O. Aşyrow, N. Gurbanmämmedow,
H. Soltanow, M. Almazow

ÝOKARY MATEMATIKA

II kitap

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Türkmen döwlet neşirýat gullugy
Aşgabat – 2012

UOK 378.51
A 79

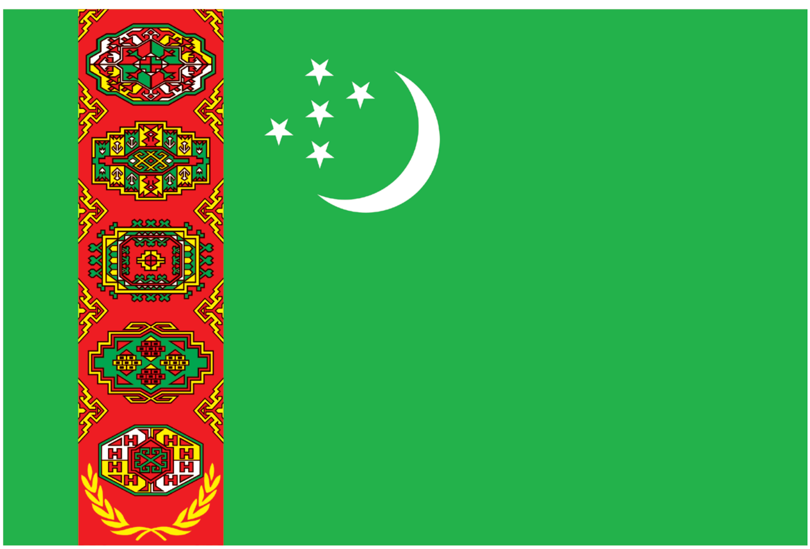
Aşyrow O. we başg.
A 79 **Ýokary matematika.** II kitap. Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

Ýokary matematika dersi boýunça şu okuw kitabyna matematiki analiziň dowamy (köp üýtgeýänli funksiýalaryň differensial we integral hasabyýeti, san we funksional hatarlary), ady we hususy önümli differensial deňlemeler, matematiki fizikanyň ýönekeý deňlemeleri, ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistikanyň elementleri girizildi. Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen mysallar çözülip görkezilýär we özbaşdak ýerine ýetirmek üçin gönükmeler getirilýär.

TDKP №195, 2012 KBK 22.1 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Türkmenistanyň Prezidenti
Gurbanguly Berdimuhamedow:

– Men halkymyň eşretli durmuşynyň gözbaşlaryny ylym-bilim ulgamynyň kämilleşmeginde görýärin.

SÖZBAŞY

Birinji kitabyň dowamy bolan bu ikinji kitap uniwersitetiň tebigy ylymlar boýunça dürli hünärleri alýan talyplarynyň hemmesi ulanyp biler ýaly edilip giňişleýin ýazyldy. Oňa matematiki analiziň dowamy (köp üýtgeýänli funksiýalar, olaryň predeli, üznüksizligi, önümleri we differensiallary, ikigat, üçgat, egriçyzykly we üst integrallary, san we funksional hatarlary), differensial deňlemeler (birinji we ýokary tertipli ady differensial deňlemeler, birinji we ikinji tertipli hususy önümli differensial deňlemeler, matematiki fizikanyň ýönekeý deňlemeleri), ähtimallyklar nazaryýeti (kombinatorikanyň elementleri, tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary, matematiki garaşma, dispersiýa, orta kwadratik gyşarma, matematiki statistikanyň elementleri, korrelýasiýa nazaryýetiniň esasy düşünjeleri) girizildi.

Her bölümde nazaryýeti berkitmek maksady bilen onda beýan edilen düşünjeleriň ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär we olaryň çözülişleri görkezilýär. Şeýle hem her bölümiň ahyrynda talyplar bilen amaly sapaklar geçilende we özbaşdak işlerde ulanar ýaly köpsanly mysallar getirilýär.

Kitapda ýygy-ýygydan duş gelýän «bar bolup» («tapylyp») sözleriniň ýerine barlygy aňladýan $\exists$ belgi, «islendik» («her bir») sözleriniň ýerine bolsa umumylygy aňladýan $\forall$ belgi ulanylýar. $A \Rightarrow B$ ýazgy A sözlemden B sözlemiň gelip çykýandygyny aňladýar. Eger-de, onuň üstesine B sözlemden A sözlem hem gelip çykýan bolsa, onda ol $A \Leftrightarrow B$ ýazgyda aňladylýar. Mysal üçin, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in B$, $P \ni m \exists$ gysgaça ýazgylar «islendik ε uludyr nol», «islendik x degişli B», «P degişli m tapylyp» diýlip okalýar. Teoremanyň subudynyň, mysalyň çözülişiniň başlangyjyny we ahyryny görkezmek üçin $\lhd$ we $\rhd$ belgiler ulanylýar.

Bu kitapdan fizika hünärini alýan talyplar, şeýle hem beýleki ýokary okuw mekdepleriniň talyplary peýdalanyp bilerler.

II BAP

MATEMATIKI ANALIZ (dowamy)

II.7. KÖP ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR

§ 7. 1. Köp üýtgeýänli funksiýa düşünjesi

1. *m* ölçegli giňişlik düşünjesi. Ilki bilen m ölçegli arifmetiki giňişlik düşünjesini girizeliň. Hakyky x_1, x_2, ..., x_m sanlaryň tertipleşdirilen $(x_1, x_2, ..., x_m)$ toplumyna m ölçegli nokat, şol sanlaryň özlerine bolsa onuň koordinatalary diýilýär. Şunlukda, $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ ýazgy x_1, x_2, ..., x_m sanlaryň M nokadyň koordinatalarydygyny aňladýar. Şeýle nokatlaryň köplügine m ölçegli arifmetiki (koordinatalar) giňişligi diýilýär. Eger bu giňişligiň islendik iki $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ we $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk

$$\rho(M, M') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + ... + (x_m - x'_m)^2}$$

formula boýunça kesgitlenýän bolsa, onda oňa m ölçegli ýewklid giňişligi diýilýär we ol R^m bilen belgilenilýär. Aşakdaky köplükler bu giňişligiň köplüklerine mysal bolup biler:

1) Berlen $M_o(x_1^o, x_2^o, .., x_m^o)$ nokat üçin koordinatalary

$$(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + ... + (x_m - x_m^o)^2 \leq r^2$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nokatlaryň $\{M\}$ köplügine merkezi M_o nokatda we radiusy r bolan m ölçegli ýapyk şar diýilýär.

2) Eger köplügiň ähli nokatlarynyň koordinatalary üçin

$$(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + ... + (x_m - x_m^o)^2 < r^2$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{M\}$ köplüge m ölçegli açyk şar diýilýär.

3) $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nokatlaryň

$$(x_1 - x_1^o)^2 + (x_2 - x_2^o)^2 + ... + (x_m - x_m^o)^2 = r^2$$

deňligi kanagatlandyrýan $\{M\}$ köplüge m ölçegli sfera diýilýär.

