ we $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Netijede,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \qquad (*)$$

2. Goý, indi $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Onda $y \in A \cap C$ ýa-da $y \in B \cap C$. Bu ýerden $y \in A$ we $y \in C$ ýa-da $y \in B$ hem-de $y \in C$. Diýmek, $y \in (A \cup B) \cap C$. Netijede,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \qquad (**)$$

(*) we (**) gatnaşyklardan $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ deňlik gelip çykýar.

4. Köplükleri klaslara dagatmak

3-nji kesgitleme. Eger A köplügiň $A_1, A_2, ..., A_n$ bölek köplükleri

1. $A_i = \varnothing$; $i = 1, 2, ..., n$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$; $i \neq j$; $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$;
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$

şertleri kanagatlandyrsa, onda A köplük özara kesişmeýän bölek köplüklere (klaslara) dagadylandyr diýilýär we $A_1, A_2, ..., A_n$ bölek köplüklere bolsa dagatmanyň klaslary diýilýär.

Köplügi klaslara dagatmak obýektleriň klassifikasiýasyny amala aşyrmakda peýdalanylýar. Klassifikasiýa – bu käbir häsiýet (nyşan) boýunça obýektleri klaslara paýlaşdyrmakdyr. Şeýlelikde, bir klasyň obýektleri öz aralarynda seredilýän häsiýet boýunça meňzeş bolup, beýleki klaslaryň obýektlerinden tapawutlanýarlar.

Köplügi klaslara dagatmagy dürli häsiýetler (nyşanlar) boýunça geçirmek bolar. Emma bu nyşany düýpden erkin saýlap bolmaýar. Meselem, talyplaryň köplügini «x talyp y talyp bilen tanyş» diýlen nyşan boýunça klaslara dagadyp bolmaz. Dogrudan-da, x talyp y talyp bilen tanyş, y talyp bolsa, z talyp bilen tanyş diýip kabul etsek, onda x, y, z talyplar bir synpa degişli bolmaly. Emma x we z talyplaryň tanyş bolmazlyklary mümkin, ýagny bir klasa dürli «häsiýetli» talyplar düşer.

Klassifikasiýanyň maksady bilimleri sistema salmakdan ybaratdyr. Klassifikasiýa matematikada hem giňden ulanylýar. Obýektleriň dogry klassifikasiýasyny geçirmegi matematikany okatmakda ilkibaşdan öwretmek zerurdyr. Başlangyç synplaryň matematikadan okuw kitaplarynda bu babatda mugallyma kömek berjek okuw maglumatlary köp. Meselem, geometrik material öwrenilende (ýa-da geometrik figuralar sanamak üçin peýdalanylanda) tegelegi, üçburçlugy, dörtburçlugy ýa-da göni, ýiti, kütek burçlary tapawutlandyrmaga, birbelgili we ikibelgili natural sanlary aýry-aýry ýazmaga degişli we ş.m. birnäçe ýumuşlary hödürlemek bolar. Beýle ýumuşlary kem-kemden çylşyrymlaşdyrmak mümkin.

5. Köplükleriň tapawudy. Köplügiň doldurgyjy

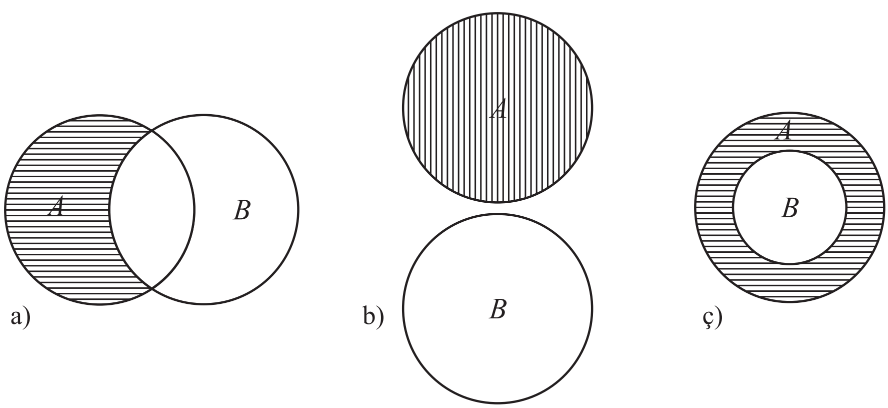
4-nji kesgitleme. A we B köplükleriň tapawudy diýlip, A köplügiň B köplüge degişli bolmadyk ähli elementleriniň C toplumyna aýdylýar we A/B görnüşinde bellenýär.

Şeýlelikde,

$$C = A/B = \{x | x \in A \text{ we } x \notin B\}. \tag{6}$$

Islendik A we B köplükler üçin şeýle tapawut bardyr we ol ýeke-täkdir.

Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen köplükleriň tapawudyny tekizlikde şeýle şekillendirmek bolar (*9-njy surat*).



9-njy surat

Eger A we B köplükler tükenikli bolup, olaryň elementleri sanamak usuly bilen berlen bolsalar, onda A/B köplügi düzmek üçin A köplüge degişli, emma B köplüge degişli däl elementleriň ählisini ýazmak gerek. Eger A we B köplükler elementlerine mahsus umumy häsiýetler bilen berlen bolsalar, onda A/B köplügiň elementleriniň umumy häsiýeti $x \in A$ we $x \notin B$ görnüşde bolar.

Köplükleriň tapawudynyň kesgitlemesinden gös-göni $A/B \neq B/A$ bolýandygy gelip çykýar. Eger $A = B$ bolsa, onda $A/B = B/A = \varnothing$.

4-nji mysal

a) goý, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ we $B = \{2, 3, 5, 7\}$ bolsun. Onda $A/B = \{1, 4, 6\}$ we $B/A = \{7\}$;

b) goý, A – gönüburçluklaryň köplügi, B – romblaryň köplügi bolsun. Onda, $A/B = C$ – kwadrat däl gönüburçluklaryň köplügi, $B/A=D$ – kwadrat däl romblaryň köplügi.

5-nji kesgitleme. Eger B köplük A köplügiň bölek köplügi bolsa ($B \subset A$), onda, A/B tapawuda B köplügiň A köplüge çenli doldurgyjy diýilýär we B'_A görnüşinde bellenýär.

Şeýlelikde, doldurgyç amaly köplükleriň tapawudy amalynyň hususy ýagdaýy bolýar. A köplügiň uniwersal I köplüge çenli doldurgyjy A' görnüşinde bellenýär.

Doldurgyç amaly we köplükleriň tapawudy şeýle häsiýetlere eýedir:

1. $A'' = A$ – iki gezek doldurma kanuny;
2. $A \cap A' = \varnothing$;
3. $A \cup A' = I$;
4. $I' = \varnothing$;
5. $\varnothing' = I$;
6. $I/A = A'$;
7. $A/I = \varnothing$;
8. $\varnothing/A = \varnothing$;
9. $A/\varnothing = A$;
10. $A/A = \varnothing$;

$$\left.\begin{aligned} &11.\ (A \cap B)' = A' \cup B', \\ &12.\ (A \cup B)' = A' \cap B', \end{aligned}\right\}\text{-de Morganyň kanunlary.}$$

13. $A/B = A \cap B'$;
14. $A/B = A/A \cap B$;
15. $(A/B)/C = A/(B \cup C)$;
16. $A/(B/C) = (A/B) \cup (A \cap C)$;
17. $A \cup (B/C) = (A \cup B)/(C/A)$;
18. $A \cap (B/C) = (A \cap B)/(A \cap C)$;
19. Eger $B \subset A$, onda $A = (A/P) \cup B$;
20. $A \cup B = (A/A \cap B) \cup B$.

1-10-njy häsiýetler köplügiň doldurgyjynyň we tapawudynyň kesgitlemelerinden gös-göni gelip çykýar. 11-nji häsiýetiň dogrudygyny subut edeliň: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

a) goý, $x \in (A \cap B)'$, onda $x \in A \cap B$, ýagny x element A we B köplükleriň iň bolmanda birine degişli däl: $x \notin A$ ýa-da $x \notin B$. Bu ýerden $x \in A'$ ýa-da $x \in B'$, diýmek, $x \in A' \cup B'$. Netijede,

$$(A \cap B)' \subset A' \cup B'. \qquad (*)$$

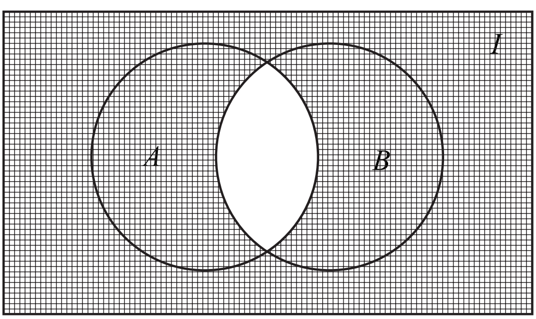
b) goý, indi $y \in A' \cup B'$ bolsun. Onda, $y \notin A'$ ýa-da $y \notin B'$, ýagny $y \notin A$ ýa-da $y \notin B$, bu ýerden $y \notin A \cap B$. Diýmek, $y \in (A \cap B)'$.

Netijede,

$$A' \cup B' \subset (A \cap B)'. \qquad (**)$$

(*) we (**) deňeşdirip, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ bolýandygyny alarys. 12-nji häsiýet hem edil şeýle subut edilýär. De Morganyň kanunlaryny şeýle şekillendirmek bolar, (*10-njy surat*).

A' köplügi, ýagny A köplügiň I köplüge çenli doldurgyjyny kese çyzyklar, köplügi bolsa dik çyzyklar bilen belläliň. Çyzgydan görnüşi



10-njy surat

ýaly, $A \cap B$ kesişme hiç hili çyzyk bilen bellenmeýär. Diýmek, A we B köplükleriň kesişmesiniň doldurgyjy $(A \cap B)'$ kese ýa-da dik çyzyklar bilen bellenýär. $(A \cup B)'$ köplük bu çyzgyda dik we kese çyzyklaryň kesişýän ýerleriniň köplügidir.

De Morganyň kanunlary köplükleriň islendik sany üçin dogrudyr. Bu kanunlara köplükler teoriýasynda we onuň ulanylyşynda möhüm ähmiýeti bolan ikileýinlik prinsipe esaslanýar. Bu prinsip köplükler teoriýasynyň formulalarynda «$\cup$» we «$\cap$»; $\varnothing$ we I; «$\subset$» we «$\supset$» belgileriň özara orny çalşyrylanda, ýene-de bu formulalaryň biriniň alynýandygyny görkezýär. Meselem, subut edilen $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ formuladan ikileýinlik prinsipiniň esasynda «$\cup$» we «$\cap$» belgileriň ornuny çalşyryp, $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ formulany alarys.

13-nji häsiýetiň dogrudygyny belläliň.

a) dogrudan-da, goý $x \in A/B$ bolsun. Onda, $x \in A$ we $x \notin B$, ýagny $x \in A$ we $x \in B'$, diýmek, $x \in A \cap B'$. Netijede,

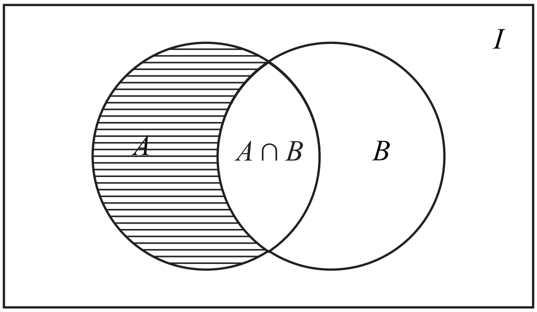
$$A/B \subset A \cap B'. \tag{*}$$

b) $y \in A \cap B'$, onda, $y \in A$ we $y \in B'$, ýagny $y \in A$ we $y \notin B$, diýmek, $y \in A/B$. Netijede,

$$A \cap B' \subset A/B. \tag{**}$$

(*) we (**) deňeşdirip, $A/B = A \cap B'$ bolýandygyny alarys (*11-nji surat*).

Bu häsiýet köplükleriň tapawudyny köplükleriň kesişmesi we doldurmasy amallaryna syrykdyryp bolýandygyny görkezýär.



11-nji surat

Bellik. Köplükleriň üstünde geçirilýän amallaryň iň «güýçlisi» kesişme amaly hasaplanylýar. Şonuň üçin ilki (skobka ýok wagtynda) kesişme amaly, soňra beýleki amallar tertip boýunça ýerine ýetirilýär.

6. Köplükler teoriýasynyň formulalarynyň algebraik özgerdilişi

Köplükleriň aňlatmalaryny ýokarda getirilen formulalardan peýdalanyp, algebraik özgertmeleriň kömegi bilen ýönekeýleşdirmek bolar.

5-nji mysal

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň.

a) $(A \cup B) \cap A'$,

b) $(A/B)/A$.

$(A \cup B) \cap A'$ aňlatmany ýönekeýleşdirmek üçin ilki (3) formuladan, soňra doldurgyç amalynyň 2-nji we birleşmäniň 3-nji häsiýetlerinden peýdalanyp, şeýle netije alarys:

$$(A \cup B) \cap A' = (A \cap A') \cup (B \cap A') = \varnothing \cup (B \cap A') = B \cap A'.$$

$(A/B)/A$ aňlatmany ýönekeýleşdirmek üçin tapawudyň 13-nji, 15-nji doldurgyç amalynyň 12-nji häsiýetlerini, kesişmäniň assosiatiwlik kanunyny we 3-nji häsiýetini ulanyp alarys:

$$(A/B)/A = A/(B \cup A) = A \cap ((B \cup A)') = A \cap (B' \cap A') = A \cap B' \cap A' = \varnothing.$$

7. Tükenikli köplükleriň birleşmesindäki we tapawudyndaky elementleriň sany

$n(A)$ bilen A köplügiň elementleriň sanyny belläliň.

1-nji teorema. Islendik iki A we B tükenikli köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sany

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (7)$$

formula bilen hasaplanýar.

Subudy. Iki ýagdaýa seretmelidiris. Eger $A \cap B = \varnothing$ bolsa, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) - n(B)$ bolýandygy aýdyňdyr.

Eger $A \cap B \neq \varnothing$ bolsa, onda $A \cup B$ köplükde A we B köplükleriň umumy elementleriniň diňe bir gezek hasaba alynýandygyny nazarda tutsak, (7) formulanyň dogrudygy baradaky netijä geleris.

6-njy mysal

30 talypdan ybarat topar matematika we türkmen dili dersleri boýunça synaglary tabşyrdy. Olardan matematika dersi boýunça 23 talyp, türkmen dili dersi boýunça 25 talyp synaglarda dörtlük, bäşlik bahalary aldylar. Galan talyplar synagda üçlük baha, şol sanda üç talyp iki dersden üçlük baha aldy. Jemi näçe talyp üçlük baha alypdyr.

Şeýle bellik girizýäris: A – matematikadan üçlük baha alan talyplaryň köplügi, B – türkmen dilinden üçlük baha alan talyplaryň köplügi. Onda, $A \cup B$ – üçlük baha alan ähli talyplaryň köplügi, $A \cap B$ – iki ders boýunça üçlük baha alan talyplaryň köplügi. Bu ýerden $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ýa-da $n(A \cup B) = 7 + 5 - 3 = 9$.

2-nji teorema. Islendik A, B, we C tükenikli köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sany

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - \\ - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \qquad (8)$$

formula boýunça hasaplanylýar.

Subudy. $A \cup B \cup C$ aňlatmany birleşmäniň utgaşdyrma kanunyny ulanyp, $(A \cup B) \cup C$ görnüşinde ýazalyň. Onda, $n(A \cup B \cup C) =$ $= n((A \cup B) \cup C)$. 7-nji formuladan peýdalanyp alarys:

$$n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) = \\ = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C). \qquad (9)$$

Ýöne, $(A \cup B) \cap C - (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Onda, 7-nji formula boýunça

$$n((A \cup B) \cap C) = n((A \cap C) \cup (B \cap C)) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - \\ - n((A \cap C) \cap (B \cap C)) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C).$$

Bu ýerde kesişmäniň utgaşdyrma kanunyndan peýdalandyk. $n((A \cup B) \cap C)$ üçin, tapylan bahany 9-njy formula goýup alarys:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) -$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ýa-da gutarnykly

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$
$$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

alarys.

7-nji mysal

Bäsleşige gatnaşan 100 okuwçynyň 80-ni algebra, 70-i geometriýa, 60-y trigonometriýa degişli, şeýle-de 60 okuwçy algebra we geometriýa, 50 okuwçy algebra we trigonometriýa, 40 okuwçy geometriýa we trigonometriýa degişli meseleleri çözüpdirler. 30 okuwçy hödürlenen meseleleriň üçüsini hem çözüpdir. Näçe okuwçy hiç bir meseläni çözmändir?

Aşakdaky belligi girizeliň.

A – algebra, B – geometriýa, C – trigonometriýa degişli meseleleri çözen okuwçylaryň köplügi bolsun. Onda, $A \cup B \cup C$ hödürlenen meseleleriň iň bolmanda birini çözen okuwçylaryň köplügidir. Şert boýunça $n(A) = 80$; $n(B) = 70$; $n(C) = 60$; $n(A \cap B) = 60$; $n(A \cap C) = 50$; $n(B \cap C) = 40$; $n(A \cap B \cap C) = 30$.

8-nji formula boýunça

$$n(A \cup B \cup C) = 80 + 70 + 60 - 60 - 50 - 40 + 30 = 90.$$

Diýmek, 100 okuwçydan 90-y iň bolmanda bir meseläni çözüpdir, 10-y bolsa hiç bir mesele çözmändir.

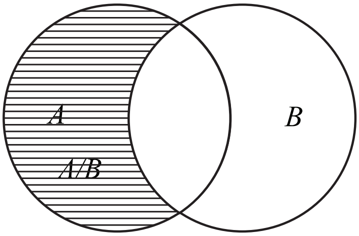
3-nji teorema. Islendik A we B tükenikli köplükleriň tapawudyndaky elementleriň sany

$$n(A/B) = n(A) - n(A \cap B) \tag{10}$$

formula boýunça hasaplanylýar.

Subudy. Tapawudy 14-nji häsiýetine görä $A/B = A/A \cap B$; diýmek, $n(A/B) = n(A/A \cap B)$. $A/A \cap B$ we $A \cap B$ köplükler kesişmeýärler, olaryň birleşmesi bolsa A köplüge deňdir, ýagny $(A/A \cap B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ we $(A/A \cap B) \cup (A \cap B) = A$ (*12-nji surata seret*).

Onda, 7-nji formula boýunça $n(A/A \cap B) + n(A \cap B) = n(A)$.



12-nji surat

Bu ýerden $n(A/B) = n(A/A \cap B) = n(A) - n(A \cap B)$.

Eger $B \subset A$ bolsa, $A \cap B = B$ deň we $n(A \cap B) = n(B)$. Diýmek, bu ýagdaýda 10-njy formula şeýle görnüşde ýazylýar:

$$n(A/B) = n(A) - n(B). \qquad (11)$$

§3. Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly

1. Tertipleşdirilen jübüt

Iki sany a we b elementden tertipleşdirilen jübüti düzmek bolar. Tertipleşdirilen jübüt iki elementli köplükden tapawutlanýar. Şeýlelikde, tertipleşdirilen jübüt – bu kesgitli tertipde ýerleşdirilen iki elementdir. Jübütde birinji orny eýeleýän elemente jübütiň birinji elementi, ikinjä – jübütiň ikinji elementi diýilýär. Tertipleşdirilen jübüt (a, b) görnüşde ýazylýar, ýagny (a, b) belgi birinji elementi a bolan, ikinji elementi b bolan tertipleşdirilen jübüti aňladýar. Meselem, 1 we 2 elementlerden bir sany iki elementli köplügi $M = \{1; 2\}$ we dürli iki sany tertipleşdirilen jübüti (1, 2) hem (2, 1) emele getirmek bolar.

Eger tertipleşdirilen jübütiň her bir elementini dürli köplüklerden alsak, tertipleşdirilen jübüt düşünjesi has umumylaşýar. Meselem, eger $A = \{1, 2\}$ we $B = \{a, b, c\}$ bolsa, onda birinji elementi A köplükden, ikinji elementi B köplükden alyp, şeýle tertipleşdirilen jübütleri ýazmak mümkin: $(1, a)$; $(1, b)$; $(2, a)$; $(2, b)$; $(2, c)$. Şeýlelikde, şol bir tertipleşdirilen jübütiň elementleriniň dürli tebigaty bolup biler.

Köplügiň elementlerinden diňe bir tertipleşdirilen jübütleri däl-de, tertipleşdirilen üçlükleri, dörtlükleri we umuman, n-likleri düzmek bolar. Şeýlelikde, A köplügiň elementleriniň birnäçe gezek gaýtalanmagy mümkin. Meselem, «matematika» sözi $A = \{m, a, t, e, i, k\}$ köplügiň elementlerinden (harplaryndan) düzülen tertipleşdirilen onlukdyr.

2. Iki köplügiň dekart köpeltmek hasyly

1-nji kesgitleme.

A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diýlip, birinji elementi A köplükden, ikinji elementi B köplükden alnyp düzülen ähli tertipleşdirilen jübütleriň C köplügine aýdylýar we $C = A \times B$ görnüşinde bellenýär.

Şeýlelikde,

$$C = A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}. \qquad (1)$$

1-nji mysal. Goý, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 7\}$ köplükler berlen bolsun. Onda,

$$A \times B = \{(1, 5); (1, 7); (2, 5); (2, 7); (3, 5); (3,7)\};$$

$$B \times A = \{(5, 1); (5, 2); (5, 3); (7, 1); (7, 2); (7, 3)\};$$

$$A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\};$$

$$B \times B = \{(5, 5); (5, 7); (7, 7); (7, 5)\};$$

$$«A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing»$$

hasaplanylýar.

1-nji mysaldan görnüşi ýaly, köplükleriň dekart köpeltmek hasyly üçin orun çalşyrma kanuny ýerine ýetmeýär: $A \times B \neq B \times A$ (jübütler tertipleşdirilen).

Eger $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ we $C \neq \varnothing$ bolsa, köplükleriň dekart köpeltmek hasyly assosiatiwlik (utgaşdyrma) kanunyna hem boýun egmeýär. Bu tassyklama $a \neq (a, b)$ we $(b, c) \neq c$ hem $(a, (b, c) \neq (a, b), c)$ bolýandygy sebäpli dogrudyr.

Köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň aşakdaky häsiýetlerine seredeliň.

Dekart köpeltmek hasyly we köplükleriň birleşmesi amallaryny baglanyşdyrýan distributiw kanunlar.

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

Dekart köpeltmek hasyly we köplükleriň kesişmesi amallaryny baglanyşdyrýan distributiw kanunlar.

3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

Dekart köpeltmek hasyly we köplükleriň tapawudy amallaryny baglanyşdyrýan distributiw kanunlar.

5. $A \times (B/C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

6. $(B/C) \times A = (B \times A)/(C \times A)$.

1-nji häsiýetiň subudyny geçireliň.

a) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ diýeliň. Onda, $x \in A$ we $y \in B \cup C$, ýagny $x \in A$ we $y \in B$ ýa-da $y \in C$. Diýmek, $x \in A$ we $y \in B$ ýa-da $x \in A$ we $y \in C$. Bu ýerden $(x, y) \in A \times B$ ýa-da $(x, y) \in A \times C$, başgaça aýdanymyzda $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Netijede,

$$A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C). \tag{*}$$

b) $(x, y) \in (A \times B) \cup (C \times A)$ bolsun. Onda, $(x, y) \in A \times B$ ýa-da $(x, y) \in A \times C$. Diýmek, $x \in A$ we $y \in B$ ýa-da $x \in A$ we $y \in C$, ýagny $x \in A$ we $y \in B$ ýa-da $y \in C$. Bu ýerden $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Netijede,

$$(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C). \tag{**}$$

(*) we (**) gatnaşyklardan $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ deňlik gelip çykýar.

2-nji mysal. $A = \{1, 2\}$; $B = \{a, b\}$; $C = \{c\}$ bolsun.

$$B \cup C = \{a, b, c\};$$

$$A \times (B \cup C) = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\};$$

$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b)\};$$

$$A \times C = \{(1, c); (2, c)\};$$

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}.$$

5-nji häsiýeti subut edeliň.

a) eger $(x, y) \in A \times (B/C)$ bolsa, onda $x \in A$, $y \in B/C$, ýagny $x \in A$, $y \in B$, $y \notin C$. Bu ýerden $(x, y) \in A \times B$ we $(x, y) \in A/C$. Diýmek, $(x, y) \in (A \times B)/(A \times C)$. Netijede,

$$A \times (B/C) \subset (A \times B)/(A \times C). \tag{*}$$

b) eger $(x, y) \in (A \times B)/(A \times C)$ bolsa, onda $(x, y) \in A \times B$ we $(x, y) \notin A \times C$, ýagny $x \in A$, $y \in B$ we $y \in C$. Bu ýerden $x \in A$, $y \in B/C$ we $(x, y) \in A \times (B/C)$. Netijede,

$$(A \times B)/(A \times C) \subset A \times (B/C). \qquad (**)$$

(*) we (**) gatnaşyklardan $A \times (B/C) = (A \times B)|(A \times C)$ deňlik gelip çykýar.

3-nji mysal

Goý, $A = \{1, 2\}$; $B = \{a, b\}$; $C = \{b, c\}$ bolsun.

$B/C = \{a\}$;

$A \times (B/C) = \{(1, a); (2, a)\}$;

$A \times C = \{(1, b); (1, c); (2, b) (2, c)\}$;

$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b)\}$;

$(A \times B)/(A \times C) = \{(1, a); (2, a)\}$.

Iki tükenikli köplügiň $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň elementlerini tablisa görnüşinde ýazmak amatlydyr. Bu ýerde dikligine A köplügiň, keseligine bolsa, B köplügiň elementleri ýerleşdirilýär. $A \times B$ köplügiň elementleri degişli sütünleriň we setirleriň kesişýän ýerlerinde ýazylýar. Meselem, 1-nji tablisada $A = \{1, 2\}$ we $B = \{a, b, c\}$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly berlendir.

1-nji tablisa

A \ B	a	b	c
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$

Goý, A we B san köplükleri bolsun. Onda, $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň elementleri sanlaryň tertipleşdirilen jübütleri bolar. Sanlaryň her bir tertipleşdirilen jübütini koordinatalar tekizliginde nokat bilen belläp, A we B köplükleriň dekart köpeltmek hasylyny koordinatalar tekizliginde şekillendirýäris.

4-nji mysal. Goý,

a) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4, 5\}$;

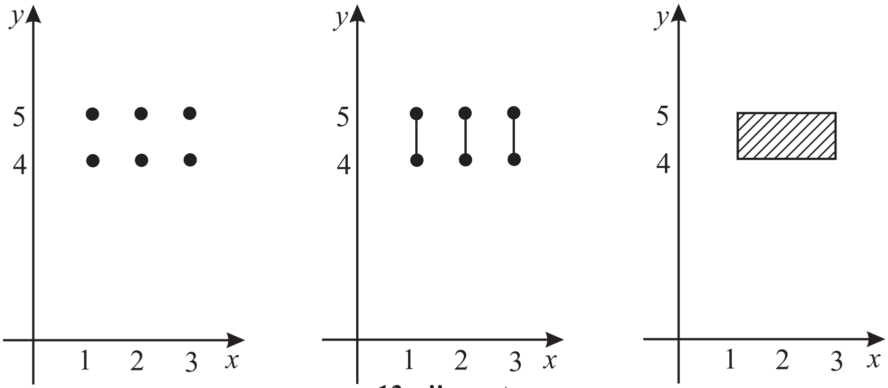
b) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4, 5\}$;

ç) $A = \{1, 2\}$; $B = \{4, 5\}$; bolsun. $A \times B$ dekart köpeltmek hasylyny koordinatalar tekizliginde şekillendireliň.

Eger $A = \{1, 2, 3\}$ we $B = \{4, 5\}$ bolsa, onda

$$A \times B = \{(1, 4); (1, 5); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (3,5)\}.$$

3. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15



13-nji surat

Diýmek, $A \times B$ dekart köpeltmek hasyly koordinatalar tekizliginde nokatlaryň tükenikli sany bilen şekillener (*13-nji surat*).

$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{4, 5\}$ bolanda, B köplügiň tükeniksizligi sebäpli (ol 4 we 5 aralygyndaky ähli hakyky sanlardan ybarat) $A \times B$ dekart köpeltmek hasylynyň hem elementleriniň sany tükeniksizdir. Bu ýagdaýda $A \times B$ dekart köpeltmek hasyly 13-nji *b* suratdaky ýaly şekillendirilýär. $A = \{1, 3\}$ we $B = \{4, 5\}$ köplükleriň ikisi hem tükeniksiz bolan ýagdaýynda $A \times B$ dekart köpeltmek hasyly gönüburçlugyň nokatlarynyň köplügi görnüşinde şekillendirilýär. Gönüburçlugyň depeleri (1, 4); (1,5); (3,5); (3,4) tertipleşdirilen san jübütlerine degişli nokatlardyr.

3. Kortež düşünjesi

Goý, $A_1, A_2, ..., A_n$ köplükler berlen bolsun. Onda, birinji elementi A_1 köplükden, ikinji elementi A_2 köplükden alyp $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tertipleşdirilen n-likleri düzmek bolar. Bu tertipleşdirilen n-lige başgaça kortež diýilýär. n san kortežiň uzynlygy, $x_1, x_2, ..., x_n$ bolsa onuň elementleridir.

Iki $(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $(y_1, y_2, ..., y_m)$ kortež berlen bolsun. Onda $n = m$ we $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$ bolsa, bu kortežler özara deňdir. Meselem, (1, 2, 3, 4, 5) we (1, 2, 3, 4, 5) kortežler deňdirler, emma (1, 2, 1) we (1, 2, 2) kortežler özara deň däldir.

Kortežiň elementleriniň hem öz gezeginde kortežler bolmagy mümkin. Meselem, köpeltmek tablisasynyň (16, 24, 32, 40, 48, 54, 64, 72, 80) setiri uzynlygy 9-a deň bolan korteždir. Onuň elementleri sifrlerden düzülen, uzynlygy 2-ä deň bolan kortežlerdir.

2-nji kesgitleme. $A_1, A_2, ..., A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly diýlip n uzynlykdaky we k-njy elementi A_k köplükden alnan ähli kortežleriň köplügine aýdylýar. Bu ýerde $k = 1, 2, ..., n$.

$A_1, A_2, ..., A_n$ köplükleriň dekart köpeltmek hasyly $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ görnüşinde ýazylýar. Şeýlelikde,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | \, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

5-nji mysal. Goý, $A_1 = \{1, 2\}$; $A_2 = \{2, 3\}$; $A_3 = \{5, 7\}$ bolsun. Onda,

$$A_1 \times A_2 \times A_3 =$$
$$=\{(1,2,5); (1,2,7); (1,3,5); (1,3,7); (2,2,5); (2,2,7); (2,3,5); (2,3,7)\}.$$

Eger $A = A_1 = A_2 = ... = A_n$ bolsa, $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A^n$. Eger $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ köplükleriň iň bolmanda biri boş köplük bolsa, onda $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \varnothing$.

Mesele. Iki tükenikli köplügiň dekart köpeltmek hasylynyň elementleriniň sanyny tapalyň.

Goý, $n(A) = k$, $n(B) = m$ bolsun: $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.

$A \times B$ köplügiň elementleri bolan tertipleşdirilen jübütleri şeýle görnüşde ýazalyň:

2-nji tablisa

A \ B	b_1	b_2	...	b_m	
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	...	(a_1, b_m)	m element
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	...	(a_2, b_m)	m element
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
a_n	(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	...	(a_n, b_m)	m element

k gezek

Şeýlelikde, bu tablisada jemi $\underbrace{m + m + ... + m}_{k \text{ gezek}} = k \cdot m$ tertipleşdirilen jübüt bar.

Diýmek, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = k \cdot m$.

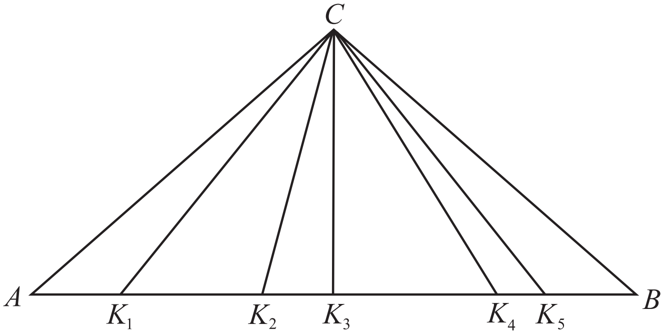
Has umumy $n(A_1 \times A_2 \times ... \times A_p) = n(A_1) \cdot n(A_2)...n(A_p)$ deňlik hem dogrudyr.

§4. Kombinatorikanyň elementleri

1. Kombinatoriki mesele barada düşünje

Käbir meseleler çözülende köplügiň bölek köplüklerini düzmek, onuň elementlerini ol ýa-da beýleki tertipde ýerleşdirmek we ş.m. soraglar ýüze çykýar. Beýle meselelere kombinatoriki meseleler diýilýär. Matematikanyň kombinatoriki meseleleri öwrenýän bölümi kombinatorika diýlip atlandyrylýar. Şeýlelikde, kombinatorikada tükenikli köplükler, olaryň bölek köplükleri we tükenikli köplükleriň elementlerinden düzülen kortežler öwrenilýär. Meselem, ABC üçburçlugyň C depesinden AB tarapyna göni çyzyklar geçirilende emele gelýän üçburçluklaryň sanyny hasaplamaga degişli mesele kombinatoriki meseledir.

Kombinatorikanyň ösüşine görnükli matematikler B. Paskalyň, P. Fermanyň, G. Leýbnisiň, Ýa. Bernulliniň, A. Eýleriň işleri uly goşant goşdular. Bu işlerde kombinatorikanyň esasy düşünjelerine kesgitleme berildi, ilkinji kombinatoriki metodlar işlenip düzüldi, ösdürildi we olaryň ulanylyşy görkezildi, kombinatorikanyň we ähtimallyklary hasaplamagyň arabaglanyşygy derňeldi. Kombinatorika ähtimallyk teoriýasynyň başlangyjyny goýdy (*14-nji surat*).



14-nji surat

XX asyryň 50-nji ýyllaryndan başlap kibernetikanyň we diskret matematikanyň pajarlap ösmegi hem-de elektron hasaplaýyş tehnikasynyň giňden peýdalanmagy bilen baglanyşykly kombinatorika gyzyklanma artdy. Häzirki wagtda kombinatoriki metodlar matematiki statistikada, hasaplaýyş matematikasynda, ylmy-barlag synaglaryny meýilleşdirmekde peýdalanylýar.

Kombinatoriki meseleler çözülende üç derejäni tapawutlandyrýarlar.

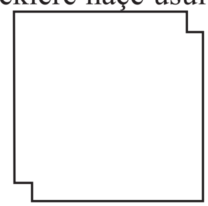
1. Berlen häsiýetli elementleriň iň bolmanda bir sany ýerleşişini agtarmak;

2. Eger kombinatoriki meseläniň birnäçe çözüwi bar bolsa, onda bu meseläniň ähli çözüwini tapmak;

3. Kombinatoriki meseläniň ähli mümkin bolan çözüwleriniň arasyndan ol ýa-da beýleki görkeziji boýunça optimal çözüwleri tapmak.

1-nji mesele

Küşt tagtasyndan garşylykly iki burç kesilip aýrylypdyr. Alnan tagtany iki goňşy gözenekden ybarat gönüburçly böleklere näçe usul bilen kesmek bolar?



15-nji surat

Her bir bölekde bir ak, bir gara gözenegiň bolýandygy sebäpli, kesilip alynmaly böleklerde ak we gara gözenekleriň sany deň bolmalydyr (*15-nji surat*). Emma biziň meselämizde ilkibaşdan iki gara gözenek kesilip alnypdyr. Şonuň üçin, meseläniň şertini kanagatlandyrýan hiç hili usul ýokdur.

Şeýlelikde, kombinatoriki meseläniň çözüwi şol çözüwiň barlygyny anyklamakdan başlanýar. Kombinatoriki meseleleriniň aglabasynyň çözüwi iki düzgüne: jemiň we köpeltmek hasylynyň düzgünlerine esaslanýar.

Jemiň düzgüni özara kesişmeýän iki ýa-da birnäçe tükenikli köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanyny tapmaga mümkinçilik berýär. Jemiň düzgüni şeýle kesgitlenýär: eger birinji elementi P_1 dürli usul bilen, ikinji elementi öňkülerden tapawutly P_2 dürli usul bilen saýlamak mümkin bolsa, onda berlen elementlerden haýsydyr birini $P_1 + P_2$ usul bilen saýlamak bolar.

1-nji mysal. Gutuda 4 gyzyl we 6 ýaşyl galam bar. Gutudan bir galamy näçe usul bilen saýlap almak bolar?

Gürrüň gyzyl ýa-da ýaşyl galamy saýlamak barada gidýär. Diýmek, gyzyl ýa-da ýaşyl galamy biz $4 + 6 = 10$ usul bilen saýlap bileris.

Tükenikli köplükleriň dekart köpeltmek hasylynyň elementleriniň sanyny tapmaga kombinatorikada köpeltmek hasylynyň düzgüni diýilýär. Bu düzgüni şeýle kesgitlemek bolar: eger a elementi k usul bilen, b elementi m usul bilen saýlamak mümkin bolsa, onda (a, b) tertipleşdirilen jübüdi $k \cdot m$ usul bilen saýlamak bolar.

2-nji mysal. 1, 2, 3 sifrlerden näçe sany dürli ikibelgili sanlary düzmek bolar?

Birinji belgini, ýagny onluklary aňladýan sifri 3 usul bilen saýlamak bolar. Edil şeýle, ikinji belgini, ýagny birlikleri aňladýan sifri hem 3 usul bilen saýlamak mümkin. Netijede, $3 \cdot 3$ diýmek, 9 sany ikibelgili san alarys: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Köpeltmek hasylynyň düzgünini umumylaşdyralyň: eger birinji element P_1 usul bilen, ikinji elementi birinji element saýlanandan soň P_2 usul bilen we ş.m. n-nji elementi ondan öňki ähli elementler saýlanandan soň P_n usul bilen saýlamak mümkin bolsa $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tertipleşdirilen n-ligi

$$P_1 \cdot P_2 ... P_n \qquad (1)$$

usul bilen saýlap bolar.

3-nji mysal. 1, 2, 3 sifrlerden sifrleri gaýtalanmaýan näçe sany dürli ikibelgili sanlary düzmek bolar?

Onluklary aňladýan sifri 3 usul bilen saýlamak bolar. Sifrleriň gaýtalanmaýanlygy sebäpli birlikleri aňladýan sifri indi diňe 2 usul bilen saýlamak mümkin. Diýmek, bu gezek diňe 6 sany ikibelgili san alarys: 12, 13, 21, 23, 31, 32.

2. Elementleri gaýtalanmaýan çalşyrmalar

Eger tükenikli köplügiň elementleri belgilenilen (nomerlenen) bolsa, onda oňa tertipleşdirilen köplük diýilýär, tertipleşdirilen köplük kortežiň hususy halydyr: tertipleşdirilen köplükde birmeňzeş elementler bolmaýar. Köplügiň dürli tertipleşdirmeleri şol bir elementlerden ybarat bolup, diňe elementleriň tertibi bilen tapawutlanýarlar. Meselem, $M = \{1, 2, 3\}$ bolsa, bu köplükden $M_1 = \{2, 1, 3\}$; $M_2 = \{3, 1, 2\}$ we ş.m. tertipleşdirilen köplükleri düzmek bolar.

3-nji kesgitleme. n elementli M köplügiň elementlerinden düzmek mümkin bolan her bir n elementli tertipleşdirlen köplüge elementleri gaýtalanmaýan çalşyrma diýilýär. Çalşyrmalaryň sany P_n bilen bellenýär.

Şeýlelikde, çalşyrma – bu käbir tükenikli köplügiň elementlerini tetripleşdirmegiň usulydyr.

2-nji mesele. n elementli M köplügi näçe usul bilen tertipleşdirmek mümkin?

Köplügiň elementlerini tertipleşdirmek üçin birinji orna elementiň islendigini goýmak bolar; diýmek, birinji elementi n usul bilen saýlamak bolar. Birinji element saýlanandan soň, ikinji orna galan $n - 1$ elementleriň islendigini goýmak bolar we ş.m. Bu işi dowam etdirip, iň soňky elementi diňe bir usul bilen saýlap alyp bileris.

Şeýlelikde, köpeltmek hasylynyň düzgüni boýunça (seret 1-nji formula) n elementli M köplügi $n(n - 1)(n - 2)...1$ usul bilen tertipleşdirmek mümkin.

4-nji kesgitleme. Ilkinji yzygiderli n natural sanlaryň köpeltmek hasylyna $n!$ (n faktorial) diýilýär, ýagny

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3...(n-1) \cdot n. \tag{2}$$

$0! = 1$ we $1! = 1$ diýlip hasaplanylýar. Meselem, $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ we ş.m.

Diýmek, öňki meseläniň çözüwini faktorial düşünjäni ulanyp ýazsak, şeýle bolar: n elementli M köplügi $P_n = n!$ usul bilen tertipleşdirmek mümkin.

4-nji mysal. $M = \{a, b, c\}$ köplügi $3! = 6$ usul bilen tertipleşdirmek mümkin: *abc*; *acb*; *bac*; *bca*; *cab*; *cba*.

Eger çalşyrmada iki elementiň orny üýtgedilip, başga elementler öňki ornunda galdyrylsa, onda täze çalşyrma alnar.

Çalşyrmalaryň beýle ösgertmesine transpozisiýa diýilýär. Ähli $n!$ çalşyrmalary islendik çalşyrmadan başlap, yzygiderli transpozisiýanyň kömegi bilen almak bolar.

3. Ýerleşdirmeler

5-nji kesgitleme. n elementli M köplügiň $\underset{\rightarrow}{k}$ elementli her bir tertipleşdirilen bölek köplügine n elementden k boýunça gaýtalanmaýan elementli ýerleşdirme diýilýär. Bu ýerde $k \leq n$.

Elementleri gaýtalanmaýan ýerleşdirmeleriň sany A_n^k bilen bellenýär.

3-nji mesele. n elementli M köplügiň elementlerinden näçe sany k elementli tertipleşdirilen bölek köplük düzmek mümkin? Bu mesele 2-nji punktdaky meselä seredende has umumydyr. k elementli tertipleşdirilen bölek köplügiň birinji elementini n usul bilen saýlamak bolar. Birinji element saýlanandan soň ikinji element $n - 1$ usul bilen saýlanýar we ş.m. k-njy elementi $(n - (k - 1)) = n - k + 1$ usul bilen saýlamak mümkin. Şeýlelikde, köpeltmek hasylynyň düzgüni boýunça

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1). \qquad (3)$$

Bu formulany şeýle özgertmek bolar:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n(n-1)...2 \cdot 1}{(n-k)...2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (4)$$

5-nji mysal. 1, 3, 5, 7, 9 sifrlerden näçe sany sifrleri gaýtalanmaýan dürli ikibelgili sanlary düzmek mümkin?

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20.$$

Elementleri gaýtalanmaýan çalşyrmalar we elementleri gaýtalanmaýan ýerleşdirmeler $A_n^n = P_n$ formula bilen baglanyşyklydyrlar.

6-njy kesgitleme. n elementli M köplügiň elementlerinden düzülen k uzynlykdaky korteže n elementden k boýunça gaýtalanýan elementli ýerleşdirme diýilýär. Bu ýerde k sanyň n sandan uly bolmagy hem mümkin. Elementleri gaýtalanýan ýerleşdirmeleriň sany $\tilde{A}_n^k$ görnüşinde bellenýär.

4-nji mesele. n elementli M köplügiň elementlerinden düzmek mümkin bolan k uzynlykdaky ähli kortežleriň sanyny tapmaly.

k uzynlykdaky ähli kortežleriň köplügi $M \times M \times ... \times M$ dekart köpeltmek hasylyny emele getirýär. Köpeltmek hasylynyň düzgüni boýunça $\underbrace{n(M \times M ... \times M)}_{k \text{ gezek}} = \underbrace{n(M) \cdot n(M) ... n(M)}_{k \text{ gezek}}$. Şeýlelikde, n elementli M köplügiň elementlerinden düzülen k uzynlykdaky ähli kortežleriň sany n^k deňdir, ýagny

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \qquad (5)$$

Bu formulanyň kömegi bilen köplügiň bölek köplükleriniň sany baradaky teoremany subut etmek bolýar.

Goý, n elementli M köplük berlen bolsun. Onda islendik bölek köplügi n uzynlygy bolan kortež bilen bellemek mümkin: eger x element şol bölek köplüge degişli bolsa, onuň ýerine 1 goýulýar, başga ýagdaýda 0. Meselem, $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ köplügiň $\{x_1, x_2\}$ bölek köplügi (1, 1, 0, 0); $\{x_2, x_3, x_4\}$ – (0, 1, 1, 1); Ø – (0, 0, 0, 0); M – (1, 1, 1, 1) we ş.m. görnüşinde bellenýär.

Diýmek, n elementli M köplügiň bölek köplükleriniň sanyny bilmek üçin $\{0, 1\}$ iki elementli köplügiň elementlerinden düzülen n uzynlykdaky kortežleriň sanyny tapmak ýeterlikdir.

5-nji formula boýunça ol 2^n-e deňdir.

6-njy mysal. 1, 3, 5, 7 sifrlerden düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň mukdaryny tapyň.

Bu mukdary tapmak üçin 5-nji formuladan peýdalanýarys:

$$\tilde{A}_4^3 = 4^3 = 64.$$

4. Elementleri gaýtalanmaýan utgaşdyrmalar

Mälim bolşy ýaly, M köplügiň dürli: bir, iki, üç we ş.m. elementli bölek köplüklerini düzmek bolar.

7-nji kesgitleme. n elementli M köplügiň islendik k elementi, bölek köplügine n elementden k boýunça **utgaşdyrma** diýilýär. Bu ýerde $k \leq n$ bolýandygy düşnüklidir.

n elementden k boýunça elementleri gaýtalanmaýan utgaşdyrmalaryň sany C_n^k görnüşinde bellenýär.

5-nji mesele. n elementli M köplügiň elementlerinden näçe sany k elementli bölek köplük düzmek mümkin?

Goý, gözlenilýän k elementli bölek köplükleriň sany C_n^k bolsun. Bu bölek köplükleriň her birini k! usul bilen tertipleşdirmek bolar: netijede, $k!C_n^k$ tertipleşdirilen k elementli bölek köplükleri alarys. Ýöne başga tarapdan n elementden tertipleşdirilen k elementli bölek köplükleriň sany A_n^k deňdir. Onda

$$A_n^k = k!C_n^k \quad \text{ýa-da} \quad C_n^k = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{6}$$

7-nji mysal. 25 talypdan 2 sany nobatçy topary näçe usul bilen belläp bolar?

Her bir nobatçy topar 25 elementli köplügiň 2 elementli bölek köplügi bolýar. Şonuň üçin C_{25}^2 hasaplamak gerek.

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{23!2!} = 300.$$

C_n^k sanlaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. Eger $0 \leq k \leq n$ bolsa, onda $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Dogrudan-da, 6-njy formula boýunça

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Hususan-da, $n = k$ bolanda,

$$C_n^n = C_n^0 = 1.$$

II bap

PIKIR AÝTMALAR

§1. Ýönekeý we düzme pikir aýtmalar

1. Pikir aýtma

Islendik teoriýa, şol sanda matematiki teoriýa hem sözlemleriň köplüginden emele gelýär. Bu sözlemleriň üstünde dürli amallary geçirip, netijede, biz ýene-de sözlem alýarys. Her bir matematiki sözlemiň manysy we logiki gurluşy bardyr.

Biz şu bapda irland matematigi Jorž Bul tarapyndan esaslandyrylan «Matematiki logika» serederis.

Pikir aýtmalar algebrasy matematiki logikanyň esasy bölümleriniň biri bolup, ol käbir ylmy çeşmelerde «Logikalar algebrasy», «Pikir aýtmalar hasaplanmasy» ýa-da «Bulyň algebrasy» diýip atlandyrylýar. Bu algebradaky esasy düşünjeleriň biri hem pikir aýtma düşünjesidir.

Kesgitleme. Çyndygy ýa-da ýalandygy barada bellibir zat aýdyp bolýan her bir sözleme pikir aýtma diýilýär.