4) Koordinatalary $[a, b]$ kesimde üznüksiz $x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ funksiýalar bolan $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nokatlaryň köplügine R^m giňişlikde üznüksiz çyzyk diýilýär. Şunlukda,

$$A(x_1(a), x_2(a), ..., x_m(a)) \quad \text{we} \quad B(x_1(b), x_2(b), ..., x_m(b))$$

nokatlara degişlilikde çyzygyň $[a, b]$ kesimdäki başlangyç we ahyrky nokatlary diýilýär.

2. *m* ölçegli giňişligiň käbir köplükleri. Merkezi M_o nokatda we radiusy ε bolan m ölçegli açyk şara M_o nokadyň ε etraby diýilýär. M_o nokady özünde saklaýan islendik m ölçegli açyk şara bolsa şol nokadyň etraby diýilýär.

Eger köplügiň ähli nokatlary käbir m ölçegli şara degişli bolsa, onda oňa çäkli köplük diýilýär. Şeýle köplügiň islendik iki nokadynyň arasyndaky uzaklyklarynyň takyk ýokarky çägine onuň diametri diýilýär.

Goý, $\{M\}$ köplük m ölçegli R^m giňişligiň käbir köplügi, ýagny $\{M\} \subset R^m$ bolsun. Eger M nokadyň islendik etraby $\{M\}$ köplügiň M nokatdan tapawutly iň bolmanda bir nokadyny özünde saklaýan bolsa, onda M nokada $\{M\}$ köplügiň predel nokady diýilýär. Köplügiň predel nokady şol köplüge degişli bolup hem, degişli bolman hem biler. Mysal üçin, $x=2$, $x=4$ nokatlar $[2, 4]$ we $(2, 4)$ köplükleriň her biriniň predel nokatlarydyr, ýöne olar birinji köplüge degişli bolup, ikinjisine degişli däldir. Eger $M \in \{M\}$ nokadyň şol köplügiň başga hiç bir nokadyny özünde saklamaýan etraby bar bolsa, onda ol nokada $\{M\}$ köplügiň üzňe nokady diýilýär. Ähli predel nokatlaryny özünde saklaýan köplüge ýapyk köplük diýilýär. Eger M nokat $\{M\}$ köplüge özüniň käbir etraby bilen degişli bolsa, onda ol nokada şol köplügiň içki nokady diýilýär. Hemme nokatlary onuň içki nokatlary bolan köplüge açyk köplük diýilýär. Eger M nokadyň islendik etraby $\{M\}$ köplüge degişli nokatlary hem, degişli däl nokatlary hem özünde saklaýan bolsa, onda M nokada şol köplügiň gyra nokady diýilýär. $\{M\}$ köplügiň gyra nokatlarynyň toplumyna ol köplügiň araçägi diýilýär. Her bir köplük özüniň araçägi bilen bilelikde ýapyk köplügi emele getirýär. Mysal üçin, tekizlikde $x^2+y^2<1$ deňsizligi kanagatlandyrýan $M(x, y)$ nokatlaryň köplügi onuň araçägi bolan $x^2+y^2=1$ töweregiň nokatlary bilen bilelikde $x^2+y^2\leq 1$ deňsizligi kanagatandyrýan nokatlaryň ýapyk köplügini emele getirýär. Şonuň ýaly, m ölçegli ýapyk şar hem R^m giňişlikde ýapyk köplükdir.

3. Köp üýtgeýänli funksiýa düşünjesi. m ölçegli arifmetiki giňişligiň käbir X köplügininň her bir $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ nokadyna kesgitli u hakyky sany degişli edýän f düzgüne X köplükde kesgitlenen m ölçegli funksiya diýilýär we ol $u=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ görnüşde ýa-da gysgaça $u=f(M)$ bilen belgilenýär. Hemişelik C san üçin R^m giňişligiň

$$f(x_1, x_2, ..., x_m)=C$$

deňligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügine $u=f(M)$ funksiýanyň dereje köplügi diýilýär. Hususan-da, $m=2$, $m=3$ bolanda oňa degişlilikde funksiýanyň dereje çyzygy we dereje üsti diýilýär. «Dereje çyzygy» adalgasy kartografiýadan alnandyr. Ol ýerde dereje çyzyklary deňiz derejesinden beýiklikleri hemişelik bolan ýeriň üstüniň nokatlarynyň emele getirýän çyzyklarydyr. Şol çyzyk boýunça diňe ýeriň nokatlarynyň deňiz derejesinden näçe ýokarda ýerleşýändigi kesgitlenmän, onuň relýefiniň häsiýeti hem kesgitlenýär, ol bolsa daglyk ýerler üçin wajypdyr.

1-nji mysal. $f(x,y)=\dfrac{1}{4x^2+y^2}$ funksiýanyň dereje çyzyklaryny tapmaly.

◁ Berlen funksiýanyň dereje çyzyklary hemişelik C üçin

$$\frac{1}{4x^2+y^2}=C$$

deňlikden, ýagny $C(4x^2+y^2)=1$ deňlikden kesgitlenýär. Ondan bolsa

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4C}} + \frac{y^2}{\frac{1}{C}} = 1$$

gelip çykýar. Ol ellipsiň deňlemesidir. Diýmek, berlen funksiýanyň dereje çyzyklary ellipslerdir. $\triangleright$

§ 7. 2. Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli we üznüksizligi

1. Köp üýtgeýänli funksiýanyň predeli. Goý, $u=f(M)$ funksiýa käbir $X \subset R^m$ köplükde kesgilenen we M_o nokat X köplügiň predel nokady bolsun. Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin şeýle $\delta > 0$ san tapylyp,

$$0 < \rho(M, M_o) < \delta \tag{1}$$

şerti kanagatlandyrýan her bir $M \in X$ üçin

$$|f(M) - B| < \varepsilon \tag{2}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda B sana $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky (ýa-da $M \to M_o$ bolandaky) predeli diýilýär. $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky predeli

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = B \tag{3}$$

görnüşde belgilenýär.

Eger $\alpha=\alpha(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky predeli nola deň, ýagny

$$\lim_{M \to M_o} \alpha(M) = 0 \tag{4}$$

bolsa,onda ol funksiýa M_o nokatda tükeniksiz kiçi funksiýa diýilýär.

1-nji teorema. $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatda B predeliniň bolmagy üçin

$$f(M)=B+\alpha(M), \qquad \lim_{M \to M_o} \alpha(M) = 0 \tag{5}$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bu teoremanyň subudy § 2.4-däki 5-nji teoremanyň subudy ýalydyr.

Bir üýtgeýänli funksiýa üçin jemiň, köpeltmek hasylynyň we paýyň predeli hakyndaky § 2.5-de subut edilen 9-njy teorema meňzeş teoremany köp üýtgeýänli funksiýa üçin hem subut etmek bolar.

1-nji bellik. Iki üýtgeýänli $u=f(x, y)$ funksiýanyň $M_o(a, b)$ nokatdaky B predeli üçin

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = B \tag{6}$$

ýazgy ulanylýar.

2-nji mysal. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x^2 + 4y - 1)$ predeli hasaplamaly.

◁ Jemiň predeliniň häsiýeti hakyndaky teorema esasynda

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x^2 + 4y - 1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x^2) + \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (4y) - 1 =$$

$$= \lim_{x \to 1} (3x^2) + \lim_{y \to 2} (4y) - 1 = 3 + 8 - 1 = 10. \ ▷$$

2. Köp üýtgeýänli funksiýanyň artymy. Bu düşünjäni ýönekeýlik üçin iki üýtgeýänli $u=f(x, y)$ funksiýa üçin girizeliň.

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

tapawuda $u=f(x, y)$ funksiýanyň $M(x, y)$ nokatdaky doly artymy,

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

tapawutlara bolsa $u=f(x, y)$ funksiýanyň şol nokatdaky (x we y boýunça) hususy artymlary diýilýär.

3. Köp üýtgeýänli funksiýanyň üznüksizligi. Goý, $u=f(M)$ funksiýa käbir $X \subset R^m$ köplükde kesgilenen we $M_o \in X$ bolsun. Eger $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatda predeli bar bolup,

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = f(M_o) \tag{7}$$

deňlik ýerine ýetse, onda $u=f(M)$ funksiýa M_o nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär. Başgaça aýdylanda, eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin şeýle $\delta > 0$ san tapylyp,

$$\rho(M, M_o) < \delta \tag{8}$$

şerti kanagatlandyrýan her bir $M \in X$ üçin

$$|f(M) - f(M_o)| < \varepsilon \tag{9}$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $u=f(M)$ funksiýa M_o nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

2-nji mysaldaky funksiýa $M_o(1,\ 2)$ nokatda üznüksizdir, çünki $f(x,\ y)=3x^2+4y-1$ funksiýa üçin $f(1,\ 2)=10$ we (7) deňlik ýerine ýetýär:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(3x^2+4y-1\right)=10=f(1,2).$$

$\Delta u=f(M)-f(M_o)$ tapawudyň $u=f(M)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly artymy bolýandygy esasynda, ol funksiýanyň M_o nokatda üznüksiz bolmagy üçin

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta u=0 \quad \text{ýa-da} \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}[f(M)-f(M_o)]=0 \qquad (10)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir ($\Delta\rho=\rho(M,\ M_o)$).

Hakykatdan-da, eger (7) ýerine ýetýän bolsa, onda

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}[f(M)-f(M_o)]=0 \quad \text{ýa-da} \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta u=0,$$

ýagny (10) deňlik ýerine ýetýär. Tersine, eger (10) deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda (7) deňlik hem ýerine ýetýär.

3-nji mysal. $z=x^2+y^2$ funksiýanyň islendik $(x,\ y)$ nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

◁ Berlen funksiýanyň $(x,\ y)$ nokatdaky doly artymy bolan

$$\Delta z=[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2]-(x^2+y^2)=2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2$$

deňlikde $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

deňligi alarys, ýagny funksiýa üznüksizdir. ▷

Eger funksiýa käbir köplügiň her bir nokadynda üznüksiz bolsa, onda oňa şol köplükde üznüksiz funksiýa diýilýär.

Kesimde üznüksiz bir üýtgeýänli funksiýalaryňka meňzeş bolan häsiýetler köplükde üznüksiz bolan köp üýtgeýänli funksiýalar üçin hem ýerine ýetýär.

2-nji teorema. Eger $u=f(M)$ funksiýa çäkli we ýapyk köplükde üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol köplükde çäklidir we iň kiçi we iň uly bahalaryny alýar.

$u = f(M)$ funksiýanyň üznüksiz bolmadyk nokatlaryna onuň üzülme nokatlary diýilýär. Funksiýanyň kesgitlenmedik, ýöne predeli bar nokatlaryna hem onuň üzülme nokatlary diýilýär. Mysal üçin, $u = 1/(y - x^2)$ funksiýanyň üzülme nokatlary $y = x^2$ parabolanyň ähli nokatlarydyr. Bu halda $y = x^2$ parabola onuň üzülme çyzygy diýilýär. Şoňa meňzeşlikde, $u = 1/(z - x^2 - y^2)$ funksiýa üçin $z = x^2 + y^2$ üst, berlen funksiýanyň üzülme üstüdir.

§ 7. 3. Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümleri

1. Hususy önümiň kesgitlenişi. Ýönekeýlik üçin iki üýtgeýänli $z = f(x, y)$ funksiýa garalyň. Belli bolşy ýaly, ol funksiýanyň x we y boýunça $M(x, y)$ nokatdaky hususy artymlary

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

deňlikler bilen kesgitlenýär. Eger

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right) \tag{11}$$

predel bar bolsa, onda şol predele $z = f(x, y)$ funksiýanyň $M(x, y)$ nokatdaky x boýunça (y boýunça) hususy önümi diýilýär we ol

$$z'_x, \quad f'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \left(z'_y, \quad f'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

belgileriň haýsydyr biri bilen belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \right).$$

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, iki üýtgeýänli funksiýanyň x boýunça hususy önümi bellenen y üçin berlen funksiýanyň x boýunça adaty önümini aňladýar. Şonuň üçin hem hususy önümler bir üýtgeýänli funksiýalaryň önüminiň formulalary we düzgünleri boýunça hasaplanylýar. Amalyýetde üýtgeýänleriň biri boýunça hususy önüm tapylanda şol üýtgeýänden beýlekilerini hemişelik hasap etmek bolar.

4-nji mysal. $f(x, y)=x^2\sin y$ funksiýanyň hususy önümlerini we olaryň $M_o(1, \pi/4)$ nokatdaky bahalaryny tapmaly.

◁ Bir üýtgeýänli funksiýanyň önüminiň formulalaryny we düzgünlerini ulanyp, ilki y-i we soňra x-i hemişelik hasap edip, hususy önümleri taparys:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y.$$

Indi olaryň $M_o(1, \pi/4)$ nokatdaky bahalaryny hasaplalyň:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_o} = (2x\sin y)\big|_{M_o} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_o} = (x^2\cos y)\big|_{M_o} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \ ▷$$

$z=f(x, y)$ funksiýanyň $M_o(x_o, y_o)$ nokatdaky hususy önümleriniň şeýle geometrik manysy bardyr:

$$f_x'(x_o, y_o)=\mathrm{tg}\alpha, \quad f_y'(x_o, y_o)=\mathrm{tg}\beta,$$

bu ýerde α burç Ox oky bilen $A(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ nokatda $y=y_o$ tekizlik bilen $z=f(x, y)$ üstüň kesişme çyzygyna geçirilen galtaşýanyň arasyndaky burçdur; β burç bolsa Oy oky bilen A nokatda $x=x_o$ tekizlik bilen $z=f(x, y)$ üstüň kesişme çyzygyna geçirilen galtaşýanyň arasyndaky burçdur.

$z=f(x, y)$ funksiýanyň x boýunça hususy önümi funksiýanyň berlen $(y=y_o)$ ugur boýunça üýtgeýiş tizligini ýa-da bir üýtgeýänli $f(x, y_o)$ funksiýanyň x boýunça üýtgeýiş tizligini aňladýar we ol hususy önümiň fiziki manysyny görkezýär.