Başgaça aýtsak, pikir aýtma haýsy-da bolsa bir zat barada nämede bolsa bir zady tassyk edýän sözlemdir.

Pikir aýtmalar käbir kitaplarda latyn elipbiniň baş harplary, käbir kitaplarda bolsa setir harplary bilen bellenýär. Biz pikir aýtmalary latyn baş harplary bilen bellejekdiris.

Harplar bilen bellenenden soň, bizi pikir aýtmalaryň manylary däl-de, eýsem, olaryň çyn ýa-da ýalan bolup bilmek häsiýeti gyzyklandyrýar.

Pikir aýtmalaryň kesgitlemesinden görnüşi ýaly olar çyn ýa-da ýalan bolup biler. Ýöne olaryň käbiriniň çyndygy ýa-da ýalandygy häzirlikçe bize belli däl bolmagy hem mümkindir, sebäbi kimiň, haçan we nirede aýdýanlygyna baglylykda olaryň çyndygy ýa-da ýalandygy üýtgäp durýar.

Her bir sözlem pikir aýtma bolup bilmeýär. Meselem, «Sen okuwa gitjekmi?» ýa-da «Ýaşasyn Garaşsyz Türkmenistan!» diýen sözlemler pikir aýtma bolup bilmeýär. Olaryň birinjisi sorag, ikinjisi bolsa ýüzlenme sözlemdir.

Diýmek, sorag we ýüzlenme sözlemler pikir aýtma bolup bilmeýär. Onda pikir aýtmalaryň kesgitlemesini başgaça hem beýan etmek mümkin: **çyn ýa-da ýalan diýip aýtmak mümkin bolan habar sözleme pikir aýtma diýilýär**. Mysallara seredeliň.

1. $3 + 2 = 5$ (çyn pikir aýtma);
2. $22 – 5 = 18$ (çyn pikir aýtma);
3. H_2SO_4 – kislota (çyn pikir aýtma);
4. $–2 > 0$ (ýalan pikir aýtma);
5. Aý Ýerden uly (ýalan pikir aýtma).

Her bir pikir aýtma çyn ýa-da ýalan bolup bilýär. Şol bir wagtda hiç bir pikir aýtma hem çyn, hem ýalan bolup bilmez.

Eger *A* we *B* pikir aýtmalar berlen bolsa, onda «we», «ýa-da», «eger …, onda …», «şonda we diňe şonda, haçanda …», «däl» diýen baglaýjylaryň kömegi bilen täze pikir aýtmalary ýazyp bileris. Mysal üçin, A: «6 jübüt san», *B*: «6 san 2-ä bölünýär» diýen pikir aýtmalar berlipdir. Onda «Eger 6 jübüt san bolsa, onda ol 2-ä bölünýär», ýagny «Eger *A* bolsa, onda *B*-dir» diýen pikir aýtma aldyk.

Beýle pikir aýtmalara düzme (çylşyrymly) pikir aýtmalar, olary düzýän *A* we *B* pikir aýtmalara bolsa ýönekeý pikir aýtmalar diýilýär.

Pikir aýtmalar algebrasyndaky esasy mesele ýönekeý pikir aýtmalaryň we olardan emele getirilýän çylşyrymly pikir aýtmalaryň çyndygynyň ýa-da ýalandygynyň arasyndaky özara baglanyşygy öwrenmekden ybaratdyr.

Berlen ýönekeý pikir aýtmalardan täze çylşyrymly pikir aýtmalary emele getirmegiň serişdelerine logiki baglanyşyklar ýa-da logiki amallar diýilýär. Çylşyrymly pikir aýtmanyň çyndygy ýa-da ýalandygy onuň düzümine girýän ýönekeý pikir aýtmalaryň çyndygyna ýa-da ýalandygyna gös-göni baglydyr.

Pikir aýtmalaryň çynlyk bahalary «çyn» ýa-da «ýalan» diýen sözleriň baş harplary bilen *ç* ýa-da *ý* diýip bellenýär. Şeýle-de, käbir edebiýatlarda çyn pikir aýtmalary 1, ýalan pikir aýtmalary 0 belgi bilen belleýärler.

2. Pikir aýtmany inkär etme

Eger A çyn pikir aýtma berlen bolsa, onda biz ony ýalan diýip tassyklasak, berlen A pikir aýtmany inkär etdik diýilýär. A pikir aýtmanyň inkär etmesi bellenýär. Mysal üçin, A pikir aýtma «3 ýönekeý san». Onuň inkär etmesi «3 ýönekeý san däl» diýlip okalýar. Umumy görnüşde A pikir aýtmanyň inkär etmesi «A däl» diýilýär.

Kesgitleme. Berlen A pikir aýtmanyň inkär etmesi diýip, şol pikir aýtma çyn bolanda ýalan bolan we tersine ýalan bolanda çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar.

Inkär etmäniň çynlyk tablisasyny harplar bilen we san bilen ýazarys (*1-nji, 2-nji tablisalar*):

1-nji tablisa

A	$\overline{A}$
ç	*ý*
ý	*ç*

2-nji tablisa

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

3-nji tablisa

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$	$\overline{\overline{\overline{A}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$
ç	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*
ý	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*

Goý, A käbir pikir aýtma bolsun, onda ony inkär etsek, onuň $\overline{A}$ inkär etmesi hem pikir aýtmadyr. Eger $\overline{A}$ inkär etmäni inkär etsek, onda ilkibaşdaky pikir aýtmany alarys. $\overline{\overline{A}}$ pikir aýtma iki gezek inkär etme ýa-da inkär etmäni inkär etme diýilýär. A pikir aýtmany yzygiderli birnäçe gezek inkär etmegiň tablisalaryny guralyň (*3-nji tabl. ser.*).

3. Pikir aýtmalaryň konýunksiýasy (logiki köpeltmek hasyly)

Goý, A we B iki sany ýönekeý pikir aýtma berlen bolsun. Bu pikir aýtmalary «we» baglaýjynyň kömegi bilen birleşdirip, pikir aýtmalaryň konýunksiýasy diýip atlandyrylýan täze bir pikir aýtma alarys. Pikir aýtmalaryň konýunksiýasy $A \wedge B$ bellenýär hem-de «A we B» diýlip okalýar. A we B pikir aýtmalara köpelijiler diýilýär.

Kesgitleme. Berlen A we B pikir aýtmalaryň konýunksiýasy diýip, şol bir wagtda bu pikir aýtmalaryň ikisi hem çyn bolanda çyn bolan, galan ýagdaýlarda ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar.

Konýunksiýanyň kesgitlemesini tablisa görnüşinde ýazarys (*4-nji, 5-nji tablisalar*):

4-nji tablisa

A	B	$A \wedge B$
ç	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ý*
ý	*ç*	*ý*
ý	*ý*	*ý*

5-nji tablisa

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

6-njy tablisa

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
ç	*ç*	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ý*	*ý*
ý	*ç*	*ý*	*ý*
ý	*ý*	*ý*	*ý*

Eger $A \wedge B$ konýunksiýada A we B pikir aýtmalaryň ýerini çalyşsak $B \wedge A$ konýunksiýa alarys (*6-njy tablisa*). Tablisadan görnüşi ýaly, $A \wedge B$ we $B \wedge A$ formulalar A we B pikir aýtmalaryň dürli bahalarynda şol bir wagtda çyn ýa-da şol bir wagtda ýalandyr. Diýmek, $A \wedge B$ we $B \wedge A$ konýunksiýalar deňgüýçlidir, ýagny $A \wedge B = B \wedge A$. Bu bolsa pikir aýtmalaryň konýunksiýalarynyň orun çalşyrma häsiýete eýedigini aňladýar. Şeýle-de, pikir aýtmalaryň konýunksiýasy üçin utgaşdyrma kanuny hem ýerine ýetýändir, ýagny $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

Indi käbir A pikir aýtma bilen onuň $\overline{A}$ inkär etmesiniň konýunksiýasyny ýazarys. Bu konýunksiýa A pikir aýtma nähili bolsada hemişe ýalandyr. Beýle ýagdaýda $A \wedge \overline{A}$ formula toždestwolaýyn ýalan diýilýär we $A \wedge \overline{A} = ý$ ýazylýar (*7-nji tablisa*).

7-nji tablisa

A	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{A}$
ç	*ý*	*ý*
ý	*ç*	*ý*

4. Pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy (logiki jemi)

Goý, A we B iki sany ýönekeý pikir aýtmalar berlen bolsun. Bu pikir aýtmalary «ýa-da» baglaýjynyň kömegi bilen birleşdirip, A we B pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy diýip atlandyrylýan täze bir pikir aýtma alarys. A we B pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy $A \vee B$ ýazylýar we «A ýa-da B» diýlip okalýar. A we B pikir aýtmalara goşulyjylar diýilýär.

Kesgitleme. Berlen A we B pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň ikisi hem bir wagtda ýalan bolanda ýalan bolan, galan ýagdaýlarda çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar.

Dizýunksiýanyň kesgitlemesini tablisa görnüşinde ýazarys (*8-nji, 9-njy tablisalar*):

8-nji tablisa

A	B	$A \vee B$
ç	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ç*
ý	*ç*	*ç*
ý	*ý*	*ý*

9-njy tablisa

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

10-njy tablisa

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
ç	*ý*	*ç*
ý	*ç*	*ç*

Pikir aýtmalaryň dizýunksiýasy üçin hem orun çalşyrma, utgaşdyrma we paýlaşdyrma kanunlary ýerine ýetýär.

$A \vee B = B \vee A$ (orun çalşyrma kanuny);

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ (utgaşdyrma kanuny);

$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (konýunksiýanyň dizýunksiýa görä paýlaşdyrma kanuny).

Indi A pikir aýtma bilen onuň inkär etmesiniň dizýunksiýasyny ýazarys, ýagny $\overline{A}$ pikir aýtmany alarys. A we $\overline{A}$ pikir aýtmalaryň haýsy-da biri hemişe çyn, onda kesgitlemä görä, $A \vee \overline{A}$ dizýunksiýa hem çyndyr (*10-njy tablisa seret*). Beýle ýagdaýda $A \vee \overline{A}$ formula toždestwolaýyn çyn diýilýär we $A \vee \overline{A} = ç$ ýazylýar.

Pikir aýtmalaryň konýunksiýasy, dizýunksiýasy we inkär etmesi özara berk baglanyşyklydyr, ýagny 1) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; 2) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

Bu gatnaşyklara de Morganyň formulalary diýilýär, de Morganyň formulalarynyň ýerine ýetýändigini olaryň çynlyk tablisasynyň kömegi bilen barlamak mümkin.

5. Pikir aýtmalaryň implikasiýasy (gelip çykma amaly)

Goý, A we B ýönekeý pikir aýtmalar berlen bolsun. Bu ýonekeý pikir aýtmalardan «eger …, onda …» diýen sözüň kömegi bilen täze bir düzme pikir aýtma alarys. Meselem, A: «6 jübüt san», B: «6 2-ä bölünýär» diýen pikir aýtmalar berlipdir. Onda, düzme pikir aýtma «Eger 6 jübüt san bolsa, onda ol 2-ä bölünýär» görnüşde bolar. Bu pikir aýtmany umumy görnüşde «Eger A bolsa, onda B-dir» diýip ýazarys. Pikir aýtmalaryň implikasiýasy $A \Rightarrow B$ ýazylýar. A pikir aýtma implikasiýanyň şerti, B pikir aýtma bolsa onuň netijesi diýilýär.

Kesgitleme. Berlen A we B pikir aýtmalaryň implikasiýasy diýip, şol pikir aýtmalaryň birinjisi çyn bolup, ikinjisiniň ýalan bolan ýagdaýynda ýalan bolan we beýleki ýagdaýlarda çyn bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar.

Implikasiýanyň kesgitlemesini tablisa görnüşinde ýazarys (*11-nji, 12-nji tablisalar*).

11-nji tablisa

A	B	$A \Rightarrow B$
ç	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ý*
ý	*ç*	*ç*
ý	*ý*	*ç*

12-nji tablisa

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

4. Sargyt № 1407

МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

13-nji tablisa

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
ç	ç	ý	ç	ç
ç	ý	ç	ý	ý
ý	ç	ý	ç	ç
ý	ý	ç	ç	ç

Iki pikir aýtmanyň implikasiýasy bu pikir aýtmalaryň inkär etmesi we dizýunksiýa amallarynyň üsti bilen aňladylyp bilner, ýagny A we B pikir aýtmalar üçin $(A \Rightarrow B) = (\overline{A} \vee B)$ deňlik ýerine ýetýändir, (*13-nji tabl. ser.*).

6. Pikir aýtmalaryň ekwiwalentliligi (deň bahalylygy)

Goý, A we B ýönekeý pikir aýtmalar berlen bolsun. Onda bu pikir aýtmalardan «A ekwiwalentdir B», «Şonda we diňe şonda A, haçanda B bolsa», «A B üçin zerurdyr we ýeterlikdir», «A we B deň bahaly» diýen ýaly düzme pikir aýtmalary almak bolar. Bu düzme pikir aýtmalara A we B pikir aýtmalaryň ekwiwalentliligi diýilýär we $A \Leftrightarrow B$ bellenýär.

Kesgitleme. A we B pikir aýtmalaryň ekwiwalentliligi diýip, şol pikir aýtmalaryň çynlyk bahalary meňzeş bolanda çyn bolan, beýleki ýagdaýlarda ýalan bolan täze bir pikir aýtma aýdylýar.

Başgaça aýtsak, A we B pikir aýtmalaryň ikisi hem çyn ýa-da ikisi hem ýalan bolanda çyn bolýan, galan ýagdaýlarda ýalan bolan pikir aýtma A we B pikir aýtmalaryň ekwiwalentliligi diýilýär.

Ekwiwalentligiň kesgitlemesini tablisa görnüşinde ýazarys (*14-nji, 15-nji tablisalar*).

14-nji tablisa

A	B	$A \Leftrightarrow B$
ç	ç	ç
ç	ý	ý
ý	ç	ý
ý	ý	ç

15-nji tablisa

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

16-njy tablisa

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
ç	*ç*	*ç*	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ý*	*ý*	*ç*
ý	*ç*	*ý*	*ý*	*ç*
ý	*ý*	*ý*	*ý*	*ç*

A we B pikir aýtmalaryň konýunksiýalarynyň ekwiwalentliligi hemişe çyn pikir aýtmadyr, ýagny $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A = ç$ (*16-njy tablisa*). Umuman, eger A we B pikir aýtmalar ekwiwalent bolsa, onda $A \Leftrightarrow B$ ekwiwalentlik çyndyr we tersine eger $A \Leftrightarrow B = ç$ bolsa, onda $A = B$.

7. Tawtologiýalar

Düzme pikir aýtmalary emele getirýän ýönekeý pikir aýtmalaryň islendik bahalarynda-da çyn bolýan bu düzme pikir aýtmalara **tawtologiýalar** diýilýär. Başgaça aýtsak, her bir toždestwolaýyn çyn formula tawtologiýadyr. Tawtologiýalaryň hemmesi formuladyr, emma her bir formula tawtologiýa däldir.

Berlen formulanyň tawtologiýadygyny onuň çynlyk tablisasyndan bilip bolýar. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ we $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ formulalaryň tawtologiýa bolýandygyny barlap göreliň (*17-nji, 18-nji tablisalar*).

17-nji tablisa

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
ç	*ç*	*ç*	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ý*	*ý*	*ç*
ý	*ç*	*ý*	*ý*	*ç*
ý	*ý*	*ý*	*ý*	*ç*

18-nji tablisa

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
ç	ç	ç	ç	ç
ç	ý	ç	ç	ç
ý	ç	ç	ç	ç
ý	ý	ý	ý	ç

Indi $[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$ formulanyň tawtologiýa bolýandygyny barlalyň, (*19-njy tablisa*).

19-njy tablisa

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$[(A \Rightarrow B) \wedge A] \Rightarrow B$
ç	ç	ç	ç	ç
ç	ý	ý	ý	ç
ý	ç	ç	ý	ç
ý	ý	ç	ý	ç

Tablisadan görnüşi ýaly, $A \Rightarrow B$ implikasiýa çyn bolsa we bu implikasiýanyň A şerti çyn bolsa, onda onuň B netijesiniň hem çyn bolýandygy gelip çykýar.

8. Formulalaryň çynlyk tablisalary

$(A \wedge B) \wedge C$ we $C \Rightarrow (A \wedge B)$ görnüşli düzme pikir aýtmalarda A, B ýönekeý pikir aýtmalar «çyn» ýa-da «ýalan» baha eýe bolýar. Olaryň haçan nähili baha eýe bolýandygyny görkezmek üçin, pikir aýtmanyň (formulanyň) «çynlyk» tablisasy diýlip atlandyrylýan tablisa gurulýar.

Tablisanyň ilkinji birnäçe sütüninde (bu sütünleriň sany formulalaryň içindäki pikir aýtmalaryň sanyna deň bolmalydyr) pikir aýtmalara mümkin bolan dürli bahalar berilýär. Indiki sütünlerde düzme pikir aýtmanyň içindäki amallary yzygiderli ýerine ýetirmekden alnan netijeler ýazylýar. Iň soňky sütünde formulanyň alýan gutarnykly bahalary ýazylýar. Bu sütüne tablisanyň jogap sütüni diýilýär.

Pikir aýtmalaryň çynlyk tablisasyndaky setirleriň sany düzme pikir aýtmany emele getirýän ýönekeý pikir aýtmalaryň sany bilen baglanyşyklydyr. Meselem, ýönekeý pikir aýtmalar 2 sany bolsa tablisa 4 setirden, pikir aýtmalar 3 sany bolsa tablisa 8 setirden, pikir aýtmalary 4 sany bolsa tablisa 16 setirden we ş.m. ybaratdyr.

Çynlyk tablisa pikir aýtmanyň (formulanyň berlişiniň) bir usuly bolup, ol pikir aýtmanyň gurluşyny aýdyňlaşdyrýar. Eger jogap sütünde diňe «çyn» bahalar duran bolsa, onda formula toždestwolaýyn çyndyr, eger şol sütünde «ýalan» bahalar duran bolsa, onda formula toždestwolaýyn ýalandyr, beýleki ýagdaýlarda ol formula ýerine ýetýän formuladyr. Her bir logiki formula üçin çynlyk tablisa gurup bolýandyr we şeýle tablisa ýeke-täkdir. Eger iki pikir aýtma berlen bolsa, onda tablisa 4 setirden (*20-nji tablisa*), 3 pikir aýtma berlen bolsa, tablisa 8 setirden (*21-nji tablisa*), 4 pikir aýtma berlen bolsa, tablisa 16 setirden (*22-nji tablisa*) we ş.m. ybarat bolýar.

20-nji tablisa

A	*B*
ç	*ç*
ç	*ý*
ý	*ç*
ý	*ý*

21-nji tablisa

A	*B*	*C*
ç	*ç*	*ç*
ç	*ç*	*ý*
ç	*ý*	*ç*
ç	*ý*	*ý*
ý	*ç*	*ç*
ý	*ç*	*ý*
ý	*ý*	*ç*
ý	*ý*	*ý*

22-nji tablisa

A	B	C	D
ç	ç	ç	ç
ç	ç	ç	ý
ç	ç	ý	ç
ç	ç	ý	ý
ç	ý	ç	ç
ç	ý	ç	ý
ç	ý	ý	ç
ç	ý	ý	ý
ý	ç	ç	ç
ý	ç	ç	ý
ý	ç	ý	ç
ý	ç	ý	ý
ý	ý	ç	ç
ý	ý	ç	ý
ý	ý	ý	ç
ý	ý	ý	ý

Mysallara seredeliň.
Aşakdaky pikir aýtmanyň çynlyk tablisasyny gurmaly:
1. $\overline{A} \vee B$

23-nji tablisa

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A} \vee B$
ç	ý	ç	ç
ç	ý	ý	ý
ý	ç	ç	ç
ý	ç	ý	ç

2. $(A \vee B) \Rightarrow \overline{C}$

24-nji tablisa

A	B	C	$\overline{C}$	$A \vee B$	$A \vee B \Rightarrow \overline{C}$
ç	*ç*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*
ç	*ç*	*ý*	*ç*	*ç*	*ç*
ç	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*
ç	*ý*	*ý*	*ç*	*ç*	*ç*
ý	*ç*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*
ý	*ç*	*ý*	*ç*	*ç*	*ç*
ý	*ý*	*ç*	*ý*	*ý*	*ç*
ý	*ý*	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*

§2. Predikatlar

9. Predikat barada düşünje. Bir orunly predikatlar

«x-ýönekeý san» diýen sözlem pikir aýtma bolup bilmeýär, sebäbi x üýtgeýän ululyk islendik san bahany alyp bilýär. Ol käbir san bahalarda çyn, başga sanlarda bolsa ýalan bolýar. x üýtgeýän ululygyň ýerine N natural sanlar köplüginden san bahalary bereliň.

1 – ýalan,
2 – çyn,
3 – çyn,
4 – ýalan,
5 – çyn,
6 – ýalan,
7 – çyn,
8 – ýalan,
9 – ýalan
....

Goý, sözlem dürli bahalary alyp bilýän üýtgeýän ululygy özünde saklaýan bolsun. Islendik bahalary üýtgeýän ululykda ornuna goýanda sözlem çyn ýa-da ýalan pikir aýtma öwrülýär, onda beýle sözleme bir orunly predikat diýilýär. Bu orunly predikatlaryň her biri üçin x üýtgeýän ululygyň alyp biljek bahalarynyň köplügi görkezilýär we oňa predikatyň kesgitleniş oblasty diýilýär. Biziň sereden mysalymyzda predikatyň kesgitleniş oblasty N natural sanlar köplügidir.

X köplükde berlen bir orunly predikatlary $A(x)$, $x \in X$; $B(x)$, $x \in X$ we ş.m. – görnüşde belleýärler. $A(x)$, $x \in X$ ýazgy «$A(x)$ predikat X köplükde berlipdir» diýip okalýar: $A(x)$ predikatda x üýtgeýän ululygyň ýerine takyk baha bersek, onda $A(a)$ pikir aýtma alnar. Meselem, goý, $X = N$ bolsun we $A(x)$: «x – jübüt san» diýen predikata seredeliň.

Bu predikatda x üýtgeýän ululygyň ýerine natural san ýazsak, onda çyn ýa-da ýalan pikir aýtma alnar. Meselem, eger $x = 5$ bolsa, onda $A(5)$; «5 – jübüt san» – ýalan pikir aýtma, eger $x = 6$ bolsa; onda $A(6)$: «6 – jübüt san» – çyn pikir aýtma we ş.m.

Tükeniksiz köplüklerde berlen predikatlary tablisa görnüşinde ýazyp bolýar. Şonda birinji setirde köplügiň elementleri, ikinji setirde predikatyň ol ýa-da beýleki bahalarda çyndygy ýa-da ýalandygy ýazylýar. Meselem, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ köplükde $A(x)$: «x – jübüt san» diýen predikat berlipdir. Ony tablisada ýazarys (*25-nji tablisa*).

25-nji tablisa

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*	*ý*	*ç*

Şol bir köplükde berlen $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň çynlyk bahalarynyň köplüginiň meňzeş bolmagy mümkin. Beýle ýagdaýda olara ekwiwalent predikatlar diýilýär. Meselem, «x natural san 3-e bölünýär» we « x sanyň onluk ýazgysyndaky sifrleriň jemi 3-e bölünýär» diýen pikir aýtmalar ekwiwalentdir, sebäbi bu predikatlaryň ikisem natural sanlar köplüginde berlipdir. Olaryň ikisem şol bir wagtda çyndyr ýa-da ýalandyr. Eger $A(x)$ we $B(x)$ predikatlar ekwiwalent bolsalar, onda $A(x) \sim B(x)$ görnüşinde ýazylýar.

R hakyky sanlar köplüginde $3x - 5 = 7$ we $3x = 12$ deňlemeler ekwiwalentdir, sebäbi $3x - 5 = 7$ deňlemäni kanagatlandyrýan islendik san $3x = 12$ deňlemäni hem kanagatlandyrýar.

10. Kwantorlar

Goý, ýönekeý sanlaryň X köplüginde $P(x)$: «x ýönekeý san jübüt däldir» diýen predikat berlen bolsun. Bu predikatyň öňünde «islendik» diýen sözi ýazarys, onda «Islendik x ýönekeý san jübüt däldir» diýen ýalan pikir aýtma alarys. Sebäbi 2 ýönekeý, ýöne jübüt sandyr.

Eger $P(x)$ predikatyň öňünden «bardyr» diýen sözi ýazsak, onda «Jübüt däl x ýönekeý san bardyr» diýen çyn predikat alarys. ($x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ we ş.m.)

Şeýlelikde, predikatlardaky üýtgeýän ululyklaryň ornuna diňe bir dürli bahalary goýmak bilen däl-de, eýsem, olaryň öňünden «islendik», «her bir», «ähli», «bardyr» diýen sözleri ýazmak bilen hem pikir aýtmalary alyp bolýar. «Islendik», «her bir», «ähli», «bardyr» diýen ýaly sözlere kwantorlar diýilýär.

Kwantorlaryň iki görnüşi tapawutlandyrylýar: «Ählumumylyk kwantory we barlyk kwantory», «Islendik $x \in X$ üçin $P(x)$ predikat ýerine ýetýändir» diýen pikir aýtmada «islendik» diýen sözi ählumumylyk kwantorynyň belgisi bilen çalşyp ýazarys. $(\forall x \in X)\ P(x)$ (okalyşy: «köplükden bolan islendik x üçin $P(x)$ predikat ýerine ýetýändir») $\forall$ – belgi iňlis dilindäki All – ähli diýen sözüň baş harpynyň başaşak aýlanan görnüşidir. Köplenç, «ähli» diýen sözüň ýerine, «islendik», «her bir» diýen sözler ulanylýar.

Eger $P(x)$ predikatyň öňünden barlyk kwantoryny goýsak, onda «$P(x)$ predikat ýerine ýeter ýaly, $x \in X$ bardyr» diýen pikir aýtma alynýar we $(\exists x \in X)P(x)$ görnüşinde ýazylýar (okalyşy: «$P(x)$ predikat ýerine ýeter ýaly, köplükden bolan şeýle bir x bardyr») $\exists$ belgi iňlis dilindäki Exist – bardyr diýen sözüň baş harpynyň ters aýlanan görnüşidir.

Kwantorlaryň peýdalanyşyna degişli mysallar getireliň. Goý, N natural sanlar köplüginde $P(x)$: «x san 5-e kratny» diýen predikat berlen bolsun. Kwantorlary peýdalanyp, şu pikir aýtmalary ýazyp bolýar:

1. Islendik natural san 5-e kratnydyr;
2. Her bir natural san 5-e kratnydyr;
3. Ähli natural sanlar 5-e kratnydyr;
4. 5-e kratny bolan natural san bardyr;

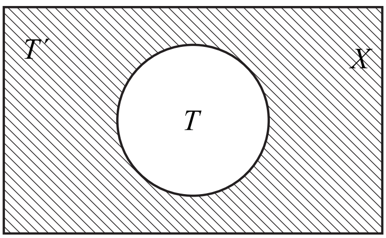
5. 5-e kratny bolan natural san tapylýandyr;
6. Iň bolmanda bir sany natural san 5-e kratnydyr.

Bu pikir aýtmalaryň ilkinji 3 sanysynyň manysy meňzeş bolup, olaryň ählisi hem ýalan pikir aýtmadyr we ol $(\forall x \in N)P(x)$ görnüşde ýazylýar.

Soňky üç pikir aýtmalar çyndyr we ol $(\exists x \in N)P(x)$ ýazylýar.

11. Predikatlar üstünde amallar

Predikatlar hem edil pikir aýtmalar ýaly ýönekeý we düzme bolup bilýärler. Düzme pikir aýtmalar ýönekeý pikir aýtmalardan logiki baglaýjylaryň kömegi bilen alynýar.



16-njy surat

Goý, X köplüge $A(x)$ predikat berlen bolsun. $\overline{A(x)}$ predikata $A(x)$ predikatyň inkär etmesi diýilýär. $\overline{A(x)}$ predikat hem X köplükde kesgitlenendir. Eger $A(x)$ çyn bolsa, onda $\overline{A(x)}$ ýalandyr we tersine $A(x)$ ýalan bolsa $\overline{A(x)}$ çyndyr. (*16-njy surat*).

Meselem, $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ köplükde $A(x)$: «x san 6-dan uludyr» diýen predikat berlipdir. Bu predikatyň çynlyk bahalarynyň T köplügi 7, 8, 9 we 10 sanlardyr, ýagny $T = \{7, 8, 9, 10\}$.

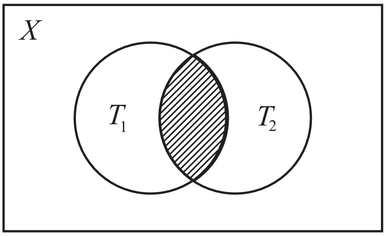
Bu predikatyň inkär etmesi: $\overline{A(x)}$ «x san 6-dan uly däldir» diýen predikatdyr.

$\overline{A(x)}$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi X köplügiň 6 we 6-dan kiçi sanlarydyr. Bu sanlaryň köplügi bolsa X köplükde T köplüge çenli doldurgyjydyr. Ýagny $T' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eger X köplükde berlen $A(x)$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T bolsa, onda $\overline{A(x)}$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T' bolar. T' köplük X köplükde T köplügiň doldurgyjydyr. Eýleriň-Wenniň diagrammasynda T' doldurgyç ştrihlenip görkezilendir (*16-njy surat*).

Goý, X köplükde $A(x)$ we $B(x)$ predikatlar berlen bolsun. $A(x) \wedge B(x)$ predikata berlen $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň konýunksiýasy diýilýär. $A(x) \wedge B(x)$ konýunksiýa şonda we diňe şonda çyndyr, haçanda $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň ikisi hem çyn bolsa (*17-nji surat*).

1-nji mysal. $X=\{1, 2, ..., 11, 12\}$ köplükde $A(x)$: «x san 7-den kiçidir» we $B(x)$: «x ýönekeý sandyr» diýen predikatlar berlipdir. Onda bu predikatlaryň konýunksiýasy $A(x) \wedge B(x)$: «x san 7-den kiçidir we ýönekeýdir».

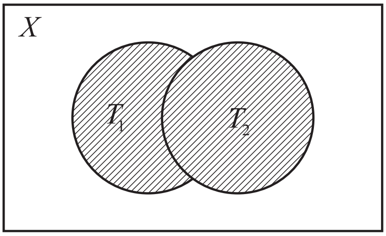


17-nji surat

$A(x)$ predikatyň çynlyk köplügi, $T_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $T_2 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Onda «x san 7-den kiçidir we ýönekeýdir» diýen predikat $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$ bahalarda çyn pikir aýtma öwrülýär. Diýmek, bu predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_1 we T_2 köplükleriň kesişmesidir, ýagny $T_1 \cap T_2 = \{2, 3, 5\}$ köplükdir.

2-nji mysal. $X = \{10, 15, 16, 20\}$ köplükde $A(x)$: «x jübüt san». $B(x)$: «x san 5-e kratny» diýen predikatlar berlipdir. Onda, bu predikatlaryň konýunksiýasy $A(x) \wedge B(x)$: «x san jübüt we 5-e kratnydyr». $A(x)$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_1 we $B(x)$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_2 bolsun. $T_1 = \{10, 16, 20\}$; $T_2 = \{10,15,20\}$. $A(x) \wedge B(x)$ konýunksiýanyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_1 we T_2 köplükleriň kesişmesidir, ýagny $T_1 \cap T_2 = \{10, 20\}$. Ony Eýleriň-Wenniň diagrammasynda şekillendireliň.

X köplükde $A(x)$ we $B(x)$ predikatlar berlen bolsun. Onda, $A(x) \vee B(x)$ predikata $A(x)$, $x \in X$, $B(x)$, $x \in X$, predikatlaryň dizýunksiýasy diýilýär. X köplükde $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň iň bolmanda biri çyn bolsa, onda $A(x) \vee B(x)$ dizýunksiýa çyndyr. $A(x)$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_1 we $B(x)$ predikatyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_2 bolsun. Onda $A(x) \vee B(x)$ dizýunksiýanyň çynlyk bahalarynyň köplügi T_1 we T_2 köplükleriň birleşmesine deňdir, ýagny $T = T_1 \cup T_2$ (*18-nji surat*). Meselem, mugallymçylyk institutyň talyplarynyň X köplüginde $A(x)$: «x talyp aýdymçy» we $B(x)$: «x I ýyl talyby» diýen pikir aýtmalar berlipdir. Bu predikatlaryň dizýunksiýasy $A(x) \vee B(x)$: «x aýdymçy ýa-da I ýyl talyby» $A(x)$ predikatyň çynlyk köplügi institutyň ähli aýdymçy talyp-



18-nji surat

laryndan ybaratdyr, $B(x)$ predikatyň çynlyk köplügi bolsa, institutyň ähli I ýyl talyplaryndan düzülendir. $A(x) \vee B(x)$ dizýunksiýanyň çynlyk köplügine institutyň aýdymçy talyplary ýa-da I ýyl talyplary girýär.

X köplükde berlen $A(x)$ we $B(x)$ predikatlardan $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikaty ýazyp bolýar. Oňa $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň implikasiýasy diýilýär we «Eger $A(x)$ bolsa, onda $B(x)$-dyr» diýip okalýar.

3-nji mysal. Natural sanlar köplüginde $A(x)$: «x natural san 3-e bölünýär», $B(x)$: «x natural san 4-e bölünýär» diýen predikatlar berlipdir. Onda bu predikatlardan «Eger x natural san 3-e bölünýän bolsa, onda ol 4-e bölünýändir» diýip okalýan $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikasiýany ýazyp bolýar. Bu predikat x-yň käbir bahalarynda çyn, başga bahalarynda ýalandyr. Meselem, $x = 12$ bolanda bu predikat «Eger 12 san 3-e bölünýän bolsa, onda ol 4-e bölünýändir» diýip okalýar. Bu ýerde predikatyň şerti çyn («12 san 3-e bölünýär») we onuň netijesi hem çyn («12 san 4-e bölünýär»). Onda pikir aýtmalaryň implikasiýasynyň kesgitlemesine görä, $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikat çyndyr.

4-nji mysal. $X = \{1, 2, 3, ..., 10, 11, 12\}$ köplükde $A(x)$: «x san 6-a kratny», $B(x)$: «x jübüt san» diýen predikatlar berlipdir. Onda, $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Eger x san 6-a kratny bolsa, onda ol jübütdir» implikasiýany alarys. $A(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $T_1 = \{6, 12\}$, $B(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $T_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Görnüşi ýaly, $T_1 \subset T_2$, ýagny $A(x)$ predikatyň çyn bahalarynda $B(x)$ predikat hem çyndyr.

Umuman, X köplükde berlen $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikat şonda we diňe şonda çyndyr, haçanda x-yň ähli bahalarynda $A(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $B(x)$ predikatyň çynlyk köplüginiň bölek köplügi bolsa, ýagny $T_1 \subset T_2$.

Eger $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikasiýa X köplügiň islendik x bahalarynda çyn pikir aýtma öwrülýän bolsa, onda predikat $A(x)$ predikatdan logiki gelip çykýar diýilýär.

Beýle ýagdaýda $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat üçin zerurlyk şerti we $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat üçin ýeterlik şerti diýilýär.

$X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ köplükde $A(x)$: «x san 4-e bölünýär». $B(x)$: «x jübüt san» diýen predikatlar berlipdir. Onda, $A(x) \Rightarrow B(x)$ implikasiýany «Eger x san 4-e bölünýän bolsa, onda ol jübütdir» diýip okap bolýar. Bu implikasiýanyň zerurlyk we ýeterlik şertlerini ýazarys:

1. x sanyň jübüt bolmagy üçin, onuň 4-e bölünmegi ýeterlikdir;
2. x sanyň 4-e bölünmegi üçin, onuň jübüt bolmagy zerurdyr.

$A(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $T_1 = \{4, 8\}$, $B(x)$ predikatyň çynlyk köplügi $T_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Bu ýerden $T_1 \subset T_2$ bolýandygy üçin, predikat predikatdan logiki gelip çykýar. Şonuň üçin «x jübüt san» diýen predikat «x san 4-e bölünýär» diýen predikatyň zerurlyk şertidir we «x san 4-e bölünýär» diýen predikat «x jübüt san» diýen predikatyň ýeterlik şerti bolýar.

Eger X köplükde berlen $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň T_1 we T_2 çynlyk köplükleri gabat gelse, ýagny $T_1 = T_2$ bolsa onda ähli $x \in X$ üçin $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekwiwalensiýa çyndyr. Meselem, N natural sanlar köplüginde berlen $A(x)$: «x natural san 10-a bölünýär», $B(x)$: «x natural sanyň onluk ýazgysy 0 san bilen gutarýar» diýen predikatlar üçin $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekwiwalensiýa ähli x natural san bahalarda çyndyr. Meselem, $x = 140$ bolanda $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekwiwalensiýa çyn, sebäbi 140 san 10-a bölünýär we ol 0 san bilen gutarýar. Eger-de $x = 12$ bolsa, onda $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ekwiwalensiýa ýene-de çyndyr, sebäbi bu pikir aýtmalaryň ikisi hem ýalan, ýagny 12 san 10-a bölünmeýär we 12 sanyň soňy 0 bilen gutarmaýar.

Eger $A(x)$ we $B(x)$ predikatlar X köplükde ekwiwalent bolsa, onda bu predikatlaryň her biri beýlekisi üçin zerur hem-de ýeterlik şerti bolup durýar. Meselem, x natural sanyň 10-a bölünmegi üçin, bu sanyň onluk ýazgysynyň 0 san bilen gutarmagy zerur hem-de ýeterlikdir.

§3. Teoremalar

1. Teoremalaryň gurluşy

Matematikanyň islendik bölümi öwrenilende teoremalar diýlip atlandyrylýan sözlemlere seredilýär. Teoremalaryň mazmuny nähili bolanda-da, olar çyndygyny subut etmek bilen kesgitläp bolýan pikir aýtmalardyr. Pikir aýtmalaryň, predikatlaryň we kwantorlaryň üsti bilen berilýän teoremalaryň gurluşyna seredeliň.

Teorema. «Eger nokat burçuň bissektrisasynda ýatýan bolsa, onda ol burçuň taraplaryndan deň uzaklykdadyr».

«Nokat burçuň bissektrisasynda ýatýar» diýen sözlem teoremanyň şerti, «Nokat burçuň taraplaryndan deň uzaklykdadyr» diýen sözlem bolsa teoremanyň netijesidir. Görnüşi ýaly, teoremanyň şerti we netijesi tekizligiň ähli nokatlarynyň P köplüginde berlen predikatlardyr. Hakykatdan-da «Nokat burçuň bissektrisasynda ýatýar» diýen sözlem berlen burçuň bissektrisasynda ýatýan nokatlaryň P köplügine degişli nokat barada aýdylanda çyn pikir aýtma bolýar. Tekizligiň bissektrisada ýatmaýan ähli nokatlary üçin bu sözlem ýalan pikir aýtmadyr. «Nokat burçuň taraplaryndan deň uzaklykdadyr» diýen sözlem barada hem edil şeýle pikir ýöretmek mümkin. Bu predikatlary $A(x)$ we $B(x)$ diýip belläris. Bu ýerde x P köplügiň islendik nokadydyr. Bu teoremany kwantorlaryň kömegi bilen ýazarys: $(\forall x \in P)[(A(x) \Rightarrow B(x))]$.

Şeýlelikde, teoremanyň gurluşy barada gürrüň edilende «Eger nokat burçuň bissektrisasynda ýatýan bolsa, onda ol burçuň taraplaryndan deň uzaklykdadyr» diýen teoremany üç bölege bölmek bolar:

1. Teoremanyň şerti: tekizligiň ähli nokatlarynyň P köplüginde berlen $A(x)$ predikat, ýagny $A(x)$: «nokat burçuň bissektrisasynda ýatýar».

2. Teoremanyň netijesi. Tekizligiň ähli nokatlarynyň P köplüginde berlen $B(x)$ predikat, ýagny $B(x)$: «nokat burçuň taraplaryndan deň uzaklykdadyr».

3. Teoremanyň düşündirişli bölegi. Bu ýerde teoremada gürrüňi edilýän obýektleriň köplügi barada ýazylyp beýan edilýär. Teoremanyň simwoliki ýazgysyndaky $\forall x \in P$ ýazgyny onuň düşündirişli böleginde görkezip bolýar.

Teoremalar söz bilen beýan edilende, köplenç, onuň düşündirişli bölegi anyk görkezilmeýär. Ýöne teoremalaryň üstünde işlenilende ol aýratyn görkezilmelidir. Köplenç, teoremalar söz bilen beýan edilende «eger…, onda…,» diýen sözlem bilen berilýär. Ony umumy görnüşde

$$(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)] \tag{1}$$

ýaly ýazyp bolýar. Bu ýerde X köplük $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň berlen köplügidir.

«Eger..., onda...» diýen sözlemi özünde saklamaýan teoremalary hem (1) görnüşde ýazyp bolýar. Meselem, «Rombuň diagonallary özara perpendikulýardyr» diýen teorema seredeliň. Bu teoremada dürli dörtburçluklaryň arasyndan islendik romby saýlap alsak, onda onuň diagonallarynyň özara perpendikulýar boljakdygy barada aýdylýar. Şonuň üçin bu teoremany «Eger dörtburçluk-romb bolsa, onda onuň diagonallary özara perpendikulýardyr» diýip ýazmak mümkin. Tekizligiň ähli dörtburçluklarynyň köplügini X diýip bellesek, onda bu köplügiň islendik dörtburçlugyny x diýip alarys. Onda bu teoremany hem şeýle ýazyp bolýar:

$$(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)].$$

Bu ýerde $A(x)$: «x dörtburçluk rombdyr», $B(x)$: «x dörtburçlugyň diagonallary özara perpendikulýardyr» X köplükde berlen predikatlardyr.

Goý, $\forall(x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ çyn teoremanyň ýazgysy bolsun. Onda teoremanyň şerti we netijesi ähli $x \in X$ bahalarda çyn bolýan implikasiýany emele getirýär, diýmek, $B(x)$ predikat $A(x)$ predikatdan logiki gelip çykýar. Şonuň üçin «Rombuň diagonallary özara perpendikulýardyr» diýen teoremany aşakdaky ýaly ýazyp bolýar.

1. Dörtburçlugyň romb bolmagy üçin, onuň diagonallarynyň özara perpendikulýar bolmagy zerur we ýeterlikdir.

2. Dörtburçlugyň diagonallarynyň özara perpendikulýar bolmagy üçin onuň romb bolmagy zerur we ýeterlikdir.

2. Berlen teorema ters teorema

«Eger natural sanyň sifrleriniň jemi 9-a kratny bolsa, onda bu sanyň özem 9-a kratnydyr» diýen teoremany

$$(\forall x \in N)[A(x) \Rightarrow B(x)]$$

görnüşde ýazyp bolýar. $A(x)$: «x sanyň sifrleriniň jemi 9-a kratny» diýen predikat teoremanyň şerti $B(x)$: «x san 9-a kratny» diýen predikat bolsa teoremanyň netijesidir. $\forall x \in N$ ýazgy teoremanyň düşündirişli bölegi bolup, ol teoremanyň ähli x natural sanlar üçin ýerine ýetýändigini aňladýar.

Indi teoremanyň düşündirişli bölegini üýtgetmän, şol durşuna galdyryp, onuň şerti bilen netijesiniň ýerini çalşalyň. $(\forall x \in N)[A(x) \Rightarrow B(x)]$

görnüşli täze teorema alarys. Bu teoremany söz bilen beýan edeliň. «Eger natural san 9-a kratny bolsa, onda onuň sifrleriniň jemi 9-a kratnydyr». Oňa berlen teorema ters teorema diýilýär.

Umuman, $A(x)$ we $B(x)$ X köplükde berlen predikatlar bolsa, onda $(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ we $(\forall x \in X)[B(x) \Rightarrow A(x)]$ teoremalara biri-birine ters teoremalar diýilýär. Bu teoremalaryň $(\forall x \in X)$ düşündirişli bölegi iki teorema üçin hem meňzeşdir.

«Eger natural sanyň sifrleriniň jemi 9-a deň bolsa, onda bu sanyň özem 9-a deňdir» diýen teorema we oňa ters bolan teorema çyndyr. Ýöne berlen teorema we oňa ters bolan teorema hemişe çyn bolmaýar. Meselem, tekizligiň ähli dörtburçluklarynyň X köplükde $A(x)$: «x dörtburçluk gönüburçlukdyr» we $B(x)$: «dörtburçlugyň diagonallary kongruentdir» diýen predikatlara seredeliň.

$(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ teoremany söz bilen «Eger x dörtburçluk gönüburçluk bolsa, onda onuň diagonallary kongruentdir» diýip aýdyp bolýar. Bu çyn teoremadyr. Indi bu teorema ters teoremany ýazarys: $(\forall x \in X)[B(x) \Rightarrow A(x)]$, ýagny «Eger dörtburçlugyň diagonallary kongruent bolsa, onda ol gönüburçlukdyr». Bu teorema ýalandyr, has takyk aýtsak, ol hemişe çyn däldir, sebäbi diagonallary kongruent, ýöne gönüburçly däl dörtburçluklar hem bardyr. Meselem, tekizlikdäki parallelogramlaryň P köplüginde $A(x)$: «x şekil gönüburçlukdyr», $B(x)$: «x şekiliň diagonallary kongruentdir» diýen predikatlar berlipdir. Onda, $(\forall x \in P)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ we $(\forall x \in X)[B(x) \Rightarrow A(x)]$ teoremalaryň ikisi hem çyndyr.

Goý, $(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ we $(\forall x \in X)[B(x) \Rightarrow A(x)]$ predikatlar çyn bolsun. Onda $A(x)$ predikatyň T_1 çynlyk köplügi. $B(x)$ predikatyň T_2 çynlyk köplüginiň bölek köplügi bolýar we tersine, ýagny $T_1 \subset T_2$ we $T_2 \subset T_1$ şonuň üçin hem $T_1 = T_2$. Onda beýle ýagdaýda $A(x)$ we $B(x)$ predikatlaryň her biri beýlekisi üçin ýeterlik we zerurlyk şert bolýar diýilýär. Meselem, «Natural sanyň sifrleriniň jemi 9-a kratny» diýen predikat «Natural san 9-a kratny» diýen predikat üçin ýeterlik we zerurlyk şert bolýar.

Eger $(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)]$ we $(\forall x \in X)[B(x) \Rightarrow A(x)]$ teoremalaryň ikisi hem çyn bolsa, onda olary birleşdirip bir teorema görnüşinde ýazmak mümkin, $(\forall x \in X)[A(x) \Leftrightarrow B(x)]$. Bu teoremany söz bilen beýan edeliň, «Natural sanyň 9-a kratny bolmagy üçin, onuň sifrleriniň jeminiň 9-a kratny bolmagy zerurdyr we ýeterlikdir».

Teoremalarda «zerurdyr we ýeterlikdir» diýen sözüň ýerine, köplenç, «şonda we diňe şonda» diýen söz ulanylýar. Meselem, «Dörtburçluk şonda we diňe şonda parallelogramdyr, haçanda onuň diagonallary kesişme nokadynda deň ýarpa bölünýän bolsa».

3. Berlen teorema gapma-garşylykly teorema

$$(\forall x \in X)[A(x) \Rightarrow B(x)] \tag{1}$$

teorema berlen bolsun. Bu teoremadan onuň şertini, netijesini olaryň inkär etmegi bilen çalyşsak, täze

$$(\forall x \in X)[\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}] \tag{2}$$

teorema alnar. (2) teorema berlen (1) teorema gapma-garşylykly teorema diýilýär. Meselem, N natural sanlar köplüginde $A(x)$: «x sanyň onluk ýazgysy nol bilen gutarýar», $B(x)$: «x san 5-e bölünýär» diýen predikatlar berlipdir. Onda (1) teoremany söz bilen «Eger-de natural sanyň onluk ýazgysy nol bilen gutarýan bolsa, onda ol 5-e bölünýändir» diýip ýazyp bolýar. Bu çyn teoremadyr. (1) teorema gapma-garşylykly (2) teoremany «Eger natural sanyň onluk ýazgysy nol bilen gutarmasa, onda ol 5-e bölünmeýär» diýip okamak mümkin. Bu ýalan teoremadyr, sebäbi yzy nol bilen gutarmaýan, ýöne 5-e bölünýän köpsanly natural sanlary görkezmek mümkin. Meselem, 5, 15, 25, 35 we ş.m. Berlen teoremanyň we oňa gapma-garşylykly teoremanyň hem şol bir wagtda çyn bolýan ýagdaýlary köp duş gelýär:

$$(\forall x \in X)[\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}]. \tag{3}$$

(3) görnüşli teoremalara gapma-garşylykly ters teoremalar diýilýär. Meselem, «Eger natural san 5-e bölünmese, onda onuň onluk ýazgysy nol san bilen gutarmaýar» diýen teorema «Eger natural san 5-e bölünýän bolsa, onda onuň onluk ýazgysy nol san bilen gutarýandyr» diýen teorema ters teoremadyr. Bu teorema hem «Eger sanyň onluk ýazgysy nol san bilen gutarýan bolsa, onda ol 5-e bölünýändir» diýen teorema ters teoremadyr.