Iki üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümleriniň kesgitlenişine meňzeşlikde, üç üýtgeýänli $u=f(x, y, z)$ funksiýanyň $M(x, y, z)$ nokatdaky hususy önümleri şeýle kesgitlenýär:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z)-f(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x, y, z+\Delta z)-f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümlerine birinji tertipli hususy önümler ýa-da birinji hususy önümler hem diýilýär. Hususy önümleriň kesgitlemelerinden görnüşi ýaly, funksiýanyň $M(x, y, z)$ nokatdaky hususy önümleri şol nokadyň funksiýasy bolýandyr. Şoňa görä onuň hem hususy önümlerini tapmak bolar.

Berlen funksiýanyň birinji hususy önümleriniň hususy önümlerine ol funksiýanyň ikinji tertipli hususy önümleri diýilýär.

Iki üýtgeýänli $z=f(x, y)$ funksiýa üçin kesgitleme boýunça:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = [f_x'(x,y)]_x' = f_{xx}''\ (x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = [f_y'(x,y)]_y' = f_{yy}''\ (x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = [f_x'(x,y)]_y' = f_{xy}''\ (x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = [f_y'(x,y)]_x' = f_{yx}''\ (x,y).$$

5-nji mysal. $z=x^3+4x^2y-6xy^2+y^3$ funksiýanyň ikinji hususy önümlerini tapmaly.

$\lhd$ Önüm tapmagyň düzgünlerini we formulalaryny ulanyp, ilki birinji hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy - 6y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 12xy + 3y^2.$$

Bu hususy önümleri ulanyp, ikinji hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 8y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x - 12y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8x - 12y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x + 6y. \rhd$$

Ikinji hususy önümler üçin z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy} belgilemeler hem ulanylýar. z''_{xy}, z''_{yx} hususy önümlere garyşyk hususy önümler diýilýär. 5-nji mysaldaky funksiýa üçin $z''_{xy}=z''_{yx}$ deňlik ýerine ýetýär, ýöne ol deňlik hemişe ýerine ýetýär diýip bolmaz. Ol deňlik haýsy şertlerde ýerine ýetýärkä diýen soraga jogaby aşakdaky teorema berýär.

3-nji teorema. Eger $M_o(x_o, y_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen $z=f(x, y)$ funksiýanyň şol etrapda f''_{xy}, f''_{yx} hususy önümleri bar bolup, olar M_o nokatda üznüksiz bolsalar, onda

$$f''_{xy}(x_o, y_o)=f''_{yx}(x_o, y_o)$$

deňlik dogrudyr.

Şeýlelikde, eger garyşyk önümler üznüksiz bolsalar, onda olar deňdirler, ýagny hususy önümler differensirlemegiň tertibine bagly däldir.

Ikinji tertipli hususy önümleri x we y boýunça differensirläp, üçünji tertipli hususy önümleri ýa-da üçünji hususy önümleri taparys:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Şuňa meňzeşlikde dördünji, bäşinji we ondan-da ýokary tertipli hususy önümler kesgitlenýär. Şeýlelikde, $z=f(x, y)$ funksiýanyň $(n-1)$-nji tertipli hususy önüminiň birinji hususy önümine onuň n-nji tertipli hususy önümi diýilýär. Üç üýtgeýänli funksiýanyň ikinji we ýokary tertipli hususy önümleri hem şular ýaly kesgitlenilýär.

6-njy mysal. $u=xy\sin 2t+x^2z^5$ funksiýanyň $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2}$, $\dfrac{\partial^5 u}{\partial z^5}$ hususy önümlerini tapmaly.

◁ Üýtgeýänleriň birinden beýlekilerini hemişelik hasap edip, hususy önümleri taparys:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\sin 2t + 2xz^5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin 2t, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} = 2\cos 2t;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2z^5, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 10z^4, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} = 40z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5x^2z^4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 20x^2z^3, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 60x^2z^2,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 120x^2z, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial z^5} = 120x^2. \ ▷$$

§7. 4. Köp üýtgeýänli funksiýanyň doly differensialy

1. Birinji tertipli doly differensial. Eger şeýle A we B sanlar bar bolup, $z=f(x, y)$ funksiýanyň $M_o(x_o, y_o)$ nokatdaky

$$\Delta z=f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)-f(x_o, y_o) \qquad (12)$$

doly artymy

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta\rho \qquad (13)$$

görnüşde aňladylýan bolsa, onda $A\Delta x+B\Delta y$ aňlatma $z=f(x, y)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly differensialy diýilýär, bu ýerde

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \quad \text{we} \quad \Delta\rho\to 0 \quad \text{bolanda} \quad \alpha\to 0. \qquad (14)$$

$z=f(x, y)$ funksiýanyň doly differensialy dz bilen belgilenýär:

$$dz=A\Delta x+B\Delta y \qquad (15)$$

(13), (14) we (15) deňliklerden görnüşi ýaly, $z=f(x, y)$ funksiýanyň doly artymy iki bölekden ybarat bolup, onuň Δx we Δy-e görä çyzykly bölegi şol funksiýanyň differensialyna deňdir, ikinjisi bolsa $\Delta\rho$ görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululykdyr.

4-nji teorema. Eger $z=f(x, y)$ funksiýanyň doly artymy (13) deňlik görnüşinde aňladylýan bolsa, onda A we B sanlar şol funksiýanyň M_o nokatdaky hususy önümlerine deňdir:

$$A=f'_x(x_o, y_o), \quad B=f'_y(x_o, y_o). \qquad (16)$$

◁ Eger $\Delta y=0$ bolsa, onda (13) deňlik

$$\Delta_x z=A\Delta x+\alpha|\Delta x| \qquad (17)$$

görnüşde ýazylar. Şunlukda, $\Delta x\to 0$ bolanda $\alpha\to 0$ bolar. Şonuň üçin hem (17) deňlik esasynda

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A\pm\alpha, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A, \quad f'_x(x_o, y_o)=A. \qquad (18)$$

Eger-de $\Delta x=0$ bolsa, onda (13) deňlik

$$\Delta_y z=B\Delta y+\alpha|\Delta y| \qquad (19)$$

görnüşi alar. Şunlukda, $\Delta y\to 0$ bolanda $\alpha\to 0$ bolar. Şonuň üçin hem (19) deňlik esasynda

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B \pm \alpha, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B, \quad f'_y(x_o, y_o) = B. \tag{20}$$

(16) deňlikleriň esasynda $z = f(x, y)$ funksiýanyň (15) doly differensialyny

$$dz = f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y \tag{21}$$

görnüşde ýazmak bolar.

2. Doly differensialyň barlygy. Haýsy şertlerde $z = f(x, y)$ funksiýanyň M_o nokatda doly differensialynyň bardygyna aşakdaky teorema jogap berýär.

5-nji teorema. Eger $z = f(x, y)$ funksiýanyň M_o nokadyň käbir etrabynda birinji hususy önümleri bar bolup, olar şol nokatda üznüksiz bolsalar, onda funksiýanyň şol nokatda doly differensialy bardyr.

$\triangleleft$ $z = f(x, y)$ funksiýanyň M_o nokatdaky (12) doly artymyny

$$\Delta z = [f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y)] + [f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)]$$

görnüşe özgerdeliň we bu deňligiň sagyndaky tapawutlara Lagranžyň formulasyny ulanalyň:

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o + \Delta y) = f'_x(\tilde{x}_o, y_o + \Delta y)\Delta x,$$

$$f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = f'_y(x_o, \tilde{y}_o)\Delta y, \tag{22}$$

$$\tilde{x} \in [x_o, x_o + \Delta x], \quad \tilde{y} \in [y_o, y_o + \Delta y]. \tag{23}$$

Şeýlelikde, (23) esasynda $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bolanda

$$\tilde{x} \to x_o, \quad \tilde{y} \to y_o$$

bolar. Şert boýunça $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ önümleriň M_o nokatda üznüksizligi esasynda, predeliň häsiýeti boýunça (5) deňlik esasynda

$$f'_x(\tilde{x}_o, y_o + \Delta y) = f'_x(x_o, y_o) + \alpha,$$

$$f'_y(x_o, \tilde{y}) = f'_y(x_o, y_o) + \beta, \tag{24}$$

bu ýerde $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. (22)-(24) deňlikleriň esasynda funksiýanyň doly artymy şeýle görnüşde ýazylar:

$$\Delta z = f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \tag{25}$$

Bu deňligiň soňky iki goşulyjysynyň jemini özgerdip, ony

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}\Delta\rho = \tilde{\alpha}\Delta\rho \tag{26}$$

görnüsde ýazalyň, bu ýerde

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}, \qquad \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{27}$$

(27) deňlikden görnüşi ýaly, $\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le 1$. Şonuň üçin hem

$$|\tilde{\alpha}| = \left|\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le |\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| + |\beta|\left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta|. \tag{28}$$

$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bolanda $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ bolýandygy üçin, (28) deňsizlik esasynda $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$, ýagny $\Delta\rho \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$.

Şeýlelikde, (25) formula

$$\Delta z = f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y + \tilde{\alpha}\Delta\rho \tag{29}$$

görnüşde ýazylar, bu ýerde $\Delta\rho \to 0$ bolanda $\tilde{\alpha} \to 0$. Bu deňligi (13) deňlik bilen deňeşdirip, $z = f(x, y)$ funksiýanyň M_o nokatda differensialynyň bardygyny we onuň (21) formula boýunça tapylýandygyny alarys. ▷

Berlen nokatda doly differensialy bar bolan funksiýa şol nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. 5-nji teorema boýunça berlen nokatda we onuň käbir etrabynda hususy önümleri üznüksiz bolan funksiýa şol nokatda differensirlenýändir.

Eger funksiýa käbir nokatda differensirlenýän bolsa, onda onuň şol nokatdaky doly artymyny (29) görnüşde aňladyp bolýandyr we şonuň esasynda $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0$, ýagny funksiýa şol nokatda üznüksizdir.

Bellik. Eger $z = f(x, y)$ funksiýa üçin 5-nji teoremanyň ähli şertleri $M(x, y)$ nokadyň etrabynda ýerine ýetýän bolsa,onda onuň

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

differensialy dört üýtgeýänleriň funksiýasy bolup, bellenen Δx, Δy ücin ol diňe x we y üýtgeýänleriň funksiýasydyr. Şunlukda, eger $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ alsak, onda funksiýanyň doly differensialy üçin

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly, eger üç üýtgeýänli $u=f(x, y, z)$ funksiýanyň birinji hususy önümleri üznüksiz bolsa, onda onuň doly differensialy

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

formula boýunça kesgitlenýär. Bu formulanyň sag bölegindäki her bir goşulyja funksiýanyň hususy differensiallary diýilýär, ýagny

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

3. Differensialyň takmyn bahalary hasaplamakda ulanylyşy. Eger $z=f(x, y)$ funksiýa M_o nokatda differensirlenýän bolsa, onda (21) we (29) formulalar esasynda onuň doly differensialy bilen doly artymy şeýle baglanyşykdadyr:

$$\Delta z = dz + \tilde{\alpha}\Delta\rho, \quad \lim_{\Delta\rho \to 0} \tilde{\alpha} = 0.$$

Şonuň üçin hem $\Delta z \approx dz$ takmyn deňligi ýazyp bileris. Ony

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) \approx f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y$$

ýa-da

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) \approx f(x_o, y_o) + f'_x(x_o, y_o)\Delta x + f'_y(x_o, y_o)\Delta y \qquad (30)$$

görnüşde ýazmak we ony takmyn hasaplamalarda ulanmak bolar.

7-nji mysal. $\sqrt{(1,97)^3 + (3,02)^2}$ aňlatmanyň takmyn bahasyny hasaplamaly.

◁Ilki bilen ony $\sqrt{(1,97)^3 + (3,02)^2} = \sqrt{(2 - 0,03)^3 + (3 + 0,02)^2}$ görnüşde ýazyp, $x_o=2$, $y_o=3$, $\Delta x=-0,03$, $\Delta y=0,02$ alalyň we $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^2}$ funksiýa garalyň. Onda $f(x_o,y_o) = f(2,3) =$ $= \sqrt{2^3 + 3^2} = \sqrt{17} \approx 4,123$, $f'_x = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^2}}$, $f'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}}$ we

$f'_x(x_o,y_o) = f'_x(2,3) = \dfrac{6}{4,123} \approx 1,455$, $f'_y(2,3) = \dfrac{3}{4,123} \approx 0,727.$

Şonuň üçin hem (30) formula esasynda

$$f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) = \sqrt{(2-0,03)^3 + (3+0,02)^2} \approx$$

$$\approx f(2,3) + f'_x(2,3)(-0,03) + f'_y(2,3)\cdot 0,02 \approx$$

$$\approx 4,123 - 1,455\cdot 0,03 + 0,727\cdot 0,02 = 4,094. \triangleright$$

4. Ýokary tertipli doly differensiallar. $z=f(x, y)$ funksiýanyň doly differensialynyň doly differensialyna onuň ikinji tertipli doly differensialy diýilýär we ol d^2z bilen belgilenýär.

Şeýlelikde, eger $dz = z'_x dx + z'_y dy$ bolsa, onda dx we dy-gi hemişelik hasap edip, birinji tertipli doly differensialyň kesgitlemesi boýunça taparys:

$$d^2z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy =$$

$$= z''_{xx} dx^2 + z''_{yx} dxdy + z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2 =$$

$$= z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2 \quad (z''_{xy} = z''_{yx}).$$

Şeýlelikde, $z=f(x, y)$ funksiýanyň ikinji doly differensialy üçin

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly, üçünji tertipli $d^3z = d(d^2z)$ doly differensial üçin şeýle formulany alarys:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Şuňa mezeşlikde, $z=f(x, y)$ funksiýanyň $(n-1)$-nji tertipli doly differensialynyň doly differensialyna ol funksiýanyň n-nji tertipli doly differensialy diýilýär we ol d^nz bilen belgilenýär. Onuň üçin

$$d^nz = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k, \qquad C_n^k = \frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{1\cdot 2...k}$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar. Bu formulany gysgaça

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

görnüşde hem ýazmak bolar. Bu formulanyň sag bölegine şeýle düşünmeli: ilki ol köpagza hökmünde n derejä göterilýär we soňra alnan aňlatmanyň sanawjylarynda ∂ belginiň degişli derejeleriniň sagyndan z-i ýazmaly. Mysal üçin,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)z=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Funksiýanyň doly differensialyna ýöne differensial hem diýilýär.