(1) we (3) teoremalar deňgüýçlidir, ýagny (1) teorema şonda we dine şonda çyndyr, haçanda (3) teorema çyn bolsa.

5. Sargyt № 1407

МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

III bap

DEŇLEMELER, DEŇSIZLIKLER

§1. San deňlikleri we deňsizlikleri

1. Matematiki diliň elipbisi

Matematikany öwrenmekde biz türkmen dilindäki sözler, sözlemler bilen bir hatarda matematiki belgilerden düzülen sözlemlerden, ýagny matematiki dilden peýdalanýarys. Meselem, $3x + 5 = 8$, $2x + 7 > 5x$ matematiki belgileriň kömegi bilen ýazylan sözlemdir.

Biziň bilşimiz ýaly, islendik sözlem sözlerden, sözler bolsa haýsydyr bir elipbiniň harplaryndan düzülýär. Diýmek, matematiki diliň hem öz elipbisi bolmalydyr. Meselem, onluk hasaplamak sistemasynda sanlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 san belgileriň kömegi bilen ýazylýar. Üýtgeýän ululyklary, köplükleri we olaryň elementlerini bellemek üçin latyn elipbisiniň setir we baş harplary a, b, c, …, z, A, B, C, …, Z peýdalanylýar. Dürli amallar $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{\ }$, $\cap$, $\cup$ we ş.m. belgiler bilen ýazylýar. Sanlaryň, köplükleriň we olaryň elementleriniň arasyndaky gatnaşyklary $=$, $>$, $<$, II, $\perp$ we ş.m. belgiler bilen görkezip bolýar. Ondan başga-da matematiki ýazgylarda dürli görnüşli ýaýlardan (skobkalardan) peýdalanylýar.

Bu sanalyp geçilen belgileriň ählisi matematiki diliň elipbisini emele getirýär. Matematiki elipbiniň belgilerinden kesgitlenen düzgünlere görä sözler, sözlemler düzülýär. Şonda matematiki sözlem edil türkmen dilindäki sözlemler ýaly düşnüklidir, sebäbi ol matematiki elipbiniň harplaryndan düzülen, manysy bolan tükenikli (gutarnykly) yzygiderligi emele getirýär.

Matematiki diliň belgileri asyrlaryň dowamynda köpsanly tanymal alymlaryň gatnaşmagynda emele geldi, döredi. Meselem, näbellini harplar bilen bellemekligi Diafont (III asyr) girizdi diýlip hasap edilýär. Algebrada latyn elipbisiniň harplaryny ilkinji bolup Wiýet (XVI asyr) peýdalanypdyr. R.Dekart (XVIII asyr) bu elipbiniň setir harplaryny matematikada peýdalanmagy ilkinji bolup girizipdir. Deňlik belgisi (=) iňlis alymy R.Rekordyň (XVI asyr) işlerinde gabat gelse-de, bu belgi diňe XVIII asyrda giňişleýin peýdalanylyp başlanypdyr. Deňsizlik belgilerini (>, <) XVII asyryň başlarynda iňlis matematigi Gariot ulanyşyga girizipdir.

2. San aňlatmalary we näbellili aňlatma

$3 + 7$, $24 : 8$, $3 \cdot 2 - 4$, $(25 + 3) \cdot 2 - 17$ görnüşli ýazgylara san aňlatmalary diýilýär. Bu san aňlatmasy sanlardan, amallaryň belgilerinden, ýaýlardan düzülendir. Şonuň ýaly-da, her bir san hem san aňlatmasydyr.

Aňlatmada görkezilen amallaryň matematiki yzygiderlikde ýerine ýetirilmegi netijesinde alnan sana **aňlatmanyň bahasy** diýilýär, meselem, $3 \cdot 2 - 4$ san aňlatmanyň bahasy 2-ä deňdir. San bahasy bolmadyk aňlatma hem bardyr, beýle aňlatmalara manysy ýok diýilýär meselem, $8 : (4 - 4)$ manysy ýokdur, sebäbi $8 : 0$ bolýar, ýöne sany nola bölüp bolmaýar. $\sqrt{-9}$ aňlatmanyň hem manysy ýokdur, sebäbi hakyky sanlar köplüginde kwadraty –9-a deň bolan san ýokdur.

Indi $2a + 3$ görnüşli ýazga seredeliň. Ol 2 we 3 san belgilerden, «+» goşmak amalyndan we a harpdan ybaratdyr. Eger a harpyň ýerine sanlary ýazsak, onda dürli san aňlatmalary alnar, ýagny

$a = 3$ bolanda $2 \cdot 3 + 3$;

$a = 7$ bolanda $2 \cdot 7 + 3$;

$a = -4$ bolanda $2 \cdot (-4) + 3$.

$2a + 3$ görnüşli ýazgyda a harpa näbelli, $2a + 3$ ýazga bolsa näbellili aňlatma diýilýär. Näbellini latyn elipbisiniň islendik harpy bilen belläp bolýar.

Diýmek, näbelli – bu ýerine sanlary ýazmak mümkin bolan belgidir. Aňlatmada näbelliniň ýerine ýazyp bolýan sanlara näbelliniň bahasy, şeýle sanlaryň köplügine bolsa kesgitleniş oblasty diýilýär.

Mysallara seredeliň:

1. $3 - 4y$ aňlatmada y näbelli islendik hakyky san bahany alyp bilýär, sebäbi y-iň islendik bahasynda manyly san aňlatmasy alynýar. Beýle ýagdaýda $3 - 4y$ aňlatmanyň kesgitleniş oblasty R hakyky sanlar köplügi bolýar.

2. Eger $\frac{4}{x-3}$ aňlatmada x-yň ýerine 3-i goýsak, onda manysyz san aňlatmasy alynýar. Ýöne x – y ýerine hakyky sanlar köplüginiň 3-den başga islendik sanyny alsak, onda manyly san aňlatmasy alynýar. Onda $\frac{4}{x-3}$ aňlatmanyň kesgitleniş oblasty 3-den başga ähli hakyky sanlar köplügidir, ýagny $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

3. $\sqrt{x-2}$ aňlatma x-yň $x - 2 \geq 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan hakyky san bahalarynda manyly san aňlatma bolýar, ýagny $\sqrt{x-2}$ aňlatmanyň kesgitleniş oblasty $[2, +\infty]$ köplükdir.

Biziň ýokarda seredenlerimiz bir näbellili aňlatmalardyr. Matematikada iki, üç we ş.m. näbellili aňlatmalara hem seredilýär. Meselem, $3x + 7y$ iki näbellili, $5x - (2y - 7z)$ üç näbellili aňlatmalardyr.

3. San deňlikleri we deňsizlikleri

Goý, a we b iki sany san aňlatmasy bolsun. Olary deňlik belgisi bilen birleşdireliň. Onda san deňligi diýlip atlandyrylýan $a = b$ sözlemi alarys. Meselem, $3 + 2$ we $6 - 1$ san aňlatmalaryny deňlik belgisi bilen birleşdireliň $3 + 2 = 6 - 1$. Bu çyn sözlemdir. Eger deňlik belgisi bilen $3 + 2$ we $7 - 3$ aňlatmany birleşdirsek, onda $3 + 2 = 7 - 3$ ýalan sözlem alarys. Şeýlelikde, logiki nukdaý nazardan san deňligi çyn ýa-da ýalan pikir aýtmadyr.

Eger deňligiň çep we sag taraplarynda ýazylan san aňlatmalarynyň bahalary gabat gelýän bolsa, onda san aňlatmasy çyn pikir aýtmadyr. Çyn san deňlikleriniň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. $a = b$ çyn san deňliginiň iki tarapynada şol bir c san aňlatmasyny goşsak $a + c = b + c$ çyn san deňligi alynýar, ýagny $a = b \Rightarrow$ $\Rightarrow a + c = b + c$.

2. $a = b$ çyn san deňliginiň iki tarapy hem şol bir c sana köpeltsek, $ac = bc$ çyn san deňligi alynýar, ýagny $a = b \Rightarrow ac = bc$.

Goý, a we b san aňlatmalary bolsun. Olary «>» ýa-da «<» belgi bilen birleşdireliň. Alnan $a > b$ ýa-da $a < b$ sözlemlere san deňsizligi diýilýär. Meselem, eger $6 + 2$ we $13 - 7$ aňlatmalary «>» belgi bilen birleşdirsek, $6 + 2 > 13 - 7$ san deňsizligini alarys. Bu çyn sözlem. Eger bu aňlatmalary «<» belgi bilen birleşdirsek, $6 + 2 < 13 - 7$ ýalan san deňsizligini alarys. Şeýlelikde, logiki nukdaýnazardan san deňsizligi çyn ýa-da ýalan pikir aýtmadyr. Çyn san deňsizlikleriniň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. Eger $a > b$ çyn san deňsizligiň iki tarapyna-da şol bir c san aňlatmasyny goşsak, onda ýene-de manyly çyn san deňsizligi alarys, $a + c > b + c$.

2. Eger $a > b$ çyn san deňsizligiň iki tarapy hem şol bir c sana köpeltsek, onda $ac > bc$ çyn san deňsizligi alarys.

3. Eger $a > b$ çyn san deňsizligiň iki tarapy hem şol bir c otrisatel sana köpeltsek, onda çyn san deňsizligini almak üçin deňsizlik belgisini ters tarapa öwürmeli, ýagny $ac < bc$ deňsizlik alarys.

4. Bir näbellili deňleme

$4x$ we $5x + 2$ iki sany näbellili aňlatma berlipdir. Olary deňlik belgisi bilen birleşdirip, $4x = 5x + 2$ aňlatma alarys. Ol $x = 1$ bahada $4 \cdot 1 = 5 \cdot 1 + 2$ ýalan pikir aýtma bolýar. $x = -2$ bahada $4 \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) + 2$ çyn pikir aýtma alynýar. Beýle görnüşli deňliklere bir näbellili deňleme diýilýär. Umumy görnüşde deňleme düşünjesi şeýle kesgitlenilýär.

Kesgitleme. Goý, $f(x)$ we $g(x)$ X köplükde kesgitlenen iki sany aňlatma bolsun. Onda $f(x) = g(x)$ görnüşli deňlige bir näbellili deňleme diýilýär.

X köplüge degişli x üýtgeýän ululygyň berlen deňlemäni çyn san deňlige getirýän bahasyna **deňlemäniň çözüwi** (deňlemäniň köki) diýilýär. Berlen deňlemäniň çözüwleriniň köplügini tapmak – bu deňlemäni çözmek diýmekdir.

Mysallara seredeliň.

1. $4x = 5x + 2$, $x \in R$. Bu deňlemede $x = -2$ bahada çyn san deňligi alynýar. Diýmek, onuň çözüwleriniň köplügi $\{-2\}$ bolar.

2. $(x-1)(x+2)=0$, $x \in R$. Bu deňleme $x=1$ we $x=-2$ bahalarda çyn san deňligi bolýar. Diýmek, onuň çözüwleriniň köplügi $\{-2; 1\}$ bolar.

3. $(3x+1) \cdot 2 = 6x+2$, $x \in R$. Aňlatmanyň çep tarapyndaky ýaýy (skobkany) açyp alarys. $6x + 2 = 6x + 2$. Bu deňleme x näbelliniň islendik hakyky san bahasynda çyn pikir aýtma bolýar. Onda, bu deňlemäniň çözüwleriniň köplügi ähli hakyky sanlar köplügidir.

4. $(3x + 1) \cdot 2 = 6x + 1$, $x \in R$. Bu deňlemäni $6x + 2 = 6x + 1$ görnüşde ýazarys. Bu deňleme x näbelliniň hakyky san bahalarynyň hiç birinde çyn san deňligi bolmaýar, sebäbi $2 \neq 1$. Beýle ýagdaýda berlen deňlemäniň çözüwi ýok ýa-da onuň çözüwleriniň köplügi boş köplük diýilýär.

5. Deňgüýçli deňlemeler

Berlen deňlemäni çözmek üçin, ony has ýönekeý deňleme bilen çalşyp alýarlar hem-de onuň çözüwleriniň köplügini tapýarlar. Bu ýönekeýleşdirilen deňlemäniň kökleriniň ilkibaşda berlen deňlemäniň hem kökleri bolmagy üçin, olaryň kökleri gabat gelmelidir. Beýle deňlemelere deňgüýçli deňlemeler diýilýär.

Kesgitleme. Eger-de berlen iki deňlemäniň çözüwleriniň köplügi gabat gelse, onda olara deňgüýçli deňlemeler diýilýär.

Meselem, $(x + 1)^2 = 9$ we $(x - 2)(x - 4) = 0$ deňlemeler hakyky sanlar köplüginde deňgüýçlidir, sebäbi olaryň çözüwleriniň köplügi gabat gelýär. Deňgüýçli deňlemeler barada teoremalara seredeliň.

1-nji teorema. Goý, $f(x) = g(x)$ X köplükde berlen deňleme we $h(x)$, X köplükde kesgitlenen aňlatma bolsun. Onda,

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

we

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \tag{2}$$

deňlemeler X köplükde deňgüýçlidir.

Subudy. (1) deňlemäniň çözüwleriniň köplügini T_1, (2) deňlemäniň çözüwleriniň köplügini T_2 bilen belläliň. Onda (1) we (2) deňlemeleriň deňgüýçlidigi üçin, $T_1 = T_2$ bolar, bu deňligiň dogrudygyna göz ýetirmek üçin, T_1-iň islendik köküniň T_2-niň köki bolýandygyny we tersine, T_2-niň islendik köküniň T_1-iň kök bolýandygyny barlap göreliň.

Goý, a san (1) deňlemäniň köki bolsun. Onda $a \in T_1$ san bahany (1) deňlikde ornuna goýsak $f(a) = g(a)$ çyn san deňligi alynýar. $h(x)$ aňlatma $h(a)$ san aňlatmasy bolar. $f(a) = g(a)$ san deňliginiň iki tarapyna-da $h(a)$ san aňlatmasyny goşup, $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$ çyn san deňligini alarys. Bu deňlik a sanyň (2) deňlemäniň hem köki bolýandygyny görkezýär. Şeýlelikde, biz (1) deňlemäniň her bir köküniň (2) deňlemäniň hem köki bolýandygyny subut etdik, ýagny $T_1 \subset T_2$.

Indi goý, b san (2) deňlemäniň köki bolsun. Onda, $b \in T_2$, bu bahany ornuna goýup alarys. $f(b) + h(b) = g(b) + h(b)$. Bu deňligiň iki tarapynada $-h(b)$ aňlatmany goşup, $f(b) = g(b)$ san deňligini alarys. Bu bolsa b sanyň (1) deňlemäniň köki bolýandygyny görkezýär.

Şeýlelikde, biz (2) deňlemäniň her bir köküniň (1) deňlemäniň hem köki bolýandygyny, ýagny $T_2 \subset T_1$ subut etdik.

Diýmek, $T_1 \subset T_2$ we $T_2 \subset T_1$, onda deň deňlemeler baradaky kesgitlemä görä, $T_1 = T_2$. Bu bolsa X köplükde (1) we (2) deňlemeleriň deňgüýçlidigini görkezýär. Deňlemeler çözülende, köplenç, bu teorema däl-de, ondan gelip çykýan netijeler peýdalanylýar.

1. Eger deňlemäniň iki tarapyna-da şol bir sany goşsak, onda berlen deňlemä deňgüýçli deňleme alarys.

2. Eger goşulyjylaryň haýsy-da bolsa birini ters alamat bilen deňligiň beýlesine geçirsek, onda berlen deňlemä deňgüýçli deňleme alarys.

2-nji teorema. Goý, $f(x) = g(x)$ X köplükde berlen deňleme we $h(x)$ şol X köplükde kesgitlenen hem-de x-yň hiç bir bahasynda nola deň bolmaýan aňlatma bolsun. Onda, $f(x) = g(x)$ we $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ deňlemeler X köplükde deňgüýçlidir. Bu teorema edil 1-nji teorema ýaly subut edilýär. Deňlemeler çözülende, 2-nji teoremadan gelip çykýan şu aşakdaky netijeden peýdalanýarys.

Eger deňlemäniň iki tarapyny hem şol bir sana köpeltsek (ýa-da bölsek), onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan deňleme alarys.

Mysallara seredeliň.

1. $1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, $x \in R$ deňlemäni çözmeli. Ilki bilen ony umumy maýdalawja getireliň $\frac{6-2x}{6} = \frac{x}{6}$. Soňra umumy maýdalawjyny taşlap ýazarys $6 - 2x = x - 2x$ aňlatmany deňligiň sag tarapyna geçireliň $6 = x + 2x$. Deňlemäniň sag tarapyndaky meňzeş agzalary goşup alarys $6 = 3x$. Deňligiň iki tarapyny hem 3-e bölüp, $x = 2$-ni alarys. Diýmek, bu deňlemäniň diňe bir köki bar, ýagny $\{2\}$.

2. $x(x-1) = 2x, x \in R$ deňlemäni çözmeli. Bu deňlemäni okuwçylar käwagt şeýle çözýärler, ýagny deňlemäniň iki tarapyny hem x näbellä bölýärler we $x - 1 = 2$ deňlemäni alyp, onuň çözüwini $x = 3$ diýip ýazýarlar.

Deňlemäniň bu çözüwi dogrumy? x näbelliniň $x(x-1) = 2x$ deňlemäni çyn san deňligine öwürýän ähli san bahalary tapyldymy? Bu deňleme $x = 0$ bolanda $0(0 - 1) = 2 \cdot 0$ çyn san deňligi alynýar. Onda deňlemäniň bu köki nirede? Sebäbi $x - 1 =2$ we $2(x - 1)$ deňlemeler hakyky sanlar köplüginde deňgüýçli däl, şonuň üçin deňlemäniň bir köki tapylman galdy.

$x(x-1) = 2x$ deňlemäni nähili çözmeli. Bu deňlemäni çözmegiň mümkin bolan usullaryndan birini göreliň.

$2x$ näbellini deňlemäniň sag tarapyna geçireliň $x(x-1) - 2x = 0$. Bu ýerden $x^2 - x - 2x = 0$, $x^2 - 3x = 0$ ýazyp bolýar. x üýtgeýän ululygy ýaýyň daşyna çykaryp $x(x-3) = 0$, ýazarys. Iki köpelijiniň köpeltmek hasyly şonda we diňe şonda nola deňdir, haçanda iň bolmanda olaryň biri nola deň bolsa. Onda, $x(x-3) = 0$ aňlatmany $x = 0$ we $x - 3 = 0$ diýip ýazyp bolýar. Diýmek, bu deňlemäniň kökleri 0 we 3 sanlardyr, ýagny $\{0; 3\}$.

6. Matematikanyň mekdep kursunda bir näbellili deňlemeler we deňsizlikler

1-nji mysal. Deňlemäni çözmeli.

	Barlap görýäris.
$9x - 23 = 5x - 11;$	$9 \cdot 3 - 23 = 5 \cdot 3 - 11;$
$9x - 5x = 23 - 11;$	$27 - 23 = 15 - 11;$

$4x = 12;$ $\qquad\qquad$ $4 = 4.$
$x = 3.$

2-nji mysal
$2(x + 3) – 3(x + 2) = 5 – 4(x + 1);$
$2x + 6 – 3x – 6 = 5 – 4x – 4;$
$–x = –4x + 1;$
$3x = 1;$
$$x = \frac{1}{3}.$$

3-nji mysal
$$\frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{x-5}{6};$$
$$\frac{5x}{2} \cdot 6 - \frac{x-3}{3} \cdot 6 = 1 \cdot 6 + \frac{x-5}{6} \cdot 6;$$
$15x – 2(x – 3) = 6 + x – 5;$
$15x – 2x + 6 =6 + x – 5;$
$13x + 6 = x + 1;$
$12x = –5;$
$$x = -\frac{5}{12}.$$

4-nji mysal
$2(x + 1) – 1 = 3 – (1 – 2x);$
$2x + 2 – 1 = 3 – 1 + 2x;$
$2x – 2x = 2 – 1;$
$0 \cdot x = 1.$
Deňlemäniň çözüwi ýokdur.

5-nji mysal
$3(1 – x) + 2 = 5 – 3x;$
$3 – 3x + 2 = 5 – 3x;$
$5 – 3x = 5 – 3x.$
Deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

6-njy mysal. Deňsizlikleri çözmeli.

$x + 1 > 7 - 2x;$

$x + 2x > 7 - 1;$

$3x > 6;$

$x > 2.$

Deňsizligiň çözüwleriniň köplügi 2-den uly ähli sanlardyr.

7-nji mysal

$3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2;$

$3x - 6 - 4x - 4 < 2x - 6 - 2;$

$-x - 10 < 2x - 8;$

$-3x < 2;$

$x > -\frac{2}{3}.$

8-nji mysal

$\frac{x-5}{6} + 1 \leq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3};$

$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \leq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6\frac{x-3}{3};$

$x - 5 + 6 \quad 15x - 2(x - 3);$

$x - 5 + 6 \leq 15x - 2x + 6;$

$x + 1 \leq 13x + 6;$

$-12x \leq 5$

$x \geq -\frac{5}{12}.$

9-njy mysal

$2(x + 1) + 5 > 3 - (1 - 2x);$

$2x + 2 + 5 > 3 - 1 + 2x;$

$2x + 7 > 2 + 2x;$

$2x - 2x > 2 - 7;$

$0 \cdot x > -5;$

$0 > -5.$

Deňsizligiň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

10-njy mysal

$3(2 - x) - 2 > 5 - 3x$

$6 - 3x - 2 > 5 - 3x;$
$4 - 3x > 5 - 3x;$
$-3 + 3x > 5 - 4;$
$0 \cdot x > 1;$
$0 > 1.$
Deňsizligiň çözüwi ýokdur.

7. Deňleme düzmek bilen çözülýän meseleler

1-nji mesele. Syýahatçylary gezelenje alyp barýan gämi derýada akymyň ugruna ýuzüp gitdi we 5 sagatdan yzyna gaýdyp gelmelidi. Suwuň akyş tizligi sagatda 3 *km*, gäminiň ýata suwdaky tizligi sagatda 18 *km*. Eger syýahatçylar kenarda 3 sagat dynç alyp yzyna gaýtsalar, onda gämi näçe *km* uzaklyga gidipdir?

Çözülişi. Goý, gözlenýän uzaklyk x *km* bolsun. Gämi bu aralygy akymyň ugruna $18 + 3 = 21$ *km/sag* tizlik bilen geçer we onuň üçin $\frac{x}{21}$ *sag* wagt sarp eder. Gämi yzyna akymyň garşysyna $18 - 3 = 15$ *km/sag* tizlik bilen ýüzer we $\frac{x}{15}$ sagat ýolda bolar. Syýahatçylar kenarda 3 *sag* dynç aldylar. Diýmek, gezelenç üçin jemi $\left(\frac{x}{21} + \frac{x}{15} + 3\right)$ *sag* wagt sarp edildi. Meseläniň şertine görä, ol 5 sagada deň. Onda, $\frac{x}{21} + \frac{x}{15} + 3 = 5$ deňleme alarys:

$$\frac{x}{21} + \frac{x}{15} = 2, \quad 5x + 7x = 210, \quad 12x = 210, x = 17{,}5.$$

Gämi 17,5 *km* uzaklyga ýüzüp gidipdir.

2-nji mesele. Üç sany yzygider gelýän täk sanyň jemi 81, bu sanlary tapmaly?

Çözülişi. Täk sany $2n - 1$ belläris. Onda indiki täk san $(2n - 1) + 2$, üçünji täk san $(2n - 1) + 4$ bolar. Meseläniň şertine görä deňleme düzeris:
$(2n - 1) + (2n - 1) + 2 + (2n - 1) + 4 = 81,$
$2n + 1 + 2n + 1 + 2n + 3 = 81,$

$6n = 81 - 3,$

$6n = 78,$

$n = 13,$

$2n - 1 = 2 \cdot 13 - 1 = 25;$

$2n + 1 = 2 \cdot 13 + 1 = 27;$

$2n + 3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29.$

Diýmek jemi 81-e deň bolan yzygider täk sanlar 25, 27, 29 ýagny $25 + 27 + 29 = 81$.

3-nji mesele

Üç synpda 119 okuwçy bar. Birinji synpda ikinjidäkiden 4 okuwçy köp, üçünji synpdan bolsa 3 okuwçy az. Her synpda näçe okuwçy bar?

Çözülişi. Ikinji synpdaky okuwçylaryň sanyny x bilen belläliň, onda birinjide $x + 4$ okuwçy bar, birinji synpda üçünjidäkiden 3 okuwçy az, ýagny üçünji synpda ondan 3 okuwçy köp, diýmek, $(x + 4) + 3$. Meseläniň şertine görä,

$x + x + 4 + x + 4 + 3 = 119;$

$3x = 119 - 11;$

$3x = 108;$

$x = 36$

– ikinji synpda 36 okuwçy bar. Birinjide $x + 4 = 36 + 4 = 40$ okuwçy, üçünjide $x + 4 + 3 = 36 + 4 + 3 = 43$ okuwçy okaýar.

$36 + 40 + 43 = 119;$

$119 = 119.$

4-nji mesele. Deňýanly üçburçlugyň perimetri 25 *sm*. Eger üçburçlugyň gapdal tarapy esasyndan 5 *sm* uzyn bolsa, onda üçburçlugyň taraplarynyň uzynlygyny tapmaly?

Çözülişi. Üçburçlugyň esasyny x bilen belläris. Onda, onuň gapdal tarapy $(x + 5)$ *sm* bolar. Deňleme düzeliň:

$x + x + 5 + x + 5 = 25;$

$3x = 25 - 10;$

$3x = 15;$

$x = 5$

gapdal taraplary

$x + 5 = 5 + 5 = 10$ *sm*.

$10 + 10 + 5 = 25;$
$25 = 25.$

8. Bir näbellili deňsizlik. Deňgüýçli deňsizlikler

$2x + 7 > 10 - x$, $x^2 + 7x < 2$, $(x + 2)(x + 3) > 0$ görnüşli aňlatmalara bir näbellili deňsizlikler diýilýär.

Kesgitleme. Goý, $f(x)$ we $g(x)$ x näbellili, X köplükde kesgitlenen iki sany aňlatma bolsun. Onda, $f(x) > g(x)$ ýa-da $f(x) < g(x)$ görnüşli deňsizliklere bir näbellili deňsizlikler diýilýär.

X köplüge degişli x näbelliniň berlen deňsizligi çyn san deňsizlige özgerdýän bahasyna **deňsizligiň çözüwi** diýilýär. Berlen deňsizligiň çözüwleriniň köplügini tapmak – bu deňsizligi çözmek diýmekdir.

Mekdep matematika kursunda dürli görnüşli deňsizlikleri çözmeklige seredilýär. Biz diňe birinji derejeli deňsizlikleriň çözüwlerini tapmaga seredeliň. Beýle deňsizlikleri çözmegiň esasynda deňgüýcli deňsizlikler baradaky teoremalar durýar.

Kesgitleme. Eger iki deňsizligiň çözüwleriniň köplügi deň bolsa, onda olara deňgüýçli deňsizlikler diýilýär. Meselem, $2x + 7 > 10$ we $2x > 3$ deňsizlikler deňgüýçlidir, sebäbi olaryň çözüwleriniň köplügi deň, ýagny $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Deňsizlikleriň deňgüýçlidigi baradaky teoremalar we olardan gelip çykýan netijeler deňlemeleriň deňgüýçlidigi baradaky teoremalara meňzeşdir we edil şonuň ýaly subut edilýär.

3-nji teorema. Goý, $f(x) = g(x)$ X köplükde berlen deňsizlik we $h(x)$ şol X köplükde kesgitlenen aňlatma bolsun. Onda $f(x) > g(x)$ we $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ deňsizlikler X köplükde deňgüýçlidir. Bu teoremadan aşakdaky netijeler gelip çykýar.

1. Eger $f(x) > g(x)$ deňsizligiň iki tarapyna-da şol bir d hakyky sany goşsak, berlen deňsizlige deňgüýçli bolan $f(x) + d > g(x) + d$ deňsizligi alarys.

2. Eger goşulyjylaryň haýsy-da bolsa birini ters alamat bilen deňsizligiň başga tarapyna geçirsek, onda berlen deňsizlige deňgüýçli bolan deňsizlik alarys.

4-nji teorema. Goý, $f(x) > g(x)$ X köplükde berlen deňsizlik, $h(x)$ şol X köplükde kesgitlenen aňlatma we $h(x) > 0$ bolsun. Onda, $f(x) > g(x)$ we $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ deňsizlikler X köplükde deňgüýçlidir.

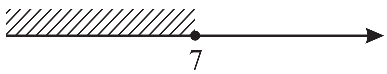
Bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar. Eger $f(x) > g(x)$ deňsizligiň iki tarapyny hem şol bir položitel d sana köpeltsek, onda berlen deňsizlige deňgüýçli bolan $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$ deňsizlik alnar.

5-nji teorema. Goý, $f(x) > g(x)$ X köplükde berlen deňsizlik, $h(x)$ şol X köplükde kesgitlenen aňlatma we $h(x) < 0$ bolsun. Onda $f(x) > g(x)$ we $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ deňsizlikler X köplükde deňgüýçlidir. Bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar.

Eger $f(x) < g(x)$ deňsizligiň iki tarapyny hem şol bir otrisatel d sana köpeltsek, onda deňsizlik alamaty ters tarapa öwrülýär we berlen deňsizlige deňgüýçli bolan deňsizlik alnar $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$.

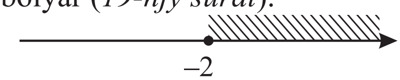
Mysallara seredeliň.

1. $5x - 5 < 2x - 16$, $x \in R$ deňsizligi çözmeli. $2x$ aňlatmany deňsizligiň çep tarapyna 5 sany *sag* tarapyna geçirip ýazarys: $5x - 2x < 16 + 5$. Deňsizligiň meňzeş agzalaryny goşup, $3x < 21$-i alarys, bu ýerden $x < 7$ ýazarys. Deňsizligiň çözüwi $x < 7$ kesimdir, ýagny $(-\infty, 7)$ bolýar (*19-njy surat*).



19-njy surat

2. $-12 - 7x < 3x + 8$, $x \in R$ deňsizligi çözmeli. $3x$ aňlatmany deňsizligiň çep tarapyna, -12 sany sag tarapyna geçirip, $-7x - 3x < 8 + 12$ deňsizligi alarys. Bu ýerde $-10x < 20$ deňsizligiň iki tarapyny hem -10-a bölüp, $x > -2$-ni aldyk. Diýmek, $-12 - 7x < 3x + 8$, $x \in R$ deňsizligiň çözüwi $(-2, \infty)$ kesimdir (*20-nji surat*).



20-nji surat

9. Iki näbellili iki deňlemeler sistemasy

Goý, $f(x; y) = 0$ we $g(x; y) = 0$ iki näbellili iki deňlemeler berlen bolsun. Deňlemeler sistemasynyň her bir deňlemesini dogry san deňligine öwürýän x we y san jübütlerine deňlemeler sistemasynyň çözüwi diýilýär.

$x - 3y = 10$ we $3x - 2y = 2$ deňlemeler berlen bolsa, onda ýaýyň kömegi bilen $\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ deňlemeler sistemasyny alarys.

Berlen iki sany deňlemeler sistemalarynyň çözüwleri meňzeş bolsa, onda olara deňgüýçli deňlemeler sistemasy diýilýär. Eger deňlemeler sistemalarynyň çözüwleri ýok bolsa, onda olar hem deňgüýçlidir. Deňlemeler sistemalary çözülende olary berlen deňlemeler sistemasyna deňgüýçli bolan ýönekeý deňlemeler sistemasy bilen çalyşýarlar:

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

deňlemeler sistemalary deňgüýçlidir. Indi deňlemeler sistemalaryny çözmegiň dürli usullaryna seredeliň.

Ornuna goýmak usuly

Deňlemeler sistemasyny bu usulda çözmek üçin:

1. Deňlemeleriň birinde y näbelliniň x-yň üsti bilen ýa-da x näbellini y-iň üsti bilen aňladyp alarys.
2. Alnan aňlatmany ikinji deňlemede x-yň (y-iň) ornuna goýup, bir näbellili deňleme alarys.
3. Bu deňlemäniň köklerini taparys.
4. Deňlemäniň jogabyny ornuna goýup, x-yň (y-iň) bahasyny taparys.

1-nji mysal. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

$2x + y = 4$ deňlemede $2x$ näbellini deňlemäniň sag tarapyna geçirip ýazarys

$$y = 4 - 2x. \tag{2}$$

Soňra y-iň bahasyny

$$x + 2y = 5 \tag{3}$$

deňlemede ornuna goýarys:

$x + 2(4 - 2x) = 5;$
$x + 8 - 4x = 5;$
$-3x = -3;$
$x = 1$

alarys. $x = 1$ bahany (2)-de ornuna goýup, ýazarys:

$y = 4 - 2 \cdot 1 = 2;$
$y = 2.$

Şeýlelikde, biz $x = 1$ we $y = 2$ san bahalary aldyk. Onda (1; 2) san jübüti (1) deňlemeler sistemasynyň çözüwi bolýarmy? Bu bahalary (1)-de ornuna goýup, barlap göreliň:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ 2 \cdot 1 + 2 = 4 \end{cases} \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Deňlemeleriň ikisi hem dogry.

Goşmak usuly

2-nji mysal

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27, \\ 5x + 2y = 33. \end{cases} \tag{1}$$

Deňlemeler sistemasyny çözmeli. Onuň üçin deňlemeleri goşup ýazarys:

$$\begin{array}{r} 7x - 2y = 27 \\ +\; 5x + 2y = 33 \\ \hline 12x \quad\quad = 60 \end{array}$$

bu ýerden $x = 5$-i alarys. x-yň bahasyny (1) deňlemeler sistemasynyň deňlemeleriniň birinde ornuna goýup alarys.

$7 \cdot 5 - 2y = 27;$

$35 - 2y = 27;$
$-2y = -8;$
$y = 4.$
$x = 5$ we $y = 4$ bahalary (1)-de barlap göreliň:

$$\begin{cases} 7 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 27, \\ 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 33; \end{cases} \quad \begin{cases} 35 - 8 = 27, \\ 25 + 8 = 33; \end{cases} \quad \begin{cases} 27 = 27, \\ 33 = 33. \end{cases}$$

Deňlemeleriň ikisi hem dogry.

Täze näbellini girizmek usuly

3-nji mysal. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$\frac{x}{y} = z$ diýip bellesek, $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$ bolar. Onda deňlemeler sistemasynyň birinji deňlemesini $z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}$-i ýazarys. Bu ýerden $6z^2 - 13z + 6 = 0$ onda, $z_1 = \frac{2}{3}$; $z_2 = \frac{3}{2}$. Şeýlelikde, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, ýagny $y = \frac{3x}{2}$ ýa-da $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, ýagny $y = \frac{2x}{3}$. Deňlemeler sistemasynyň birinji deňlemesini $y = \frac{3x}{2}$ we $y = \frac{2x}{3}$ iki deňleme görnüşinde ýazyp bolýar. Şonuň üçin, $\begin{cases} y = \frac{3x}{2}, \\ x + y = 5 \end{cases}$ we $\begin{cases} y = \frac{2x}{3}, \\ x + y = 5 \end{cases}$ deňlemeler sistemasyny çözeris. Onda, birinji sistemany çözüp, $x = 2$; $y = 3$, ikinji sistemany çözüp, $x = 3$; $y = 2$ san bahalary taparys.

Jogaby: (2; 3) we (3; 2).

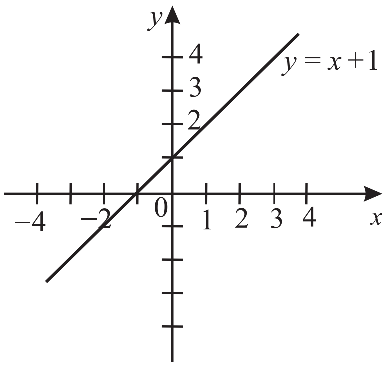
Deňlemeler sistemasyny çözmegiň grafiki usuly

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 4 \end{cases} \tag{1}$$

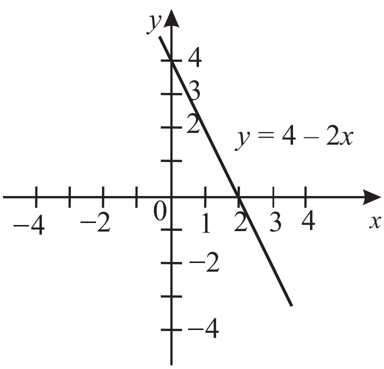
deňlemeler sistemasy berlipdir. Ilki bilen deňlemä seredeliň

$$x - y = -1. \tag{2}$$

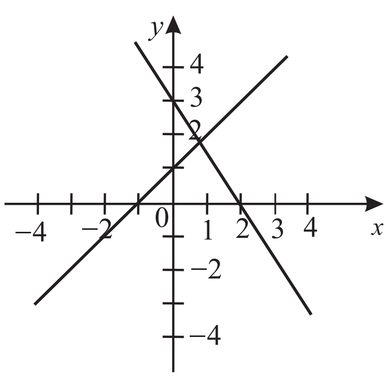
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15



21-nji surat



22-nji surat



23-nji surat

Deňlemäni çözmek üçin (2) sistemany y-iň üsti bilen aňladyp alarys:

$$y = x + 1. \qquad (3)$$

(2) we (3) deňlemeler deňgüýçlidir, diýmek, olaryň çözüwleri meňzeşdir. (3) deňlemäniň grafigi göni çyzykdyr, onda (2) deňlemäniň grafigi hem göni çyzyk bolar. Eger $x = 0$ bolsa, $y = 1$ we eger $x = -1$ bolsa, onda $y = 0$ bolar. Diýmek, deňlemäniň grafigi (0; 1) we (–1; 0) nokatlardan geçer (*21-nji surat*).

(1) sistemanyň ikinji deňlemesi

$$2x + y = 4. \qquad (4)$$

Bu ýerde eger $x = 0$ bolsa, onda $y = 4$ we eger $y = 0$ bolsa, onda $x = 2$ bolar. Diýmek, (4) deňlemäniň grafigi (0; 4) we (2, 0) nokatlardan geçer (*22-nji surat*).

Indi, bu iki deňlemäniň grafikleriniň kesişme nokatlaryna seredeliň. Onuň koordinatalary $x = 1$; $y = 2$ nokatlardyr, sebäbi (3) we (4) deňlemeleriň grafigi (1; 2) nokatda kesişýär. Diýmek, $x = 1$; $y = 2$ (1) sistemanyň çözüwidir (*23-nji surat*).

Deňlemeler sistemasy grafiki usulda çözülende:

1. Deňlemeler sistemasynyň her bir deňlemesiniň grafigi gurulýar.
2. Gurlan gönüleriň kesişme nokatlary tapylýar (eger olar kesişýän bolsa).

Deňlemeleriň grafikleriniň kesişme nokadynyň koordinatalary bu deňlemeler sistemasynyň çözüwi bolýar. Deňlemeler sistemasy grafiki usulda çözülende, üç dürli ýagdaýyň bolmagy mümkin

1. Gönüler kesişýärler, ýagny olaryň bir umumy nokady bar. Onda deňlemeler sistemasynyň ýeke-täk çözüwi bardyr.

2. Gönüler paralleldir, ýagny gönüleriň umumy nokady ýok. Onda deňlemeler sistemasynyň çözüwi ýokdur.

3. Gönüler gabat gelýärler. Onda deňlemeler sistemasynyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

10. Deňsizlikler sistemasy

1-nji mysal

Deňsizlikler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1), \\ 2(x + 3) > x + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

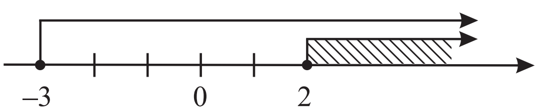
Birinji deňsizligi çözeris:

$$5x - 1 > 3x + 3; \quad 2x > 4; \quad x > 2.$$

Ikinji deňsizligi çözeris:

$$2(x + 3) > x + 3; \quad 2x + 6 > x + 3; \quad x > -3.$$

Onda deňsizlikleriň ikisi hem $x > 2$ bahada dogrudyr. Deňsizlikleri kanagatlandyrýan san bahalary san okunda (gönüsinde) şekillendireliň (*24-nji surat*):



24-nji surat

2-nji mysal

Deňsizlikler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} 3(x - 1) \le 2x + 4, \\ 4x - 3 \ge 13. \end{cases} \qquad (2)$$

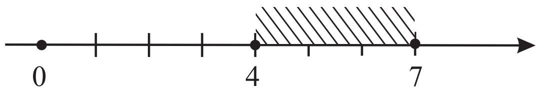
Birinji deňsizligi çözeris:

$$3x - 3 \leq 2x + 4; \quad x \leq 7.$$

Ikinji deňsizligi çözeris:

$$4x \geq 16; \quad x \geq 4.$$

Diýmek, (2) sistemanyň birinji deňlemesi $x \leq 7$, ikinji deňlemesi $x \geq 4$ bolanda ýerine ýetýär. Onda, deňlemeler sistemasy $4 \leq x \leq 7$ bolanda dogrudyr (*25-nji surat*).



25-nji surat

3-nji mysal. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} 2(1 - x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Birinji deňsizligi çözeris:

$$2 - 2x < 4 - 3x, \quad x < 2.$$

Ikinji deňsizligi çözeris:

$$-3x < -9, \quad x > 3.$$

Görnüşi ýaly, $x < 2$ we $x > 3$ deňsizlikler şol bir wagtda ýerine ýetmeýär, sebäbi x san üçin, $x < 2$ bolsa, onda $x > 3$ deňsizlik nädogrudyr. Beýle ýagdaýda (3) deňsizlikler sistemasynyň çözüwi ýok diýilýär.

Ikinji mysaly çözende deňsizlikleri kanagatlandyrýan $4 \leq x \leq 7$ sanlar köplügini aldyk. San okunda bu köplük uçlary 4 we 7 nokatlarda ýatýan kesimdir. Şonuň üçin, $4 \leq x \leq 7$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügine san kesimi ýa-da diňe kesim diýilýär we [4; 7] bellenýär.

Kesgitleme. Eger $a < b$ bolsa, onda $a \leq x \leq b$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügine kesim diýilýär we $[a; b]$ bellenýär.

Meselem: $-1 \leq x \leq 3$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügi [–1; 3] kesimdir.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ görnüşli deňsizlikleri kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügi üçin hem ýörite at kabul edilendir.

Kesgitleme. Eger $a < b$ bolsa, onda $a < x < b$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügine **interwal** diýilýär we $(a; b)$ bellenýär.

Meselem: $2 < x < 7$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügi $(2; 7)$ interwaldyr.

Kesgitleme. $a \leq x < b$ ýa-da $a < x \leq b$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügine **ýarym interwal** diýilýär we $[a; b)$ ýa-da $(a; b]$ bellenýär.

Meselem: $-1 \leq x < 2$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügi $[-1; 2)$ ýarym interwaldyr. Şeýle-de, $4 < x \leq 7$ deňsizligi kanagatlandyrýan x sanlaryň köplügi bolsa $(4; 7]$ ýarym interwaldyr.

11. Deňlemeler sistemasyny düzmek bilen çözülýän meseleler

1-nji mesele. Derýada iki duralganyň arasy 60 *km*. Gämi bu aralygy akymyň ugruna 2 sagatda, akymyň garşysyna 3 sagatda ýüzüp geçýär. Gäminiň tizligini we derýada suwuň akyş tizligini tapmaly.

Çözülişi. Meseläni çözmek üçin: 1) meseläniň şertine görä, deňlemeler sistemasyny düzmeli; 2) deňlemeler sistemasyny çözmeli. Meseläni çözmek üçin aşakdaky ýaly bellikleri girizeliň:

x – gäminiň ýata suwdaky tizligi (*km/sag*);

y – derýanyň suwunyň akyş tizligi (*km/sag*).

Onda $(x + y)$ – gäminiň akymyň ugruna ýüzüp gidende tizligi (*km/sag*). $(x + y) \cdot 2$ – gäminiň akymyň ugruna 2 sagatda ýüzüp geçen aralygy (*km*).

Meseläniň şertine görä, bu aralyk 60 *km*, diýmek, $(x + y) \cdot 2 = 60$.

$(x - y)$ – gäminiň akymyň garşysyna ýüzüp gidende tizligi (*km/sag*);

$(x - y) \cdot 3$ – gäminiň akymyň garşysyna ýüzüp gidende 3 sagatda geçen aralygy (*km*). Meseläniň şertine görä, bu aralyk hem 60 *km*, onda $(x - y) \cdot 3 = 60$.

Bu iki deňlemeden deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 60, \\ (x - y) \cdot 3 = 60. \end{cases} \qquad (1)$$

Ilki bilen deňlemeleriň ikisini hem ýönekeýleşdireliň.

$$\begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 20. \end{cases} \tag{2}$$

Bu deňlemeler sistemasyny çözüp, $x = 25$ we $y = 5$ bolýandygyny taparys. Diýmek, gäminiň tizligi sagatda 25 *km*, derýanyň akyş tizligi bolsa sagatda 5 *km*.

2-nji mesele. Berlen iki sanyň 2 esse artdyrylan jemi bu sanlaryň tapawudyndan 5 birlik uly, 3 esse artdyrylan jemi bolsa olaryň tapawudyndan 8 birlik uly bolsa bu sanlary tapmaly?

Çözülişi. Ilki bilen meseläniň şertine görä, deňlemeler sistemasyny düzeliň. Goý, x we y gözlenýän sanlar bolsun. Onda:

$$\begin{cases} 2(x + y) = (x - y) + 5, \\ 3(x + y) = (x - y) + 8. \end{cases} \tag{3}$$

Deňlemeler sistemasyny çözeliň.

$$\begin{cases} 2x + 2y = x - y + 5, \\ 3x + 3y = x - y + 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 5, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases} \tag{4}$$

Bu ýerden $x = 2$ we $y = 1$ bolýandygyny taparys. Onda, gözlenýän sanlar 2 we 1 sanlardyr.

IV bap

GATNAŞYK

§1. Gatnaşyklar we olaryň üstünde amallar

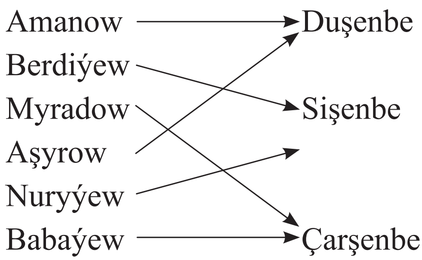
1. Binar gatnaşyk

X we Y köplükleriň arasyndaky binar gatnaşyga seredeliň. Binar sözi latyn dilindäki «bis» sözünden gelip çykyp «iki gezek» ýa-da «iki sany» diýen manyny aňladýar. Meselem, käbir (a, b) üçin, a talyp bilen b talyp bir fakultetde okaýar diýen sözlem, elementleriň başga bir jübüti üçin bolsa a talypdan b talyp uludyr diýen sözlem dogrudyr. Şu sözlemleriň her biri bu talyplaryň arasyndaky käbir gatnaşygy görkezýär. Şu mysallardan görnüşi ýaly gatnaşyklaryň her biri $R(x, y)$ iki orunly predikatyň üsti bilen berilýär. Bu ýerde x element X köplüge, y element Y koplüge gabat gelse, ýagny $X = Y$ bolsa, onda X köplügiň elementleriniň arasyndaky gatnaşyga seredilýär.