§7. 5. Çylşyrymly we anyk däl funksiýalaryň differensirlenmegi

1. Çylşyrymly funksiýanyň differensirlenmegi. Eger x we y üýtgeýänlere bagly bolan $p=p(x, y)$, $r=r(x, y)$ funksiýalar üçin $z=F(p, r)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda

$$z=F[p(x, y), r(x, y)]=G(x, y)$$

funksiýa x we y üýtgeýänlere görä çylşyrymly funksiýa diýilýär. Goý, $p(x, y)$, $r(x, y)$ funksiýalar x we y üýtgeýänlere görä we $F(p, r)$ funksiýa p we r üýtgeýänlere görä differensirlenýän funksiýalar bolsun. Bu halda $z=F(p, r)$ funksiýanyň z'_x, z'_y hususy önümleriniň bardygyny görkezeliň. Eger $p(x, y)$, $r(x, y)$ funksiýalaryň x we y üýtgeýänlerini belläp, y-i öňküligine goýup, x-e Δx artym bersek, onda p we r funksiýalar $\Delta_x p$, $\Delta_x r$ hususy artymlary alar. Şunlukda, $z=F(p, r)$ funksiýa $\Delta_x z$ artymy alar we ony (25) formula esasynda

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial p}\Delta_x p+\frac{\partial z}{\partial r}\Delta_x r+\alpha\Delta_x p+\beta\Delta_x r$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $\Delta_x p\to 0$, $\Delta_x r\to 0$ bolanda $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ bolar. Ol deňligi agzalaýyn Δx-e bölüp,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\Delta_x p}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\Delta_x r}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta_x p}{\Delta x}+\beta\frac{\Delta_x r}{\Delta x}$$

deňligi, ondan bolsa $\Delta x\to 0$ bolanda predele geçip, $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ bolýandygy esasynda

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{31}$$

formulany alarys. Edil şonuň ýaly, y üýtgeýän üçin

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \tag{32}$$

formulany alarys.

Eger-de $p=p(t)$, $r=r(t)$ diňe t görä differensirlenýän funksiýa bolsa we çylşyrymly $z=F[p(t), r(t)]=f(t)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda onuň t görä önümi

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{dr}{dt} \tag{33}$$

formula boýunça tapylýar we ol (31)-den $x=t$ (ýa-da (32)-den $y=t$) bolanda alynýar. Oňa funksiýanyň doly önümi hem diýilýär. Ikiden köp üýtgeýänli funksiýa üçin hususy önümler şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär. Hakykatdan-da, x, y we z-e görä differensirlenýän

$$p=p(x, y, z), \quad r=r(x, y, z), \quad s=s(x, y, z)$$

funksiýalar üçin differensirlenýän çylşyrymly

$$u=F(p, r, s)=F[p(x, y, z), r(x, y, z), s(x, y, z)]=g(x, y, z)$$

funksiýanyň hususy önümleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}$$

formulalar boýunça tapylýar.

Eger-de $p=p(t)$, $r=r(t)$, $s=s(t)$ diňe t görä differensirlenýän funksiýa bolsa we çylşyrymly $u=F[p(t), r(t), s(t)]=f(t)$ funksiýa kesgitlenen bolsa, onda onuň t görä doly önümi

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt}$$

formula boýunça tapylýar.

8-nji mysal. $z=x\sin\frac{x}{y}$ funksiýanyň $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$ bolanda t boýunça doly önümini tapmaly.

$\lhd$ Ilki bilen birinji tertipli

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

önümleri tapalyň. Bu önümleri we (33) formulany $p=x$, $r=y$ üçin ulanyp alarys:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)\cdot 3 - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \rhd$$

2. Anyk däl funksiýanyň differensirlenmegi. Eger $y=y(x)$ üznüksiz funksiýa anyk däl görnüşde berlen

$$F(x, y)=0 \tag{34}$$

deňleme bilen kesgitlenýän bolsa, onda onuň haýsy şertlerde differensirlenýändigine aşakdaky teorema jogap berýär.

6-njy teorema. Eger $F(x, y)$ funksiýa we onuň $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ hususy önümleri $M(x, y)$ nokady özünde saklaýan käbir köplükde üznüksiz bolup, şol nokatda $F'_y(x, y)\neq 0$ bolsa, onda (34) deňlemäniň kesgitleýän $y=y(x)$ funksiýasynyň şol nokatda önümi bardyr we ol önüm

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y} \tag{35}$$

formula boýunça tapylýar.

$\lhd$ $M(x, y)$ nokatda $F(x, y)=0$. Eger x-e Δx artym bersek, onda oňa $y=y(x)$ funksiýanyň Δy artymy degişli bolar. Şoňa görä $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. Şonuň üçin funksiýanyň artymy hem nola deňdir, ýagny $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=0$. Funksiýanyň $\Delta F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)$ doly artymyny (25) formula boýunça

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

görnüşde aňladyp bolýar, bu ýerde $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ bolanda $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$. Doly artymyň nola deňligi esasynda ahyrky deňlik şeýle görnüşi alar:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0.$$

Bu deňligi agzalaýyn Δx-e bölüp, alnan deňlikden $\Delta y/\Delta x$ gatnaşygy tapalyň:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right).$$

Bu deňlikde $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip alarys:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right), \qquad y_x' = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right). \ \triangleright$$

Bellik. Onümiň bu bahasyny $y=y(x)$ funksiýanyň çyzgysynyň abssissasy x_o bolan nokadyndaky galtaşýanyň

$$y-y_o = y'(x_o)(x-x_o)$$

deňlemesinde goýup, $F(x, y)=0$ çyzygyň $M(x_o, y_o)$ nokadynda geçirilen galtaşýanyň deňlemesini alarys:

$$F'_x(x_o, y_o)(x-x_o)+F'_y(x_o, y_o)(y-y_o)=0.$$

Edil şuňa meňzeşlikde, eger

$$F(x, y, z)=0$$

deňlemäniň kesgitleýän $z=z(x, y)$ funksiýasy we onuň

$$F'_x(x, y, z), \quad F'_y(x, y, z), \quad F'_z(x, y, z)$$

hususy önümleri $M(x, y, z)$ nokady özünde saklaýan käbir köplükde üznüksiz bolup, şol nokatda $F'_z(x, y, z) \neq 0$ bolsa, onda $z=z(x, y)$ funksiýanyň hususy önümleri şeýle tapylýar:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

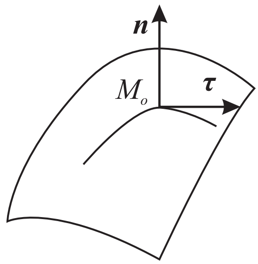
§ 7. 6. Üste geçirilen galtaşýan tekizlik we normal

1. Galtaşýan tekizligiň deňlemesi. Eger giňişlikde çyzyk

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (\alpha<t<\beta) \tag{36}$$

parametrik deňlemeler bilen berlen bolup, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ t görä differensirlenýän funksiýalar bolsa,onda şol çyzyga $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokatda ($x_o=x(t_o)$, $y_o=y(t_o)$, $z_o=z(t_o)$) geçirilen galtaşýanyň deňlemesi

$$\frac{x-x_o}{x'(t_o)} = \frac{y-y_o}{y'(t_o)} = \frac{z-z_o}{z'(t_o)} \tag{37}$$



1-nji surat

görnüşde bolar, bu ýerde $x'(t_o)$, $y'(t_o)$, $z'(t_o)$ önümler birwagtda nola deň däldir. (36) çyzyga $M(x_o, y_o, z_o)$ nokatda geçirilen galtaşýanyň ugrukdyryjy wektory

$$\boldsymbol{\tau} = \{x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o)\} \tag{38}$$

bolar.

Giňişlikde differensirlenýän $F(x, y, z)$ funksiýa arkaly

$$F(x, y, z) = 0 \tag{39}$$

deňleme bilen berlen üste seredeliň. Ol üstüň $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokady boýunça şol üstde bitewiligine ýatýan çyzyk geçireliň (*1-nji surat*). Goý, ol çyzyk (36) deňleme bilen berlen bolsun, onda (37) deňleme şol çyzyga $M(x_o, y_o, z_o)$ nokatda geçirilen galtaşýanyň deňlemesidir. (39) deňlemede (36) aňlatmalary goýup, t görä toždestwolaýyn $F[x(t), y(t), z(t)] = 0$ deňligi alarys. Ony çylşyrymly funksiýa hökmünde differensirläp,

$$F'_x x'(t) + F'_y y'(t) + F'_z z'(t) = 0$$

deňligi alarys. $t = t_o$ üçin ol deňlik

$$F'_x(x_o, y_o, z_o)x'(t_o) + F'_y(x_o, y_o, z_o)y'(t_o) + F'_z(x_o, y_o, z_o)z'(t_o) = 0$$

görnüşi alar. Hususy önümlerden düzülen

$$\boldsymbol{n} = \{F'_x(x_o, y_o, z_o), F'_y(x_o, y_o, z_o), F'_z(x_o, y_o, z_o)\} \tag{40}$$

wektora garalyň. Ol wektor (39) üst we M_o nokat bilen doly kesgitlenýär we M_o nokat arkaly geçýän çyzyga bagly däldir.

(38) we (40) wektorlar üçin ýerine ýetýän $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ deňlik olaryň ortogonaldygyny aňladýar.

Şeýlelikde, (39) üstüň $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokady arkaly geçýän islendik çyzyk üçin şol nokat arkaly geçýän $\boldsymbol{\tau}$ galtaşýan wektor $\boldsymbol{n}$ wektora perpendikulýardyr. Başgaça aýdylanda, M_o nokat arkaly geçýän üstüň islendik çyzygynyň galtaşýany $\boldsymbol{n}$ wektora perpendikulýar tekizlikde ýatýar. Ol tekizlige (39) üstüň M_o nokadynda geçirilen galtaşýan tekizlik diýilýär, onuň deňlemesi

$$F'_x(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) + F'_y(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + F'_z(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0 \tag{41}$$

görnüşdedir.

(40) formula boýunça kesgitlenýän **n** wektora $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokatda (39) üste geçirilen normalyň wektory diýilýär. M_o nokat arkaly geçýän we (40) wektor ugrukdyryjysy bolan göni çyzyga (39) üstüň şol nokatdaky normaly diýilýär. Onuň deňlemesi

$$\frac{x-x_o}{(F_x')_{M_o}} = \frac{y-y_o}{(F_y')_{M_o}} = \frac{z-z_o}{(F_z')_{M_o}} \tag{42}$$

görnüşdedir.

9-njy mysal. $z=x^2-y^2$ üste $M_o(3, -2, 5)$ nokatda geçirilen normalyň we galtaşýan tekizligiň deňlemelerini ýazmaly.

◁ Eger $F(x, y, z)=x^2-y^2-z$ bolsa, onda $F'_x=2x$, $F'_y=-2y$, $F'_z=-1$ bolar. Şonuň üçin

$$(F_x')_{M_o} = 2\cdot 3 = 6, \quad (F_y')_{M_o} = -2\cdot(-2) = 4, \quad (F_z')_{M_o} = -1.$$

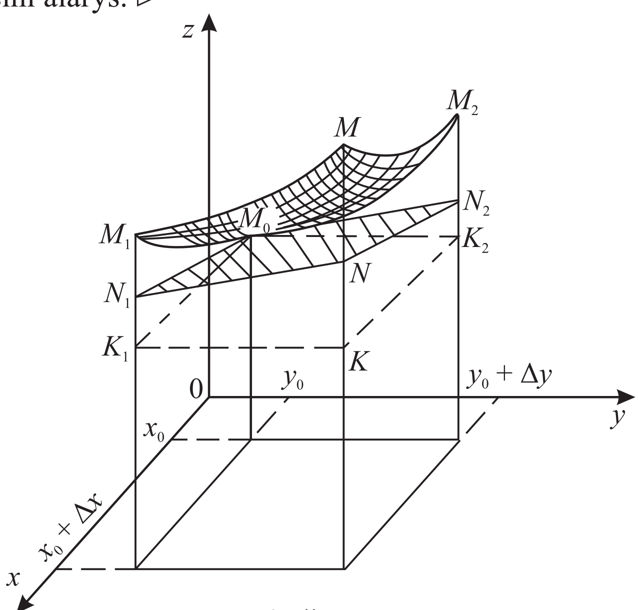
Bulary ulanyp, (41) we (42) esasynda galtaşýan tekizligiň

$$6(x-3)+4(y+2)-(z-5)=0 \quad \text{ýa-da} \quad 6x+4y-z-5=0$$

deňlemesini we normalyň

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-1}$$

deňlemesini alarys. ▷



2-nji surat

2. Doly differensialyň geometrik manysy. Eger üst $z=f(x, y)$ ýa-da $z-f(x, y)=0$ deňleme bilen berlen bolsa, onda

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

bolar. Şonuň üçin hem ol üste geçirilen galtaşýan tekizligiň deňlemesi

$$z-z_o=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_o)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_o)$$

görnüşde bolar. Bu formulada $x-x_o=\Delta x, y-y_o=\Delta y$ alyp, onuň $z=f(x, y)$ funksiýanyň doly differensialydygyny görýäris:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Şeýlelikde,

$$z-z_o=dz,$$

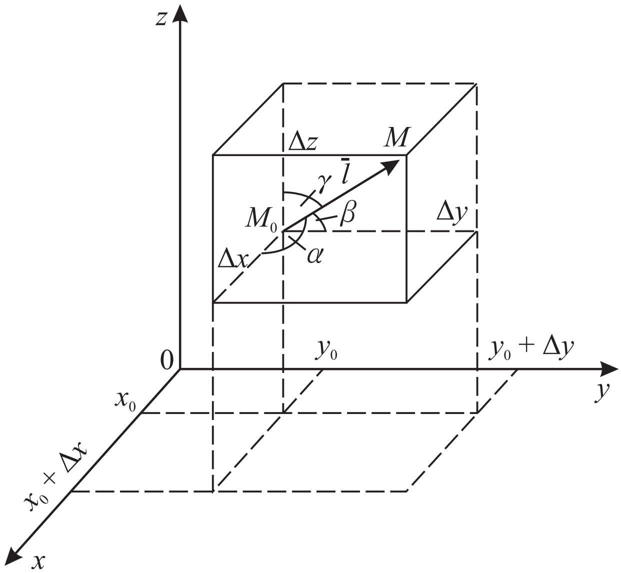
ýagny iki üýtgeýänli $z=f(x, y)$ funksiýanyň doly differensialy şol funksiýanyň x we y üýtgeýänleri Δx we Δy artymlary alandaky grafigi bolan üste $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizligiň z applikatasynyň artymyna deňdir (*2-nji surat*).