X we Y köplükleriň arasyndaky R gatnaşygy gurmak üçin, $X \times Y$ Dekart köpeltmek hasylyň Γ bölek koplügini görkezmek ýeterlikdir. Başgaça aýtsak, R gatnaşyk (X, Y, Γ) köplükleriň üçlügidir. Bu ýerde $\Gamma \subset X \times Y$. Eger a we b elementler X we Y köplükleriň elementleri bolsa we bu koplüklerde $R(x, y)$ predikat berlen bolsa, onda $a\,Rb$ ýazgy bilen $R(a, b)$ ýazgynyň manysy birdir (ýagny şol bir zady aňladýar).

Matematikanyň başlangyç kursunyň ähli düşünjeleri diýen ýaly öwrenilýän temalaryň elementleriniň arasyndaky gatnaşyga seretmeklige syrykdyrylýar. Meselem, natural – san düşünjesini öwrenmekde «uly», «kiçi», «deňdir» diýen gatnaşyklara, kesimleri öwrenmekde «uzyn», «gysga», «deňdir» we ş.m. gatnaşyklara serederis. Binar gatnaşygy aňlatmak üçin, onuň öz adalgalary bardyr. Meselem, X köplüge R gatnaşygyň ugraýan oblasty, Y köplüge bolsa gelýän oblasty,

Γ köplüge onuň grafigi diýilýär. Meselem, R x san y sana bölünýär diýen gatnaşyk berlen bolsun. $X = \{10, 20, 30, 40\}$, $Y = \{2, 3, 4\}$ onda, Γ şu jübütlerden ybaratdyr (10, 2); (20, 2); (20, 4); (30, 2); (30, 3); (40, 2); (40, 4). Tükenikli köplükleri ýörite çyzgylaryň üsti bilen aňladyp bolýar. Beýle çyzgylara ugrukdyrylan graflar diýilýär. Meselem, «x talyp y gün nobatçylyk edýär» diýen gatnaşyga seredeliň. X = {Amanow, Berdiýew, Myradow, Aşyrow, Nuryýew, Babaýew} Y = {Duşenbe, Sişenbe, Penşenbe} bolsun. Onda, xRy gatnaşygyň grafy şeýle bolýar:



2. Gatnaşygyň üstünde amallar

X we Y köplükleriň arasyndaky $R \times R$ gatnaşygyň Γ grafigi ähli $X \times Y$ Dekart köpeltmek hasyly bilen gabat gelse, onda bu gatnaşyga doly gatnaşyk diýilýär. Eger R gatnaşygyň grafigi boş bolsa, onda, oňa boş gatnaşyk diýilýär. Eger X we Y köplükleriň arasynda degişlilikde, xRy we xQy gatnaşyklar berlen bolsa, onda olaryň $R = P \cap Q$ kesişmesi diýip, xRy gatnaşyga aýdylýar. Başgaça aýtsak, xRy gatnaşyk şonda we diňe şonda ýerine ýetýär, eger-de xPy we xQy gatnaşyklar ýerine ýetse. Eger xPy gatnaşyk $P(x, y)$ predikat bilen xQy gatnaşyk, $Q(x, y)$ predikat bilen berlen bolsa, onda xRy gatnaşyk $R(x, y) = P(x, y) \cap Q(x, y)$ predikat bilen berilýär.

Eger xPy gatnaşyk $P(x, y)$ predikat bilen, xQy gatnaşyk $Q(x, y)$ predikat bilen berlen bolsa, onda olaryň birleşmesi bolan xSy gatnaşyk $S(x, y) = P(x, y) \cup Q(x, y)$ predikat bilen berler.

3. Bir köplügiň içindäki gatnaşyk

X we X köplükleriň arasyndaky binar gatnaşyga X koplükdäki binar gatnaşyk diýilýär. Meselem, X-adamlaryň köplügi bolsa, «x adam *y* adamyň dostudyr» ýa-da «*x* adam bilen *y* adam bir jaýda ýaşaýar» diýen gatnaşyklar adamlaryň arasyndaky gatnaşykdyr. X köplükdäki gatnaşyk berlipdir diýilýär, eger-de $X \times X$ Dekart köpeltmek hasylyň bölek köplügi bolan Γ köplük görkezilen bolsa, diýmek, X koplükdäki R binar gatnaşyk (X, Γ) köplükleriň jübütidir. Bu ýerde $\Gamma \subset X \times X$. X köplüge R gatnaşygyň kesgitleniş oblasty, Γ köplüge bolsa, onuň grafigi diýilýär. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ köplükde «$x > y$» gatnaşyga seredeliň. Bu köplügiň grafigi $\Gamma = \{(2, 1); (3, 1), (3, 2); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}$ köplükdir.

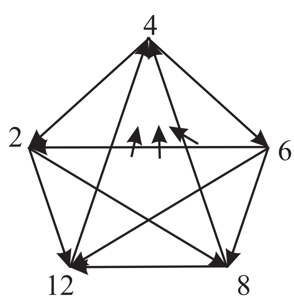
Köplenç, predikatlaryň kömegi bilen ol ýa-da beýleki gatnaşyk berlende gysgaldylan gornüşde berilýär. Meselem, hakyky sanlar köplüginde $x < y$ gatnaşyk berlen bolsa, «kiçidir» diyen gatnaşyk berlipdir diýilýär.

Matematikada binar gatnaşykdan tapawutly gatnasygam berilýär, meselem, üç orunly, dört orunly predikatlaryň kömegi bilen berilýän gatnaşyklar N koplükde «*z* san *x* we *y* sanlaryň jemidir» diýen predikat bilen berlen gatnaşyk üç orunly (ternar) gatnaşykdyr.

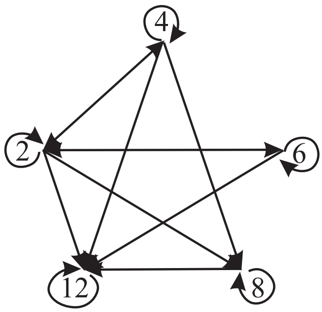
Islendik X köplükde toždestwolaýyn gatnaşyk we gapma-garşylykly gatnaşyk kesgitlenendir. $X \equiv Y$ toždestwolaýyn gatnaşyk $(x\ x)$ $x \in X$ jübütleriň Γ köplügi bilen berilýär. Başgaça aýtsak, $x \equiv y$ şonda we diňe şonda ýerine ýetýär haçanda *x* bilen *y* gabat gelse. Köplenç, $x \equiv y$ toždestwolaýyn gatnaşyk, $x = y$ gatnaşyklaryň deňligi görnüşinde ýazylýar. Toždestwolaýyn gatnaşyga gapma-garşylykly gatnaşygy $x \equiv y$ ýa-da $x \neq y$ diýip belleýäris.

4. Binar gatnaşygynyň grafy

X köplükde berlen R gatnaşygy gowy göz oňüne getirmek üçin bu köplügiň elementlerini nokatlar bilen belläp, soňra *x*-den *y*-e çenli strelkalar geçireliň. Alnan çyzga R gatnaşygyň grafy diýilýär. Köplügiň elementlerini aňladýan nokatlara bolsa grafyň depesi diýilýär. Meselem, $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ koplükde berlen. R «$x > y$» gatnaşygyň grafyny guralyň. Şonuň üçin, *x*-yň elementlerini nokatlar bilen belläp, *x*-dan *y*-e strelka geçireliň (*26-njy surat*):



26-njy surat



27-nji surat

Indi ýene-de şol $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ köplükde Q «x sany sanyň bölüjisidir» diýen gatnaşyga seredeliň. X koplügiň elementlerini nokatlar bilen belläp x-dan y-e strelka geçireliň. Meselem, 2-den 4,6,8,12 sanlara strelka geçireris. Sebäbi 2 san şu sanlaryň ählisini bölýär. Ýöne şol bir wagtyň özünde her bir san öz-özüne bölünýär. Şonuň üçin x-yň her bir nokady üçin şol nokatda başlap, şol nokatda-da gutarýan strelka geçireris. Şol bir nokatda başlap, ýene-de şol nokatda gutarýan strelka halka (petlýa) diýilýär. Diýmek, Q gatnaşygyň hem her bir nokadynda halka bardyr (*27-nji surat*).

5. Köplügi jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplüklere bölmek

Taryh-geografiýa fakultetiniň talyplarynyň X köplügini şol bir kursda okaýan talyplardan düzülen bölek köplük hökmünde bölüp bolýar. Diýmek, biz 5 sany bölek köplük alarys. I kursuň, II kursuň, III kursuň, IV we V kurs talyplaryndan düzülen bölek köplükler. Bu köplükleriň islendik 2 sanysynyň umumy elementi ýokdur. Ýagny şol bir talyp şol bir wagtda hem I, hemem II kursda okap bilmez. Beýle ýagdaýda X köplük jübüt-jübütden kesişmeýän bäş sany X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, bölek köplüklere bölündi diýilýär.

Umuman islendik köplük jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplüklere synplara bölündi diýilýär, eger-de şol bir wagtyň özünde aşakdaky şertleriň üçüsi hem ýerine ýetýän bolsa:

1. Köplügi düzýän bölek köplükleriň ählisi hem boş bolmaly däl;
2. Şeýle bölek köplükleriň islendik 2-si kesişmeýär;
3. Bölek köplükleriň birleşmesi şol berlen köplügi düzýär.

Meselem, natural sanlaryň köplügini üç sany bölek köplüge: ýönekeý sanlaryň köplügi, düzme sanlaryň köplügi, birlik sany özünde saklaýan köplük görnüşinde ýazyp bolýar. Bu köplükleri öz gezeginde 2 klasa: jübüt sanlaryň klasy we täk sanlaryň klasyna bölüp bolýar.

6. Gatnaşygyň esasy häsiýetleri

Goý, X köplükde käbir R gatnaşyk kesgitlenen bolsun.

1. R gatnaşyga refleksiw diýilýär, eger-de islendik $x \in X$ element üçin, xRx gatnaşyk dogry bolsa;

2. R gatnaşyga antirefleksiw diýilýär, eger-de X köplügiň hiç bir x elementi R gatnaşyga görä öz-özüne geçmeýän bolsa;

3. R gatnaşyga simmetrik diýilýär, eger-de X köplügiň x we y elementleri üçin, xRy-den yRx gelip çykýan bolsa;

4. R gatnaşyga asimmetrik diýilýär, eger-de X köplügiň x we y elementleriniň hiç biri üçin şol bir wagtda xRy we yRx ýerine ýetmese;

5. R gatnaşyk antisimmetrikdir, ýagny xRy we yRx gatnaşyklar şonda we diňe şonda şol bir wagtda ýerine ýetýär, haçan-da $x = y$ bolsa;

6. R gatnaşyga tranzitiw diýilýär, eger-de X köplügiň islendik x, y, z elementleri üçin, xRy, yRz gatnaşyklardan xRz gatnaşyk gelip çyksa.

7. Ekwiwalentlik gatnaşygy

Eger-de R gatnaşyk X köplükde refleksiw, simmetrik we tranzitiw bolsa, onda oňa ekwiwalentlik gatnaşygy diýilýär.

Teorema. R gatnaşygyň X köplügi synplara bölmegi üçin R gatnaşygyň ekwiwalent gatnaşyk bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Ekwiwalentlik gatnaşygyna degişli birnäçe mysallara seredeliň:

1. San aňlatmalary köplüginde «x we y aňlatmalar şol bir san bahalara eýedir» diýen gatnaşyk ekwiwalent gatnaşygydyr. Sebäbi ol:

a) refleksiw, ýagny x aňlatmanyň bahasy, ýene-de x aňlatmanyň bahasy bilen gabat gelýär;

b) simmetrik, ýagny eger x-yň bahasy y-iň bahasy bilen gabat gelse, onda y-iň bahasy hem x bilen gabat gelýär.

ç) tranzitiw, ýagny x-yň bahasy y-iň bahasy bilen, y-iň bahasy bolsa z-iň bahasy bilen gabat gelse, onda x-yň bahasy z-iň bahasy bilen gabat gelýär. Onda ähli san aňlatmalarynyň köplügi şu gatnaşyk bilen klaslara bölünýär. Bu klaslaryň her birinde-de bahalary jübüt-jübütden gabat gelýän aňlatmalar bardyr. Meselem, $5 + 3$, 2^3, 2 + 2 + 2 + 2 aňlatmalar şol bir synpa degişlidir. Sebäbi olaryň ählisiniňem bahasy 8-e deň.

2. Tekizlikde gönüleriň koplügiňde parallellik gatnaşygy ekwiwalent gatnaşykdyr. Şol bir tekizlikde ýatýan x we y gönüler paralleldirler, eger olar kesişmeýän bolsa ýa-da gabat gelmeýän bolsa. Şonuň üçinem parallellik gatnaşygy:

a) refleksiwdir: ýagny islendik x üçin x II x;

b) simmetrikdir: eger x II y bolsa, onda y II x;

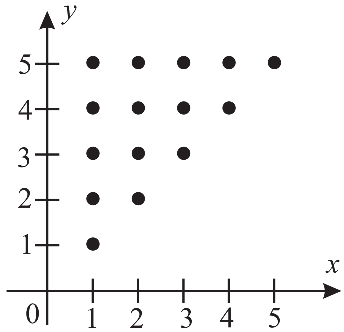
ç) tranzitiwdir: eger x II y, y II z bolsa, onda x II z.

§2. Tertip gatnaşygy

1. Berk tertip gatnaşygy

Tertip sözi matematikada köp ulanylýan düşünjeleriň biridir. Meselem, (17 – 12) · 6 + 18 : 9 mysalda amallaryň ýerine ýetiriliş tertibi diýlende biz ilki (17 – 12) aýyrmak amalyndan soň, 6-a köpeltmegi ýerine ýetirýäris. Goşmak amalyny bolsa 18 : 9 bölmekden soň ýerine ýetirýäris. Diýmek, käbir köplügiň elementleriniň arasyndaky göz öňüne getirme (abstrakt) tertip düşünjesi «x element y elementiň yzyndan gelýär» diýen düşünje bilen baglanyşyklydyr. Şeýle-de, bu gatnaşyk tranzitiwdir, ýagny eger x element y-iň yzyndan gelýän bolsa y element z-iň yzyndan gelýän bolsa, onda x hem z-iň yzyndan gelmelidir. Ondan başga-da, «yzyndan gelýär» diýen gatnaşyk asimmetrikdir. Ýagny x element y-iň yzyndan gelýär diýen gatnaşykdan y element x-yň yzyndan gelýär diýen düşünje gelip çykmaýar. Asimmetriklik we tranzitiwlik häsiýetleri başga-da, köp gatnaşyklara mahsusdyr. Meselem, natural sanlar köplüginde «uludyr» diýen gatnaşyk, adamlaryň köplüginde «uzyndyr» (boýlary deňeşdirilende) diýen gatnaşyk we ş.m. «Yzyndan gelýär», «uludyr», «uzyndyr» diýen gatnaşyklara berk tertip gatnaşygy diýilýär. Umuman aýdanyňda X köplükdäki R gatnaşyga berk tertip gatnaşygy diýilýär, eger-de ol tranzitiw we asimmetrik bolsa. Berk tertip gatnaşygynyň grafyna seredeliň. Şonuň üçin $X = \{3, 1, 5, 2, 4\}$ koplükde «$x < y$» diýen gatnaşyga seredeliň. Onda, graf boýunça berlen köplügiň elementlerini $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

köplük görnüşinde ýazmaga mümkinçilik berýär. Sebäbi 1 kiçi element soňra 2 gelýär we ş.m. beýle ýagdaýda $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ köplük $x < y$ diýen gatnaşyk bilen tertipleşdirildi diýilýär. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ köplükde $G = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ gatnaşygyň grafigi şu aşakdaky gornüşde bolýar (*28-nji surat*).



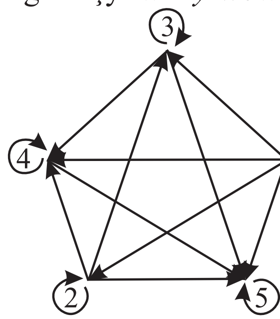
28-nji surat

2. Berk däl tertip gatnaşygy

Matematikada $x < y$ we $x > y$ gatnaşyklar bilen bir hatarda $x \leq y$ we $x \geq y$ gatnaşyklara-da seredilýär. $x \leq y$ gatnaşyga berk däl tertip gatnaşygy diýilýär.

Umuman X koplükde R gatnaşyga berk däl tertip gatnaşygy diýilýär, eger ol refleksiw, antisimmetrik we tranzitiw bolsa. Beýle gatnaşyklar berk tertip gatnaşygy bilen toždestwolaýyn deň diýen gatnaşygyň birleşmesidir. Meselem, $x \leq y$ diýen gatnaşyk $x < y$ we $x = y$ diýen gatnaşyklaryň birleşmesidir. Berk däl tertip gatnaşygyna «uly däl», «uzyn däl» we ş.m. gatnaşyklar mysal bolup biler.

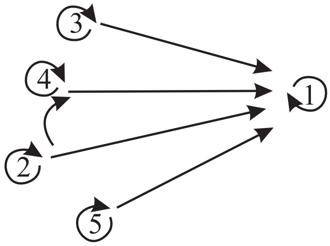
Eger $X = \{3, 1, 5, 2, 4\}$ köplükde «$x \leq y$» diýen gatnaşyga seretsek, onda, berk tertip gatnaşygy bolan «$x < y$» diýen gatnaşygyň grafyndan tapawutlylykda $x \leq y$ gatnaşygyň grafynda her depede (nokatda) halka (petlýa) emele gelýär. Bu gatnaşygyň grafigini gurmak üçin $x < y$ gatnaşygyň grafigine (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5) nokatlary goşmak ýeterlikdir (*29-njy surat*).



29-njy surat

3. Tertipleşdirilen köplükler

R gatnaşygyň berlen *X* köplügine tertipleşdirilen köplük diýilýär. Beýle ýagdaýda, köplenç, *X* köplük *R* gatnaşyk bilen tertipleşdirildi diýilýär. $X=\{3, 1, 5, 2, 4\}$ koplükde «x san y sana kratnydyr» diýen gatnaşyga seredeliň. Bu gatnaşyk tranzitiwdir, ýagny x san y sana kratny bolsa, y san z sana kratny bolsa, onda x san z sana kratnydyr. Bu berlen gatnaşyk antisimmetrikdir, sebäbi x san y sana we y san x sana şonda we diňe şonda kratny bolup bilýär, haçanda $x=y$ bolsa. Bu gatnaşykda refleksiwlik häsiýet hem ýerine ýetýär. Ýagny X köplügiň islendik elementi öz-özüne kratnydyr. Diýmek, berlen koplükde «kratny bolmaly» diýen gatnaşyk berk däl tertip gatnaşygydyr. Onuň grafy şeýle bolýar (*30-njy surat*).



30-njy surat

Bu grafy $x \le y$ gatnaşygyň grafy bilen deňeşdireliň. Bu gatnaşyklaryň ikisi hem berk däl tertip gatnaşygy bolsa-da olaryň graflary tapawutlydyr. «$x \le y$» gatnaşygyň grafynda islendik 2 depäni birleşdirýän strelkalar geçirilen bolsa, «kratny bolmaly» diýen gatnaşykda arasynda strelka geçirilmedik depeler hem bar. Meselem, 2 we 3, 3 we 5, 4 we 5 ş.m. Beýle ýagdaýda $x \le y$ gatnaşyk X köplügi çyzykly tertipleşdirýär diýilýär (*30-njy sur. ser.*).

Umuman X köplükde R tertip gatnaşyga $x \in X$ we $y \in X$ elementler üçin xRy ýa-da yRx bolsa, onda R gatnaşyga çyzykly tertip gatnaşygy, X köplüge bolsa çyzykly tertipleşdirilen köplük diýilýär.

§3. San funksiýalary we olaryň grafigi

1. Funksiýa barada duşünje

Funksiýa düşünjesi matematikanyň esasy düşünjeleriniň biridir. Ol üýtgeýän ululyklar düşünjesi bilen berk baglanyşyklydyr. Onda iki ululygyň arasyndaky baglanyşygy (funksional baglanyşygy) matematikanyň düşünjeleriniň kömegi bilen kesgitläliň.

Kesgitleme. Eger bahalary $[a, b]$ kesimde kesgitlenen x ululygyň [a,b] kesimdäki her bir bahasyna y ululygyň bellibir bahasy degişli edilýän bolsa, onda y we x ululyklaryň arasynda funksional baglanyşyk bar diýilýär we ol baglanyşyk $y=f(x)$ görnüşinde ýazylýar. x ululyga baglanyşyksyz üýtgeýän ýa-da argument, y ululyga baglanyşykly üýtgeýän ýa-da funksiýa diýilýär. $[a, b]$ kesime funksiýanyň kesgitleniş aralygy (oblasty) diýilýär.

$y = f(x)$ formuladaky f harpyň ýerine islendik harp ýazyp bolýar. Onda funksional baglanyşygy $y = y(x)$, $y = a(x)$, $y = z(x)$ we ş.m. görnüşlerde ýazmak bolar. x üýtgeýän ululygyň her bir bahasyna koordinatalar okunda bellibir nokat degişlidir. $y = f(x)$ funksiýada x-yň her bir bahasyna degişli edilýän y-iň bahasyny tapmak üçin, onuň düzgüni (kanuny) görkezilmelidir. Bu düzgüniň berlişiniň, ýagny funksiýanyň berlişiniň üç görnüşine serederis:

a) funksiýanyň analitik ýa-da formulanyň kömegi bilen berlişi.

Eger y we x ululyklaryň arasyndaky baglanyşyk, mysal üçin, $y = 2x$, $y = –5x$ görnüşlerde berlen bolsa, onda funksiýa analitik ýa-da formulanyň kömegi bilen berildi diýilýär.

b) funksiýanyň tablisa arkaly berlişi.

26-njy tablisa

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Tablisanyň birinji setirinde x-yň saýlanyp alnan bahalary, ikinji setirde x üýtgeýän ululyga görä y-iň alýan bahalary ýazylýar.

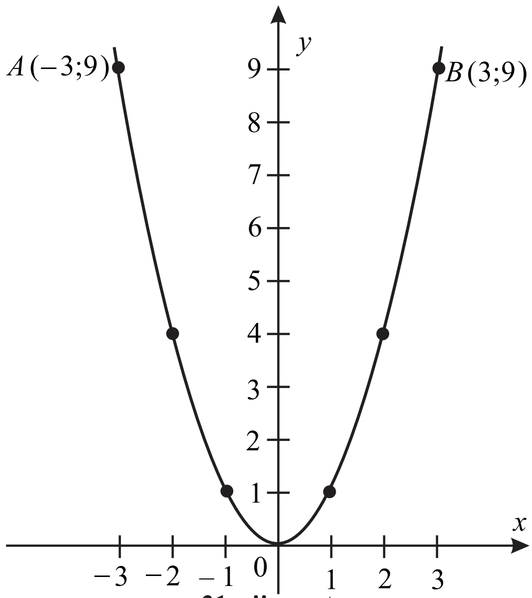
ç) funksiýanyň grafik arkaly berlişi.

Funkisiýa grafik arkaly berlende diňe bir funksional gatnaşygy açyk-aýdyň görkezmän, eýsem, onuň häsiýetlerini öwrenmegi hem ýeňilleşdirilýär. Onda X köplükde berlen f funksiýanyň grafigi diýip, tekizligiň koordinatalary x we $f(x)$ bolan nokatlarynyň köplügine aýdylýar.

Mysal üçin, $y = x^2$ funksiýanyň grafigini gurmaly. $y = x^2$ funksiýa formula bilen berildi. Bu funksiýany tablisanyň kömegi bilen ýazalyň (*27-nji tablisa*).

27-nji tablisa

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



31-nji surat

Indi $y = x^2$ funksiýanyň tablisasyndan peýdalanyp, onuň grafigini guralyň. Funksiýanyň grafigini $-3 \leq x \leq 3$ kesimde gurarys. [–3; 0] kesimde funksiýa kemelýär, [0; 3] kesimde bolsa funksiýa artýar (*31-nji surat*).

2. Göni proporsionallyk, çyzykly baglanyşyk we olaryň grafigi

Matematikada, köplenç, biriniň bahasy beýleki ikisiniň köpeltmek hasylyna deň bolan üç ululyga seredilýär. Meselem, gönüburçlugyň meýdany onuň taraplarynyň köpeltmek hasylyna deňdir. Ony matematiki dilde $y = z(x)$ diýip ýazalyň. Eger-de x ýa-da z ululyklaryň biri hemişelik baha eýe bolsa, meselem, goý $z = k$ bolsa, onda funksiýa $y = kx$ bolar. Beýle ýagdaýda y ululyk x ululyga göni proporsional diýilýär hem-de x-yň we y-iň degişli bahalarynda $\frac{y}{x}$ paý şol bir k baha eýedir. Oňa proporsionallyk koeffisiýenti diýilýär. $y = kx$ funksiýanyň grafigi koordinata başlangyjyndan geçýän göni çyzykdyr. Ululyklaryň arasyndaky çyzykly baglanyşyk düşünjesi göni proporsionallyk düşünjesinden has giň düşünjedir. Meselem, otly A we B nokatlaryň arasyndaky duralgadan çykdy. Ol 2 sagatdan soň A nokatdan 270 *km* uzaklykda, 5 sagatdan soň bolsa, A nokatdan 510 *km* uzaklykda bolsa, onda otlynyň tizligini $\vartheta = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ formula boýunça kesgitleýäris. $\vartheta = \dfrac{510 - 270}{5 - 2} = 80$ *km/sag*. Beýle funksiýa çyzykly funksiýa diýilýär.

3. Ters proporsionallyk we onuň grafigi

Biz öň $y = zx$ funksiýada z kesgitli bolanda y-iň x-a göni proporsional bolýandygyny gördük. Indi $y = k$, ýagny y kesgitli diýip x we z ululyklara seredeliň. Onda $k = zx$, ýagny $z = \dfrac{k}{x}$. Beýle ýagdaýda z we x ters proporsional diýilýär.

Meselem, geçilen ýol hemişelik (kesgitli) bolsa, onda tizlik bilen wagt $\vartheta t = k$ deňlik bilen kesgitlenýär we şonuň üçin hem ters proporsionaldyr. $y = \dfrac{k}{x}$ funksiýanyň grafiginde x-yň artmagy bilen y kemelýär we tersine, x-yň kemelmegi bilen y artýar.

4. Çylşyrymly funksiýa

Kubuň massasyny $m = qV$ formula bilen hasaplaýarlar. V kubuň göwrümi, q – kubuň ýasalan materialynyň dykyzlygy. Kubuň göwrümini $V = x^3$ formula boýunça hasaplaýas. Onda, kubuň massasyny $m = qx^3$ formula bilen hasaplap bolar. x we m ululyklar biri-biri bilen baglanyşykly, sebäbi V-niň bahasyny x boýunça tapýarys, m-i bolsa V-niň bahasy bilen kesgitleýäris. Diýmek, X-yň bir bahasyna m-iň käbir bahasy degişlidir, ýagny m ululyk x-a göra funksiýadyr. Beýle funksiýa berlen funksiýalaryň kompozisiýasy diýilýär. Şonda V ululyga aralyk argument diýilýär.

1-nji mysal. Goý, $y = x^2 + 1$ we $x = 3t + 4$ funksiýalar berlen bolsun. Bu funksiýalaryň kompozisiýasyny gurmak üçin, $y = x^2 + 1$ funk-

7. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

siýada; x-yň bahasyny $x = 3t - 4$ funksiýanyň bahasy bilen çalyşmaly. Ýagny $y = (3t - 4)^2 + 1$ kompozisiýa alnar.

2-nji mysal. Goý, $y = \sqrt{x}$ we $x = -t^2 - 1$ funksiýalar berlen bolsun. Bu funksiýalar üçin olaryň kompozisiýasy kesgitsizdir, sebäbi $x = -t^2 - 1$ funksiýanyň ähli bahalary otrisateldir. $y = \sqrt{x}$ funksiýa bolsa, diňe x-iň položitel bahalary üçin kesgitlenendir.

5. Ters funksiýa

Eger ýolagçy 100 *km* ýol geçmeli bolsa we ol sagatda 5 *km* tizlik bilen ýöreýän bolsa, onda onuň ugrandan soň ýene-de t sagatdan geçmeli ýoly $S = 100 - 5t$, $0 \leq t \leq 20$ (1) formula bilen kesgitlener. (1) formula ýolagçynyň islendik sagatda näçe S ýol geçendigini görkezýär. Onda bu berlen meselä ters meseläni, ýagny ýene-de S *km* geçmeli bolsa, onda ýolagçy ugranyndan bäri näçe t sagat ýoräpdir diýen meseläni (1) formuladan t-niň bahasyny tapmak arkaly çözüp bolýar. $t = \dfrac{100 - S}{5}$ $0 \leq S \leq 100$. Onda (2) funksiýa berlen (1) funksiýa ters bolan funksiýa diýilýär. Indi ters funksiýa kesgitleme bereliň.

Goý, $y = f(x)$ funksiýa X san köplüginiň R hakyky sanlar köplügindäki inýektiw şöhlelenmesini berýän bolsun, ýagny x-yň dürli bahasyna y-iň dürli bahasy degişli bolsun. $y = f(x)$ $x \in X$ funksiýanyň bahalarynyň köplügi y bolsun, onda $y_0 \in Y$ üçin, $y_0 = f(x)$ bolar ýaly ýeke-täk $x_0 \in X$ san bardyr. Bu bolsa Y köplügiň X köplüge şöhlelenmesini görkezýär. Ýagny $x = \varphi(y)$, $y \in Y$. Beýle funksiýa $y = f(x)$ $x \in X$ funksiýa ters funksiýa diýilýär. Ters funksiýanyň aňlatmasyny tapmak üçin, $y = f(x)$ funksiýany x-a görä çözmeli.

Eger-de $y = f(x)$ şöhlelenme inýektiw bolmasa, onda ters funksiýa ýokdur, sebäbi şol bir $y_0 \in Y$ elemente dürli x bahanyň degişli bolmagy mümkin. Meselem, $y = x^2$, $x \in R$ funksiýa ters bolan funksiýa ýokdur. Sebäbi $X = 4$ we $X = -4$ bahalara şol bir $4^2 = (-4)^2 = 16$ san degişli. Ýöne $y = x^2$ funksiýany R koplükde alsak, onda oňa ters bolan funksiýa bardyr. Sebäbi x-yň dürli bahasyna y-iň dürli bahasy degişli bolýar. Bu ters funksiýany $x = \sqrt{y}$ diýip belleýäris.

V bap

GEOMETRIKI ÖZGERTMELER

§1. Özgertmeler barada düşünje

1. Köplükleri özgertmek

Eger berlen figuranyň her bir nokadyny haýsy-da bolsa bir usul bilen süýşürsek, onda biz täze figura alarys. Bu figura berlen figurany özgertmek arkaly alyndy diýilýär. Onda özgertme näme? X köplügiň öz-özüne özara birbelgili şekillendirmesine bu köplügiň özgertmesi diýilýär. Tükenikli köplügiň islendik φ özgertmesini iki setirli tablisada ýazyp bolýar. Tablisanyň birinji setirinde X köplügiň elementleri, ikinji setirde bolsa bu köplügiň berlen özgertmedäki obrazlary ýazylýar, φ özgertme X köplügi öz-özüne özara birbelgili şekillendirýändigi üçin, tablisanyň ikinji setirinde-de X köplügiň başga tertipde ýazylan elementleri alnar. Eger X köplük özünde n sany elementi saklaýan bolsa, onda onuň özgertmeleriniň sany $P_n = n!$ formula bilen tapylýar.

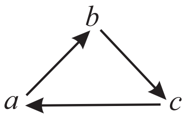
Meselem, $X = \{a, b, c\}$ üç elementli köplük berlen bolsun, onda onuň özgertmeleriniň sany $3! = 6$ bolar. Ony tablisada ýazarys.

$$\begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} abc \\ bac \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} abc \\ cba \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} abc \\ acb \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix}.$$

φ özgertme X köplügi öz-özüne özara birbelgili özgerdýändigi sebäpli, X köplükden alnan islendik iki sany A we B köplükler üçin aşakdaky kanunlar ýerine ýetýändir:

$$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B);$$
$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B).$$

Tükenikli köplükleriň özgertmesini graflaryň kömegi bilen şekillendirmek mümkin. Onuň üçin köplügiň elementlerini nokatlar



32-nji surat

bilen belläp, her bir elementden onuň obrazyna peýkam (strelka) geçirilýär (*32-nji surat*). Meselem, $\begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}$ tablisa bilen berlen özgertme görnüşde şekillendirilýär.

Eger haýsy-da bolsa bir element özgertmede hereketsiz bolsa, onda peýkam (strelka) şol bir nokatda başlanyp, şol nokatda-da gutarýar. Beýle ýagdaýda halka (petlýa) emele geldi diýilýär.

Meselem, *a* element hereketsiz galýar.

Eger özgertmede iki nokat ýerini çalyşýan bolsa, onda ikitaraplaýyn peýkam bilen şekillendirilýär .

Meselem, *b* element bilen *c* element ýerini çalyşýar.

Özgertmede *X* köplügiň ähli elementleriniň hereketsiz galýan ýagdaýy hem bolýar. Onda beýle özgertmä toždestwolaýyn ýa-da birlik özgertme diýilýär we ol *E* bilen bellenilýär.

2. Geometriki özgertme

Tekizligiň nokatlarynyň *P* köplüginiň öz-özüne özara birbelgili *f* şekillendirmesine geometriki özgertme diýilýär. Tekizligiň nokatlarynyň *P* köplüginiň tükeniksizligi sebäpli, geometriki özgertmäni tablisanyň kömegi bilen berip bolmaýar. Köplenç, olar formulalaryň üsti bilen berilýär.

$$\begin{cases} x' = \varphi(x,y) \\ y' = \psi(x,y). \end{cases} \qquad (1)$$

Bu ýerde *x* we *y* tekizligiň käbir *M* nokadynyň koordinatalary, *x′* we *y′* bolsa *f* geometriki özgertmede alnan *f*(*M*) nokadyň koordinatalarydyr. Meselem,

$$\begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = 2x + 3y + 4. \end{cases} \qquad (2)$$

tekizligiň geometriki özgertmesi bolsun. Onda, *A* (–2; 4) nokadyň obrazyny tapmak üçin, (2) özgertmede *x* we *y*-iň ýerine –2 we 4 san bahalary goýup alarys.

$$\begin{cases} x' = -2 + 4 - 3 = -1 \\ y' = 2(-2) + 3 \cdot 4 + 4 = 12. \end{cases}$$

Diýmek, $A(-2; 4)$ nokat (2) özgertmede $B(-1; 12)$ nokada geçýär.

§2. Hereket

1. Tekizligiň özgermesi we onuň görnüşleri

Tekizlikde nokatlarynyň arasyndaky uzaklygy üýtgetmän saklaýan geometriki özgertmä seredeliň.

Eger tekizligiň her bir figurasyny başga bir figura özgertmeklik nokatlaryň arasyndaky uzaklygy üýtgetmän saklaýan bolsa, ýagny tekizligiň islendik iki A we B nokatlary üçin, $|A'B'| = |AB|$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda beýle özgertmä hereket diýilýär.

Bu ýerden görnüşi ýaly hereket düşünjesi orun üýtgetme düşünjesi bilen baglanyşyklydyr. Ýöne orun üýtgetmede üznüksiz prosesi göz öňüne getirýän bolsak, hereketde figuranyň başlangyç we ahyrky ýagdaýlary barada gürrüň edilýär.

Geometriki figuralaryň köpüsi we olaryň häsiýetleri, köplenç, tekizlikde nokatlaryň arasyndaky uzaklyk düşünjesi bilen kesgitlenilýär. Meselem, töwerek – bu merkez diýip atlandyrylýan O nokatdan deň daşlykda ýatýan nokatlaryň köplügidir. Onda, tekizligiň orun üýtgetmesi-hereket özgertmesi nokatlaryň arasyndaky uzaklygy üýtgetmän saklaýandygy üçin, töweregi ýene-de şol bir radiusly töwerege geçirýär. Berlen özgertmede O merkezli, R radiusly töweregiň obrazyny tapmak üçin töweregiň merkeziniň O_1 obrazyny tapyp, O_1 merkezli R radiusly töweregi gurmak ýeterlikdir.

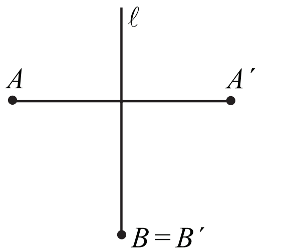
Tekizlikde F figurany F' figura geçirýän özgertme bar bolsa, ýagny $\varphi(F) = F'$ bolsa, onda F' figura bilen F figura kongruentdir diýilýär. Fuguralaryň kongruentlik gatnaşygy refleksiwlik, simmetriklik we tranzitiwlik häsiýetlerine eýedir. Diýmek, ol ekwiwalentlik gatnaşygydyr. Biz geljekde geometriki özgertmeler hakynda gürrüň edende geometriýanyň mekdep kursundan belli bolan üçburçluklaryň kongruentlik häsiýetiniň ýeterlik şertini görkezýän üç tassyklamadan peýdalanarys.

1. Eger $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|AC| = |A'C'|$ bolsa, onda ABC we üçburçluklar kongruentdir.

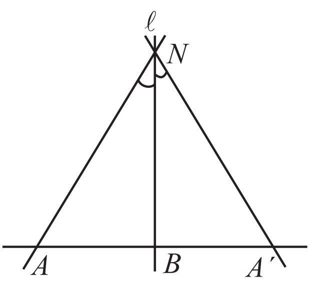
2. Eger $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ we $\angle ABC = \angle A'B'C'$ bolsa, onda ABC we $A'B'C'$ üçburçluklar kongruentdir.

3. Eger $|AB| = |A'B'|$, bolsa $\angle ABC = \angle A'B'C'$ we $\angle BAC = \angle B'A'C'$ bolsa, onda ABC we $A'B'C'$ üçburçluklar kongruentdir.

2. Göni çyzyga görä simmetriýa



33-nji surat

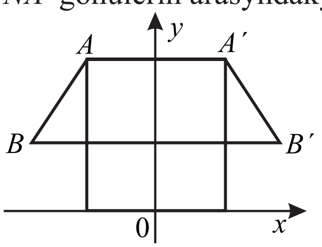


34-nji surat

Tekizligiň A' nokady ℓ gönä görä, A nokada simmetrik diýilýär, eger AA' kesim ℓ gönä perpendikulýar bolsa we bu kesimiň orta nokady ℓ gönüde ýatýan bolsa, onda A' nokat ℓ gönä görä A nokada simmetrikdir, ýöne ℓ gönüde ýatýan B nokat öz-özüne simmetrikdir. ℓ gönä simmetriýa gönüsi ýa-da simmetriýa oky diýilýär (*33-nji surat*).

Simmetriýanyň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. Göni çyzyga görä simmetriýa özgertmesinde A nokat A' nokada geçýän bolsa we N nokat simmetriýa gönüsinde ýatýan bolsa, onda N nokat A we A' nokatlardan deňdaşlykda ýatýandyr. Şonda ℓ we NA gönüleriň arasyndaky burç bilen ℓ we NA' gönüleriň arasyndaky burçlar kongruentdir (*34-nji surat*).

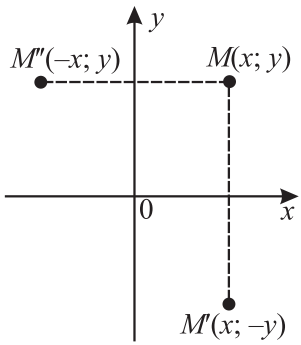


35-nji surat

2. Gönä görä simmetriýa ösgertmesi hereketdir.

Hakykatdan-da goý, F figuranyň erkin $A(x; y)$ nokady $A'(x'; y')$ nokada geçýän bolsun. Göni çyzyga görä simmetriýanyň kesgitlemesinden A we A' nokatlaryň ordinatalarynyň deňdigi absissalarynyň bolsa, diňe alamatlary bilen tapawutlanýandygy, ýagny $x' = -x$ bolýandygy gelip çykýar (*35-nji surat*).

Tekizlikde saýlanyp alnan koordinatalar sistemasynda $M(x;\ y)$ nokada absissa okuna görä simmetrik bolan M' nokadyň koordinatalary x we $-y$ bolar, ordinata okuna görä simmetrik bolan M' nokadyň koordinatalary $-x$ we y bolar (*36-njy surat*).



36-njy surat

Diýmek, absissa okuna görä simmetriýa

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

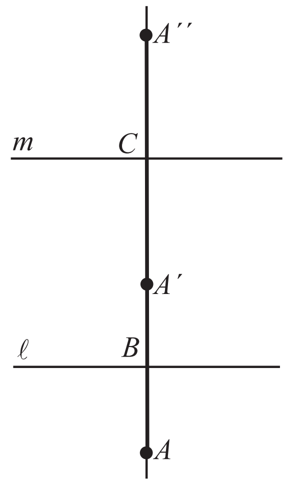
we ordinata okuna görä simmetriýa

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

formula bilen berilýär.

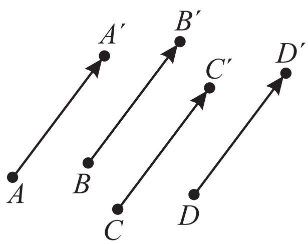
3. Parallel göçürme

Tekizlikde ℓ we m iki sany parallel göni çyzyklary alarys. Ilki bilen ℓ göni çyzyga görä, soňra m göni çyzyga görä simmetriýa özgertmelerini ýerine ýetireris. ℓ göni çyzyga görä simmetriýada A nokat A' nokada, m göni çyzyga görä simmetriýada A' nokat A'' nokada geçýär. Şonda AA' we $A'A''$ kesimler ℓ we m göni çyzyklara perpendikulýardyr, onda AA'' kesim hem ℓ we m göni çyzyklara perpendikulýardyr. Bu ýerde $|AB| = |BA'|$ we $|A'C| = |CA''|$ bolýandygy üçin $A'A''$ kesimiň uzynlygy ℓ we m göni çyzyklaryň arasyndaky d uzaklykdan 2 esse uludyr, ýagny $|AA''| = 2d$ (*37-nji surat*).



37-nji surat

Tekizligiň ähli nokatlaryny şol bir ugra we şol bir aralyga geçirýän geometriki özgertmä parallel göçürme ýa-da wektor diýilýär (*38-nji surat*).



38-nji surat

Bu özgertmäni $\vec{a}$ belläliň. A nokat bilen onuň A' obrazynyň arasyndaky uzaklyga wektoryň uzynlygy, AA' kesimiň ugruna bolsa wektoryň ugry diýilýär. $\vec{a}$ wektoryň uzynlygyny $|\vec{a}|$ belläris.

Şeýlelikde, biz ℓ we m parallel gönülere görä simmetriýanyň kompozisiýasynyň parallel göçürmedigine göz ýetirdik. Şonuň ýaly-da, islendik $\vec{a}$ parallel göçürmäni iki sany parallel gönülere görä, simmetriýanyň kompozisiýasy görnüşinde ýazyp bolýar.

Parallel göçürme

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \qquad (1)$$

formula bilen berilýär.

Mysal. Parallel göçürmede $A(3; -4)$ nokat $A'(7; 2)$ nokada geçdi. Onda, $B(5; -8)$ nokat haýsy nokada geçer?

Çözülişi. Ilki bilen $O(0; 0)$ koordinata başlangyjynyň haýsy nokada geçendigini taparys. Şonuň üçin (1) formulada x-yň we y-iň ýerine A nokadyň koordinatalaryny x'-yň we y'-iň ýerine bolsa A nokadyň obrazynyň koordinatalaryny ýazarys we

$$\begin{cases} 7 = 3 + a, \\ 2 = -4 + b; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4, \\ b = 6 \end{cases}$$

alarys.

Diýmek, $B(5; -8)$ nokat $B'(9; -2)$ nokada geçipdir. Onda berlen parallel göçürmede (1) formula

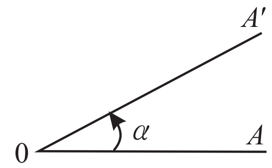
$$\begin{cases} x' = x - 4, \\ y' = y + 6 \end{cases} \qquad (2)$$

bolar. (2) formulada x-yň we y-iň bahalaryny goýup alarys:

$$\begin{cases} x' = 5 + 4, \\ y' = -8 + 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 9, \\ y' = -2. \end{cases}$$

4. Nokada görä simmetriýa we öwrülme

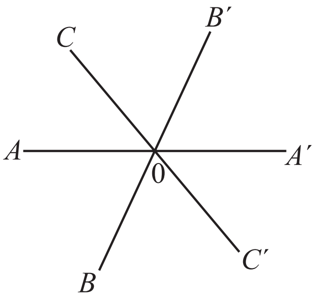
Berlen nokatdan çykýan her bir şöhle şol bir burça we şol bir ugra öwrülende bolýan herekete, **tekizligiň berlen O nokadyň töwereginde öwrülmesi** diýilýär. Eger A nokat O nokadyň töwereginde öwrülende A' nokada geçýän bolsa, onda A nokat nähili bolsa-da OA



39-njy surat

we OA' şöhleleriň şol bir α burçy emele getirýändigini görkezýär (*39-njy surat*). α burça öwrülme burçy diýilýär.

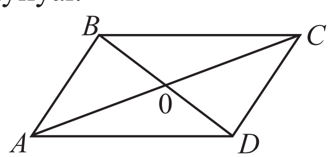
O nokatda başlanýan her bir şöhle *O* nokadyň töwereginde 180º öwrülende ýene-de şol gönüde ýatýan gapma-garşylykly şöhlä geçýär. Şonda *O* nokatdan tapawutly (*O* nokat bilen gabat gelmeýän) *A*, *B*, *C* nokatlar degişlilikde, A', B', C' nokatlara geçýär. *O* nokat AA', BB', CC' kesimleriň orta nokadydyr, ýagny $AO = OA'$; $BO = OB'$; $CO = OC'$. Onda A' nokada *O* nokada görä *A* nokada simmetrik nokat diýilýär. *O* nokat öz-özüne simmetrik nokatdyr. Onda *F* figuranyň her bir *A* nokadyny *O* nokada görä A' nokada geçirýän özgertmä ***O* nokada görä simmetriýa özgertmesi** diýilýär (*40-njy surat*).



40-njy surat

Eger *O* nokada görä simmetriýa özgertmesi *F* figurany ýene-de özüne geçirýän bolsa, onda oňa merkezleýin simmetrik figura diýilýär. *O* nokada bolsa, simmetriýa merkezi diýilýär.

Meselem, parallelogram merkezleýin-simmetrik figuradyr. Onuň simmetriýa merkezi diagonallaryň kesişme nokadydyr (*41-nji surat*).

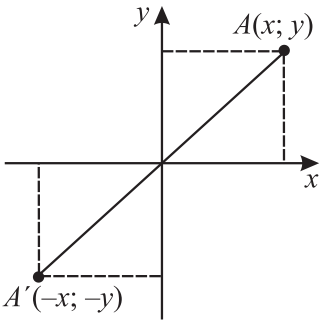


41-nji surat

Merkezleýin simmetriýanyň käbir häsiýetlerine seredeliň:

1. Eger A' nokat *O* nokada görä *A* nokada simmetrik bolsa, onda *A* nokat hem *O* nokada görä, A' nokada simmetrikdir. Bu bolsa, *O* nokadyň AA' kesimiň orta nokady bolýandygyny görkezýär. Bu ýerden *O* nokadyň töwereginde merkezleýin simmetriýany iki gezek geçirsek, tekizligiň ähli nokatlarynyň ilkibaşdaky ornuna gaýdyp gelýändigini görmek bolýar.

2. *O* nokada görä merkezleýin simmetriýada *O* nokadyň üstünden geçýän gönüler özüne geçýär. *O* nokadyň üstünden geçmeýän gönüler bolsa, parallel gönülere geçýär.



42-nji surat

3. Eger A nokadyň koordinatalary x we y bolsa, onda koordinatalar başlangyjyna görä, A nokada simmetrik bolan nokadyň koordinatalary $-x$; $-y$ bolar (*42-nji surat*). Diýmek, koordinatalar başlangyjyna görä, merkezleýin simmetriýa

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases}$$

formula bilen berilýär.

5. Gomotetiýa

Tekizlikde erkin O nokady saýlap alalyň we položitel k sany görkezeliň. O nokat hereketsiz bolanda, tekizligiň O nokat bilen gabat gelmeýän her bir M nokadyny M' nokada geçirýän özgertmä O merkezli, k koeffisiýentli gomotetiýa diýilýär. Şonda M nokat OM' şöhlede ýatýar we $|OM'| = k|OM|$ deňlik ýerine ýetýändir (*43-nji surat*).

43-nji surat

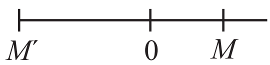
Eger $k < 1$ bolsa O nokat bilen tekizligiň ähli nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk kiçelýär, eger $k > 1$ bolsa, bu aralyk uzalýar (artýar). Şonuň üçin käwagtlarda O merkezli $k < 1$ koeffisiýentli gomotetiýa O nokada gysylma, $k > 1$ koeffisiýentli gomotetiýa bolsa, O nokatdan tekizligiň giňelmesi (rastýaženiýe) diýilýär. Eger $k = 1$ bolsa, onda tekizligiň ähli nokatlary öz ornunda hereketsiz galýar.

Şol bir O merkezli hem-de degişlilikde, k_1 we k_2 koeffisiýentli gomotetiýa özgertmesini yzygiderli geçireliň, ýagny özgertmeleriň kompozisiýasyny guralyň. Onda, k_1 koeffisiýentli özgertmede tekizligiň M nokady OM şöhlede ýatýan we $|OM'| = k_1|OM|$ deňligi kanagatlandyrýan M' nokada geçýär, ikinji özgertmede M' nokat ýene-de şol şöhlede ýatýan we $|OM''| = k_2|OM'|$ deňligi kanagatlandyrýan M'' nokada geçýär. Onda $|OM''| = k_1 \cdot k_2|OM'|$. Bu bolsa yzygiderli geçirilen iki özgertmäniň, ýagny özgertmeleriň kompozisiýasynyň şol bir O merkezli, k_1k_2 koeffisiýentli gomotetiýadygyny aňladýar. Diýmek, umumy merkezli gomotetiýalaryň kompozisiýasynda olaryň koeffisiýentleri köpeldilýändir.

Indi otrisatel koeffisiýentli gomotetiýa seredeliň. O merkezli, koefisiýentli gomotetiýada O nokat hereketsiz bolup, O nokat bilen gabat gelmeýän her bir M nokat nokada geçýär. Şonda:

1. M, O, M' nokatlar şol bir gönüde ýatýar we O nokat M we M' nokatlaryň arasynda ýerleşendir.

2. $|OM'| = k|OM|$ deňlik ýerine ýetýär, (*44-nji surat*). O merkezli koeffisiýentli gomotetiýada her bir M nokat O nokada görä simmetrik bolan nokada geçýär. Başgaça aýtsak, O merkezli $k = -1$ koeffisiýentli gomotetiýa O merkezli merkezleýin simmetriýadyr.



44-nji surat

6. Meňzeşlik özgertmesi

Eger gomotetiýanyň koeffisiýenti 1-den ýa-da –1-den tapawutly bolsa, onda tekizligiň nokatlary bilen gomotetiýa merkeziniň arasyndaky uzaklyk $|k|$ gezek üýtgeýär. Ýagny eger $k \neq 1$ ýa-da $k \neq -1$ bolsa, onda bu gomotetiýada figuranyň görnüşi (formasy) üýtgemän saklanýar, ýöne onuň ölçegleri bolsa üýtgeýär. Mysal üçin , şeýle özgertmede töwerek ýene-de töwerege geçýär, ýöne onuň radiusy bolsa ulalýar (kiçelýär).

Figuranyň görnüşini (formasyny) üýtgetmän, diňe onuň ölçeglerini üýtgedýän özgertmä meňzeşlik özgertmesi diýilýär. Onda gomotetiýa meňzeşlik özgertmesidir. Başgaça aýtsak, tekizligiň φ özgertmesine k koeffisiýentli meňzeşlik özgertmesi diýilýär, eger-de $k > 0$ bolanda tekizligiň nokatlarynyň arasyndaky uzaklygy k gezek özgerdýän bolsa, φ meňzeşlik özgertmesinde A nokat A' nokada, B nokat B' nokada geçýän bolsa, onda $|A'B'| = k|AB|$ deňlik dogrudyr.

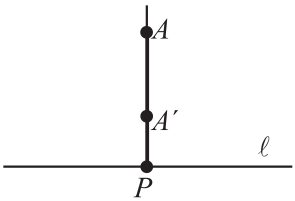
Meňzeşlik özgertmesinde göni çyzyklar göni çyzyklara, ýarym göni çyzyklar ýarym göni çyzyklara, kesimler kesimlere geçýär.

Eger φ meňzeşlik özgertmesi F figurany F' figura özgerdýän bolsa, onda F' figura F figura meňzeş diýilýär.

Mysal üçin, geografiýa kartasy degişli ýurduň, yklymyň we ş.m. birnäçe esse kiçeldilen nusgasydyr. Şonda k meňzeşlik koeffisiýentine ölçeg diýilýär.

7. Gönä gysylma özgertmesi

Tekizligiň ýene-de bir geometrik özgertmesine seredeliň. Şonuň üçin ℓ gönini geçireliň we k položitel sany kesgitläliň. ℓ göniniň her bir nokadyny özüne ℓ gönüde ýatmaýan her bir A nokada A' nokady degişli edip goýalyň. Onda:

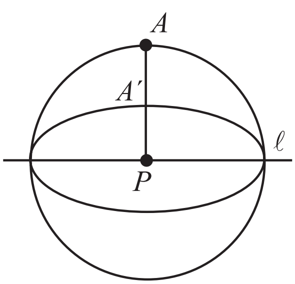


45-nji surat

1. A' nokat A nokadyň üstünden ℓ gönä geçirilen perpendikulýarda ýatýandyr we A' we A nokatlaryň ikisi hem ℓ gönüden bir tarapda ýerleşendir.

2. A' we A nokatlaryň ℓ gönüden nähili daşlykda ýerleşýändigi k koeffisiýente baglydyr. Ýagny $|A'P| = k|AP|$. Bu ýerde P nokat ℓ gönä inderilen perpendikulýaryň esasydyr (*45-nji surat*).

Bu ýerden görnüşi ýaly, $k < 1$ bolanda A' nokat A nokada görä ℓ gönä ýakyn ýerleşýär, $k > 1$ bolanda bolsa A' nokat ℓ gönä görä A nokatdan uzakda ýerleşýär. Bu **özgertmä tekizligiň ℓ gönä gysylmasy** diýilýär (ýöne $k > 1$ bolanda gysylma diýmän, eýsem, tekizligiň giňelmesi diýseň hakykata ýakyn bolaýjak ýaly).



46-njy surat

Gysylma özgertmesi figuranyň diňe bir ölçeglerini özgertmän, eýsem, onuň görnüşini (formasyny) hem üýtgedýär. Mysal üçin, merkezi ℓ gönüde ýatýan tögerek gönä gysylma özgertmesinde ellips görnüşine geçýär (*46-njy surat*).

Gönä gysylma özgertmesinde tekizligiň islendik göni çyzygy ýene-de göni çyzyga geçýär. Şonda parallel gönüler parallel gönülere geçýär. Mysal üçin, parallelogram şeýle özgertmede parallelograma geçýär. Şol bir wagtda kwadratyň şeýle özgertmede taraplary dürli uzynlykly we dürli ölçegli burçlary bolan parallelograma geçmegi mümkin.

VI bap

NATURAL SANLAR

§1. Aksiomalar sistemasy we olaryň häsiýetleri

1. Matematikada aksiomatik usul

Biziň bilşimiz ýaly, matematiki düşünjeler uzak taryhy ösüş ýoluny geçýär. Olar ilkibaşda ol ýa-da beýleki amaly meseleleri çözmekde ýüze çykýar. Adamzadyň amaly işi netijesinde ýüze çykýan matematiki düşünjeler birbada berk kesgitlemä eýe bolmaýar. Olara dagynyk, takmyny düşündiriş berilýär. Haýsydyr bir predmete meňzetmek, deňeşdirmek arkaly düşündirilýär. Matematiki düşünjeleriň ösmegi, çuňlaşmagy, çylşyrymlaşmagy netijesinde bu usul ýaramsyz bolup galýar. Sebäbi indi olary tejribede görmek, deňeşdirmek, meňzetmek kyn bolýar. Şonuň üçin hem oňa, pikir ýöretmek arkaly göz ýetirmeli bolýar. Käwagtlarda matematiki düşünjeleri aýdyňlaşdyrmak, bu düşünjeleriň arasyndaky baglanyşygy ýüze çykarmak kyn bolýar. Şonuň üçin çylşyrymly düşünjeleri ýönekeý düşünjeler bilen çalyşmak zerurlygy ýüze çykýar.

Töweregiň diametri diýen düşünjäniň ýüze çykyşyna seredeliň: ilkibaşda töweregi deň ikä bölýän horda diametr diýipdirler. B.e.öň VI asyrda ýaşap geçen gadymy grek alymy Fales şeýle hordanyň hökman töweregiň merkezinden geçýändigini subut edipdir. Şonuň üçin diametr töweregiň merkezinden geçýän we töweregiň iki nokadyny birleşdirýän gönüniň kesimi diýip düşünipdirler. Ýöne diametr düşünjesiniň has düşnükli bolmagy üçin «töwerek», «töweregiň merkezi», «gönüniň kesimi» ýaly düşünjeleri düşündirmeli. Meselem, töwerek bu tekizlikde merkez diýip atlandyrylýan *O* nokatdan deň daşlykda ýatýan nokatlaryň köplügidir. Onda indi «nokat», «tekizlik», «aralyk», «köplük» diýen düşünjeleri aýdyňlaşdyrmaly. Eger-de biz şeýdip her bir düşünjäni düşündirjek bolsak, onda bu proses hiç haçan gutarmaz. Şonuň üçin hem, matematiki teoriýa **gurlanda** käbir düşünjeleri kesgitlenmeýän ýa-da esasy düşünjeler diýip kabul edýäris. Meselem, mekdep matematikasynda nokat, göni, aralyk, san, köplük düşünjeleri esasy düşünjelerdir. Umuman haýsy-da bolsa bir teoriýa aksiomatik gurlanda kesgitlenmeýän, esasy düşünjeleri saýlap alýarlar we bu düşünjeler bilen baglanyşykly kesgitlenmeýän gatnaşyklary görkezýärler hem-de diňe şondan soň bu düşünjeleriň ýa-da gatnaşyklaryň häsiýetlerini görkezýän pikir ýöretmeleri ýazyp beýan edýärler. Bu pikir ýöretmelere berlen teoriýanyň aksiomalary diýilýär. Onda aksiomatik usul näme diýen sorag ýüze çykýar. Aksiomatik usul barada düşünje bereliň. Her bir matematik teoriýa özaralarynda käbir gatnaşyklar bilen baglanyşykly bolan obýektleriň bir ýa-da birnäçe köplügi bilen iş salyşýar. Şol obýektleriň we gatnaşyklaryň esasy häsiýetleri, olaryň tebigy boluşlary bilen bagly bolmadyk aksiomalar sistemasy tarapyndan görkezilýär. Şu esasda teoriýa gyşarnyksyz ösdürilýär.

Matematikada aksiomatik usul üç ösüş döwrüni başdan geçirdi diýip hasap edilýär. Aksiomatik usulyň ösüşiniň birinji döwri mundan iki müň ýyl çemesi ozal Ýewklid tarapyndan geometriýany aksiomatik gurmak barada edilen synanyşykdyr. Elbetde, Ýewklid aksiomalary ulanypdyr, emma şoňa garamazdan onuň geometriýasyna doly aksiomatik gurlupdyr diýip aýdyp bolmaýar. Ol birnäçe başlangyç düşünjelere kesgitleme bermäge çalşypdyr, emma käbir aksiomalary aýdyň beýan edip bilmändir.

Aksiomatik usulyň ösüşiniň ikinji döwri rus alymy N.I. Lobaçewskiniň we wenger alymy Ý . Bolýaýyň ady bilen baglanyşyklydyr. Olar biri-biri bilen baglanyşyksyzlykda Ýewklid däl geometriýany açdylar.

Aksiomatik usulyň ösüşiniň üçünji döwri nemes alymy Gilbert tarapyndan «Ýewklidiň geometriýasynyň aksiomalar sistemasy» diýilýän kesgitli aksiomalar sistemasynyň ýazylyp beýan edilmegi bilen başlandy. Häzirki zaman matematikasynda aksiomatik usul giň gerim aldy.

Obýektler toplumyny saýlap almak üçin ulanylýan tassyklamalara aksiomalar diýilýär. Häsiýetleri boýunça berlen aksiomalary kanagatlandyrýan şol obýektleriň toplumyna berlen aksiomalar sistemasynyň interpretasiýasy (düşündirilişi) diýilýär. Berlen aksiomalar sistemasyndan getirilip çykarylýan tassyklamalar islendik düşündiriliş üçin hem ýerine ýetýän bolmalydyr.

2. Aksiomalar sistemasynyň modeli

Praktikada şol bir aksiomalaryň dürli obýektleriň köplügini we olaryň arasyndaky gatnaşyklary kanagatlandyrmagy mümkin. Eger-de berlen sistemanyň ähli aksiomalary ýerine ýetýän bolsa, onda oňa bu aksiomalar sistemasynyň modeli diýilýär. Mysallara seredeliň.

1-nji mysal

Aşakdaky üç aksiomany kanagatlandyrýan $a \sim b$ (a ekwiwalentdir b) diýen gatnaşygyň üsti bilen berlen aksiomatik sistema seredeliň:

1) islendik a üçin $a \sim a$ ýerine ýetýär. Ýagny ähli a sanlar üçin $a \sim a$;

2) islendik a we b üçin $a \sim b$-den $b \sim a$ gelip çykýar;

3) islendik a, b, c üçin $a \sim b$ we $b \sim c$-den $a \sim c$ gelip çykýar.

Bu aksiomalardan birnäçe tassyklamalar gelip çykýar. Meselem, eger $a \sim b$ we $c \sim b$ bolsa, onda $a \sim c$. Diýmek, ekwiwalent gatnaşygy kesgitlenen islendik X köplük jübüt-jübütden kesişmeýän ekwiwalent elementleriň synplaryna dargaýar. Onda, bu tassyklamany ekwiwalent gatnaşygy kesgitlenen islendik x köplükde ulanyp bileris. Bu köplükleriň ählisi (1-3) aksiomalar sistemasynyň modelleridir.

2-nji mysal

$a < b$ gatnaşyk we şu aşakdaky aksiomalar bilen berlen aksiomatik sistema seredeliň:

1. Islendik a we b üçin $a < b$-den $b < a$ gatnaşygynyň ýerine ýetmeýändigi gelip çykýar;

2. Islendik a, b, c üçin, $a < b$ we $b < c$-den $a < c$ gelip çykýar.

Bu aksiomalar berk tertip gatnaşygygny berýär. Meselem, bu aksiomalaryň mysallary «a adam b adamdan uzyn» ýa-da «a jisim b jisimden agyr» we ş.m. bolup biler.

3. $a \neq b$ deňsizlikden $a < b$ ýa-da $b < a$ gelip çykýar.

Bu üç aksiomalara berk çyzykly aksiomalar sistemasy diýilýär. Berlen aksiomalar sistemasynyň iki modeliniň biri-birinden diňe daş görnüşi boýunça tapawutlanýan, hakykatda bolsa birmeňzeş bolmagy mümkin. Meselem, $X = \{a, b, c\}$ we $Y = \{1, 2, 3\}$ köplükler tertip aksiomalar sistemasyny berýär. Eger-de $a < b$, $b < c$-den $a < c$ ýa-da $1 < 2$, $2 < 3$ we $1 < 3$ bolsa, a, b, c elementleri 1, 2, 3 sanlar bilen çalşyp bolýar. Beýle ýagdaýda bu iki modele berlen aksiomalar sistemasynyň **izomorf modeli** diýilýär.

Umuman şol bir aksiomalar sistemasynyň iki izomorf modeli birmeňzeşdir.

3. Aksiomalar sistemasynyň gapma-garşylyksyzlygy, garaşsyzlygy

Aksiomalar sistemasy logiki häsiýetli käbir talaplary hem kanagatlandyrmalydyr. Ilki bilen aksiomalar sistemasy gapma-garşylyksyz bolmalydyr. Aksiomalar sistemasynyň gapma-garşylyksyzlygy diýlende, bu sistemadan ýalan (nädogry) tassyklamanyň gelip çykmaýandygyny aňladýar. Meselem, şol bir wagtyň özünde A pikir aýtma we onuň $\overline{A}$ inkär etmesi çyn bolup bilmez.

Şeýle hem şu aşakdaky aksiomalar sistemalary ýerine ýetmeýär:

1. Islendik a üçin, $a \sim b$ bolar ýaly b element bardyr;
2. Hiç bir a üçin, $a \sim a$ ýerine ýetmeýär;
3. Eger $a \sim b$ bolsa, onda $b \sim a$;
4. Eger $a \sim b$ we $b \sim c$ bolsa, onda $a \sim c$.

Aksiomatik sistemada ýerine ýetmeli ikinji bir talap, onuň garaşsyzlygydyr. Ýagny aksiomalar sistemasynyň islendik aksiomasy bu sistemanyň beýleki aksiomasyndan gelip çykmaýar. Meselem, ekwiwalent aksiomalar sistemasyna 4-nji aksiomany, ýagny eger $a \sim b$ we $a \sim c$ bolsa, onda $b \sim c$ goşsak, onda bu aksioma artykmaç bolardy, sebäbi ol (1-3) aksiomalardan gelip çykýar.

Şeýle hem aksiomalar sistemasynda beýleki aksiomalaryň üsti bilen inkär edip boljak aksioma hem bolmaly däldir. Sebäbi beýle ýagdaýda ol gapma-garşylykly bolardy.

§2. Natural sanlar köplüginiň aksiomatikasy

1. Natural san düşünjesiniň ýüze çykmagy

1, 2, 3, 4 … sanlara natural sanlar diýilýär. Natural san düşünjesi matematikanyň iň esasy düşünjeleriniň biridir. Bu düşünje adamzadyň amaly işleriniň netijesinde ýüze çykdy. Natural san düşünjesiniň ýüze çykmagyna sebäp bolan ilkinji alamatlaryň biri – adamlar gündelik durmuşynda dürli görnüşli tükenikli köplükleri deňeşdirmeli bolupdyrlar. Beýle tükenikli köplükleri deňeşdirmek üçin bolsa, olaryň arasynda özara birbelgili degişliligi gurmak gerek bolýar. Özara birbelgili degişliligi gurmak üçin, aralyk köplükleri (množestwo-posredniki) peýdalanmaly bolupdyrlar. Aralyk köplükler görnüşinde maýdajyk daşjagazlary, eliň barmaklaryny we ş.m. peýdalanypdyrlar. Bu bolsa natural san düşünjesiniň ýüze çykmagynyň ilkinji alamatlary hasap edilýär. Meselem, b.e.öň V asyrda ýaşap geçen Gerodotyň ýazmagyna görä, patyşa Dariý Dunaý derýasynda guran köprüsini goramaga galdyran garawullaryna köpsanly düwünleri bolan uzyn ýüp beripdir we şeýle diýipdir: «Şu ýüpüň her gün bir düwünini çözüň, eger-de ähli düwünleri çözüp gutaranyňyzda-da men gaýdyp gelmesem, siz yza, Watana gaýdyň». Şeýlelikde, adamlar kem-kemden sanamagy öwrenipdirler we diňe bir sanamak hem däl, eýsem, olary belgileriň kömegi bilen aňladyp başlapdyrlar. Bu bolsa arifmetika diýip atlandyrylýan we otrisatel däl bitin sanlaryň üstünde geçilýän amallary öwrenýän ylmyň ýüze çykmagyna uly itergi berýär. Onda häzirki döwürde matematikanyň esasyny düzýän onluk hasaplanyş sistemasy haçan ýüze çykdy?

Matematikanyň taryhyny öwrenýän alymlar onluk hasaplanyş sistemasy takmyndan biziň eramyzyň VI asyrynda Hindistanda ýüze çykdy diýip hasap edýärler. Hindilerden bu sanlary araplar öwrenýärler hem-de dünýäniň köp döwletlerine ony ýaýradýarlar. Şonuň

8. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

üçin, bu sanlary araplar oýlap tapypdyr diýen nädogry düşünje hem ýüze çykypdyr. Onluk hasaplanyş sistemasy Ýewropa ýurtlaryna X-XIII asyrlarda baryp ýetipdir.

Onluk hasaplanyş sistemasynyň oýlanyp tapylmagy matematika ylmynyň ösmegine bahasyna ýetip bolmajak goşant goşdy. Natural san hatary 1-den başlanýar. Boş köplüge hiç bir natural san degişli däldir. Onda boş köplügiň elementleriniň sanyny görkezmek üçin natural sanlar köplügini nol (0) diýip atlandyrýan sany goşmak bilen giňeldip alarys. Şeýlelikde, $0 = n$ (Ø). $N \cup \{0\}$ köplügi Z_0 diýip belläris. Bu köplüge giňeldilen natural sanlar köplügi diýilýär we 0 sanyň arifmetikada öz ornuny tapmagy üçin ,arifmetiki amallary we tertip gatnaşygyny kesgitläliň:

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{we} \quad 0 + 0 = 0; \tag{1}$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \text{we} \quad 0 \cdot 0 = 0; \tag{2}$$

$$a - 0 = a \quad \text{we} \quad 0 - 0 = 0; \tag{3}$$

$0 : a = 0$ we sany nola bölüp bolmaýar.

0 san natural sanlar köplügine degişli däl. Ýöne natural sanlary 0 sansyz göz öňüne getirmek mümkin däl. Sebäbi ikibelgili, üçbelgili we ş.m. tegelek sanlary 0 san bolmasa ýazyp bolanok. Hindi matematik alymlarynyň matematika ylmyna goşan ýene-de bir ägirt uly goşandy, 0 sanyň bellenişiginiň girizilmegidir. Haçanda 0 san üçin ýörite bellenişigiň girizilmegi bilen natural sanlar köplügi doly kemala geldi (formirlendi) diýip hasap edýär hem-de oňa giňeldilen natural sanlar köplügi diýilýär.

«Natural san» diýen adalgany ilkinji gezek 480-524-nji ýyllarda ýaşap geçen rim alymy A. Boesiý girizýär. Häzirki döwürde natural sanlaryň häsiýetleri, olaryň üstünde geçilýän amallar matematikanyň «sanlar teoriýasy» diýen bölüminde öwrenilýär.

2. Natural sanlaryň mukdar teoriýasy

Haçanda XIX asyrda nemes matematigi G. Kantor tarapyndan köplükler teoriýasy esaslandyrylandan soň, şu teoriýanyň esasynda natural sanlaryň teoriýasyny gurdular. Bu teoriýanyň esasy hökmünde tükenikli köplük we özara birbelgili degişlilik düşünjelerini aldylar.

Eger iki sany A hem-de B köplükleriň arasynda özara birbelgili degişliligi gurup bolýan bolsa, onda bu köplüklere deňsanly köplükler diýilýär. «A köplük B köplük bilen deňsanlydyr» diýen gatnaşyk refleksiw, simmetrik we tranzitiwdir. Diýmek, deňsanlylyk gatnaşygy ekwiwalentlik gatnaşygydyr we ähli tükenikli köplükleriň toplumyny ekwiwalentlik klaslara bölýär.

M köplügiň elementleriniň sanyny $|M|$ ýa-da $n(M)$ görnüşde belläris, oňa M köplügiň kuwwaty diýilýär. Islendik tükenikli köplüge şu köplüge degişli bolmadyk bir element goşup, berlen köplüge ekwiwalent bolmadyk köplük almak mümkin.

Iki sany A we B tükenikli köplükler berlipdir. Olara degişli natural sanlary a we b diýip belläris. A we B köplükleriň ekwiwalent köplükler ýa-da ekwiwalent däl köplükler bolmagy mümkin.

Eger $A \sim B$ bolsa, onda A we B köplükler şol bir synpa degişlidir we olara degişli a we b sanlar deňdir, ýagny $a = b$. Eger A we B köplükler ekwiwalent bolmasa , onda olara degişli a we b sanlar dürlüdir.

Goý, A köplük özünde a elementi, B köplük bolsa b elementi saklaýan bolsun. Eger A köplük özüniň hususy B_1 bölek köplügi bilen deňsanly bolsa, onda a san b sandan kiçi diýilýär we $a < b$ ýazylýar. Onda:

$$(a < b) \Leftrightarrow (A \sim B_1 \subset B \wedge B_1 \neq B \wedge B_1 \neq \varnothing).$$

$a < b$ gatnaşyk asimmetrik we tranzitiwdir, şonuň üçin hem ol berk tertip gatnaşygydyr. Şeýlelikde, biz N natural sanlar köplügini tertipleşdirdik.

Tükenikli köplükleriň üstünde geçilýän her bir amalyň kömegi bilen bu köplüklere degişli sanlaryň üstünde geçilýän amallary kesgitlemek mümkin. Meselem, goý, A we B kesişmeýän köplükler hem-de $n(A) = a$, $n(B) = b$ bolsun. Onda, $C = A \cup B$ köplüge a we b sanlaryň jemi diýilýän c san degişli bolar.

Köplükleriň birleşmesiniň orun çalyşma we utgaşdyrma häsiýetlerinden natural sanlary goşmagyň orun çalşyrma we utgaşdyrma häsiýetleri gelip çykýar. Goý, A tükenikli köplük, B onuň hususy bölek köplügi $n(A) = a$ we $n(B) = b$ bolsun. Onda, a we b natural sanlaryň $a - b$ tapawudy diýip, B köplügiň A köplüge çenli B'_A doldurgyjyna aýdylýar.

Natural sanlary köpeltmek amaly Dekart köpeltmek hasylynda elementleri sanamak bilen baglanyşyklydyr. Goý, $n(A) = a$, $n(B) = b$ bolsun. a we b natural sanlaryň köpeltmek hasyly diýip, $A \times B$ köplügiň kuwwatyna aýdylýar. Köplükleriň dekart köpeltmek hasyly üçin orun çalyşma häsiýeti ýerine ýetmeýär, ýagny $A \times B \neq B \times A$. Ýöne şonda-da $n(A \times B) = n(B \times A)$, ýagny bu köplükleriň elementleriniň sany deňdir, onda a we b natural sanlaryň köpeltmek hasyly üçin orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlary ýerine ýetýändir.

Biz natural sanlaryň teoriýasyny tükenikli köplük düşünjesiniň üsti bilen kesgitledik. Ýöne tükenikli köplük düşünjesiniň özi heniz doly gutarnykly kesgitlenen däldir. Şonuň üçin biz natural sanlaryň teoriýasyny başga düşünjeleriň, ýagny goşmak amalynyň kömegi bilen bereris.

3. Goşmagyň aksiomalary

N natural sanlar köplügi üçin, aksiomalar sistemasyny dürli usullar bilen gurup bolýar. Esasy düşünjeler hökmünde sanlaryň jemini, tertip gatnaşygyny we ş.m. alyp bolýar. Islendik ýagdaýda esasy düşünjeleriň häsiýetlerini görkezýän aksiomalary bermeli. Onda goşmak amaly düşünjesini esasy düşünje hökmünde kabul edip, aksiomalar sistemasyny bereliň.

$(a; b) \Rightarrow a + b$ binar algebra amaly kesgitlenen boş bolmadyk N köplüge natural sanlar köplügi diýilýär. $a + b$ sana a we b sanlaryň jemi diýilýär. Ol şu aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1. Orun çalşyrma häsiýeti: eger $a \in N$, $b \in N$ bolsa, onda $a + b = b + a$;

2. Utgaşdyrma häsiýeti: eger $a \in N$, $b \in N$, bolsa, onda $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3. Islendik a we b natural sanlaryň $a + b$ jemi a sandan tapawutlydyr, ýagny $a + b \neq a$;

4. N köplügiň boş bolmadyk A bölek köplüginde şeýle bir a san bardyr, ýagny a sandan tapawutly ähli $x \in A$ sanlary $x = a + b$ görnüşinde ýazmak bolýar. Bu ýerde $b \in N$.

Bu dört aksioma natural sanlaryň bütin arifmetikasyny gurmak üçin ýeterlikdir.

4. Natural sanlar köplüginde tertip gatnaşygy

Indi N natural sanlar köplüginde tertip gatnaşygyny girizeliň. Şonuň üçin goşmagyň aksiomalaryna salgylanarys. Tükenikli A köplük bilen boş bolmadyk tükenikli C köplügiň kesişmesi boş bolsa, ýagny $A \cap C \neq \varnothing$, onda elementleriň sany A köplügiň elementlerinden köp bolan $B = A \cup C$ köplük alnar. Onda, şeýle kesgitlemäni alarys.

$a + c = b$ deňlik ýerine ýeter ýaly, şeýle bir c san bar bolsa, onda a natural san b natural sandan kiçi diýilýär we $a < b$ bellenýär. $a < b$ gatnaşygy peýdalanyp, (4) aksiomany şu aşakdaky ýaly ýazmak mümkin.

4′. N natural sanlar köplüginiň islendik boş bolmadyk A bölek köplüginde iň kiçi san bardyr.

Indi N köplükde $<$ gatnaşygyň berk tertip gatnaşygy bolýandygyny, ýagny bu gatnaşygyň tranzitiw we asimmetrikdigini görkezeris. Goý, $a < b$ we $b < c$ bolsun. Onda kesgitlemä görä, $b = a + k$ we $c = b + \ell$ deňlikler ýerine ýeter ýaly k we ℓ sanlar bardyr. Onda, $c = (a + k) + \ell$ bu ýerden $c = a + (k + \ell)$. $k + \ell$ sanyň natural sandygy üçin, $a < c$ gatnaşyk dogrudyr. Diýmek, $a < b$, $b < c$ gatnaşyklardan $a < c$ gatnaşyk gelip çykýar, bu bolsa $<$ gatnaşygyň tranzitiw gatnaşyk bolýandygyny görkezýär.

Indi bu gatnaşygyň asimmetrik gatnaşyk bolýandygyny görkezeris. Goý, $a < b$ we $b < a$ bolsun. Onda, tranzitiwlik häsiýetine görä $a < a$ alnar. Bu bolsa $a = a + k$, $k \in N$ bolýandygyny görkezýär. Alnan deňlik (3) aksioma garşy gelýär. Onda $a < b$ we $b < a$ gatnaşyklar ýerine ýetmeýär.

Şeýlelikde, biz N natural sanlar köplüginde $<$ gatnaşygyň berk tertip gatnaşygy bolýandygyny subut etdik. Indi natural sanlary goşmak amalynyň monotonlyk häsiýetini subut ederis: eger $a < b$ bolsa, onda islendik $c \in N$ san üçin, $a + c < b + c$ deňsizlik ýerine ýetýär. Hakykatdan-da, $a < b$ deňsizlikden $b = a + k$ deňlik ýerine ýeter ýaly k sanyň bardygy gelip çykýar. Onda, $b + c = (a + k) + c$ (1) we (2) aksiomalardan $b + c = a + (k + c) = a + (c + k) = (a + c) + k$ ýazarys. $b + c = (a + c) + k$ deňlikden $a + c < b + c$ gatnaşyk gelip çykýar.

Indi natural sanlary goşmak amalynyň gysgalýandygyny subut edeliň. Eger $a + c = b + c$ bolsa, onda $a = b$. Hakykatdan-da üç ýagdaýyň: $a < b$, $a > b$, $a = b$ bolmagy mümkin. Eger $a < b$ bolsa, onda $a + c < b + c$. Şeýle-de, $a > b$ bolanda, $a + c > b + c$ alnar. Diýmek, $a = b$ deňlik dogrudyr.

5. Natural sanlar köplüginiň çäksizligi we diskretligi

(4′) aksioma görä, N natural sanlar köplüginde iň kiçi san bardyr, ol birlik sandyr. Onda islendik $a \in N$ san üçin $a \neq 1$, ýagny $1 < a$. Bu bolsa $a = 1 + b$, $b \in N$ deňligiň ýerine ýetýändigini görkezýär.

N natural sanlar köplüginde iň uly san ýokdur. Şonuň üçin natural sanlar köplügi aşakdan çäklenen, ýokardan çäklenmedik diýilýär.

a sanyň yzyndan gelýän iň kiçi $a + 1$ san bardyr. Hakykatdan-da b san a sanyň yzyndan gelýän bolsa, onda $b = a + c$ deňlik ýerine ýeter ýaly c san bardyr. Ýene $1 \leq c$, onda $a + 1 \leq a + c$, ýagny $a + 1$ san a sanyň yzyndan gelýän iň kiçi sandyr.

Onda, a sanyň yzyndan gelýän sanlaryň iň kiçisine a sanyň gönüden-göni yzyndan gelýän san diýilýär. N natural sanlar köplüginde her bir sanyň gönüden-göni yzyndan gelýän san bardyr. Bu häsiýete natural sanlar köplüginiň **diskretlik** häsiýeti diýilýär.

6. Peanonyň aksiomalary

N natural sanlar köplüginiň aksiomatikasyny gurmak üçin, goşmak amaly ýeke-täk esas däldir. Şeýle-de goşmak amalynyň kömegi bilen natural sanlaryň aksiomatikasyny gurmak onçakly bir ýeňil hem däl. Onda, goşmak amalyny has ýönekeý görnüşe 1 sany goşmak amaly görnüşine getirmek has ýeňil we düşnüklidir. Sebäbi $n + 1$ san gönüden-göni n sanyň yzyndan gelýän sandyr. Onda, natural sanlaryň aksiomatikasyny «p san gönüden-göni n sanyň yzyndan gelýär» diýen gatnaşygyň kömegi bilen guralyň.

1. Her bir (islendik) n natural sanyň gönüden-göni yzyndan gelýän san bardyr.

2. Eger p we q sanlar gönüden-göni n sanyň yzyndan gelýän bolsa, onda olar deňdir.

Bu iki aksioma her bir n natural sanyň gönüden-göni yzyndan bir we diňe bir sany natural sanyň gelýändigini görkezýär, ol sany n' bilen belläris.

3. Hiç bir san iki sany dürli natural sanlaryň gönüden-göni yzyndan gelip bilmeýär, ýagny eger $m' = n'$ bolsa, onda $m = n$ bolar.

4. Natural sanlar köplüginde hiç bir sanyň yzyndan gelmeýän 1 san bardyr.

5. Eger N natural sanlar köplüginiň A bölek köplügi 1 sany özünde saklaýan bolsa we her bir n natural san bilen gönüden-göni bu sanyň yzyndan gelýän n' sany hem özünde saklaýan bolsa, onda N köplük bilen onuň A bölek köplügi gabat gelýär.

Bu aksiomalary XIX asyryň ahyrynda italýan alymy Peano esaslandyrdy. Şonuň üçin hem, olara Peanonyň aksiomalary diýilýär.

7. Matematiki induksiýa usuly

Natural sanlar köplüginiň ýene-de bir häsiýetini, ýagny matematiki induksiýa usulyny subut edeliň.

Eger N natural sanlar köplüginiň A bölek köplügi özünde birlik sany saklaýan bolsa we her bir a san bilen bilelikde gönüden-göni şu a sanyň yzyndan gelýän $a + 1$ sany hem özünde saklaýan bolsa, onda, N köplük bilen A bölek köplük gabat gelýär.

Matematiki induksiýa usulyny tersinden subut edeliň. Goý, N köplük bilen gabat gelmeýän A köplük bar diýeliň. Onda, A köplügiň $A' = N/A$ doldurgyjy boş däldir, ýagny $A' \neq \varnothing$. Diýmek, (4′) aksioma görä, b san A' köplügiň iň kiçi sanydyr, b san 1-den tapawutly, ýagny $b \neq 1$, sebäbi $1 \in A$. Onda b san käbir a sanyň gönüden-göni yzyndan gelýär. Beýle ýagdaýda $b = a + 1$ bolar. Ýöne $a < b$, bu ýerde b san A' doldurgyjyň iň kiçi sany, onda a san A' köplüge degişli san däldir. Ýagny ol A köplüge degişlidir. Onda, $b = a + 1$ san hem A köplüge degişli bolmaly. Bu bolsa b sanyň hem A köplüge, hem A' köplüge degişli bolýandygyny görkezýär, emma ol mümkin däl. Bu alnan gapma-garşylyk $A' = \varnothing$ bolýandygyny görkezýär, ýagny $A = N$.

Matematiki induksiýa usulyny, köplenç, matematiki teoremalary subut etmekde peýdalanýarlar. Meselem, islendik n natural san üçin, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ (1) deňligiň dogrudygyny subut edeliň.

Ilki bilen $n = 1$ bolanda (1) deňligiň dogrudygyny barlap göreris. $1^2 = 1$ deňlik ýerine ýetýär. Soňra $n = 2$ bolanda $1 + 3 = 2^2 \rightarrow 4 = 4$ deňligiň dogrudygyna göz ýetirýäris. Indi $n = 3$ bolanda $1 + 3 + 5 = 3^2 \rightarrow$ $\rightarrow 9 = 9$ deňlik dogry.

Biz bu usul bilen ähli natural sanlary ýeke-ýekeden barlap bilmeris. Şonuň üçin başga ýoly saýlap alarys. Ilki bilen $n = 1$ bolanda (1) deňligiň ýerine ýetýändigini barlap göreris. Soňra haýsydyr bir n bahada deňligiň ýerine ýetýändigini barlap, gönüden-göni bu n sanyň yzyndan gelýän san üçin hem ýerine ýetýändigini barlarys. Başgaça aýtsak, eger

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (1)$$

deňlik dogry bolsa, onda $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + [2(n - 1) - 1] = (n + 1)^2$ deňlik hem dogrudyr. (2) deňlikde $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ aňlatmanyň ýerine n^2-y ýazyp alarys $n^2 + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2$. Ýaýlary açyp ýazarys. $n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ deňligi subut etdik.

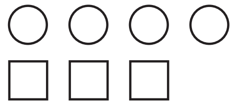
§3. Natural sanlaryň arifmetikasy

1. Otrisatel däl bitin sanlary goşmak

Otrisatel däl bitin sanlar köplüginde goşmak amalyny doly düşündirmek üçin şeýle meselä seredeliň. Aýgözeliň 4 galamy bar. Muhammetnyýazyň bolsa 3 galamy bar. Onda olaryň ikisinde näçe galam bar?

Bu mesele goşmak amaly bilen çözülýär $4 + 3 = 7$. Ýöne bu meseläni çözmek üçin başga amaly däl-de, diňe goşmak amalyny saýlap alýandygymyzyň sebäbini nähili düşündirmeli?

Meseläniň şertini görkezme esbaplardan peýdalanyp, düşündireliň. Aýgözeliň galamlarynyň sanyny tegelejiklerde, Muhammetnyýazyň galamlarynyň sanyny kwadratlarda şekillendireliň. Onda, meseläniň soragyna jogap bermek üçin, Aýgözeliň galamlarynyň sanyny aňladýan tegelekleriň üstüne Muhammetnyýazyň galamlarynyň sanyny aňladýan kwadratlary goşup alarys, ýagny iki köplügiň birleşmesini ýazarys we birleşmedäki elementleriň sanyny kesgitläris.



Diýmek, otrisatel däl bitin sanlary goşmak amaly köplükleriň birleşmesi amaly bilen berk baglanyşyklydyr.

Ýene bir meselä seredeliň. $A = \{a, b, c, d\}$ we $B = \{c, x, y\}$ köplükleriň birleşmesini tapalyň. Onda, $n(A) = 4$, $n(B) = 3$. $A \cup B =$ $= \{a, b, c, d, x, y\}$ ýöne $n(A \cup B) \neq 4 + 3$. Näme üçin beýle bolýar? Sebäbi A we B köplükler kesişýärler, ýagny olaryň ikisinde-de umumy, gaýtalanýan element bar. Şonuň üçin hem, bu köplükleriň kesişmesindäki elementleriň sany bilen bu köplükleriň elementleriniň jemindäki san gabat gelmeýär, ýagny $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$. Diýmek, otrisatel däl bitin sanlaryň jemi kesişmeýän köplükleriň birleşmesiniň üsti bilen aňladylýar.

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň jemi diýip, kesişmeýän A we B köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanyna aýdylýar, bu ýerde, $n(A) = a$, $n(B) = b$, $a + b = n(A \cup B)$, $n(A) = a$, $n(B) = b$ we $A \cap B = \varnothing$.

Şu ýerde ýokarda sereden mysalymyzdaky 4 we 3 sanlaryň jemi kesişmeýän A we B köplükleriň elementleriň saýlanyp alnyşyna baglymy diýen sorag ýüze çykýar. Meselem, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$. Onda $a = n(A)$; $b = n(B)$ ýa-da $n(A) = 4$; $n(B) = 3$ we $n(A \cup B) = 4 + 3$. Indi $A_1 = \{\square\square\square\square\}$, $B_1 = \{\Delta\Delta\Delta\}$ bolsun, onda $n(A_1) = 4$; diýmek, $n(A_1 \cup B_1) = 4 + 3$. Görnüşi ýaly, 4 we 3 sanlaryň jemi kesişmeýän köplükleriň elementleriniň saýlanyp alnyşyna bagly däl. Umuman aýdanyňda $a + b$ jem A we B köplükleriň elementleriniň nähili saýlanyp alnandygyna bagly. Iň esasy zat bu köplükler kesişmeýän köplükler bolmaly.

Otrisatel däl bitin sanlaryň jemi hemişe bardyr we ýeke-täkdir. Başgaça aýtsak, islendik iki sany a we b otrisatel däl bitin sanyň jemini tapyp bolýar, ýöne ol ýene-de otrisatel däl bitin c sandyr. Bu c san $a + b$ jem üçin ýeke-täk sandyr. Otrisatel däl bitin sanlaryň jeminiň bardygy we ýeke-täkligi iki köplügiň birleşmesiniň bardygyndan we ýeke-täkliginden gelip çykýar.

Iki sany otrisatel däl bitin sanlaryň jemini tapmaly bolsa, onda goşmak amaly berlipdir diýilýär, a we b sanlara bolsa goşulyjylar diýilýär.

Biz ýokarda iki goşulyjynyň jemini tapmaklyga kesgitleme berdik. Eger goşulyjylaryň sany birnäçe bolsa, onda olaryň jemi nähili tapylýar?

Kesgitleme. Goý, iki goşulyjynyň jemi kesgitlenen bolsun we n sany goşulyjylaryň jemi hem kesgitlenen bolsun. Onda, $a_1 + a_2 +...+ + a_n + a_{n+1}$ goşulyjylaryň jemi $(a_1 + a_2 +...+ a_n) + a_{n+1}$ sana deňdir.

Otrisatel däl bitin sanlary goşmak amalyny kesgitlemäge ýokarda beýan edilişi ýaly, çemeleşilmegi bu amalyň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryny esaslandyrmaga mümkinçilik berýär.

Kesgitleme. Islendik otrisatel däl bitin a we b sanlar üçin, $a + b = b + a$ deňlik ýerine ýetýändir. Bu kesgitlemäni subut edeliň. A köplügiň elementleriniň sanyny a, B köplügiň elementleriniň sanyny b diýip belläliň we $A \cap B = \varnothing$ bolsun, ýagny A we B köplükleriň kesişmesi boş köplük bolsun. Onda, otrisatel däl bitin sanlary goşmagyň kesgitlemesine görä, $a + b$ jem A we B köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanyna deňdir $a + b = n(A \cup B)$. Ýöne goşmagyň orun çalşyrma kanunyna görä, $A \cup B$ köplük bilen $B \cup A$ köplük deňdir, diýmek, $n(A \cup B) = n(B \cup A)$. Goşmagyň kesgitlemesine görä, $n(B \cup A) = b + a$, şonuň üçin hem $a + b = b + a$ deňlik islendik otrisatel däl bitin a we b sanlar üçin dogrudyr.

Kesgitleme. Islendik otrisatel däl bitin a, b, c sanlar üçin $(a + b) + c = a + (b + c)$ deňlik ýerine ýetýändir.

Bu kesgitlemäni subut edeliň. Goý, $c = n(C)$ bolsun hem-de $A \cap B = \varnothing$ we $B \cap C = \varnothing$ bolsun, ýagny A we B köplükleriň, şonuň ýaly-da B we C köplükleriň kesişmeleri boş köplük bolsun. Onda, goşmagyň kesgitlemesine görä, $(a + b) + c = n(A \cup B) + n(c) = n(A \cup B \cup C)$.

Köplükleriň birleşmesi utgaşdyrma kanunyna boýun egýär, onda, $n[(A \cup B) \cup C] = n[A \cup (B \cup C)]$. Iki sanyň jeminiň kesgitlemesine görä, $n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$. Diýmek, islendik a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin $(a + b) + c = a + (b + c)$ deňlik dogrudyr.

Utgaşdyrma kanunynyň mazmunyna seredeliň. Bu kanun üç sany goşulyjynyň jemini tapmaga mümkinçilik berýär. Onuň üçin birinji we ikinji goşulyjylary goşup alnan sanyň üstüne üçünji goşulyjyny goşmak ýeterlikdir. Ýöne goşmagyň utgaşdyrma kanuny goşulyjylaryň ornuny çalşyrmagy göz öňünde tutmaýar.

Goşmagyň orun çalşyrma kanunyny we utgaşdyrma kanunyny islendik sanly goşulyjylar üçin umumylaşdyryp ýazyp bolýar. Şonda orun çalşyrma kanuny islendik sanly goşulyjylaryň ornuny çalşyranda hem, utgaşdyrma kanuny bolsa islendik sanly goşulyjylaryň ornuny çalşyrman, olary dürli görnüşde toparlara bölüp ýazanda hem jemiň üýtgemeýändigini görkezýär. Bu pikir aýtmany mysallarda göreliň. $109 + 36 + 191 + 64 + 27$ aňlatmanyň bahasyny goşmagyň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryndan peýdalanyp tapalyň. Onuň üçin goşmagyň orun çalşyrma kanunyna görä 36 we 191 sanlaryň ornuny çalşyryp ýazarys. Onda berlen aňlatmany $109 + 36 + 191 + 64 + 27 = 109 + 191 + 36 + 64 + 27$ görnüşde ýazyp bolýar. Goşmagyň utgaşdyrma kanunyndan peýdalanyp, bu soňky alnan aňlatmany skobkalaryň kömegi bilen toparlara bölüp ýazarys:

$$109 + 191 + 36 + 64 + 27 = (109 + 191) + (36 + 64) + 27 = \\ = 300 + 100 + 27.$$

Bu aňlatmada hem goşmagyň utgaşdyrma kanunyny ýene bir gezek peýdalanyp ýazarys:

$$300 + 100 + 27 = (300 + 100) + 27 = 400 + 27 = 427.$$

2. Otrisatel däl bitin sanlar köplüginde aýyrmak

Aýyrmak amalynyň mazmunyny açyp görkezýän meselelere seredeliň.

Mesele. Aýnur we Aknur bilelikde 8 düýp alma we erik nahallaryny oturtdylar. Eger Aknur 3 düýp erik nahalyny oturdan bolsa, onda Aýnur näçe düýp alma nahalyny oturdypdyr.

Meseläniň soragyna jogap bermek üçin 8-den 3-i aýyrmaly $8 - 3 = 5$. Onda bu ýerde başga amal däl-de, eýsem, aýyrmak amalynyň gerekdigini nähili düşündirmeli? Meseläniň şertindäki Aýnuryň eken alma nahallaryny we Aknuryň eken erik nahallaryny tegelekler bilen belläliň. Meseläniň şertine görä Aknur üç düýp erik agajyny ekipdir. Onda üç sany tegelegiň üstüni çyzalyň. Üsti çyzylman galan bäş sany tegelek Aýnuryň eken alma nahallarynyň sanyny aňladýar.

Bu ýerden görnüşi ýaly, bu meseläniň çözüwi berlen köplükden bölek köplügi bölüp aýyrmak düşünjesi bilen we bölek köplügiň doldurgyjynyň elementleriniň sanyny tapmak bilen baglanyşykly. Onda, sanlary aýyrmak amaly bölek köplügiň üstüni doldurmak amaly bilen berk baglanyşyklydyr.

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diýip, $n(A) = a$, $n(B) = b$ we $B \subset A$ şerti kanagatlandyrýan B köplügiň A köplüge çenli doldurgyjyndaky elementleriň sanyna aýdylýar.

$$a - b = n(A/B), \text{ bu ýerde } a = n(A),\ b = n(B),\ B \subset A.$$

Mysal. Kesgitlemeden peýdalanyp, $7 - 4 = 3$ bolýandygyny düşündireliň. 7 A köplügiň elementleriniň sany, 4 – A köplügiň bölek köplügi bolan B köplügiň elementleriniň sany. Meselem, $A = \{x, y, z, t, p, r, s\}$; $B = \{x, y, z, t\}$ köplükler berlen bolsun. Onda, B köplügiň A köplüge çenli doldurgyjyny tapalyň $A/B = \{p, r, s\}$. Diýmek, $n(A/B) = 3$. Onda $7 - 4 = 3$ tapawudy dogry kesgitläpdiris.

$n(A) = 7$, $n(B) = 4$ we $B \subset A$ şerti kanagatlandyrýan tükeniksiz köpsanly A we B köplükleri saýlap alyp bolýar, sebäbi $a - b$ tapawut A we B köplükleriň saýlanyp alnyşyna bagly däl.

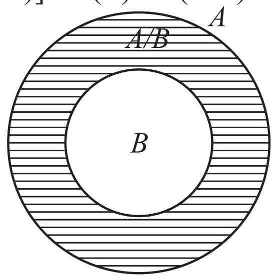
Ýöne a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy hemişe barmy?

Eger $B \subset A$ bolsa, ýagny B köplük A köplügiň bölek köplügi bolsa, onda $n(B) \leq n(A)$. Diýmek, $a = n(A)$; $b = n(B)$ $B \subset A$ şerti kanagatlandyrýan a we b otrisatel däl sanlaryň tapawudy şonda we diňe şonda bardyr, haçanda, $b \leq a$ bolsa. a we b sanlaryň tapawudyny kesgitleýän amala aýyrmak amaly diýilýär. a sana-kemeliji, b sana-kemeldiji diýilýär.

Köplenç, aýyrmak amalynyň ýerine ýetirilişiniň dogrudygyny goşmak amalynyň üsti bilen barlaýarlar. Diýmek, aýyrmak we goşmak amallarynyň arasynda berk baglanyşyk bar.

Goý, $n(A) = a$; $n(B) = b$; $B \subset A$ şertleri kanagatlandyrýan a we b sanlar berlen bolsun. Bu sanlaryň tapawudy B köplügiň A köplüge çenli doldurgyjyndaky elementleriň sanyna deň bolsun. Ýagny $a - b = n(A/B)$.

Eýleriň tegelekleriniň kömegi bilen A, B we A/B köplükleri şekillendireliň. Onda, $A = B \cup (A/B)$ bu ýerde $n(A) = n[B \cup (A/B)]$. Ýöne $B \cap (A/B) = \varnothing$ bolany üçin, $n(A) = n[B \cup (A/B)] = n(B) + n(A/B) = b + (a - b)$, onda $a = b + (a - b)$ bolar. Bu bolsa otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudyna täzeçe kesgitleme bermäge mümkinçilik berýär (*47-nji surat*).



47-nji surat

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy diýip şeýle bir c sana aýdylýar, haçanda, bu c san bilen b sanyň jemi a sana deň bolanda.

Şeýlelikde, $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

Şonuň üçin hem aýyrmak amaly goşmak amalyna ters amal hökmünde kesgitlendi diýilýär. Onda ikinji teoremadan peýdalanyp, aşakdaky teoremany subut edeliň.

Teorema. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy şonda we diňe şonda bardyr, haçanda $b \leq a$ bolsa.

Subudy. Eger $a = b$ bolsa, onda $a - b = 0$, diýmek, $a - b$ tapawut bardyr. Eger $b < a$ bolsa, onda «kiçidir» diýen gatnaşygyň kesgitlemesine görä $a = b + c$ deňlik ýerine ýeter ýaly c san bardyr. Onda, tapawudyň kesgitlemesine görä $c = a - b$, ýagny $a - b$ tapawut bardyr.

Teorema. Eger a we b otrisatel däl bitin sanlaryň tapawudy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Subudy. Goý, a we b sanlaryň tapawudynyň iki sany san bahasy bar diýip pikir edeliň, ýagny $a - b = c_1$ we $a - b = c_2$ bolsun. Onda tapawudyň kesgitlemesine görä $a = b + c_1$ we $a = b + c_2$. Bu ýerden $b + c_1 = b + c_2$ deňlik gelip çykýar, diýmek, $c_1 = c_2$ bolýar. a we b sanlaryň tapawudyny aňladýan diňe bir sany san bar eken.

Indi sandan jemi aýyrmak we jemden sany aýyrmak diýen düşünjelere seredeliň.

Jemden sany aýyrmak

Kesgitleme. Jemden sany aýyrmak üçin, bu sany goşulyjylaryň birinden aýryp, beýleki goşulyjyny alnan netijäniň üstüne goşmak ýeterlikdir.

Bu kesgitlemäni matematiki mysallaryň kömegi bilen ýazalyň. Eger a, b, c otrisatel däl bitin sanlar bolsa:

1. $a \geq c$ bolanda, $(a + b) - c = (a - c) + b$;
2. $b \geq c$ bolanda, $(a + b) - c = a + (b - c)$.

3. Otrisatel däl bitin sanlar köplüginde köpeltmek

Otrisatel däl bitin sanlary köpeltmek düşünjesini birnäçe usul bilen kesgitläp bolýar. Ilki bilen esasynda goşmak amaly durýan çemeleşmä seredeliň.

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň köpeltmek hasyly diýip, aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan otrisatel däl bitin sana aýdylýar.

1. $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ sany}}$, haçanda $b > 1$ bolanda;
2. $a \cdot 1 = a$, haçanda $b = 1$ bolanda;
3. $a \cdot 0 = 0$, haçanda $b = 0$ bolanda.

Bu kesgitlemäniň köplükler nazaryýetine görä manysy şeýle. Eger A_1, A_2, ..., A_b köplükleriň her birinde bir sany a elementden bar bolsa we bu elementleriň islendik iki sanysy kesişmeýän bolsa, onda bu köplükleriň birleşmesi özünde $a \cdot b$ elementi saklaýar. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň köpeltmek hasylyny tapmaklyga köpeltmek amaly diýilýär. Köpeldilýän a we b sanlara bolsa köpelijiler diýilýär. Islendik otrisatel däl bitin sanlaryň köpeltmek hasyly bardyr we ol ýeke-täkdir.

Otrisatel däl bitin sanlary köpeltmegiň kesgitlemesi bilen okuwçylar eýýäm başlangyç synplarda tanyşýarlar. Bu kesgitlemäniň many-mazmunyna şu aşakdaky ýönekeý meselede seredeliň.

Mesele. Mekdep bagynda bir hatarda 4 düýp alma nahalyny oturtdylar. Şunuň ýaly 6 hatarda näçe düýp alma nahalyny oturtmaly?

Näme üçin bu meseläniň jogaby köpeltmek amaly bilen tapylýar? Sebäbi bu meselede her birinde 4 element bolan 6 sany köplügiň birleşmesindäki elementleriň sanyny tapmak talap edilýär. Onda, kesgitlemä görä, bu sany $4 \cdot 6 = 24$ köpeltmek hasylyň kömegi bilen taparys.

Otrisatel däl bitin sanlary köpeltmek amalyny başga düşünjeleriň üsti bilen hem kesgitläp bolýar. Meselem, köplükleriň Dekart köpeltmek hasylynyň üsti bilen kesgitläliň.

Goý, iki sany $A = \{x, y, z\}$ we $B = \{n, t, r, s\}$ köplükler berlen bolsun. Bu köplükleriň Dekart köpeltmek hasylyny tapyp, ony tablisa görnüşinde ýazalyň. $A \times B = \{(x, n), (x, t), (x, r), (x, s), (y, n), (y, t), (y, r), (y, s), (z, n), (z, t), (z, r), (z, s)\}$, ýagny bu dekart köpeltmek hasyly gönüburçly tablisa görnüşinde ýazarys:

$$\begin{matrix} (x, n), (x, t), (x, r), (x, s), \\ (y, n), (y, t), (y, r), (y, s), \\ (z, n), (z, t), (z, r), (z, s). \end{matrix}$$

Tablisadaky setirleriň her birinde ýazylan jübütleriň birinji komponentleri meňzeşdir, edil şeýle-de, sütünleriň her birinde ikinji komponentleri meňzeşdir. Şonda setirleriň hiç birinde meňzeş jübütler ýokdur. Onda, bu ýerden görnüşi ýaly $A \times B$ köpeltmek hasylyndaky elementleriň sany $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Başgaça aýtsak, $n(A) = 3$; $n(B) = 4$ we $3 \cdot 4 = 12$. Diýmek, A we B köplükleriň Dekart köpeltmek hasylyndaky elementleriň sany $n(A) \cdot n(B)$ köpeltmek hasyla deňdir. Umuman, eger A we B tükenikli köplükler bolsa, onda

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Kesgitleme. a we b otrisatel däl bitin sanlaryň köpeltmek hasylyny $n(A) = a$, $n(B) = b$ şerti kanagatlandyrýan A we B köplükleriň Dekart köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyp bolýar.

$$a \cdot b = n(A \times B) \quad \text{bu ýerde} \quad n(A) = a, n(B) = b.$$

Ýokarda sereden ýagdaýlarymyzyň ikisinde-de iki sany otrisatel däl bitin sanyň köpeltmek hasylyny kesgitledik. Eger birnäçe köpelijiler berlen bolsa, onda olaryň köpeltmek hasylyny nähili kesgitlemeli?

Kesgitleme. Goý, iki sany köpelijiniň köpeltmek hasyly berlen bolsun, şeýle-de, n sany köpelijiniň köpeltmek hasyly berlen bolsun. Onda, $n + 1$ köpelijileriň, ýagny $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n \cdot a_{n+1}$ köpeltmek hasyly $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n) \cdot a_{n+1}$-e deňdir. Meselem, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ köpeltmek hasyly tapmaly bolsun. Onda kesgitlemä görä, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 =$ $= (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 9 = [(2 \cdot 5) \cdot 7] \cdot 9 = (10 \cdot 7) \cdot 9 = 70 \cdot 9 = 630$.

Indi otrisatel däl bitin sanlary köpeltmegiň kanunlaryny köplükleriň Dekart köpeltmek hasylyna esaslanýan kesgitlemäniň üsti blen subut edeliň:

a) orun çalşyrma kanuny. Islendik iki sany a we b otrisatel däl bitin sanlar üçin $a \cdot b = b \cdot a$ deňlik dogrudyr.

Goý, $a = n(A)$, $b = n(B)$ bolsun. Onda, köpeltmegiň kesgitlemesine görä $a \cdot b = n(A \times B)$. Ýöne $A \times B$ we $B \times A$ köplükler deň kuwwatly köplüklerdir. Ýagny $A \times B$ köplügiň her bir (a, b) jübütine $B \times A$ köplügiň diňe bir sany (b, a) jübütini degişli edip goýmak mümkin we tersine. Diýmek, $n(A \times B) = n(B \times A)$. Şonuň üçin hem $a \cdot b = n(A \times B) = n(B \times A) = b \cdot a$, ýagny $a \cdot b = b \cdot a$ deňlik dogrudyr.

b) utgaşdyrma kanuny. Islendik a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ deňlik dogrudyr. Goý, $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ bolsun. Onda köpeltmegiň kesgitlemesine görä, $(a \cdot b) \cdot c =$ $= n[(A \times B) \times C]$ we $a \cdot (b \cdot c) = n[A \times (B \times C)](A \times B) \times C$ we $A \times (B \times C)$ köplükler dürlüdir, sebäbi olaryň birinjisi $[(a, b)c]$, ikinjisi bolsa, $[a, (b, c)]$ jübütlerden düzülendir. Ýöne $(A \times B) \times C$ we $A \times (B \times C)$ köplükler deň kuwwatly koplüklerdir. Şonuň üçin hem $n[(A \times B) \times C] = n[A \times (B \times C)]$ diýmek, onda $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ deňlik dogrudyr.

ç) köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanuny. Islendik a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin, $(a + b) \cdot c = ac + bc$ deňlik dogrudyr. Bu düzgüni $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ deňlikden peýdalanyp, subut ederis.

Goý, $n(A) = a$, $n(B) = b$, $n(C) = c$ we $A \cap B = \varnothing$ bolsun. Onda köpeltmegiň kesgitlemesine görä, $(a + b) \cdot c = n[(A \cup B) \times C]$. Onda (1) deňlige görä, $n[(A \cup B) \times C] = n[(A \times C) \cup (B \times C)]$. Soňra goşmagyň we köpeltmegiň kesgitlemelerinden peýdalanyp,

$$[(A \times C) \cup (B \times C)] = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc.$$

Diýmek, onda $(a + b) \cdot c = ac + bc$ deňlik dogrudyr.

d) köpeltmegiň aýyrmaga görä paýlaşdyrma kanuny.

Islendik a, b, c otrisatel däl bitin sanlar üçin, $a \geq b$ bolanda, $(a - b) \cdot c = ac - bc$ deňlik dogrudyr.

Bu düzgün $(A/B) \times C = (A \times C)/(B \times C)$ deňlik boýunça getirilip çykarylýar we edil ýokardaky ýaly subut edilýär. Köpeltmegiň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryny islendik sanly köpelijiler üçin peýdalanyp bolýar.

Paýlaşdyrma kanunlary köpeltmek amaly bilen goşmak we aýyrmak amallarynyň baglanyşygyny görkezýär.

4. Otrisatel däl bitin sanlar köplüginde bölmek

Bölmek amalynyň many-mazmunyna gowy göz ýetirmek üçin şu aşakdaky ýönekeý meselä seredeliň.

Mesele. Aýgözelde 8 sany alma bardy. Ol almalary jigileri Aýnur, Aknur, Muhammetnyýaz we Döwlede deň paýlap berdi. Aýgözel jigileriniň her birine näçe alma beripdir?

Meseläniň jogaby bölmek amaly bilen tapylýar, ýagny $8 : 4 = 2$. Aýgözel jigileriniň her birine 2 alma beripdir.

Meseläniň çözüwini seljereliň. Meselede 8 elementli köplüge seredilýär. Bu köplük 4 sany bölek köplüklere bölünýär, ýa-da başgaça aýtsak, 4 sany deňkuwwatly bölek köplükler alynýar.

Umumy görnüşde a otrisatel däl bitin san bilen b natural sanyň paýy şeýle tapylýar:

Kesgitleme. Goý, $a = n(A)$ we A köplük jübüt-jübütden kesişmeýän bölek köplüklere bölünen bolsun, eger b san A köplügiň bölek köplükleriniň sany bolsa, onda a we b sanlaryň paýy diýip, bölek köplükleriň her biriniň elementleriniň sanyna aýdylýar.

$a : b$ paýy tapmaklyga bölmek amaly berlipdir diýilýär, a sana bölüniji, b sana bölüji diýilýär.

Köplenç, bölmek amalynyň ýerine ýetirilişiniň dogrudygyny köpeltmek amalynyň üsti bilen barlaýarys, sebäbi bölmek amaly bilen köpeltmek amaly berk baglanyşykly. Onda bu baglanyşyk nämeden ybarat?

9. Sargyt № 1407 МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

Goý, $a = n(A)$ bolsun we A köplük b sany $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_b$ jübüt-jübütden kesişmeýän deň kuwwatly bölek köplüklere bölünen bolsun. Onda $c = a : b$ san, şeýle bölek köplükleriň her birindäki elementleriň sanyny görkezýär, ýagny

$$c = a : b = n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b).$$

Ýöne şerte görä $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b$, onda bu ýerden $n(A) = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$ bolar. Emma $A_1, A_2, \ldots, A_b$ bölek köplükler jübüt-jübütden kesişmeýär, diýmek, jemiň kesgitlemesine görä,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_b) = c + c + \ldots + c.$$

Köpeltmegiň kesgitlemesine görä, her biri c sana deň bolan b sany goşulyjylaryň jemi $c \cdot b$ köpeltmek hasyla deňdir.

Kesgitleme. a otrisatel däl bitin san bilen b natural sanyň paýy diýip, b san bilen köpeltmek hasyly a sana deň bolan otrisatel däl $c = a : b$ sana aýdylýar.

$$a : b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b.$$

Şeýlelikde, biz paýy köpeltmek hasylyň üsti bilen aňlatdyk. a we b natural sanlaryň paýy hemişe barmy? Bu soraga aşakdaky teorema jogap berýär.

Teorema. Iki sany a we b natural sanlarynyň paýynyň bolmagy üçin $b \leq a$ şertiň ýerine ýetmegi zerurdyr.

Subudy. Goý, a we b natural sanlaryň paýy bar diýeliň, ýagny $a = c \cdot b$ deňlik ýerine ýeter ýaly c san bardyr. Islendik c natural san üçin $1 \leq c$ gatnaşyk dogrudyr. Bu gatnaşygyň iki tarapyny hem b sana köpeldip, alarys $b \leq c \cdot b$. Onda, kesgitlemä görä, $c \cdot b = a$, diýmek, $b \leq a$.

$a = 0$ san bilen b natural sanyň paýy nämä deň? Kesgitlemä görä ol $c \cdot b = 0$ deňligi kanagatlandyrýan a sandyr. Eger $b \neq 0$ bolsa, onda $c \cdot b = 0$ deňlik $c = 0$ bolanda ýerine ýetýär. Diýmek, $0 : b = 0$, eger $b \in N$ bolsa.

Teorema. Eger a we b natural sanlaryň paýy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Bu teoremanyň subudy iki sany natural sanyň tapawudynyň ýeke-täkliginiň subut edilişi ýalydyr.

Indi otrisatel däl bitin sany 0 (nol) sana bölüp bolmaýandygyny görkezeliň.

Goý, $a \neq 0$ we $b = 0$ sanlar berlen bolsun. Bu a we b sanlaryň paýy bar diýip hasap edeliň. Onda paýyň kesgitlemesine görä, $a = c \cdot 0$ deňligi kanagatlandyrýan c san bardyr, onda $a = 0$ deňlik alnar. Emma şerte görä $a \neq 0$, ýöne biz şerte gapma-garşy netijäni aldyk. Diýmek, $a \neq 0$ we $b = 0$ sanlaryň paýy ýokdur.

Eger $a = 0$, $b = 0$ bolsa, onda a we b sanlaryň paýy bardyr, ýagny $0 = c \cdot 0$ deňlik c sanyň islendik bahasynda dogrudyr. Şonuň üçin matematikada nol sany nol sana bölmek bolmaýar diýip hasap edilýär.

Indi natural sanlary bölmegiň käbir häsiýetleri bilen tanşalyň. Natural sanlary bölmegiň bu häsiýetleri matematikanyň başlangyç kursunyň mazmuny bilen berk baglanyşyklydyr.

Jemi sana bölmek

Eger a we b sanlar c sana bölünýän bolsa, onda bu sanlaryň $a + b$ jemi hem c sana bölünýändir ýa-da başgaça aýtsak, $a + b$ jemi c sana bölmekden alnan paý. a we b sanlary c sana bölmekden alnan paýlaryň jemine deňdir.

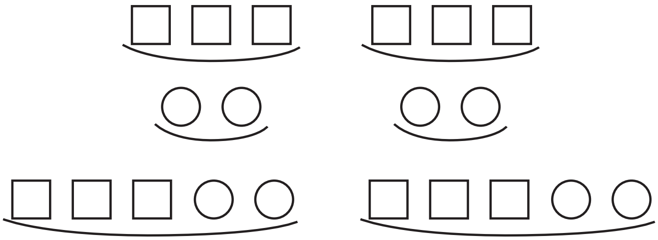
$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Subudy. a san c sana bölünýän bolsa, onda $m = a : c$ deňligi kanagatlandyrýan m san bardyr, bu ýerde $a = c \cdot m$. Edil şeýle $n = b : c$ natural san üçin $b = c \cdot n$ san bardyr. Onda $a + b = c \cdot m + c \cdot n = c(m + n)$. Bu bolsa $a + b$ jemiň c sana bölünýändigini görkezýär.

Onda, bu subut edilen düzgüni köplükler nazaryýetiniň üsti bilen aňladalyň.

Goý, $a = n(A)$; $b = n(B)$ we $A \cap B = \varnothing$ bolsun. Eger A we B köplükleriň her birini C sany deň kuwwatly bölek köplüklere bölsek, onda bu köplükleriň birleşmesini hem şeýle bölek köplüklere bölüp bolýar (*48-nji surat*).

Meselem:



$6 : 2 = 3$

$4 : 2 = 2$

$10 : 2 = 5$

48-nji surat

Sany köpeltmek hasyla bölmek

Eger a natural san b we c natural sanlara bölünýän bolsa, onda a sany b we c sanlaryň köpeltmek hasylyna bölmek üçin, a sany b sana bölüp, alnan netijäni c sana bölmek ýeterlikdir, ýagny $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$.

Sany iki sanyň paýyna köpeltmek

a sany b sany c sana bölmekden ýeten paýa köpeltmek üçin a san bilen bölünijini köpeldip, alnan köpeltmek hasyly bölüjä bölmek ýeterlikdir, ýagny $a \cdot (b : c) = (a \cdot c) : b$.

Galyndyly bölmek

37 san 8-e bölünmeýär. Ýöne $37 = 8 \cdot 4 + 5$ deňlik ýerine ýeter ýaly 4 we 5 sanlar bardyr. Beýle ýagdaýda 37 san 8-e galyndyly bölünýär hem-de 4-e doly däl paý, 5-e bolsa galyndy diýilýär.

Kesgitleme. a otrisatel däl bitin sany b natural sana galyndyly bölmek diýmek, $a = bq + r$ we $0 \leq r < b$ şerti kanagatlandyrýan q we r sanlary tapmak diýmekdir.

Galyndynyň bu kesgitlemeden gelip çykýan aýratynlygyna seredeliň. Galyndy b bölüjiden kiçi natural sandyr.

Meselem. Otrisatel däl bitin sanlary 5-e galyndyly bölende galyndy-da 0, 1, 2, 3, 4 sanlaryň haýsy-da bolsa biriniň bolmagy mümkin.

a sany b sana galyndyly bölmek amaly hemişe ýerine ýetýärmi? Bu soraga subutsyz kabul ediljek şu aşakdaky teorema jogap berip bilýär.

Teorema. Islendik otrisatel däl bitin a san we b natural san üçin $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$ şerti kanagatlandyrýan q we r otrisatel däl bitin sanlar bardyr. Bu häsiýete eýe bolan otrisatel däl bitin sanlaryň (q, r) jübüti ýeke-täkdir.

§4. Hasaplaýyş sistemalary

1. Hasaplaýyş sistemalary barada düşünje

San düşünjesiniň ýüze çykmagy bilen, sanlary ýazmak zerurlygy hem ýüze çykdy. Sanlary ýazmagy öwrenmekden öň adamlar sanlary atlandyrmagy we olary sanamagy başarypdyrlar. Şonda olar öň belläp geçimiz ýaly, dürli taýajyklardan, ýüpüň düwünlerinden, daşjagazlardan we ş.m. peýdalanypdyrlar. Ýöne bu usul az sanly zatlary deňeşdirmäge mümkinçilik berip, uly sanlary sanamakda amatly bolmandyr. Şonuň ýaly-da beýle aralyk zatlaryň kömegi bilen hasaplamalary geçirmek hem mümkin bolmandyr. Şonuň üçin hem eliň we aýagyň barmaklaryndan peýdalanyp, sanamak usulyna geçipdirler. Barmaklaryň kömegi bilen hasaplamak usuly dürli hasaplaýyş sistemalarynyň: bäşlik, onluk ýigrimilik we ş.m. hasaplaýyş sistemalarynyň ýüze çykmagyna getiripdir.

Iň irki hasaplaýyş sistemasy ikilik sistemadyr diýip hasap edilýär. Ýagny adamlar heniz barmaklaryny däl-de, iki elini hasap birligi hökmünde ulanan döwründe ýüze çykan hasaplaýyş sistemasy ikilik hasaplaýyş sistemasydyr.

2. Pozision däl hasaplaýyş sistemalary

Bize gelip ýeten matematiki ýazgylaryň iň irkisi gadymy Wawilonda mundan 5000 ýyl çemesi ozal ýazylan ýazgylardyr. Alymlaryň çaklamagyna görä Wawilonlylar hem bu ýazgylaryň köpüsini has gadymy halk bolan şumerlerden alypdyrlar. Şeýle-de, gadymy Müsürde 4000 ýyl töweregi öň ýazylan ýazgylar saklanyp galypdyr. Gadymy ýazgylaryň biziň günlerimize çenli has gowy saklanyp galany Rim sifrleridir, sebäbi Rimliler Günbatar Ýewropanyň köp ýurtlaryny basyp alypdyrlar we bu ýurtlarda-da sanlary ýazmagyň Rim sistemasy uzak wagtlap saklanypdyr.

Sanlary ýazmagyň Rim sistemasynyň esasynda I, V, X, L, C, D, M belgiler ýatýandyr we olar degişlilikde, 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 sanlary aňladýar. Şeýlelikde, bu sistema barmaklardan peýdalanyp sanamak usuly bilen baglanyşykly bolup, ol bäşlik we onluk hasaplaýyş sistemalarynyň käbir alamatlaryny özünde saklaýar. Meselem, I belgi bir barmagy, V – baş barmagy X – iki eliň on barmagyny aňladýar. C belgi 100, M belgi bolsa 1000 sany aňladyp, ol degişlilikde latyn, dilindäki *centum* – ýüz we *mille* – müň diýen sözleriň baş harplarydyr.

Rim sifrleri bilen sanlaryň ýazylyşyna seredeliň. Meselem, 37 sany üç sany onluk, bir sany bäşlik we iki sany birlik sifrleriň kömegi bilen ýazyp bolýar, ýagny XXXVII. Indi 678-natural sany rim sifrleri bilen ýazalyň. DCLXXVIII, ýagny bir sany 500, bir sany 100, bir sany 50, iki sany 10, bir sany 5 we üç sany 1 sifrlerden ybarat.

Rim sifrleriniň ýazylyş sistemasyna pozision däl hasaplaýyş sistemasy diýilýär, sebäbi bu sistemada san ýazylanda, ondaky sifrler ýerleşen ýerine görä (pozisiýasyna görä) san baha alman, eýsem, hemişe şol bir sany aňladýar. Meselem IX, XIX, XI, sanlarda I belgi setiriň başynda, setiriň ortasynda, setiriň ahyrynda gelse-de şol bir sany – birligi aňladýar. Ýagny beýle sistemada islendik sifr nirede ýerleşendigine (pozisiýasyna) bagly däldir. Şonuň üçin hem bu sistema pozision däl hasaplaýyş sistema diýilýär.

3. Pozision hasaplaýyş sistemalary

Pozision hasaplaýyş sistemasynyň döredilmegi matematika ylmynyň ösmegine ägirt uly itergi berdi. Pozision hasaplaýyş sistemasynda şol bir belgi (şol bir sifr) ýerleşen ýerine görä (pozisiýasyna görä) dürli san bahalary alýar. 321, 312, 123 sanlarda 1 sifr ýerleşen ýerine (pozisiýasyna) görä dürli sanlary aňladýar. Meselem, 321 sanda 1 sifr setiriň ahyrynda geldi we ol 1 sany aňladýar, 312 sanda bolsa sagdan ikinji orunda ýerleşýär, şonuň üçin ol 10-luk sany aňladýar hem-de 123 sanda ol sagdan üçünji orunda ýerleşeni üçin 100 diýip okalýar. Bu ýerden görnüşi ýaly, 1 sifr ýerleşen ýerine (pozisiýasyna) görä dürli bahalary aldy. Şonuň üçin beýle hasaplaýyş sistemalaryna pozision hasaplaýyş sistemalary diýilýär.

Ilkinji pozision hasaplaýyş sistemasy gadymy Wawilonda peýdalanylan altmyşlyk sistemasydyr. Altmyşlyk sistemasynyň käbir mysallary biziň günlerimize çenli saklanyp galypdyr. Meselem, bir sagatda 60 minut, bir minutda 60 sekunt bolmagy, şeýle-de töweregiň 360º-a gradusa bölünmegi 60-lyk sistema mysal bolup biler.

Hasaplanyş sistemalarynyň has giň ýaýrany iki eliň on barmagyna esaslanýan onluk hasaplaýyş sistemasydyr. Onluk hasaplaýyş sistemasy baradaky ilkinji maglumatlar b.e. öňki III asyrda ýaşap geçen meşhur gadymy grek alymy Arhimediň «Psammit» («Çägeleri sanamak») atly kitabynda duş gelýär.

Matematika ylmy V-XII asyrlarda Hindistanda we ýakyn Gündogar ýurtlarynda güýçli depginde ösdi.

Hindistanda we Hytaýda matematika Müsür bilen bir döwürde, mundan takmyndan bäş müň ýyl çemesi ozal döredi diýlip hasap edilýär. Matematikanyň taryhyny öwrenýän alymlaryň çaklamalaryna görä hindi we grek matematika ylmynyň özara baglanyşygy bar. Greklerde geometriýa uly ösüşe eýe bolan bolsa Hindistanda matematikanyň arifmetika, algebra, trigonometriýa ýaly şahalary uly ösüşe eýe boldy.

Hindi alymlarynyň matematika ylmyna goşan ägirt uly goşandy, ol hem biziň häzirki döwürde giňden peýdalanýan onluk hasaplaýyş sistemasyny oýlap tapanlygydyr. Şeýle-de, nol sany ilkinji bolup hindi matematikleri peýdalanyp başladylar. Ilkibaşda nol sanyň ýerine «boş» diýen sözi ulanypdyrlar we sanyň içinde ony nokat bilen belläpdirler. Soňra nokadyň ýerine tegelek belgi girizipdirler. Tegelek hindi dilinde «sunýa» diýen sözdür. Bu sözi arap diline terjime edende «sifr» diýip alypdyrlar. Soňra kem-kemden diňe nol sana «sifr» diýmän, eýsem, ähli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 birbelgili sanlary «sifr» diýip atlandyrýarlar.

Onluk hasaplaýyş sistemasynda sanlary ýazmakda peýdalanylýan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sifrleri hem hindi matematikleri oýlap tapypdyr.

Onda näme üçin hindi alymlarynyň oýlap tapan sifrlerini, köplenç, arap sifrleri diýip atlandyrýarlar? Sebäbi Arabystan ýarym adasynda dörän arap döwleti 200 ýylyň dowamynda özünden ylmy, medeni ösüşi boýunça has ýokarda durýan Demirgazyk Hindistany, Müsüri, Orta Aziýany, Mesopotamiýany, Eýrany, Demirgazyk Afrikany basyp alýar. Araplar ylmyň ähmiýetine örän gowy düşünipdirler. Olar basyp alan ýurtlarynyň ylmy açyşlaryny öwrenip, arap diline terjime edipdirler.

Arap matematikleri gadymy alymlaryň ylmy işlerini diňe bir aýawly saklaman, eýsem, olaryň ösmegine, kämilleşmegine uly goşant goşupdyrlar. Şeýlelikde, hindileriň oýlap tapan onluk hasaplaýyş sistemasy dünýäniň köp ýurtlaryna araplaryň kömegi bilen ýaýrapdyr. Şonuň üçin hindileriň matematika ylmyna beren 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sifrleri hem ýalňyşlyk bilen arap sifrleri adyny alypdyr.

4. Natural sanyň ýazgysyny onluk hasaplaýyş sistemada ýazmak

n natural sany onluk hasaplaýyş sistemada

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_0$$

görnüşde ýazýarys. Bu ýerde n_k, n_{k-1} … n_0 otrisatel däl bitin sanlar bolup, olar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 san bahalary alýar. Şonda $n_k \neq 0$. Ony gysgaça $n = \overline{n_k n_{k-1} ... n_0}$ görnüşde ýazýarlar. Ýokarsyndaky çyzyk, n_k, n_{k-1} … n_0 sanlary köpeltmek hasylyndan tapawutlandyrmak üçin bellenýär. Eger ol harp bilen ýazylman sanlar bilen ýazylsa, onda ýokarsynda çyzyk gerek däl. Meselem, $4705 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$.

Islendik n natural san üçin, $n < 10^n$ deňsizlik ýerine ýetýändir. Hakykatdan-da eger $k < \ell$ bolsa, onda $10^k < 10^\ell$, şonuň üçin hem 10, 10^2, …, 10^n sanlar jübüt-jübütden tapawutlydyr. Şonuň üçin bu sanlaryň iň ulusy n sandan uludyr, ýagny $n < 10^n$, $10^s < n$ görnüşli natural sanlary A_n diýip belläris. Ýöne $n < 10^n$ bolýandygy üçin, A_n köplüge degişli ähli s sanlar üçin, $s \leq n$, onda A_n köplükde iň uly san bardyr. Ony k bilen belläris, onda $10^k \leq n \leq 10^{k+1}$. Indi islendik n natural sanyň onluk ýazgysynyň bardygyny subut ederis. $k = 0$ bolanda $1 \leq n < 10$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny $k = 0$ bolanda n san bir sifriň kömegi bilen ýazylýan birbelgili sandyr. 10^k sandan kiçi ähli natural sanlar üçin, onuň onluk ýazgysy subut edilendir diýip, 10^k we 10^{k+1} sanlaryň arasyndaky n sany alarys, $10^k \leq n \leq 10^{k+1}$. Eger n san 10^k sana bölünýän bolsa, onda $n = n_k \cdot 10^k$; $1 \leq n_k < 10$. Şeýlelikde biz, n sanyň onluk ýazgysyny alarys:

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_0. \qquad (1)$$

Biz 10-dan kiçi ähli sanlaryň onluk ýazgysynyň bardygyny subut etdik we şonuň netijesinde $10^k \leq n < 10^{k+1}$ görnüşli ähli n natural sanlaryň onluk ýazgysynyň bardygyna göz ýetirdik. Diýmek, ähli natural sanlaryň onluk ýazgysy bardyr.

5. Sanlary dürli hasaplanyş sistemalarynda ýazmak

Biz öň onluk hasaplanyş sistemalary bilen bir hatarda onikilik, ýigrimilik, altmyşlyk hasaplaýyş sistemalarynyň hem bardygyny aýdypdyk. Häzirki döwürde aşa çalt işleýän hasaplaýyş maşynlarynda ikilik, sekizlik sistemalaryndan peýdalanýarlar. Sanlary ýazmagyň ähli sistemalary şol bir düzgüne esaslanýandyr. Sistemanyň esasyny-birlikden uly P natural sany saýlap alýarlar. Onluk hasaplaýyş, sistemasynda sanlary ýazmagyň düzgüninden peýdalanyp, islendik n natural sany

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + ... + n_1 p + n_0$$

jem görnüşinde ýazmak mümkin. Meselem, $n = 475_8$ sanyň ýazgysyny $n = 4 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 5 = 256 + 56 + 5 = 317$ görnüşde ýazyp bolýar. P sanyň özüni $p = 1 \cdot p + 0$ ýazarys, onda ol p-nji hasaplaýyş sistemada 10_p görnüşde ýazylýar. Şeýle-de, p^k sany $p^k = 1 \cdot p^k + 0 \cdot p^{k-1} + ... + 0$ ýazyp bolýar. Onda bu ýazgyny $10...0_p$ (k sany nol) görnüşde ýazarys.

Başgaça aýtsak, p-nji hasaplaýyş sistemada 10_p ýazgy sistemanyň esasyny aňladýar, ýagny p san, $10...0_p$ (k sany nol) ýazgy bolsa p^k san p-nji hasaplaýyş sistemada sanlary ýazmak üçin, gerek bolan sifrleriň sany p sana deňdir. Ol 0, 1, ..., $p - 1$ sanlardyr.

Şol bir natural sany hasaplaýyş sistemalaryň islendiginde ýazmak mümkin. Şonuň üçin, bir hasaplaýyş sistemadan başga bir hasaplaýyş sistema geçmegi öwrenmek ýeterlikdir. Islendik hasaplaýyş sistemadan başga hasaplaýyş sistema geçilende, ilki berlen sistemadan onluk hasaplaýyş sistema geçilýär we soňra onluk sistemadan gözlenýän hasaplaýyş sistemasyna geçmek mümkin.

1-nji mesele. Goý, n sanyň $\overline{n_k...n_0}_p$ p-nji ýazgysy berlen bolsun. N sany onluk hasaplaýyş sistemada ýazmaly. Onuň üçin $\overline{n_k...n_0}_p$ ýazgynyň ýerine $n_k p^k + ... + n_0$ ýazyp, soňra n_k, ..., n_0 we p ýazgylary olaryň onluk ýazgysy bilen çalşyp, degişli amallary ýerine ýetirmeli.

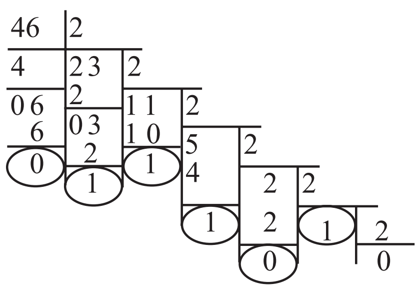
1-nji mysal. 362_7 sanyň onluk ýazgysyny ýazmaly, ýagny 362_7 sany onluk hasaplaýyş sistema geçmeli.

$362_7 = 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 = 191$. Diýmek, $362_7 = 191$.

2-nji mesele. Onluk hasaplaýyş sistemada berlen sany p-nji sistemada ýazmaly.

Goý, $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$ san berlen bolsun. Bu sany $n = p \cdot (n_k p_{k-1} + \ldots + n_1) + n_0$ görnüşde ýazmaly. Bu ýerde $0 \leq n_0 < p$, onda n_0 san n sany p sana bölende galan galyndy. Soňra şeýle usul bilen n_1, n_2 we ş.m. galyndylary taparys.

2-nji mysal. 46 sanyň ikilik ýazgysyny tapmaly. Onluk hasaplaýyş sistemada berlen sany başga sistemada ýazmak üçin, bu sany geçilýän sistemanyň esasyna galyndyly bölmek usuly bilen böleris. Onda 46 sany 2-ä galyndyly bölüp, her gezek galyndynyň daşyny tegeläp belläris we iň soňunda daşy tegelenen galyndylary yzdan öňe tarap ýazarys:

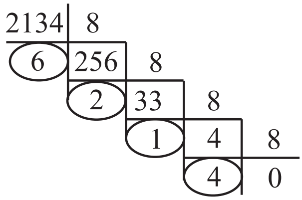


Daşy tegelenen galyndylary iň soňkusyndan ýazyp başlarys we $46 = 101110_2$ deňlik alarys.

3-nji mysal. 32014_5 sany sekizlik sistemada ýazmaly. Onuň üçin ilki bu sany onluk sistemada ýazarys:

$$32014_5 = 3 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4 = 2134.$$

32014_5 sanyň onluk ýazgysy 2134 sandyr, ýagny $32014_5 = 2134$. Indi 2134-i sekizlik sistema geçeris:



Diýmek, $32014_5 = 2134 = 4126_8$.

Elektron hasaplaýjy maşynlaryň aglaba köpüsi ikilik sistemada işleýär. Olara programma düzmek üçin, bolsa, sekizlik sistema amatly hasap edilýär. Onda onluk sistema geçmän, gönüden-göni ikilik sistemadan sekizlik sistema we tersine, sekizlikden ikilik sistema geçmek üçin ýörite tablisadan peýdalanýarlar (*28-nji tablisa*).

28-nji tablisa

sekizlikde	0	1	2	3	4	5	6	7
ikilikde	000	001	010	011	100	101	110	111

Meselem, 25420_8 sany ikilik sistema geçmeli. Onuň üçin tablisa boýunça ikilik sistemadaky sifrleriň üçlügini ýazmak ýeterlikdir.

$$25420_8 = 10\ 101\ 100\ 010\ 000_2.$$

6. Onluk we beýleki hasaplaýyş sistemalarda goşmak

Eger a we b birbelgili sanlar bolsa, onda olaryň jemini tapmak üçin $n(A) = a$, $n(B) = b$, $A \cap B = \varnothing$ şerti kanagatlandyrýan A we B köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanyny tapmak ýeterlikdir. Şeýle jemleriň ählisini birbelgili sanlary goşmagyň tablisasy diýlip atlandyrylýan ýörite tablisada ýazýarlar.

Eger a we b köpbelgili sanlar bolsa, onda goşmak amalynyň mazmuny üýtgemän galýar, ýöne indi bu sanlaryň jemini A we B köplükleriň birleşmesindäki elementleriň sanyny sanamak usuly bilen tapyp bolmaýar.

Mekdep matematikasyndan bilşimiz ýaly, köpbelgili sanlar «sütünleýin» goşulýar. Onda «sütünleýin» goşmagyň teoretiki esaslary nähili?

3526 + 273 jeme seredeliň. Ondaky goşulyjylary $3526 + 273 = (3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6) + (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3)$ görnüşde ýazarys. Bu alnan aňlatmada ýaýlary açyp birlikler birlikleriň, onluklar onluklaryň ýanynda we ş.m. bolar ýaly täzeden ýazarys. Şonda goşmagyň orun çalşyrma we utgaşdyrma kanunlaryndan peýdalanarys we iň soňunda şu aşakdaky görnüşli ýazgylary alarys. $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 3 + 6$ onda bu ýerden $3 \cdot 10^3 + (2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + (3 + 6)$ ýazarys $3 \cdot 10^3 + (2 + 5) \cdot 10^2 + (7 + 2) \cdot 10 + (3 + 6) = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$.

29-njy tablisa

$p = 2$

$a \backslash b$	0	1
0	0	1
1	1	10

Bu aňlatma 3799 natural sanyň onluk ýazgysydyr.

Beýleki hasaplaýyş sistemalarda-da, goşmak amaly edil onluk sistemadaky ýaly ýerine ýetirilýär. Haýsy sistemada goşmak amaly ýerine ýetirilýän bolsa, şol sistema üçin birbelgili sanlary goşmagyň tablisasyny gurmaly. Meselem, ikilik sistema üçin ol tablisa şu görnüşde bolar (*29-njy tablisa*) $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 10$, islendik sistemada şol sistemanyň esasyna deň bolan şifr ýokdur, ýagny $2_2 = 10_{10}$ şonuň üçin hem $1 + 1 = 2$, ony $1 + 1 = 10$ diýip ýazarys.

Indi üçlük sistema üçin goşmagyň tablisasyny guralyň:

$0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$; $0 + 2 = 2$; $1 + 1 = 2$; $1 + 3 = 10$ sebäbi $3_3 = 10_{10}$; $2 + 2 = 4$. Bu ýerde 4 natural sany $4 = 3 + 1$ görnüşinde ýazarys: $4 = 3 + 1 = 10 + 1 = 11$. Diýmek $4 = 11$ (*30-njy tablisa*).

30-njy tablisa

$p = 3$

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Sekizlik sistema üçin goşmagyň tablisasyny guralyň (*31-nji tablisa*).

31-nji tablisa

$p = 8$

$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

$8_8 = 10_{10}$
$9 = 8 + 1 = 10 + 1 = 11$
$10 = 8 + 2 = 12$
$11 = 8 + 3 = 13$
$12 = 8 + 4 = 14$
$13 = 8 + 5 = 15$
$14 = 8 + 6 = 16$

tablisadan peýdalanyp, ikilik, üçlük we sekizlik sistemalarda goşmak amalyny ýerine ýetireliň.

$$+\begin{array}{r} 101111011_2 \\ 11011101_2 \\ \hline 1001111000_2 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 121\,011_3 \\ 221020_3 \\ \hline 220201_3 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 103571_8 \\ 235746_8 \\ \hline 341537_8 \end{array}.$$

7. Onluk we beýleki hasaplaýyş sistemalarda aýyrmak

Goý, 7845 – 342 tapawudy tapmaly bolsun. Kemeldijiniň öňünden nol sany ýazyp, kemeliji bilen kemeldijini sifrleriniň sanyny deňleşdirip ýazarys:

$$7845 = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 5 + 5 \quad \text{we}$$

$$0342 = 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2.$$

Onda, 7845 – 0342 tapawudy

$$7845 - 0342 = (7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5) -$$
$$- (0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2) = 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 +$$
$$+ 4 \cdot 10 + 5 - 0 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 - 2$$

ýazarys. Jemiň we tapawudyň düzgünlerinden peýdalanyp, bu aňlatmany

$$7845 - 0342 = (7 - 0) \cdot 10^3 + (8 - 3) \cdot 10^2 + (4 - 4) \cdot 10 + (5 - 2) =$$
$$= 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 3 = 7503$$

görnüşde ýazarys.

Diýmek, 7845 we 342 sanlaryň tapawudy 7503 sandyr.

$$\begin{array}{r} - 3712_8 \\ 645_8 \\ \hline 3045_8 \end{array}$$

Beýleki hasaplaýyş sistemalarda hem aýyrmak amaly edil onluk sistemadaky ýaly ýerine ýetirilýär. Şonda haýsy sistemada aýyrmak amaly ýerine ýetirilýän bolsa, şol sistema üçin birbelgili sanlary goşmagyň tablisasyndan peýdalanýarys. Meselem, sekizlik sistemada 3712_8 sandan 645_8 sany aýyrmaly. Sekizlik sistemada birbelgili sanlary goşmagyň tablisasyndan peýdalanýarys: $5_8 + 5_8 = 12_8$, onda $12_8 - 5_8 = 5_8$. Edil şeýle $10_8 - 4_8 = 4_8$.

8. Onluk we beýleki hasaplaýyş sistemalarda köpeltmek

Eger a we b birbelgili sanlar bolsa, onda olaryň köpeltmek hasylyny tapmak üçin, $n(A) = a$, $n(B) = b$ bolýan A we B köplükleriň $A \times B$ Dekart köpeltmek hasylyndaky elementleriň sanyny tapmak ýeterlikdir.

Bu köpeltmek hasyllaryň ählisi birbelgili sanlary köpeltmegiň tablisasy diýlip atlandyrylýan tablisada ýazylýar.

Eger a we b köpbelgili sanlar bolsa, onda olar «sütünleýin» köpeldilýär. Beýle köpeltmegiň teoretiki esasy nähili?

$$\begin{array}{r} \times\, 426 \\ 123 \\ \hline 1287 \\ +852 \\ 426 \\ \hline 52398 \end{array}$$

Görnüşi ýaly, 426 natural sany 123 sana köpeltmek üçin 426-sy 3,2,1 sanlara köpeltmek hem-de 426-sy 2-ä köpeldilende, alnan 852 sanyň birlik sanyny 1278 sanyň onluk sanynyň aşagyndan we ş.m. görnüşde ýazdyk we iň soňunda köpbelgili sanlary goşduk.

Onda, köpbelgili sany birbelgili sana köpeltmeklige seredeliň. 426 sany 3-e köpeltmek üçin, 426-y $4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$ görnüşde ýazarys. Onda, $426 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6) \cdot 3$ köpeltmegiň goşmaga görä paýlaşdyrma kanunyndan peýdalanyp,

$(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 6 \cdot 3$ ýazarys. Bu ýerden $12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 18 \Rightarrow \Rightarrow (10 + 2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (10 + 8) \Rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 10 + 8 \Rightarrow \Rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$. Bu alnan aňlatma 1278 sanyň onluk ýazgysydyr. Onda $426 \cdot 3 = 1278$.

Beýleki hasaplaýyş sistemalarda hem köpeltmek amaly edil onluk sistemadaky ýaly ýerine ýetirilýär. Ýöne köpeltmek amaly haýsy sistemada ýerine ýetirilýän bolsa, şol sistema üçin birbelgili sanlary köpeltmegiň tablisasyny ýazmaly.

Ikilik (*32-nji tablisa*), üçlük (*33-nji tablisa*) we sekizlik (*34-nji tablisa*) sistemalar üçin birbelgili sanlary köpeltmegiň tablisasyny ýazalyň.

32-nji tablisa

$p = 2$

a \ b	0	1
0	0	1
1	0	1

$2_2 = 10_{10}$
$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

33-nji tablisa

$p = 3$

a \ b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

$3_3 = 10_{10}$
$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$
$2 \cdot 2 = 4 = 3 + 1 = 10 + 1 = 11$

34-nji tablisa

$p = 8$

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11

$8_8 = 10_{10}$;
$2 \cdot 5 = 10 = 8 + 2 = 10 + 2 = 12$;
$2 \cdot 6 = 12 = 8 + 4 = 14$;
$2 \cdot 7 = 14 = 8 + 6 = 16$;
$3 \cdot 5 = 15 = 8 + 7 = 17$;
$3 \cdot 6 = 18 = 8 + 8 + 2 = 22$;
$3 \cdot 7 = 21 = 8 + 8 + 5 = 25$;

3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

$4 \cdot 4 = 16 = 8 + 8 = 20;$
$4 \cdot 5 = 20 = 8 + 8 + 4 = 24;$
$4 \cdot 6 = 24 = 8 + 8 + 8 = 30;$
$4 \cdot 7 = 28 = 8 + 8 + 8 + 4 = 34;$
$5 \cdot 5 = 25 = 8 + 8 + 8 + 1 = 31;$
$5 \cdot 6 = 30 = 3 \cdot 8 + 6 = 36;$
$5 \cdot 7 = 35 = 4 \cdot 8 + 3 = 43;$
$6 \cdot 7 = 42 = 5 \cdot 8 + 2 = 52;$
$7 \cdot 7 = 49 = 6 \cdot 8 + 1 = 61.$

9. Onluk we beýleki hasaplaýyş sistemalarda bölmek

Sanlary bölmegiň düzgüni diýlende galyndyly bölmek hakynda gürrüň edilýär.

Birbelgili sanlary we 89-dan uly bolmadyk ikibelgili sanlara bölmek üçin birbelgili sanlary köpeltmegiň tablisasyndan peýdalanýarys.

Goý, 256-ny 6 galyndyly bölmeli bolsun. Onda $60 < 256 < 600$, diýmek, doly däl paý 10 we 100 sanlaryň aralygynda ýerleşýändir. Doly däl paýy has anyklamak üçin köpeltmek tablisasyndan peýdalanalyň: $6 \cdot 40 = 240$; $6 \cdot 50 = 300$, onda $240 < 256 < 300$. Onda doly däl paý 40 we 50 sanlaryň aralygyndadyr. Bu bolsa doly däl paýyň 4 bolýandygyny aňladýar, ýagny $q = 4 \cdot 10 + q_0$. Bu bolsa $(40 + q_0) \cdot 6 \leq 256 < (40 + q_0 + 1) \cdot 6$ bolýandygyny, ýagny $(40 + q_0) \cdot 6 \leq 256 < 240 + 6(q_0 + 1)$ deňsizligiň ýerine ýetýändigini görkezýär. Bu ýerden $6q_0 \leq 16 < 6(q_0 + 1)$ deňsizligi alarys. Köpeltmek tablisany ikinji gezek ulanyp, $q_0 = 2$-ni alarys. Onda 42 doly däl paýdyr, galyndyny $256 - 42 \cdot 6 = 4$-i taparys. Şeýlelikde, $256 = 42 \cdot 6 + 4$ ýazgyny aldyk.

Beýleki hasaplaýyş sistemalarda hem bölmek amaly edil onluk hasaplaýyş sistemasyndaky ýaly ýerine ýetirilýär. Bölmek amaly haýsy sistemada ýerine ýetirilýän bolsa, şol sistemada birbelgili sanlary köpeltmegiň tablisasyndan peýdalanýarys.

§5. Otrisatel däl bitin sanlaryň bölünijiligi

1. Bölünijilik gatnaşygy we onuň häsiýetleri

Biz şu bölümde Z_0 otrisatel däl bitin sanlar köplüginde bölünijilik gatnaşygyna seredeliň. Şonda «otrisatel däl bitin sanlar» diýen sözlemi gysgalyk üçin «sanlar» diýip alarys.

Eger-de $a = b \cdot c$ deňlik ýerine ýeter ýaly c san bar bolsa, onda a san b sana bölünýär diýilýär we a b bellenýär. Meselem, $8 \vdots 2$, sebäbi $8 = 2 \cdot 4$.

Bölünijilik gatnaşygynyň käbir häsiýetlerine seredeliň:

1) 0 san islendik sana bölünýändir $(\forall b \in Z_0)\ 0 \vdots b$.

Hakykatdanda islendik $b \in Z_0$ san üçin, $0 = b \cdot 0$. $0 \in Z_0$, onda kesgitlemä görä $0 \vdots b$;

2) 0 sandan tapawutly (0 sana deň bolmadyk) hiç bir san 0 sana bölünmeýär $(\forall a \in Z_0)\ \overline{a \vdots 0}$.

Hakykatdanda, goý $a \neq 0$ bolsun. Onda ähli $b \in Z_0$ san üçin, $0 \cdot b = 0$ deňlik dogrudyr. Bu ýerden hiç bir b san üçin $a = 0 \cdot b$ deňligiň ýerine ýetmeýändigi gelip çykýar. Diýmek, a san 0 sana bölünmeýär;

3) islendik san 1-e bölünýär $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots 1$.

Hakykatdan-da $a \in Z_0$ san üçin $a = a \cdot 1$ deňlik dogrudyr. Sebäbi $1 \in Z_0$, onda a san 1-e bölünýär;

4) bölünijilik gatnaşygy refleksiwdir, ýagny islendik san öz-özüne bölünýär $(\forall a \in Z_0)\ a \vdots a$.

Hakykatdan-da $a \in Z_0$ san üçin, $a = a \cdot 1$ deňlik dogry. Onda $1 \in Z_0$, diýmek, $a \vdots a$;

5) eger $a \vdots b$ we $a > 0$ bolsa, onda $a \geq b$.

Hakykatdan-da, eger $a \vdots b$ bolsa, onda $a = b \cdot c$, $c \in Z_0$. Şonuň üçin $a - b = bc - b = b(c - 1)$. Ýöne $a > 0$, şonuň üçin $c > 0$. Z_0 köplükden alnan islendik san 1-den kiçi däldir, onda $c \geq 1$, diýmek, $b(c - 1) \geq 0$. Bu ýerden $a - b \geq 0$, ýagny $a \geq b$ bolýandygy gelip çykýar;

6) bölünijilik gatnaşygy antisimmetrikdir, ýagny $(\forall a, b \in Z_0)$ $(a \vdots b \wedge b \vdots a) \Rightarrow (a = b)$.

Bu ýerde iki dürli ýagdaýyň bolmagy mümkin:

a) a we b sanlaryň ikisi hem 0 sandan tapawutly.

10. Sargyt № 1407 **МАША**
Кор-ра после МНО 25.11.15

b) a we b sanlaryň iň bolmanda biri 0-a deň.

Eger $a > 0$ we $b > 0$ bolsa, onda (5) häsiýete görä $a \vdots b$ we $b \vdots a$ gatnaşygyň ýerine ýetýändiginden $a \geq b$ we $b \geq a$ gelip çykýar. Bu bolsa diňe $a = b$ şert ýerine ýetende dogrudyr. Indi $a = 0$ bolsun. Onda (2) häsiýete görä $b = 0$ bolar, sebäbi diňe şu ýagdaýda b san a sana bölünýär. Diýmek, $a = b$ deňlik ýerine ýetýär.

7) bölünijilik gatnaşygy tranzitiwdir, ýagny eger $a \vdots b$ we $b \vdots c$ bolýandygyndan $a \vdots c$ gelip çykýar.

$$(\forall a, b, c \in Z_0)(a \vdots b \wedge b \vdots c) \Rightarrow a \vdots c.$$

Hakykatdan-da, $a \vdots b$ üçin, $a = b \cdot k$ deňlik ýerine ýeter ýaly k san bardyr. Edil şeýle $b \vdots c$ üçin, $b = c \cdot \ell$ bolar ýaly ℓ san bardyr. Onda, $a = bk = (c\ell)k = c(\ell k)$ deňligi alarys. Bu ýerde $\ell\, k$ san ℓ we k bitin otrisatel däl sanlaryň köpeltmek hasylydyr, diýmek, $\ell\, k$ san hem bitin otrisatel däl sandyr. Diýmek, a san c sana bölünýändir.

Jemiň we köpeltmek hasylyň bölünijiligi

1) eger a we b sanlar c sana bölünýän bolsa, onda olaryň jemi hem c sana bölünýändir $(\forall a, b, c)(a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow (a + b) \vdots c$.

Hakykatdan-da $a = ck$ we $b = c\ell$ şertleri kanagatlandyrýan k we ℓ sanlar bardyr. Onda $a + b = ck + c = c(k + \ell)$, $k + \ell$ bitin otrisatel däl san, diýmek, $(a + b) \vdots c$.

Bu subut edilen tassyklama goşulyjylaryň sany ikiden köp bolanda hem ýerine ýetýär.

Eger $a_1, a_2, ..., a_n$ sanlaryň her biri c sana bölünýän bolsa, onda olaryň jemi $a_1 + a_2 +...+ a_n$ hem c sana bölünýär.

Eger a we b sanlar c sana bölünýän bolsa we $a \geq b$ bolsa, onda $a - b$ tapawut c sana bölünýändir. Bu tassyklama ýokardaky ýaly subut edilýär.

2) eger a san c sana bölünýän bolsa, onda ähli $ax \cdot (x \in Z_0)$ görnüşli sanlar hem c sana bölünýändir.

Hakykatdan-da şerte görä $a =$ ck, $k \in Z_0$. Onda $ax = (ck)x = c(kx)$, $kx \in Z_0$, diýmek, $ax \vdots c$.

Bu ýerde (1) we (2) häsiýetlerden şu aşakdaky tassyklama gelip çykýar.

Eger $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sanlar c sana bölünýän bolsa we $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nähili sanlar bolsa-da $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ san c sana bölünýändir.

Hakykatdan-da, eger $a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n$ san (2) häsiýete görä c sana bölünýän bolsa, onda $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ sanlaryň jemi (1) häsiýete görä c sana bölünýär;

3) eger ac san bc sana bölünýän bolsa we $c \neq 0$ bolsa, onda a san b sana bölünýär.

Bu ýerde $ac = (bc)k$ deňlik ýerine ýeter ýaly k san bardyr, şonuň üçin hem $ac = (bk)c$, $c \neq 0$ üçin $a = bk$ deňligiň dogrudygy gelip çykýar. Onda $a \vdots b$.

2. Bölünijilik nyşanlary

Käwagtlarda bölmek amalyny ýerine ýetirmän, x natural sanyň a natural sana bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitlemeli bolýar.

Bölmek amalyny ýerine ýetirmän, x natural sanyň a natural sana bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitläp bolýan düzgüne bölünijilik nyşany diýilýär. Başgaça aýtsak, islendik natural sanyň berlen bölüjä bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini bölmek amalyny ýerine ýetirmän anyklap bolýar. Mysal üçin, mekdep matematikasyndan belli bolan 3-e bölünijilik nyşanyna seredeliň. 123456789 san üçe bölünýärmi? Islendik sanyň sifrleriniň jemi üçe bölünýän bolsa, onda bu san hem üçe bölünýändir. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. 45 san 3-e bölünýär, onda 123456789 san 3-e bölünýändir.

2, 4, 5, 8, 25 sanlara bölünijilik nyşanlary

1. ilki bilen 2-ä bölünijilik nyşanyny getirip çykaralyň. Onuň üçin x sany onluk hasaplanyş sistemasynda ýazarys:

$$x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot 10 + x_0.$$

10 san 2-ä bölünýär, onda $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n$ sanlaryň her biri 2-ä bölünýär, onda $y = x_n \cdot 10^n + \ldots + x_1 \cdot 10$ san hem 2-ä bölünýändir. Şeýlelikde, x san ähli 2-ä bölünýän sanlaryň we x_0 sanyň jemidir. Onda ol 2-ä şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda x_0 san 2-ä

bölünýän bolsa. Başgaça aýtsak, x_0 san 0, 2, 4, 6, 8 sanlaryň haýsy-da bolsa birine deň bolsa diňe şonda x san 2-ä bölünýär.

Şeýlelikde, biz şu aşakdaky 2-ä bölünijilik nyşanyny subut etdik.

x san şonda we diňe şonda 2-ä bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysy 0, 2, 4, 6, 8 sifrleriň haýsy-da bolsa biri bilen gutarýan bolsa.

Bu ýerden görnüşi ýaly 0, 2, 4, 6, 8 jübüt sanlar. Onda 2-ä bölünijilik nyşanyny başgaça kesgitläp bolýar.

x san şonda we diňe şonda 2-ä bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysy jübüt sanlar bilen gutarýan bolsa.

2. 5-e bölünijilik nyşany hem edil şeýle getirilip çykarylýar. 10 san 5-e bölünýär, onda 10, 10^2, ..., 10^n sanlaryň her biri 5-e bölünýär, şonuň üçin $y = x_n \cdot 10^n + \ldots + x \cdot 10$ san 5-e bölünýär. Onda $x = x_n \cdot 10^n + \ldots + x_1 \cdot 10 + x_0$ san 5-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda x_0 san 5-e bölünse. x_0 san bolsa $x_0 = 0$ we $x_0 = 5$ şert ýerine ýetende 5-e bölünýär. Şeýlelikde, biz 5-e bölünijilik nyşanyny subut etdik.

x san 5-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysy 0 we 5 sifrler bilen gutarýan bolsa.

3. 4-e bölünijilik nyşanyny getirip çykarmak üçin, $100 = 4 \cdot 5$ ýazgydan ugur alarys, sebäbi 100 4-e bölünýär. Onda 1000, 10000 we ş.m. sanlar hem 4-e bölünýär, ýagny 10^n, $n \geq 2$ görnüşli sanlaryň ählisi 4-e bölünýär. x sanyň onluk ýazgysy $x = x_n \cdot 10^n + \ldots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0$.

Onda $z = x_n \cdot 10^n + \ldots + x_2 \cdot 10^2$ san 4-e bölünýär. Diýmek, x san şonda we diňe şonda 4-e bölünýär, haçanda $x_1 \cdot 10 + x_0$ san 4-e bölünýän bolsa. Şeýlelikde, biz 4-e bölünijilik nyşanyny subut etdik.

x san 4-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysyndaky soňky iki sifriň emele getiren sany 4-e bölünýän bolsa;

4. 25-e bölünijilik nyşany hem edil 4-e bölünijilik nyşany ýaly getirilip çykarylýar, ýagny 100 : 25, onda 1000, 10000 we ş.m. sanlar 25-e bölünýär. Diýmek, x san 25-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda $x_1 \cdot 10 + x_0$ san 25-e bölünýän bolsa. Şeýlelikde, biz 25-e bölünijilik nyşanyny subut etdik.

x san 25-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysy 00, 25, 50, 75 sanlaryň haýsy-da bolsa biri bilen gutarýan bolsa;

5. 8-e bölünijilik nyşany şu aşakdaky ýaly kesgitlenýär. x san 8-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysyndaky soňky üç sifriň emele getiren sany 8-e bölünýän bolsa.

3 we 9 sanlara bölünijilik nyşany

3 we 9 sanlara bölünijilik nyşanlaryny getirip çykaralyň. Onuň üçin ilki bilen $10^n - 1$ görnüşli ähli sanlaryň 9-a bölünýändigini subut ederis. $10^n - 1$ görnüşli sanlaryň onluk ýazgysyny şeýle ýazyp bolýar:

$$10^n - 1 = 9 \cdot n^{n-1} + \ldots + 9 \cdot 10 + 9 = 9(10^{n-1} + \ldots + 10 + 1).$$

Mysal üçin, $10^4 - 1 = 9 \cdot 1111$. Diýmek, $10^n - 1$ san 9-a bölünýär. $9 \vdots 3$ gatnaşyk dogry, onda bölünijilik gatnaşygynyň (7) häsiýetine görä, $(10^n - 1) \vdots 3$.

$$x = x_n \cdot 10^n + \ldots + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0 \text{ sany}$$

$$x = [x_n(10^n - 1) + \ldots + x_2(10^2 - 1) + x_1(10 - 1)] + (x_n + \ldots + x_2 + x_1 + x_0)$$

görnüşinde ýazmak mümkin.

$10^n - 1, \ldots, 10 - 1$ sanlaryň her biri 3-e bölünýär, onda $x_n(10^n - 1) + \ldots + x_1(10 - 1)$ jem hem 3-e bölünýändir.

Diýmek, x san 3-e şonda we diňe şonda bölünýändir, haçanda $x_n + \ldots + x_2 + x_1 + x_0$ hem 3-e bölünýän bolsa. Bu jeme berlen x sanyň sifrleriniň jemi diýilýär.

Şeýlelikde, biz 3-e bölünijilik nyşanyny subut etdik.

x san şonda we diňe şonda 3-e bölünýär, haçanda onuň sifrleriniň jemi 3-e bölünýän bolsa.

9-a bölünijilik nyşany hem edil şeýle getirilip çykarylýar, sebäbi $10^k - 1, \ldots, 10 - 1$ sanlar diňe bir 3-e däl, eýsem, 9-a bölünýär.

x san şonda we diňe şonda 9-a bölünýär, haçanda onuň sifrleriniň jemi 9-a bölünýän bolsa.

11-e bölünijilik nyşany

Hasaplamagyň onluk sistemasynda 7, 13, 17 we ş.m. sanlara bölünijilik nyşanlaryny getirip çykarmak örän çylşyrymly, şonuň üçin hem olar az peýdalanylýar. Ýöne 11-e bölünijilik nyşanyny getirip çykarmak çylşyrymly däl.

x san 11-e şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda onuň onluk ýazgysynda jübüt orunda duran sanlaryň jemi bilen täk orunda duran sanlaryň jeminiň tapawudy 11-e bölünýän bolsa (uly sandan kiçi sany aýryp almaly).

Meselem, $242 \vdots 11$ sebäbi $2 - 4 + 2 = 0$; $0 \vdots 11$.

3. Ýönekeý we düzme sanlar

Nol san islendik natural sana bölünýär, şonuň üçin onuň bölüjileriniň sany tükeniksiz köpdür. Islendik a natural sanyň bölüjileriniň sany tükeniklidir (çäklidir), sebäbi $a \vdots b$ aňlatmadan $1 \leq b \leq a$ deňsizlik gelip çykýar. Natural sanlar köplüginde 1 sanyň aýratyn orny bardyr, ýagny onuň bir sany natural bölüjisi bar. Eger $a > 1$ bolsa, onda a sanyň iň bolmanda iki sany bölüjisi bardyr. Olar 1 we a sanyň özüdir.

1-nji kesgitleme. Diňe 1-e we özüne bölünýän natural sanlara ýönekeý sanlar diýilýär.

2-nji kesgitleme. Bölüjileriniň sany ikiden köp bolmadyk natural sanlara ýönekeý sanlar diýilýär.

3-nji kesgitleme. Bölüjileriniň sany ikiden köp bolan sanlara düzme sanlar diýilýär.

Şeýlelikde, Z_0 giňeldilen natural sanlar köplügini bölüjileriniň sanyna görä dört synpa bölüp bolýar:

1. Diňe bir sany natural bölüjisi bolan 1 san;
2. Diňe iki sany natural bölüjisi bolan ýönekeý sanlar;
3. Bölüjileriniň sany ikiden köp bolan düzme sanlar;
4. Tükeniksiz köp natural bölüjisi bolan 0 san.

Bu ýerden görnüşi ýaly 1 sanyň diňe bir sany natural bölüjisi bar, ol hem 1 sanyň özüdir. Şeýle-de 0 sanyň tükeniksiz köp bölüjisi bar. Şonuň üçin 1 sany we 0 sany ýönekeý sanlara-da, düzme sanlara-da degişli däl diýip hasap edýärler.

Indi ýönekeý sanlaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. Eger p ýönekeý san 1-den tapawutly käbir n sana bölünýän bolsa, onda p we n sanlar gabat gelýändir.

2. Eger p we q dürli ýönekeý sanlar bolsa, onda p san q sana bölünmeýär.

3. Eger a natural san p ýönekeý sana bölünmeýän bolsa, onda a we p özara ýönekeý sanlardyr.

4. Eger a we b natural sanlaryň köpeltmek hasyly p ýönekeý sana bölünýän bolsa, onda bu a we b sanlaryň iň bolmanda biri p ýönekeý sana bölünýändir.

5. 1-den uly natural sanyň iň bolmanda bir sany ýönekeý bölüjisi bardyr.

6. a düzme sanyň iň kiçi ýönekeý bölüjisi $\sqrt{a}$ sandan uly däldir.

Eratosfeniň gözenegi

Häzirki döwürde matematikler tarapyndan ýönekeý sanlaryň giňişleýin tablisasy düzülendir. Ýönekeý sanlaryň tablisasyny düzmeklige has irki döwürlerden bäri gyzyklanypdyrlar. Meselem, D.N. Lemer 10006721 sana çenli ýönekeý sanlaryň tablisasyny düzüpdir. B.e. öňki III asyrda Aleksandriýada ýaşap geçen gadymy grek matematigi we astronomy Eratosfen ýönekeý sanlaryň tablisasyny düzmegiň aňsat we sada düzgünini oýlap tapypdyr. Ol 2-den n sana çenli natural sanlary ýazyp çykypdyr, ilki bilen 2-ä kratny sanlaryň üstüni çyzypdyr. Meselem, eger $n = 40$ bolsa onda:

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, 21, \cancel{22},$$
$$23, \cancel{24}, 25, \cancel{26}, 27, \cancel{28}, 29, \cancel{30}, 31, \cancel{32}, 33, \cancel{34}, 35, \cancel{36}, 37, \cancel{38}, 39, \cancel{40}.$$

Soňra 3-e kratny sanlaryň üstüni çyzypdyr.

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22},$$
$$23, \cancel{24}, 25, \cancel{26}, \cancel{27}, \cancel{28}, 29, \cancel{30}, 31, \cancel{32}, \cancel{33}, \cancel{34}, 35, \cancel{36}, 37, \cancel{38}, \cancel{39}, \cancel{40}.$$

Soňra indiki üsti çyzylman galan sana, ýagny 5-e kratny sanlaryň üstüni çyzypdyr.

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22},$$
$$23, \cancel{24}, \cancel{25}, \cancel{26}, \cancel{27}, \cancel{28}, 29, \cancel{30}, 31, \cancel{32}, \cancel{33}, \cancel{34}, \cancel{35}, \cancel{36}, 37, \cancel{38}, \cancel{39}, \cancel{40}.$$

Soňra üsti çyzylman galan sanlary täzeden göçürip ýazypdyr.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Bu sanlar bolsa 40-a çenli natural sanlar hatarynyň ýönekeý sanlarydyr. Eratosfeniň ýaşan döwründe häzirki ýaly kagyzlaryň ýoklugy üçin deriden, papirusdan we ş.m. taýýarlanylan esbaplardan peýdalanypdyrlar. Her gezek ýazgylar – sanlar çyzylyp öçürilendigi sebäpli bu şol sanlaryň ýazylan ýerinde deşikler emele gelipdir. Şonuň üçin bu esbaplar gözenege meňzäpdir. «Eratosfeniň gözenegi» adyna eýe bolan bu usul islendik n natural sanlaryň içinden ýönekeý sanlary saýlap almaga mümkinçilik berýär. Ýöne Eratosfen ýönekeý sanlaryň köplüginiň tükenikli ýa-da tükeniksizdigini kesgitläp bilmändir.

B.e. öňki III asyrda Aleksandriýada ýaşap geçen gadymy grek matematigi Ýewklid ýönekeý sanlaryň köplüginiň tükeniksizdigini subut edipdir.

Ýewklidiň teoremasy. Ýönekeý sanlar tükeniksiz köpdür.

Teoremany tersinden subut edeliň. Goý, $p_1, \ldots, p_n$ ýönekeý sanlar we olar tükenikli bolsun. Onda bu ýönekeý sanlaryň köpeltmek hasylyny alyp, üstüne 1 sany goşalyň. $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Bu san ýönekeý san däldir. Ikinji tarapdan ol düzme sanam bolup bilmeýär. Alnan gapma-garşylyk $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sanlar ýönekeý sanlardyr diýen çaklamamyzyň nädogrudygyny görkezýär. Diýmek, ýönekeý sanlaryň köplügi tükeniksizdir.

4. Iň kiçi umumy kratny we iň uly umumy bölüji

Iň kiçi umumy kratny

Eger a san b sana bölünýän bolsa, onda a san b sana kratny diýilýär. 0 san ähli sana bölünýär, şonuň üçin ol islendik sana kratnydyr. Biz geljekde b sanyň kratnylary diýlende, diňe b sanyň natural kratnylary, ýagny $b, 2b, \ldots, nb$ kratnylar barada gürrüň etjekdiris. Onda bölünijilik gatnaşygynyň ähli häsiýetlerini kratnylaryň häsiýetleri hökmünde görkezip bolýar.

Meselem, eger a san b sana kratny bolsa we p san hem c sana kratny bolsa, onda a san c sana kratnydyr we ş.m.

Goý, a we b natural sanlar bolsun. Onda a sana we b sana kratny bolan m sana bu a we b sanlaryň umumy kratnysy diýilýär.

1-nji mysal. A köplük 4-e kratny bolan 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, … sanlaryň köplügi, B köplük 6-a kratny bolan 6, 12, 18, 24, 30, 36, … sanlaryň köplügi bolsun. Bu köplükleriň kesişmesi

$A \cap B = \{12, 24, 36, ...\}$ köplükdir. A we B köplükleriň kesişmesine degişli bolan sanlaryň ählisi 4 we 6 sanlaryň ikisine-de kratnydyr. $A \cap B$ köplükde alnan sanlaryň iň kiçi sany 12-ä kratnydyr.

a we b natural sanlaryň kratnylarynyň iň kiçisine bu sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy diýilýär. Ol IKUK(a; b) görnüşde ýa-da gysgaça $K(a; b)$ diýlip bellenýär. Meselem, $K(4; 6) = 12$.

Teorema. a we b natural sanlaryň islendik umumy kratnysy onuň iň kiçi umumy kratnysyna bölünýär.

Subudy. Goý, m san a we b sanlara kratny bolsun we $K(a; b) = k$ bolsun. m sany k sana galyndyly böleris. $m = k \cdot q + r$. Bize r galyndynyň nola deňdigini subut etmek gerek. m we k sanlar a sana bölünýär, $r = m - kq$ san hem a sana bölünýändir. Edil şeýle m we k sanlar b sana-da bölünýändir, onda r san b sana bölünýär. Diýmek, r san a sana we b sana bölünýär. Eger $r \neq 0$ bolsa, onda ol a we b sanlaryň umumy kratnysy bolardy, şonuň üçin hem ol k sandan kiçi bolmaz. Ýagny $r \geq k$. Ýöne bu mümkin däl, sebäbi galyndy bölüjiden kiçi. Diýmek, r san 0 sana deňdir, ýagny $r = 0$. Diýmek, $m = kq$, ýagny m san k sana bölünýär.

a we b natural sanlaryň umumy kratnylarynyň ýene-de bir häsiýetine seredeliň:

Eger $K(a, b) = k$ bolsa, onda islendik c natural san üçin $K(ac; bc) = kc$ deňlik ýerine ýetýär.

Hakykatdan-da, k san a sana bölünýär, onda kc san hem ac sana bölünýändir. Diýmek, kc san ac we bc sanlaryň umumy kratnysydyr. Onda, kc sanyň ac we bc sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy bolýandygyny subut edeliň. Goý, $\ell < kc$ we ℓ san ac we bc sanlara bölünýän bolsun. Onda $\ell : c < kc : c = k$ gatnaşyk ýerine ýetýär. Şonda $\ell : c$ san a sana we b sana bölünýär. Bu bolsa k san a we b sanlaryň iň kiçi umumy kratnysydyr diýen tassyklama ters gelýär. Onda, $kc = k(ac, bc)$, ýagny kc san ac we bc sanlaryň iň kiçi umumy kratnysydyr.

Iň uly umumy bölüji

«b san a sana bölünýär» diýen gatnaşyk «a san b sana kratny» diýen gatnaşyga ters gatnaşykdyr. Başgaça aýtsak, b san a sanyň şonda we diňe şonda bölüjisi bolýar, haçanda a san b sana kratny bolsa, ýagny a san b sana bölünýän bolsa. Islendik san 0 sanyň bölüjisidir. Şonuň üçin biz diňe natural sanlaryň bölüjileri hakynda gürrüň ederis. Eger b san a sanyň bölüjisi bolsa, onda b/a görnüşde ýazylýar. Meselem, 3/24 sebäbi $24 \vdots 3$. Her bir a natural san özüne bölünýändir, $a \vdots a$. Şeýle-de, 1 san islendik natural sanyň bölüjisidir.

Eger a we b natural sanlar c sana bölünýän bolsa, onda c sana bu a we b sanlaryň umumy bölüjisi diýilýär. a we b sanlaryň umumy bölüjilerini tapmak üçin a sanyň umumy bölüjileriniň köplügi bilen, b sanyň umumy bölüjileriniň köplüginiň kesişmesini tapmaly.

2-nji mysal. 24 we 60 sanlaryň umumy bölüjilerini tapmaly. A köplük 24-üň bölüjileriniň, B köplük 60-yň bölüjileriniň köplügi bolsun:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\},$$

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60\}.$$

Bu köplükleriň kesişmesi $A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ köplükdir. Diýmek, 24 we 60 sanlaryň umumy bölüjileri 1; 2; 3; 4; 6 we 12 sanlardyr.

Goý, a natural san b sana bölünýän bolsun. Onda a sanyň ähli natural bölüjileri a sandan uly däldir. Şonuň üçin a sanyň bölüjileriniň köplügi tükeniklidir. Şonuň ýaly-da a we b sanlaryň umumy bölüjileriniň köplügi hem tükeniklidir, onda bu umumy bölüjileriň iň ulusy hem bardyr. a we b sanlaryň bölüjileriniň iň ulusyna bu sanlaryň iň uly umumy bölüjisi diýilýär. Ol IUUB(a; b) ýa-da gysgaça $B(a, b)$ bellenýär. Meselem, 24 we 60 sanlaryň umumy bölüjileriniň iň ulusy 12-dir. Onda ony $B(24, 60) = 12$ ýazyp bolýar.

1 san islendik a we b natural sanlaryň umumy bölüjisi bolup bilýär. Eger a we b sanlaryň başga umumy bölüjileri ýok bolsa, onda ony $B(a, b) = 1$ ýazarys. $B(a, b) = 1$ şerti kanagatlandyrýan a we b sanlara özara ýönekeý sanlar diýilýär. Meselem, 12 we 35 sanlar özara ýönekeý sanlardyr, sebäbi olaryň 1-den başga umumy bölüjisi ýok, ýagny $B(12, 35) = 1$.

Iň kiçi umumy kratnynyň we iň uly umumy bölüjiniň häsiýetleri

1. Eger c san a we b natural sanlaryň umumy bölüjisi bolsa, onda $\ell = \frac{ab}{c}$ san bu a we b sanlaryň umumy kratnysydyr. Meselem, 4 san 24-üň we 60-yň umumy bölüjisidir, ýagny $24 = 4 \cdot 6$, $60 = 4 \cdot 15$. Onda $\ell = \frac{24 \cdot 60}{4} = 4 \cdot 6 \cdot 15 = 360$, $\ell = 360$ san 24 we 60 sanlara kratnydyr.

2. $d = \frac{a \cdot b}{k}$ san, a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisidir. Bu häsiýetden şu aşakdaky tassyklamalar gelip çykýar.

2′. Iki sany a we b natural sanlaryň iň uly umumy bölüjisi bilen iň kiçi umumy kratnysynyň köpeltmek hasyly bu a we b sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdir:

$$B(a,b) \cdot k(a,b) = \frac{a \cdot b}{k} k = a \cdot b.$$

2″. Iki sany özara ýönekeý a we b natural sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy bu sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdir.

3. a we b natural sanlaryň iň uly umumy bölüjisi bu sanlaryň islendik umumy bölüjisine bölünýändir.

4. Eger a we b natural sanlaryň $a \cdot b$ köpeltmek hasyly m natural sana bölünýän bolsa we a san m san bilen özara ýönekeý bolsa, onda b san m sana bölünýändir.

5. Eger a natural san özara ýönekeý b we c sanlaryň her birine bölünýän bolsa, onda bu a san b we c sanlaryň bc köpeltmek hasylyna-da bölünýändir.

(5) häsiýet iki sany özara ýönekeý natural sanlaryň köpeltmek hasylynyň bölünijilik nyşanyny, ýagny düzme sanlaryň bölünijilik nyşanyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Meselem, x natural sanyň 6-a bölünmegi üçin bu x sanyň şol bir wagtda 2-ä we 3-e bölünmegi zerur we ýeterlikdir. 2 we 3 sanlar 6-nyň bölüjileri we olar özara ýönekeý sanlardyr.

Şeýle usul bilen 12 we 15 sanlara bölünijilik nyşanlaryny ýazyp bolýar:

a) x natural sanyň 12-ä bölünmegi üçin, onuň 3 we 4 sanlara bölünmegi zerur we ýeterlikdir;

b) x natural sanyň 15-e bölünmegi üçin, onuň 3 we 5 sanlara bölünmegi zerur we ýeterlikdir.

Meselem, 975 san 15-e bölünýär. Sebäbi 975 sanyň onluk ýazgysyndaky soňky sifr 5 bilen gutarýar, diýmek, 975 5-e bölünýär. Şeýle-de, $9 + 7 + 5 = 21$, ýagny 975 sanyň sifrleriniň jemi 3-e bölünýär, onda bu sanyň özi hem 3-e bölünýär. Diýmek, 975 san 15-e bölünýär.

Natural sanlaryň arifmetikasynyň esasy teoremasy

Mekdep matematikasynda, köplenç, natural sanlary ýönekeý köpelijilere dargatmak usulyndan peýdalanýarlar. Meselem, $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ we ş.m. Ýöne mekdep matematikasynda islendik düzme san üçin şeýle dagatmanyň bardygy subut edilmeýär.

Onda natural sanlaryň arifmetikasynyň esasy teoremasy diýlip atlandyrylýan teorema seredeliň.

Teorema. Islendik düzme sany ýeke-täk görnüşde ýönekeý köpelijileriň köpeltmek hasyly gönüşinde ýazyp bolýar.

Subudy. Bu teoremada iki tassyklama hakynda gürrüň edilýär: 1. Düzme sany ýönekeý köpelijilere dagadyp bolýar. 2. Bu dagatma ýeke-täkdir. Ilki bilen 1-nji tassyklamany tersinden subut edeliň. Goý, bu tassyklamany nädogry diýip pikir edeliň, ýagny ýönekeý köpelijilere dagadyp bolmaýan düzme san bar diýeliň. Onda şeýle sanlaryň A köplüginde a iň kiçi sandyr. Ýöne A köplügiň ähli sanlary düzme sanlar bolany üçin a san hem düzme sandyr, onda ony a_1 we a_2 ýönekeý köpelijileriň köpeltmek hasyly görnüşinde, $a = a_1 \cdot a_2$ ýazyp bolar, bu ýerde $a_1 < a$ we $a_2 < a$. a_1 we a_2 sanlar a sandan kiçi bolany üçin olar A köplüge degişlidir. Şonuň üçin a_1 we a_2 sanlar ýönekeý sanlardyr ýa-da ýönekeý köpelijilere dagaýandyr. Eger $a_1 = p_1 \ldots p_m$ we $a_2 = q_1 \ldots q_n$ bolsa, onda $a = a_1 \cdot a_2 = p_1 \ldots p_m q_1 \ldots q_n$ (1). Şeýlelikde, a sanyň ýönekeý köpelijilere dagaýandygyny aldyk. Bu bolsa biziň çaklamamyza garşy gelýär, ýagny ýönekeý köpelijilere dagamaýan düzme san ýokdur.

Indi ikinji tassyklamany subut edeliň. Goý, dürli görnüşde ýönekeý köpelijilere dagadyp bolýan düzme san bar diýeliň. Bu sanlaryň köplügini A diýip belläliň. Onda biziň çaklamamyza görä A köplük boş däl we iki görnüşli dagama $a = p_1 \dots p_m$ we $a = q_1 \dots q_n$ onda $p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_n$. Bu deňligiň sag tarapy q_1 ýönekeý sana bölünýär. Onda deňligiň çep tarapy hem q_1 sana bölünýär. Edil şeýle q_1 ýönekeý sanyň p_1 ýönekeý sana bölünýändigini kesgitläp bolýar. Eger p_1 ýönekeý san q_1 ýönekeý sana bölünýän bolsa, onda olar deňdir $p_1 = q_1$.

(1) deňligiň iki tarapyny hem p_1 sana gysgaldyp alarys.

$c = p_2 \dots p_m = q_2 \dots q_n$, bu ýerde $c = a : p_1 . p_1 > 1$ bolany üçin $c < a$. Ýöne çaklama görä a san iň kiçi san. Onda c san ýönekeý köpelijilere diňe bir görnüşde dagadylyp bilner. $c = p_2 \dots p_m$ we $c = q_2 \dots q_n$ diňe köpelijileriň tertibi bilen tapawutlanyp biler. Diýmek, islendik natural sany diňe ýeke-täk görnüşde ýönekeý köpelijilere dagadyp bolar.

a natural sanyň ýönekeý köpelijileriniň köpeltmek hasylyny sanlaryň artýan tertibinde ýazýarlar. Eger gaýtalanýan köpelijiler bar bolsa, olaryň derejesi görkezilýär. Meselem, $2520 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

$a = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}$ $(p_1 < p_2 < \ldots < p_n)$ görnüşli ýazga a sanyň kanoniki dagamasy diýilýär. 1-den uly islendik natural sanyň ýeke-täk kanoniki dagamasy bardyr.

Sanlaryň kanoniki ýazgysy boýunça IKUK we IUUB tapmak

Eger a we b natural sanlaryň kanoniki dagamasy berlen bolsa, onda bu sanlaryň üstünde dürli arifmetiki amallary ýerine ýetirip bolýar. Goý, $a = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}$ we $b = p_1^{\beta_1} ... p_n^{\beta_n}$ berlen bolsun. Bu sanlaryň köpeltmek hasyly şeýle ýazylýar $a \cdot b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} ... p_n^{\alpha_n + \beta_n}$. a san b sana şonda we diňe şonda bölünýär, haçanda ähli k, $1 \leq k \leq n$ sanlar üçin $\alpha_n \geq \beta_n$ deňsizlik ýerine ýetse. Onda, $a : b = p_1^{\alpha_1 - \beta_1} ... p_n^{\alpha_n - \beta_n}$. Natural sanlaryň kanoniki dagamasyndan peýdalanyp, olaryň iň uly umumy bölüjisini we iň kiçi umumy kratnysyny tapmak bolar. Meselem, 525, 630, 150 sanlaryň IUUB we IKUK olaryň kanoniki dagamasy boýunça tapalyň. Ilki bilen bu sanlary ýönekeý köpelijilere dagadarys:

$$\begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Şeýlelikde, $525 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0$.

525, 630, 150 sanlaryň kanoniki dagamasynda 2,3,5,7 ýönekeý sanlaryň dürli derejeleri gabat gelýär. Onda berlen sanlaryň iň uly umumy bölüjisini tapmak üçin olaryň kanoniki dagamasyndaky ýönekeý köpelijileriň iň kiçi derejelerini alarys, ýagny ol şeýle ýazylýar. IUUB(525, 630, 150) $= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$. IUUB(525, 630, 150) = 15. 525, 630, 150 sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapmak üçin, olaryň kanoniki dagamasyndaky ýönekeý köpelijileriň iň beýik derejelerini alarys, ol şeýle ýazylýar:

$$(525, 630, 150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7 = 3150$$

$$\text{IKUK}(525, 630, 150) = 3150.$$

Sanlary ýönekeý köpelijilere dagatmak usuly bilen IKUK we IUUB tapmak käbir ýagdaýlarda örän kyndyr. Sebäbi, 1-njiden sany ýönekeý köpelijilere dagatmagyň özi arifmetikanyň iň bir kyn hasaplamasydyr, 2-njiden käbir sanlaryň iň kiçi bölüjisi örän uly sandyr. Meselem, 6889 sany ýönekeý köpelijilere dagatmak üçin, örän köpsanly ýönekeý sanlara bölüp görmeli bolýar, sebäbi 6889 sanyň iň kiçi ýönekeý köpelişi 83 sandyr. Şonuň üçin IKUK we IUUB tapmagyň başga usullaryna hem serederis.

Ýewklidiň algoritmi

Iki sany natural sanyň iň uly umumy bölüjisini bu sanlary ýönekeý köpelijilere dagatmak usuly bilen tapmaklyga seredipdik. Bu usul eger berlen natural sanlar uly bolmadyk ýagdaýynda amatlydyr. Eger-de köpbelgili sanlaryň ýönekeý köpelijilerini tapmaly bolsa, onda ol çylşyrymly we köp wagt talap edýär. Natural sanlaryň iň uly umumy bölüjisini galyndyly bölmek usulyndan peýdalanyp hem tapmak mümkin. Bu usuly ilkinji bolup Ýewklidiň hödürländigi üçin, oňa Ýewklidiň algoritmi diýilýär. Ol şu aşakdaky üç tassyklama esaslanýar:

1. Eger a san b sana bölünýän bolsa, onda $B(a, b) = b$.

Hakykatdan-da, eger $a \vdots b$ we $b \vdots b$ onda, b san a we b sanlaryň umumy bölüjisidir.

2. Eger $a = bq + r$ bolsa (bu ýerde a, b, r noldan tapawutly sanlar), onda a we b sanlaryň umumy bölüjileriniň köplügi bilen b we r sanlaryň umumy bölüjileriniň köplügi gabat gelýär.

Hakykatdan-da, goý d san b we r sanlaryň umumy bölüjisi bolsun. Eger b we r sanlar d sana bölünýän bolsa, onda $a = bq + r$ hem d sana bölünýändir. Diýmek, b we r sanlaryň islendik umumy bölüjisi a we b sanlaryň hem umumy bölüjisidir.

3. Eger $a = bq + r$ bolsa (a, b, r noldan tapawutly sanlar), onda $B(a, b) = B(b, r)$ deňlik ýerine ýetýändir.

Hakykatdan-da (2) tassyklama görä a we b sanlaryň umumy bölüjileriniň köplügi b we r sanlaryň umumy bölüjileriniň köplügi bilen gabat gelýär. Onda bu köplükleriň ikisinde-de iň uly sanlara deňdir. Diýmek, $B(a, b) = B(b, r)$.

Şu üç tassyklama esaslanyp, Ýewklidiň algoritmini ýazarys. Goý, a we b natural sanlar berlen bolsun we $a \geq b$. Eger a san b sana galyndysyz bölünýän bolsa, (1) tassyklama görä, $B(a, b) = b$ bolar. a san b sana bölünende r galyndy galýan bolsun, onda $a = b \cdot q + r$. (3) tassyklama görä, $B(a, b) = B(b, r)$, diýmek, b we r sanlaryň iň uly umumy bölüjisini tapmak gerek. Eger b san r sana bölünýän bolsa, onda $B(b, r) = r$ we $B = (a, b) = r$. Şeýle-de, b sany r sana bölende r_1 galyndy galýan bolsa, onda $b = r \cdot q_1 + r_1$, şonuň üçin $B(a, b) = B(b, r) = B(r, r_1)$. Şeýdip galyndyly bölmek amalyny dowam edip, biri-birinden kiçi $r_1, r_2, \ldots r_m$ galyndylary alarys. Iň soňky noldan tapawutly galyndy a we b sanlaryň iň uly umumy bölüjisi bolar.

Meselem, 1001 we 6253 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini Ýewklidiň algoritminden peýdalanyp tapmaly. Onda uly sany kiçi sana galyndyly bölmek düzgüninden peýdalanyp böleris. $6253 = 1001 \cdot 6 + 247$. Indi 1001 sany 247-ä böleris, $1001 = 247 \cdot 4 + 13$, soňra 247-ni, 13-e böleris. $247 = 13 \cdot 19 + 0$. Şeýlelikde, bölmek amalyny galyndyda 0 san galýança dowam etdik. Soňky gezek bölende, ýagny $247 = 13 \cdot 19 + 0$ amalda bölüjide 13 san alyndy. Şu san hem 1001 we 6253 sanlaryň iň uly umumy bölüjisidir. IUUB (1001, 6253) = 13.

Eger şol bir wagtda birnäçe sanyň iň uly umumy bölüjisini tapmaly bolsa, onda Ýewklidiň algoritmini hem birnäçe gezek peýdalanýarys. Meselem, 728, 455,117 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini Ýewklidiň algoritminden peýdalanyp tapmaly. Ilki bilen 728 we 455 sanlar üçin iň uly umumy bölüjini taparys:

$$728 = 455 \cdot 1 + 273; \quad 455 = 273 \cdot 1 + 182;$$

$$273 = 182 \cdot 1 + 91; \quad 182 = 91 \cdot 2 = 0.$$

Diýmek, IUUB (728, 455) = 91. Indi 91 we 117 sanlar üçin iň uly umumy bölüjini taparys:

$$117 = 91 \cdot 1 + 26; \quad 91 = 26 \cdot 3 + 13; \quad 26 = 13 \cdot 2 + 0.$$

Onda 117 we 91 sanlaryň iň uly umumy bölüjisini IUUB(91; 117) = 13.

Diýmek, IUUB (728, 455, 117) = IUUB (91, 117) = 13-i ýazarys.

Ýewklidiň algoritminden peýdalanyp, a we b sanlaryň iň kiçi umumy kratnysyny tapmak üçin, şu formuladan peýdalanarys:

$$\mathrm{IKUK}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{IUUB}(a,b)}.$$

Meselem,

$$\mathrm{IKUK}(1001,6253) = \frac{1001 \cdot 6253}{\mathrm{IUUB}(1001,6253)} =$$

$$= \frac{1001 \cdot 6253}{13} = 1001 \cdot 481 = 481481.$$

IKUK (1001, 6253) = 481481.

VII bap

SAN BARADAKY DÜŞÜNJÄNI GIŇELTMEK. ULULYKLAR WE OLARY ÖLÇEMEK

§1. Položitel rasional sanlar

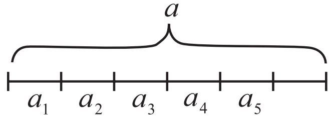
1. Kesimleri ölçemek

Gündelik durmuşda ulanylýan matematiki meseleleriň aglaba köpüsini iki topara bölmek mümkin: a) tükenikli köplükleriň elementlerini sanamak, b) ululyklary ölçemek. Tükenikli köplükleriň elementleri sanalanda olaryň jogaplary natural sanlarda aňladylýar. Ululyklar ölçelende bu ululyklar käbir ölçeg birlikleri (metr, kilogram we ş.m.) bilen deňeşdirilýär we ölçegiň netijesi natural sanlarda aňladylýar.

Eger ölçelýän ululygy birnäçe böleklere bölmeli bolsa, onda ölçegiň netijesini hemişe natural sanlarda aňladyp bolanok. Şonuň üçin natural sanlar köplüginden tapawutly başga sanlary hem alarys.

Biz häzir natural sanlar köplüginiň dürli giňeldilen görnüşlerine serederis. Şonuň üçin ilki bilen Q_+ položitel rasional sanlar köplügini, soňra R_+ položitel hakyky sanlar köplügini we iň soňunda hem R hakyky sanlar köplügini gurarys. Bu san köplükleriniň her biri üçin goşmak we köpeltmek amallaryny kesgitläris.

Kesimleri ölçemeklige seredeliň. Goý, a kesim $a_1, a_2, ..., a_n$ kesimlere bölünen bolsun, onda a kesime $a_1, a_2, ..., a_n$ kesimleriň jemi diýilýär we $a = a_1 + a_2 + a_3 +...+ a_n$ ýa-da $\sum_{k=1}^{n} a_k$ görnüşde ýazylýar (*49-njy surat*).



49-njy surat

Indi käbir e kesimi saýlap alalyň we ony birlik kesim ýa-da uzynlyk ölçeginiň birligi diýip atlandyralyň. Eger a kesimi

11. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

birlik kesime kongruent bolan n sany kesimlere bölsek, onda a kesim e kesime kratnydyr. e birlik kesime görä a kesimiň ölçegini $m_e(a)$ belläris. Eger-de birlik kesim kesgitlenen (fiksirlenen) bolsa, onda $m_e(a)$ ýazgynyň ýerine $m(a)$ ýazmak mümkin.

Eger a we b kesimler kongruent bolsa, onda $m(a) = m(b)$ we tersine eger $m(a) = m(b)$ bolsa, onda a we b kesimler kongruentdir. Goý, a kesim iki sany b we c kesimlere bölünen bolsun.

a) eger $a = b + c$ bolsa, b we c kesimleriň uzynlygy natural sanlarda aňladylýan bolsa, onda a kesimiň uzynlygy onuň bölekleriniň uzynlyklarynyň jemine deňdir, ýagny

$$m(a) = m(b) + m(c). \qquad (1)$$

Kesimleriň uzynlygy ölçemegiň bu häsiýetine additiwlik häsiýeti diýilýär (goşmak latyn dilinde additio).

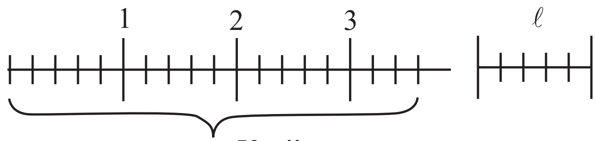
Kesimleri ölçemegiň ikinji häsiýeti bir ölçeg birliginden başga bir ölçeg birligine geçmek bilen baglanyşyklydyr. Mysal üçin, eger a kesimiň ululygy metrde ölçelende P metr bolsa, onda santimetrde ölçelende 100 P san alnar. Ony $m_2(a) = 100 \cdot m_1(b)$ görnüşde ýazmak mümkin. $m_1(a)$ san a kesimiň metrdäki ölçegi, $m_2(a)$ san bolsa, onuň santimetrdäki ölçegidir.

Indi bir ölçeg birliginden başga bir ölçeg birligine geçmegiň umumy düzgünlerine seredeliň. Goý, ℓ_1 we ℓ_2 uzynlyk ölçegleriniň birlikleri bolsun. Şonda ℓ_1 birlik ℓ_2 birlikden n esse uly bolsun, ýagny $\ell_1 \cong n \cdot \ell_2$;

b) eger a kesim ℓ_1 kesime kratny bolsa, ℓ_1 kesim ℓ_2 kesime kratny bolsa, onda a kesim ℓ_2 kesime kratnydyr we $m_2(a) = m_1(a) \cdot m_2(\ell_1)$ (2) deňlik ýerine ýetýändir. Kesimleri ölçemegiň bu häsiýetine multiplikatiwlik häsiýeti diýilýär (multiplikatio-latyn dilinde köpeltmek).

2. Ekwiwalent droblar

a kesim $3e$ kesimden uzyn, $4e$ kesimden bolsa gysga (*50-nji surat*). Onda a kesimiň uzynlygyny e birlik kesim bilen aňladyp bolmaýar. Eger-de e birlik kesimi bäş sany kongruent böleklere bölsek we olaryň birini täze ölçeg birligi hökmünde alsak, onda a kesimiň uzynlygyny natural sanlarda aňlatmak mümkin. Ol 18 natural sandyr,



50-nji surat

sebäbi täze ölçeg birligine görä a kesimi 18 sany kesimlerden ybaratdyr. Ýöne, hemişe islendik kesimi natural sanlaryň üsti bilen aňlatmak mümkin däl. Şonuň üçin kesimiň uzynlygyny diňe natural sanlarda aňlatman, eýsem, şol bir birlik kesimi alyp, berlen kesimi näçe bölege bölýändigimizi görkezmek amatlydyr. Mysal üçin, ýokardaky mysalda kesimiň uzynlygy (18; 5) natural sanlar jübüdi bilen aňladylyp bilner. Bu san jübütlerini, köplenç, $\frac{18}{5}$ drob görnüşinde ýazýazlar.

Kesimleri ölçemekde droblar şeýle alynýar, ýagny e kesimiň n-nji ülşi diýip, $e \cong nf$ şerti kanagatlandyrýan f kesime aýdylýar. Eger a kesim e birlik kesimiň n-nji ülşüne kongruent bolan P kesimlerden ybarat bolsa, onda a kesimi $m(a) = \frac{p}{n}$ ýazarys.

Teorema. $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblaryň şol bir a kesimiň uzynlygyny aňlatmagy üçin, natural sanlaryň $pq = nt$ deňliginiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Eger $m(a) = \frac{p}{n}$ we $m(a) = \frac{t}{q}$ bolsa, onda $na \cong pe$ we $qa \cong te$. Ýöne $(nq)a \cong (nq)e$ we $(nq)a \cong (nt)e$, şonuň üçin hem $(pq)e \cong (nt)e$. Bu deňlik diňe $pq = nt$ bolanda, ýerine ýetýär. Onda $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblaryň şol bir kesimi aňlatmagy üçin, deňligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. $pq = nt$ deňligi kanagatlandyrýan $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblara ekwiwalent droblar diýilýär. Onda iki drob şonda we diňe şonda ekwiwalentdir, haçanda olar şol bir kesimiň uzynlygyny aňladýan bolsa.

3. Položitel rasional sanlar

Islendik kesimiň uzynlygyny diňe bir sany san bilen aňlatmak mümkin. Onda ekwiwalent droblar şol bir sanyň dürli görnüşde ýazylyşydyr. Drob görnüşinde aňladyp (ýazyp) bolýan sanlara položitel rasional sanlar diýilýär. Başgaça aýtsak, ekwiwalent droblaryň köplügine položitel rasional sanlar diýilýär. Ýöne $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$ sanlaryň hiç biri aýry-aýrylykda položitel rasional san bolup bilmeýär. Diňe $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; ...; \frac{n}{2n}; ...\right\}$ droblaryň köplügi, toplumy položitel rasional san bolup bilýär. Drob görnüşinde ýazylan položitel rasional sanlaryň maýdalawjysy we sanawjysy özara ýönekeý sanlar bolýanlary hem bardyr. Onda sanawjysy we maýdalawjysy özara ýönekeý bolan droblara gysgalmaýan droblar diýilýär.

Teorema. Islendik a položitel rasional san üçin, bu sany aňladýan bir we diňe bir sany sanawjysy hem-de maýdalawjysy özara ýönekeý bolan san bardyr.

Subudy. Eger t natural san we $a \cong te$ bolsa, onda islendik n natural san üçin, $na \cong (nt)e$ bardyr. Bu bolsa a kesimiň uzynlygyny diňe bir t san bilen aňlatman, eýsem, $\frac{n}{n}$ drob bilen hem aňladyp bolýandygyny görkezýär.

4. Položitel rasional sanlary goşmak we aýyrmak

Q_+ položitel rasional sanlar köplüginde goşmak amalyny kesgitläris. Onuň üçin ilki şu aşakdaky tassyklamany subut ederis.

Q_+ köplükden alnan islendik iki sany a we b sanlary meňzeş maýdalawjyly droblar görnüşinde ýazyp bolýar.

Goý, a san $\frac{p}{n}$ drob bilen, b san bolsa $\frac{t}{q}$ drob bilen aňladylan bolsun. Onda, bu sanlary $\frac{pq}{nq}$ we $\frac{nt}{nq}$ meňzeş maýdalawjyly droblaryň üsti bilen aňladarys. $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblary, olara ekwiwalent bolan meňzeş maýdalawjyly droblar bilen çalyşmaklyga bir maýdalawja getirmek diýilýär. Onda $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblaryň iň kiçi umumy maýdalawjysy n we q sanlaryň iň kiçi umumy kratnysydyr.

Eger a we b položitel rasional sanlar meňzeş maýdalawjyly droblar görnüşinde berlen bolsa, onda $\frac{p}{n}+\frac{t}{n}=\frac{p+t}{n}$, eger olar dürli maýdalawjyly droblar görnüşinde aňladylan bolsa, $\frac{p}{n}+\frac{t}{q}=\frac{pq+nt}{nq}$ ýazmak mümkin.

Q_+ položitel rasional sanlar köplüginde goşmak amaly orun çalyşma, utgaşdyrma we gysgalyjylyk häsiýetlerine boýun egýär, ýagny $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$ we eger $a+c=b+c$ bolsa, onda $a=b$ gelip çykýar. Şeýle-de $a, b \in Q_+$ sanlar üçin $a+b \neq a$.

Eger a we b sanlar $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblar bilen berlen bolsa, onda $a>b$ deňsizlik şonda we diňe şonda ýerine ýetýär, haçanda $p>t$, eger-de a we b sanlar $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ droblar bilen berlen bolsa, onda $a>b$, haçanda $pq>nt$ bolsa. Indi Q_+ položitel rasional sanlar köplüginde tertip gatnaşygy girizeliň:

a) Q_+ köplükde iň kiçi san ýokdur;

b) Q_+ köplükden alnan islendik a we b sanlaryň arasynda ýene-de şu köplüge degişli bolan tükeniksiz köp san bardyr;

ç) Q_+ köplükde iň uly san hem ýokdur.

Indi Q_+ köplükde aýyrmak amalyny kesgitläris. Goý, $a>b$ bolsun. Onda kesgitlemä görä, $a=b+c$, $c \in Q_+$ deňlik dogrudyr. $c \in Q$ sana a we b sanlaryň tapawudy diýilýär. Eger a we b sanlar $\frac{p}{n}$ we $\frac{t}{q}$ meňzeş maýdalawjyly droblar bilen aňladylan bolsa, onda $a-b$

tapawut $\dfrac{p-t}{n}$ drob bilen kesgitlenýär, eger-de a we b sanlar $\dfrac{p}{n}$ we $\dfrac{t}{q}$ dürli maýdalawjyly droblar bilen berlen bolsa, onda $a-b$ tapawut $\dfrac{pq-nt}{nq}$ drob bilen aňladylýar.

5. Položitel rasional sanlary köpeltmek we bölmek

Goý, a kesim ℓ_1 kesim bilen, ℓ_1 kesim ℓ_2 kesim bilen ölçegdeş bolsun we $a \cong \dfrac{p}{q}\ell_1$, $\ell_1 \cong \dfrac{t}{q}\ell_2$, ýagny $na \cong p\ell_1$ we $q\ell_1 \cong t\ell_2$ bolsun. Onda multiplikatiwlik häsiýete görä, $\dfrac{pt}{nq} = \dfrac{p}{n}\cdot\dfrac{t}{q}$ deňlik ýerine ýetýändir. Položitel rasional sanlary köpeltmegi şeýle kesgitläp bolýar.

$\dfrac{p}{n}$ drob bilen aňladylýan a sanyň $\dfrac{t}{q}$ drob bilen aňladylýan b sana köpeltmek hasyly, $\dfrac{pt}{nd}$ drob bilen aňladylýar.

Q_+ köplükde köpeltmek amaly orun çalyşma, utgaşdyrma we gysgalyjylyk häsiýetlerine eýedir, ýagny $a, b, c \in Q_+$ sanlar üçin, $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (bc) = (ab)c$ we $ac = bc \Rightarrow a = b$.

Q_+ köplükde bölmek amaly köpeltmek amalyna ters amal hökmünde kesgitlenýär. Islendik $a, b \in Q_+$ sanlar üçin, $a = bc$ deňlik ýerine ýeter ýaly $c \in Q_+$ san bardyr.

6. Položitel rasional sanlar teoriýasyny aksiomatik gurmak

Biz položitel rasional sanlary we olaryň üstünde geçilýän amallary kesimleri ölçemek düşünjesiniň kömegi bilen kesgitledik. Ýöne položitel rasional sanlar diňe bir kesimleriň uzynlygyny ölçemek üçin däl-de, eýsem, agyrlyk, meýdan, göwrüm we ş.m. ölçemek üçin hem gerek. Şonuň üçin položitel rasional sanlaryň teoriýasyny gurmaklyga diňe bir geometriki nukdaýnazardan çemeleşmän, eýsem, başgaça hem gurmak mümkin. Şonuň üçin şu sanlar köplüginde ýerine ýetýän aksiomalar sistemasyny görkezmek ýeterlikdir. Onda Q_+ köplügi şu köplükde goşmak amalyna we natural sanlara köpeltmek amalyna esaslanýan aksiomalar sistemasynyň üsti bilen guralyň. Olar şu aşakdakylar:

1. Q_+ köplük özünde N natural sanlar köplügini saklaýar.

2. Q_+ köplükde islendik iki $a, b \in Q_+$ sanlara ýene-de şu köplükden bolan $a + b$ jemi degişli edip goýýan goşmak amaly kesgitlenendir.

3. Q_+ köplükde goşmak amaly orun çalyşma, utgaşdyrma we gysgalyjylyk häsiýetlere eýedir.

4. Islendik $a \in Q_+$ san üçin, $na = p$ deňlik ýerine ýeter ýaly p we n sanlar bardyr.

5. Islendik p we n natural sanlar üçin, $na = p$ deňlik ýerine ýeter ýaly $a \in Q_+$ san bardyr.

6. Eger $na = nb$ bolsa, onda $a = b$.

§2. Onluk droblar

1. Onluk droblar we olaryň üstünde amallar

Drob düşünjesiniň ýüze çykmagy täze ölçeg birligine geçmek bilen baglanyşyklydyr, şonda drobuň maýdalawjysy ilkibaşdaky ölçeg birliginiň näçe ülşe bölünýändigini görkezýär. Häzirki döwürde dünýäniň ähli ýurtlarynda ölçemegiň metrik sistemasy peýdalanylýar. Onda täze ölçeg birligi ilkibaşdaky ölçeg birligini 10, 100, 1000, … gezek artdyrmak ýa-da 10, 100, 1000, … gezek kemeltmek bilen alynýar. Meselem, 1 *km* = 1000 *m* = 1000 000 *mm*; 1 *t* = 1000 *kg* = 1000 000 *gr* we ş.m. Şonuň üçin hem amaly işlerde maýdalawjysy 10-yň derejeleri bolan droblar aýratyn ähmiýete eýedir. Beýle droblara onluk droblar diýilýär we $\frac{m}{10^n}$ görnüşde ýazylýar, $\frac{m}{n}$ görnüşli islendik droby onluk drob görnüşinde ýazmak mümkinmi? Meselem, $\frac{8}{25}$ we $\frac{3}{7}$ droblar berlen bolsun. $\frac{8}{25}$ droby $\frac{32}{100}$ drob görnüşinde ýazyp bolýar. Onda $\frac{8}{25} = 0,32$. Ýöne $\frac{3}{7}$ drob üçin bu droba deň bolan we maýdalawjysy onuň derejeleri bolan droby tapyp bolanok. Onda $\frac{m}{n}$ görnüşli droby nähili ýagdaýda onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar?

$\frac{m}{n}$ gysgalmaýan drobuň onluk droba deň bolmagy üçin bu drobuň maýdalawjysynyň ýönekeý köpelijilere dagatmasynda diňe 2 we 5 sanlaryň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Meselem, $\frac{19}{80}$ droby onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar, sebäbi bu gysgalmaýan drob, maýdalawjynyň ýagny 80-iň ýönekeý köpelijilere dagamasynda 2 we 5 sanlar bar, $80 = 2^4 \cdot 5$.

$\frac{11}{15}$ droby onluk drob görnüşinde ýazyp bolmaýar, sebäbi maýdalawjynyň ýönekeý köpelijilere dagytmasynda 3 bar, $15 = 3 \cdot 5$.

$\frac{195}{260}$ drobuň maýdalawjysynyň ýönekeý köpelijilere dagatmasynda 2 we 5 sanlardan başga 13 hem bar, ýöne şonda-da bu droby onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar, sebäbi $\frac{195}{260}$ droby 65-e gysgaltsak, $\frac{3}{4}$ droby alarys. Ony onluk drob görnüşinde ýazyp bolýar $\frac{3}{4} = 0,75$.

Göterim (prosent) düşünjesi onluk drob düşünjesi bilen berk baglanyşyklydyr, $\frac{1}{100}$ droba göterim (prosent) diýilýär. Ol 1% bellenýär.

2. Tükeniksiz periodik onluk droblar

Goý, $\frac{6}{7}$ drob berlen bolsun. Bu drobuň maýdalawjysy 7 bolandygy üçin, ony tükenikli onluk drob görnüşinde ýazyp bolmaýar. Şonuň üçin bu droba tükeniksiz onluk drob diýilýär. Sanawjyny maýdalawja bölüp alarys, $\frac{6}{7} \approx 0,857142857142857142...$

Sanyň onluk ýazgysynda otur belgisinden soň yzygider gaýtalanýan sifrleriň toparyna (grupbasyna) period diýilýär. Beýle droblara bolsa periodik onluk droblar diýilýär. Drobuň periody ýaýyň içinde ýazylýar $\frac{6}{7} = 0,(857142)$.

Periodik onluk droblar iki topara bölünýär:

1) arassa periodik onluk droblar: droblarda gönüden-göni otur belgisinden soň drobuň periody başlanýan bolsa, onda oňa arassa periodik onluk drob diýilýär;

2) gatyşyk periodik onluk droblar: drobuň otur belgisi bilen onuň periodynyň arasynda bir ýa-da birnäçe sifr bar bolsa, onda beýle droblara gatyşyk periodik onluk droblar diýilýär.

Meselem, 0,(27)-arassa periodik drob, 3,27(346) gatyşyk periodik drob.

Eger $\frac{m}{n}$ gysgalmaýan drob bolsa we drobuň maýdalawjysynyň ýönekeý köpelijilere dagatmasynda 2 we 5 sanlardan başga-da ýönekeý köpeliji bar bolsa, onda $\frac{m}{n}$ drob tükeniksiz periodik onluk droby aňladýandyr.

Onda, islendik položitel rasional sany tükenikli onluk drob ýa-da tükeniksiz periodik onluk drob görnüşinde aňladyp bolýandyr.

Tükenikli onluk droblary hem *sag* tarapyndan nollary ýazmak bilen tükeniksiz periodik onluk droblar görnüşinde ýazyp bolýar, $0,25 = 0,25000\ldots0$. Tükeniksiz periodik onluk droblary ady droblar görnüşinde ýazyp bolýar.

Arassa periodik onluk droby ady drobuň görnüşinde ýazmak üçin drobuň sanawjysynda onluk drobuň periodyna deň bolan sany, maýdalawjysynda bolsa drobuň periodynda näçe şifr bolsa, şonça dokuzlyklary ýazmak ýeterlikdir. Meselem, $0,(35) = \frac{35}{99}$;

$0,(489) = \frac{489}{999} = \frac{163}{333}$.

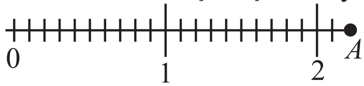
Gatyşyk periodik onluk droby ady drob görnüşinde ýazmak üçin, drobuň sanawjysynda otur belgisinden ikinji periodyň başlangyjyna çenli bolan san bilen otur belgisinden birinji periodyň başlangyjyna çenli ýazylan sanyň tapawudy ýazylýar. Maýdalawjyda bolsa drobuň periodyndaky sifrleriň sanyna deň bolan dokuzlyklar we otur belgisinden birinji perioda çenli bolan sifrleriň sanyna deň bolan nollar ýazylýar. Meselem, $0,7(61) = \frac{761-7}{990} = \frac{754}{990} = \frac{377}{495}$.

§3. Položitel hakyky sanlar

1. Ölçegdeş däl kesimler

Položitel rasional sanlaryň kömegi bilen ol ýa-da beýleki ululygyň ölçegini islendik takyklykda ölçäp bolýar. Goý, meselem, OA kesimiň uzynlygy ölçelýän bolsun we onuň uzynlygynyň $\frac{1}{10^n}$ ölçegini birlik kesimiň uzynlygynyň ölçeginden uly bolmadyk ýalňyşlyk bilen tapmak talap edilsin. OA kesimde O nokatdan A nokat tarapda uzynlygy $\frac{1}{10^n}$ drob bilen aňladylýan kesimleri biri-biriniň yzyndan alyp goýarys. Şonda A nokat şu kesimleriň haýsy-da bolsa birine gabat geler.

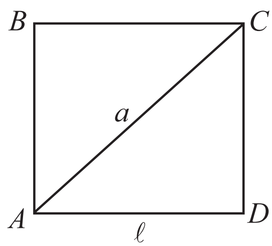
Bu bolsa şu aşakdaky häsiýete eýe bolan m sanyň bardygyny aňladýar: uzynlygy $\frac{m}{10^n}$ droba deň bolan kesim OA kesimden kiçidir, uzynlygy $\frac{m+1}{10^n}$ droba deň bolan kesim bolsa OA kesimden uludyr.



Onda, OA kesimiň uzynlygy $\frac{m}{10^n}$ we $\frac{m+1}{10^n}$ sanlaryň arasynda ýerleşendir. Ýöne bu rasional sanlar OA kesimiň uzynlygynyň ölçegini artykmajy bilen ýa-da kemi bilen aňladýar. Käbir ýagdaýlarda diňe rasional sanlaryň kömegi bilen kesimiň uzynlygynyň ölçegini takyk berip bolmaýar, sebäbi e birlik kesim bilen ölçegdeş däl kesimler hem bardyr. Mysal üçin, kwadratyň diagonaly onuň taraplary bilen ölçegdeş däldir.

Başgaça aýtsak, eger kwadratyň tarapynyň uzynlygyny birlik kesim diýip alsak, onda bu kwadratyň diagonallarynyň uzynlygyny rasional sanlarda aňladyp bolmaýar.

Goý, kwadratyň tarapy 1-e deň bolsun. *ABCD* kwadratyň *AC* diagonaly onuň tarapy bilen ölçegdeş diýip hasap edeliň we ol $\frac{p}{q}$ gysgalmaýan drob bilen aňladylýan bolsun. Onda, Pifagoryň teoremasyna görä $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, ýagny $1^2 + 1^2 = \frac{p^2}{q^2}$, onda $p^2 = 2q^2$. p^2-jübüt san, onda san hem jübüt sandyr. Edil şeýle usul bilen q sanyň hem jübüt sandygyna göz ýetireris. Diýmek, p we q sanlaryň ikisi hem jübüt san, onda $\frac{p}{q}$ droby 2-ä gysgaltmak bolýar. Bu bolsa biziň çaklamamyza ters gelýär. Bu bolsa kwadratyň taraplarynyň uzynlygynyň onuň diagonallarynyň uzynlygy bilen ölçegdeş däldigini görkezýär (*51-nji surat*).



51-nji surat

Islendik kesimiň uzynlygynyň ölçegini sanlarda aňlatmak üçin Q_+ položitel rasional sanlar köplügini täze sanlary goşup giňeltmek gerek bolýar. Şeýlelikde, alnan sanlar köplügine položitel hakyky sanlar diýilýär we R_+ bellenýär. Her bir položitel rasional san položitel hakyky sanlar köplügine degişlidir, ýagny $Q_+ \subset R_+$.

2. Položitel hakyky sanlar köplüginde amallar

Goý, a we b hakyky sanlar, a_k we b_k kemi bilen alnan a'_k we b'_k bolsa, artygy bilen alnan bahalary bolsun.

Kesgitleme. a we b položitel hakyky sanlaryň jemi diýip, $a_k + b_k \le a + b < a'_k + b'_k$ deňsizligi kanagatlandyrýan $a + b$ sana aýdylýar.

Mysal üçin, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jemi 0,001 takyklykda tapmaly.

$$1,4142 \le \sqrt{2} < 1,4143; \quad 1,7320 \le \sqrt{3} < 1,7321, \quad \text{onda}$$

$$3,1462 \le \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,1464, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146.$$

Kesgitleme. a we b položitel hakyky sanlaryň köpeltmek hasyly diýip $a_k \cdot b_k \le a \cdot b < a'_k \cdot b'_k$ deňsizligi kanagatlandyrýan sana aýdylýar.

Mysal üçin, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ köpeltmek hasyly 0,1 takyklykda tapmaly. $1{,}41 \le 2 < 1{,}42$ we $1,73 \le \sqrt{3} < 1,74$. Onda, $2,4393 \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < < 2,4708$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2,4...$ Islendik položitel hakyky sanlar üçin şu aşakdaky deňlikler ýerine ýetýändir.

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a \cdot b = b \cdot a$;
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
5) $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Islendik $a, b \in R_+$ sanlar üçin $a = b + c$ deňlik ýerine ýeter ýaly, $c \in R_+$ san bardyr. Bu sana a we b sanlaryň tapawudy diýilýär we $a - b$ bellenýär. R_+ köplükde aýyrmak amaly goşmaga ters amal hökmünde kesgitlenýär, eger $x > y$ bolsa, onda we $(x + y) - y = x$ we $(x - y) + y = x$.

Islendik $a, b \in R_+$ sanlar üçin, $a = b \cdot c$ deňlik ýerine ýeter ýaly san bardyr. Bu sana a sany b sana bölmekden ýeten paý diýilýär we bellenýär. R_+ köplükde bölmek amaly köpeltmek amalyna ters amal hökmünde kesgitlenilýär, onda deňlik dogrudyr.

§4. Hakyky sanlar köplügi

1. Položitel we otrisatel sanlar

Položitel hakyky sanlaryň kömegi bilen islendik skalýar ululygyň: uzynlygyň, meýdanyň, göwrümiň, massanyň we ş.m. ölçeginiň netijesini ýazyp bolýar. Amaly işlerde, köplenç, ölçegiň netijesini däl-de, eýsem, şol ululygyň näçe ulalandygyny ýa-da näçe kiçelendigini görkezmeli bolýar. Şonuň üçin hem ululygyň ölçeginiň üýtgeýändigini görkezmek üçin diňe bir položitel hakyky sanlar däl-de, eýsem, başga sanlar hem gerek bolýar. Biz položitel hakyky sanlar köplügini oňa nol (0) we otrisatel hakyky sanlary goşmak bilen giňelderis.

Diýmek, R_+ položitel hakyky sanlar köplüginde her bir $x \in R_+$ sana $-x$ diýip bellenilýän täze bir sany degişli edip goýarys. Meselem, 5 sana – 5 sany; 8, 14 sana – 8, 14 sany we ş.m. degişli edip goýarys. $-x$ görnüşli sanlara otrisatel sanlar diýilýär we olaryň köplügi bilen bellenýär. Otrisatel hakyky sanlar köplüginden başga sany hem alarys. Onda R_+, R_- we $\{0\}$ sanlaryň birleşmesine hakyky sanlar köplügi diýilýär we R diýip bellenilýär. Diýmek, $R = R_+ \cup R_- \cup O$ ýazyp bolýar. Şonda R_+, R_- köplükler we $\{0\}$ san jübüt-jübütden kesişmeýärler, ýagny hiç bir san şol bir wagtda hem položitel hem otrisatel ýa-da hem nol san bolup bilmeýär.

Eger haýsy-da bolsa bir ululyk x baha eýe bolsa, soňra y baha eýe bolsa $x, y \in R_+$ onda $x < y$ bahada bu ululyk položitel san üýtgedi diýilýär. Meselem, eger ululygyň bahasy 6 we soňra 10 bolan bolsa, onda 10-6 birlik ýa-da 4 birlik üýtgedi diýilýär. Eger $x > y$ bolsa, onda ululyk otrisatel üýtgedi diýilýär, ol $(x - y)$ ululygy üýtgeýär. Ýagny 6 bolup soňra 2-ä deň bolsa, onda (6-2) ýa-da 4 ululyga üýtgedi diýilýär. Şonuň üçin hem položitel we otrisatel sanlar iki sany gapma-garşylykly şöhleleriň nokatlary hökmünde kesgitlenilýär. $x \in R_+$ bolsa x we $-x$ sanlar 0 koordinata başlangyjyna görä koordinata gönüsinde simmetrik ýerleşýärler. Bu sanlara gapma-garşylykly sanlar diýilýär. Özem $-(-x) = x$ bolýar, meselem, $-(-b) = b$ koordinata gönüsinde koordinata başlangyjyndan x sany aňladýan nokada çenli bolan aralyga x sanyň moduly diýilýär we $|x|$ bellenilýär. Onda

$$|x| = \begin{cases} x \text{ eger } x > 0 \text{ bolsa,} \\ -x \text{ eger } x < 0 \text{ bolsa,} \\ 0 \text{ eger } x = 0 \text{ bolsa.} \end{cases}$$

$x \in R_+$ san $a \in R$ san üýtgände $y \in R_+$ sana geçen bolsun, onda a hakyky sana položitel sanlaryň $(x : y)$ jübüti degişli bolýar. Meselem, (7, 2) jübüte –5 san degişli, sebäbi 7 sany – 5 san üýtgetsek, 2 san alynýar ýa-da (3, 8) jübüte 5 san degişli sebäbi 3 sany 5 san üýtgetsek, 8 sany alarys.

Diýmek, hakyky sanlary položitel sanlaryň jübütleriniň üsti bilen hem aňladyp bileris.

2. Hakyky sanlary goşmak we aýyrmak

Goý, käbir $x \in R_+$ sany ilki a birlik, soňra b birlik üýtgedipdirler. Onda bu üýtgeşmäni görkezýän položitel hakyky sana a we b sanlaryň jemi diýilýär. Meselem, 12 sany ilki 4 birlik üýtgetsek, ol 16 sana geçer, soňra ony 7 birlik üýtgetsek, ol 23 sana geçer (12 + 4); (16 + 7) diýmek, 12 sanyň 23 sana geçmegi üçin, ony 11 san üýtgetmeli. Ýagny 7 + 4 san üýtgetmeli. Umuman, eger a we b položitel hakyky sanlar $x > a + b$ berlen bolsa, ony a sana üýtgetsek, x sany x-sana, soňra b sana üýtgetsek, bolsa $(x – a)$ –b soňra, ýagny $x + (a + b)$ sana geçer. Bu bolsa $(–a) + (–b) = –(a + b)$ bolýandygyny görkezýär.

Indi gapma-garşylykly sanlary goşmaklyga seredeliň. Ýagny x sany ilki a san üýtgetsek, soňra-da a san üýtgetsek onda ýene-de x san alarys. Ýagny $x + (a) + (–a) = x$ sebäbi $x + 0 = x$; $a + (–a) = 0$. Diýmek, gapma-garşylykly sanlaryň jemi nola deňdir.

Iki hakyky sanyň jemi diýip şu aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan sana aýdylýar:

1. Iki sany položitel hakyky sanyň jemi položitel sandyr we ol položitel hakyky sanlar köplüginde goşmak amalynyň düzgüni bilen tapylýar 15 + 12 = 27.

2. Iki sany (–7) + (–12) = –19 otrisatel hakyky sanyň jemi otrisatel sandyr. Bu sanyň modulyny tapmak üçin, goşulyjylaryň modullaryny goşmaly.

3. Dürli alamatly iki sanyň jemini tapmak üçin moduly boýunça uly sandan kiçi san aýryp, uly sanyň alamaty goýulýar 8 + (–16) = –8.

R hakyky sanlar köplüginde aýyrmak amaly goşmaga ters amal hökmünde kesgitlenilýär. Meselem: $a – b = a + (–b)$. Indi R köplükde tertip gatnaşygyny girizeliň, $a > b$ gatnaşyk şonda we diňe şonda dogry, eger-de $a – b$ tapawut položitel bolsa, R köplükde tertip gatnaşygy asimmetrikdir we tranzitiwdir, ýagny ol berk tertip gatnaşygy bolýar. Şonda $\forall ab \in R$ sanlar üçin $a = b$; $a > b$; $a < b$ gatnaşyklaryň haýsy-da bolsa biri ýerine ýetýär.

3. Hakyky sanlary köpeltmek we bölmek

Eger a kesimiň uzynlygy x-a deň bolsa, onda $a = xe$ (e birlik kesim) diýip belledik. Şol bir gönüde ýatýan ugrukdyrylan kesimler üçin hem $a = xe$ ýazyp bileris. Bu ýerde $x > 0$, eger-de kesimler ugurdaş bolsa we $x < 0$, eger-de kesimler gapma-garşylykly ugrukdyrylan bolsa. Eger-de $e = yf$ deňlik dogry bolsa, onda $a = x(yf)$ bolar. x we y sanlaryň köpeltmek hasyly diýip $a = zf$ şerti kanagatlandyrýan z sana aýdylýar. x we y sanlar berlen bolsa $x \cdot y$ köpeltmek hasyly a kesimiň multiplikatiwlik häsiýetlerden gelip çykýar. Iki sany hakyky sanyň köpeltmek hasyly diýip aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan hakyky sana aýdylýar.

1. Iki sany položitel hakyky sanyň köpeltmek hasyly položitel sandyr.

2. Iki sany otrisatel hakyky sanyň köpeltmek hasyly položitel sandyr.

3. Dürli alamatly hakyky sanlaryň köpeltmek hasyly otrisatel sandyr.

$\forall x \in R$ san üçin, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$. R köplükde köpeltmek amaly kommutatiwlik, assosiatiwlik we goşmaga görä distributiwlik kanunlaryna boýun egýär. Ýagny

a) $a \cdot b = b \cdot a$;

b) $(a + b) \cdot c = ac + bc$;

ç) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

R köplükde bölmek amaly köpeltmek amalyna ters amal hökmünde kesgitlenilýär.

§5. Ululyklary ölçemek

1. Ululyk düşünjesi – matematikanyň esasy düşünjeleriniň biri bolup, ol adamzat jemgyýetiniň döremegi we ösmegi netijesinde ýüze çykdy hem-de ençeme asyrlaryň dowamynda ösüp, kämilleşip, bize gelip ýetdi.

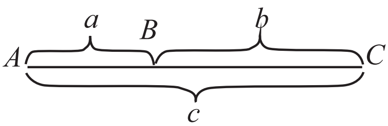
Ululyk – bu durmuşda duş gelýän hakyky matematiki düşünjeleriň, hadysalaryň aýratyn häsiýetleridir. Ululyk diýen umumy düşünje, uzynlyk, meýdan, göwrüm, agyrlyk, tizlik, wagt we ş.m. düşünjeleri gönüden – göni umumylaşdyrmak arkaly alynýar.

Birmeňzeş ululyklary deňeşdirip bolýar, olaryň üstüne arifmetiki amallary geçirip bolýar. Meselem, kesimleriň uzynlygyny biri-biriniň üstüne goýup, haýsysynyň uzyn, haýsysynyň gysgadygyny kesgitläp bolýar, sebäbi meňzeş ululyklaryň meňzeş häsiýetleri bardyr, emma dürli ululyklaryň häsiýetleri dürli bolany üçin olary deňeşdirip bolmaýar.

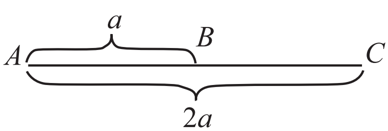
Indi ululyklaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

1. Islendik, iki sany birmeňzeş ululygy deňeşdirip bolýar, ýagny bu ululyklar deňdir ýa-da biri beýlekisinden kiçidir. Onda «deň», «uly», «kiçi» diýen gatnaşyklaryň haýsy-da bolsa biri ýerine ýetýär. Diýmek, islendik a we b ululyklar üçin, $a < b$; $a = b$; $a > b$ diýen gatnaşyklaryň biri we diňe biri dogrudyr.

2. Birmeňzeş ululyklary goşup bolýar. Ýagny islendik a we b ululyklar üçin, bu ululyklaryň jemi diýip atlandyrylýan $a + b$ ululyk kesgitlenendir (bardyr).



52-nji surat



53-nji surat

Meselem, AB kesimiň uzynlygyny a, BC kesimiň uzynlygyny b bilen bellesek, onda AC kesimiň uzynlygyny kesgitleýän $c = a + b$ şert ýerine ýeter ýaly c san bardyr (*52-nji surat*).

3. Eger-de ululygy položitel hakyky sana köpeltsek, onda ýene-de şol ululyga meňzeş ululyk alnar. Hakykatdanam islendik a ululygy x položitel hakyky sana köpeltsek, onda a ululygyň we x hakyky sanyň köpeltmek hasyly diýip atlandyrylýan ýeke-täk $b = a \cdot x$ san bardyr. Meselem, AB kesimiň a uzynlygyny $x = 2$ sana köpeltsek, uzynlygy $2a$ deň bolan AC kesim alnar (*53-nji surat*).

4. Birmeňzeş ululyklarda aýyrmak amaly ýerine ýetýär. Ululyklary aýyrmak amalyny ululyklary goşmak amalynyň üsti bilen kesgitläliň. Onda, a we b ululyklaryň tapawudy diýip, $c = a + b$ şerti kanagatlandyrýan ululyga aýdylýar. Meselem, $AC = c$; $Ab = a$; $BC = b$ bolsa, BC kesimiň uzynlygy AC we AB kesimleriň uzynlyklarynyň tapawudyna deňdir ($b = c - a$).

5. Birmeňzeş ululyklarda bölmek amaly ýerine ýetýär, onda bölmek amalyny hem ululyklary köpeltmek amalynyň üsti bilen

kesgitläliň. ululygy ululyga bölmekden ýeten paý diýip, $a = b \cdot x$ şerti kanagatlandyrýan x otrisatel däl sana aýdylýar. x sana a we b ululyklaryň gatnaşygy diýilýär we $x = \frac{a}{b}$ görnüşinde ýazylýar.

Dürli ululyklary ölçemeklige isleg, zerurlyk adamzat jemgyýetiniň ösmegi netijesinde, adamlaryň amaly işiniň ýüze çykmagy bilen döredi. Bu barada biz natural sanlary öwrenende giňişleýin durup geçipdik.

Adamlar ilki dürli köplükleri, dürli birmeňzeş ululyklary deňeşdirmegi öwrenipdirler. Ýöne bu deňeşdirmeleri ölçemek diýip atlandyryp bolmaýardy. Soňra kem-kemden ululyklary deňeşdirmek işi kämilleşdirilýär, ýagny haýsy-da bolsa bir ululyk nusga (etalon) hökmünde kabul edilip, şuňa meňzeş beýleki ululyklar nusga bilen deňeşdirilýär.

Haçanda adamlar sanamagy öwrenenden soň, nusga ululygy 1 (birlik) san bilen aňladypdyrlar we bu nusga-etalona ölçemegiň birligi diýip at beripdirler hem-de ölçemegiň netijesini san baha bilen aňladyp başlapdyrlar.

Eger a ululyk berlen bolsa we bu ululygy ölçemek üçin e ölçeg birligi kesgitlenen bolsa, onda ululygy ölçemek netijesinde $a = x \cdot e$ şerti kanagatlandyrýan x položitel hakyky sany tapyp bolýar. Bu x sana a ululygyň e ölçeg birligine görä san bahasy diýilýär we ol $x = m_{\ell}(a)$ diýip bellenilýär. Okalyşy: e – ölçeg birligine görä a ululygyň san bahasy.

Diňe bir sany san bahasy bilen kesgitläp bolýan ululyklara skalýar ululyklar diýilýär. Meselem, uzynlyk, göwrüm, meýdan skalýar ululyklara mysal bolup bilýär.

Matematikada skalýar ululyklardan başga wektor ululyklar hem bardyr. Wektor ululyklary kesgitlemek üçin diňe bir san baha ýeterlik bolman, eýsem, onuň ugry hem görkezilýär. Wektor ululyklara güýç, tizlenme, elektrik meýdanynyň naprýaženiýesi mysal bolup biler.

Matematikanyň başlangyç kursunda skalýar ululyklara, onda-da diňe položitel san bahalary alýan, položitel skalýar ululyklara seredilýär, şonuň üçin hem biz wektor ululyklar barada gürrüň etmeris.

Indi ululyklary ölçemegiň käbir häsiýetlerine seredeliň.

12. Sargyt № 1407
МАША
Кор-ра после МНО 25.11.15

1. Eger a we b ululyklar e ölçeg birliginiň kömegi bilen ölçenen bolsa, onda a we b ululyklaryň arasyndaky gatnaşyklar, olaryň san bahalarynyň arasyndaky gatnaşyklar ýaly kesgitlenilýär we tersine:

$$a = b \Leftrightarrow m_\ell(a) = m_\ell(b);$$
$$a < b \Leftrightarrow m_\ell(a) < m_\ell(b);$$
$$a > b \Leftrightarrow m_\ell(a) > m_\ell(b).$$

Meselem, iki jisimiň agramy degişlilikde, $a = 5$ *kg*; $b = 3$ *kg* bolsa, onda a jisimiň agramy b jisimiň agramyndan uly diýilýär, sebäbi $5 > 3$.

2. Eger a we b ululyklar e ölçeg birliginiň kömegi bilen, bu ululyklaryň $a + b$ jeminiň san bahasyny tapmak üçin ölçenen bolsa, onda a we b ululyklaryň san bahalaryny goşmak ýeterlikdir:

$$a + b = c \Leftrightarrow m_\ell(a) + m_\ell(b) = m_\ell(a + b).$$

Meselem, $a = 15$ *kg*, $b = 12$ *kg* bolsa, onda

$$a + b = 15\ kg + 12\ kg = (15 + 12)\ kg = 27\ kg.$$

3. Eger a we b ululyklar hem-de x položitel san üçin $b = x \cdot a$ deňlik ýerine ýetse, şonda a ululyk e ölçeg birligi bilen ölçenen bolsa, onda e ölçeg birligi bilen ölçenen b ululygyň san bahasyny tapmak üçin x sany $m_\ell(a)$ sana köpeltmek ýeterlikdir:

$$b = x \cdot a \Leftrightarrow m_\ell(b) = x \cdot m_\ell(a).$$

Meselem, $a = 2$ *kg* bolsa we b jisimiň agramy a jisimiň agramyndan 3 esse köp bolsa, ýagny $b = 3a$ bolsa, onda

$$b = 3a = 3 \cdot 2\ kg = (3 \cdot 2)\ kg = 6\ kg.$$

Matematikanyň başlangyç kursunda okuwçylar uzynlyk, meýdan, agyrlyk, wagt ýaly ululyklar bilen tanyşdyrylýar. Biz olaryň her birine aýratynlykda serederis.

Kesimiň uzynlygy we ony ölçemek

Çagalar mekdebe gelen ilkinji gününden başlap matematika sapaklarynda sanamagy öwretmäge çenli döwürde uzyn-gysga, çepde-sagda, ýokarda-aşakda, ýogyn-inçe diýen ýaly düşünjeleri kesimleri ölçemegiň üsti bilen öwrenýärler.

Haçanda olar kesimleri deňeşdirmegi özleşdirenden soňra kesimleri ölçemek öwredilýär we olar ilkinji gezek *sm* diýen ölçeg birligi bilen tanyşýarlar, şonda matematika depderinde 2 gözenegiň (kletka) 1 *sm* bolýandygyny mugallym olara görkezýär. Soňra ölçeg çyzgyjy (lineýka) bilen tanyşdyrylýar hem-de kesimleri ölçemegiň usullary görkezilýär. Ölçeg çyzgyjynyň kömegi bilen okuwçylar iki zady başarmaly:

1. Berlen kesimiň uzynlygyny ölçäp bilmeli;

2. Uzynlygy berlen kesimi çyzgyjyň kömegi bilen gurmagy başarmaly.

Soňra okuwçylar uzynlygy ölçemegiň *mm*, *sm*, *dm*, *m*, *km* diýen ölçeg birlikleri bilen tanyşdyrylýar we bir ölçeg birliginden beýleki ölçeg birligine geçmek dürli mysal-meseleleriň üsti bilen öwredilýär.

Meselem, 1 *km* = 1000 *m*; 1 *m* = 10 *dm* = 100 *sm*; 1 *dm* = 10 *sm*; 1 *sm* = 10 *mm* bolýandygy görkezilýär.

Meýdan ölçemek

Meýdan ölçemegi öwretmek 3 döwre bölünýär:

I taýýarlyk döwri. Bu döwürde okuwçylar dürli geometriki şekilleri tanap bilmeli. Olary düzýän bölekleri sanamagy başarmaly hem-de kwadratyň, gönüburçlugyň ýönekeýje häsiýetlerini bilmeli.

II döwürde gönüburçlugyň, kwadratyň meýdanyny tapmagy başarmaly.

III döwürde dürli ölçeg birliklerinde berlen meýdany hasaplap, bir ölçeg birliginde ýazmagy başarmaly.

Onuň üçin okuwçylar:

1. Meýdan ölçegleriniň birliklerini we olaryň arasyndaky gatnaşygy bilmeli, ýagny:

1 *kw.sm* = 100 *kw.mm*	1 *kw.dm* = 100 *kw.sm*
1 *kw.m* = 100 *kw.dm*	1 *kw.m* = 10 000 *kw.sm*.

2. 2-3 sany gönüburçlukdan düzülen täze gönüburçlugyň meýdanyny ölçemegi we hasaplamagy, şonuň ýaly-da gönüburçlugyň meýdany hem-de bir tarapy berlende beýleki tarapyny tapmagy bilmeli.

Mesele. Gönüburçlugyň meýdany 36 *sm.kw*, onuň ini 4 *sm*. Gönüburçlugyň perimetrini tapmaly.

Çözülişi.

$$a = s : b, \quad s = 36, \quad b = 4, \quad a - ?$$

$$36\ kw.sm : 4\ sm = 9\ sm.$$

$$P = 2a + 2b = 2 \cdot 9\ sm + 2 \cdot 4\ sm = (18 + 8)\ sm = 26\ sm.$$

Jogaby: 26 *sm.*

Agyrlyk ölçegleri

Agyrlyk ölçegleri bilen tanyşdyrylanda ilki 1 *kg*, 1 *gr* diýen ölçeg birlikleri we olaryň arasyndaky gatnaşyklar öwredilýär.

1 *kg* = 1000 *g*. Soňra 1 *s* (sentner), 1 *t* ýaly ölçeg birlikleri dürli mysal-meseleleriň üsti bilen öwredilýär. Amallary ýerine ýetiriň.

1) $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 59kg\ 827g \\ 2kg\ 063g \end{array} \\ \hline 61kg\ 890g \end{array}$$

2) 59 *kg* 827 *g* = 59827 *g*
2 *kg* 063 *g* = 2063 *g*

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 59827g \\ 2063g \end{array} \\ \hline 61890g \end{array}$$

Wagt ölçegleri we onuň birlikleri

Wagt düşünjesi uzynlyk we agyrlyk düşünjelerine görä has çylşyrymly düşünjedir. Wagt ölçegleriniň birlikleri *sek*, *min*, *sag* adamlar tarapyndan oýlanyp tapylan bolsa, 1 gije-gündiz, 1 aý, 1 ýyl ýaly birlikler tebigata syn etmek arkaly alnandyr. 1 gije-gündiz Ýeriň öz okunyň daşynda 1 gezek aýlanmagy, 1 ýyl Ýeriň Günüň daşyndan 1 gezek aýlanmagyndan alynýar.

Edil beýleki ululyklaryň ölçeg birlikleri ýaly wagt ölçeglerinem deňeşdirip bolýar, olaryň üstünde arifmetiki amallary geçirip bolýar. Meselem:

1) $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 10min\ 25s \\ 25min\ 11s \end{array} \\ \hline 35min\ 36s \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 17min\ 37s \\ 9min\ 28s \end{array} \\ \hline 26min\ 65s \end{array}$$

bu ýerde 60 *s* = 1 *min* onda, 26 *min* 65 sekundy 27 *min* 5 *s* diýip ýazyp bolýar. Diýmek, 2-nji mysalyň jogaby: 27 *min* 5 *s* bolar.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2003.
2. Türkmenistanda bilim ulgamyny ösdürmegiň 2012–2016-njy ýyllar üçin Döwlet maksatnamasy. Aşgabat. TDNG, 2012.
3. *Gurbanguly Berdimuhamedow,* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. 5-nji tom. Aşgabat. TDNG, 2012.
4. *Ahmedow A.* Diskret matematika. Aşgabat. Turan -1, 1992.
5. *Garryýew O., Nazaröwezow M.* Ýokary geometriýa. I bölek. Aşgabat, Turan-1, 1992.
6. *Hojanyýazow H.M., Kasymowa G.A.* Matematiki oýunlar, tapmaçalar we gyzykly meseleler, Türkmenabat, 2001.
7. *Hojanyýazow H.M.* Matematika I bölüm. Türkmenabat, 2010.
8. *Hojanyýazow H.M.* Matematika II bölüm. Türkmenabat, 2010.
9. *Hojanyýazow H.M.* Matematika. Türkmenabat, 2012.
10. *Hojanyýazow H.M.* Matematika sapaklarynda suratlardan, çyzgylardan we şekillerden peýdalanmak. Türkmenabat, 2009.
11. *Hudaýberenow Ö.* Ýokary matematika. Aşgabat. TDNG, 2007.
12. Алгебра и теория чисел. Под редакцией Н.Я. Виленкина. Москва. Просвещение, 1974.
13. *Атанасян Л.С.* Аналитическая геометрия. Москва. Просвещение, 1967.
14. *Виленкин Н.Я., Пыщкало А.М.* Математика.Москва. Просвещение, 1977.
15. *Виленкин Н.Я., Лаврова Н.Н.* Задачник-практикум по математике. Москва. Просвещение, 1977.
16. *Гелфонд А.* Решение уравнений в целых числах. Москва. Наука, 1978.
17. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Москва. Просвещение, 1988.

18. *Калужнин Л.А.* Элементы теории множеств и математической логики. Москва. Просвещение, 1988.

19. Математика. I часть. Под редакцией профессор Л.П. Стойловой. Минск, 1976.

20. Математика. II часть. Под редакцией профессор Л.П. Стойловой. Минск, 1976.

21. *Пыщкало А.М., Стойлова Л.П.* Теоретические основы начального курса математики. Москва, Просвещение, 1974.

22. *Столяр А.А., Лельчук М.П.* Математика. Минск, 1975.

23. *Стойлова Л.П., Пыщкало А.М.* Основы начального курса математики. Москва. Просвещение, 1988.

MAZMUNY

V BAP. GEOMETRIKI ÖZGERTMELER

VI BAP. NATURAL SANLAR

VII BAP. SAN BARADAKY
DÜŞÜNJÄNI GIŇELTMEK. ULULYKLAR WE OLARY
ÖLÇEMEK