§7. 7. Ugur boýunça önüm we gradiýent

1. Ugur boýunça önüm. Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümleriniň ol funksiýanyň degişli ugurlar boýunça üýtgeýiş tizligini aňladýandygyny belläpdik. Indi bolsa islendik ugur boýunça onuň üýtgeýiş tizliginiň nähili bolýandygyny görkezmeklige girişeliň.

Berlen $M_o(x_o, y_o, z_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen we differensirlenýän $u=u(x, y, z)$ funksiýa garalyň. Şol etraba degişli bolan $M(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y, z_o+\Delta z)$ nokat üçin koordinatalar oklary bilen degişlilikde α, β, γ burçlary emele getirýän $\overline{M_oM}=\boldsymbol{l}=\bar{1}$ wektory alalyň (*3-nji surat*). Garalýan $u=u(x, y, z)$ funksiýanyň M_o nokatdaky doly artymyny (25) formula meňzeşlikde

$$\Delta u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_o}\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_o}\Delta y+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_o}\Delta z+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z$$



3-nji surat

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, bolanda $\alpha_k \to 0$ $(k=1,\ 2,\ 3)$. Bu deňligi agzalaýyn $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ aňlatma bölüp,

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_o} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_o} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_o} \frac{\Delta z}{\Delta l} +$$

$$+\alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \alpha_3 \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_3 \frac{\Delta z}{\Delta l} \tag{43}$$

deňligi alarys. 3-nji suratdan görnüşi ýaly,

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma.$$

Bu deňligiň esasynda (43) deňlikde $\Delta l \to 0$ bolanda predele geçip,

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_o} \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_o} \cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_o} \cos\gamma$$

deňligi alarys. Bu predele $u = u(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ nokatdaky $\boldsymbol{l}$ wektoryň ugry boýunça önümi diýilýär we $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o}$ bilen belgilenýär. Şeýlelikde,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_o}\cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_o}\cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_o}\cos\gamma.$$

Erkin $M(x, y, z)$ nokat üçin bu önüm şeýle görnüşde ýazylar:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{44}$$

Bu formuladan görnüşi ýaly, $\partial u/\partial l$ önüm diňe wektoryň ugruna bagly bolup, onuň uzynlygyna bagly däldir.

10-njy mysal. $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ funksiýanyň $M_o(9, 6, -1)$ nokatdaky $\boldsymbol{l} = \{1, 2, -2\}$ wektoryň ugry boýunça önümini tapmaly.

◁ Berlen funksiýa üçin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -4y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 6z,\ \cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

bolýany sebäpli, (44) formula boýunça alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2x\left(\frac{1}{3}\right) + (-4y)\frac{2}{3} + 6z\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - 4z,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_o} = \frac{2}{3}9 - \frac{8}{3}6 - 4(-1) = -6. \ \triangleright$$

Köp üýtgeýänli funksiýanyň hususy önümi onuň ugur boýunça önüminiň hususy halydyr. Mysal üçin, eger $\boldsymbol{l} = \{1, 0, 0\}$, ýagny $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90°$ bolsa, onda

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

deňlik ýerine ýetýär.

2. Skalýar we wektor meýdanlary. Eger giňişligiň köplüginiň her bir nokadynda käbir ululygyň bahasy kesgitlenen bolsa, onda şol ululygyň seredilýän köplükde meýdany berlen diýilýär. Sunlukda, skalýar ululyk üçin oňa skalýar meýdany, wektor ululyk üçin wekror meýdany diýilýär. Skalýar meýdanlaryna diňe san bahalary bilen kesgitlenýän temperatura meýdany, dykyzlyk meýdany, ýagtylyk meýdany, wektor meýdanlaryna bolsa san bahalary we ugurlary bilen kesgitlenýän tizlik meýdany, güýç meýdany mysal bolup biler.

Eger seredilýän ululyk tekizlikde berlen bolsa, onda oňa degişli meýdana tekiz meýdan diýilýär. Tekiz skalýar meýdany $u = u(x, y)$ ýa-da $u = u(M)$, $M = M(x, y)$ funksiýa bilen kesgitlenýär. Skalýar meýdany giňişlikde $u=u(x, y, z)$ ýa-da $u=u(M)$, $M=M(x, y, z)$ funksiýa bilen kesgitlenýär. Eger käbir x, y, z dekart koordinatalar sistemasynda u funksiýa ol koordinatalaryň haýsydyr birine, mysal üçin z-e bagly bolmasa, onda oňa degişli skalýar meýdanyna tekiz-parallel meýdany diýilýär. Oňa Oxy tekizliginde garamak bolar. Oxy tekizligine parallel bolan ähli tekizlikler üçin ol meýdanyň şol bir çyzyk derejeleri bardyr (mysal üçin, $u=x^2+y^2$ funksiýa bilen kesgitlenýän meýdanyň dereje çyzygy $x^2+y^2=C^2$ töwerekdir).

3. Skalýar meýdanynyň gradiýenti. Goý, giňişligiň käbir köplüginde differensirlenýän skalýar $u=u(x, y, z)$ funksiýa berlen bolsun. Bu funksiýanyň berlen nokatdaky hususy önümleri onuň degişli koordinatalary bolan wektora ol funksiýanyň şol nokatdaky gradiýenti diýilýär we *gradu* bilen belgilenýär, ýagny

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{45}$$

Şeýlelikde, giňişligiň seredilýän köplüginde wektor meýdany, ýagny berlen funksiýanyň gradiýent meýdany kesgitlenendir. Funksiýanyň gradiýenti bilen onuň ugur boýunça önüminiň nähili baglanyşykda bolýandygyny aşakdaky teorema görkezýär.

7-nji teorema. $u=u(x, y, z)$ funksiýanyň $\boldsymbol{l}$ wektoryň ugry boýunça önümi ol funksiýanyň gradiýentiniň $\boldsymbol{l}$ wektora bolan proýeksiýasyna deňdir.

◁ Goý, $\boldsymbol{l}$ wektor koordinatalar oklary bilen degişlilikde α, β, γ burçlary emele getirýän birlik wektor bolsun, ýagny

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma. \tag{46}$$

Belli bolşy ýaly, (45) we (46) wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

$$(grad u, \boldsymbol{l}) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{47}$$

deňlik boýunça kesgitlenýär. (44) we (47) deňliklerden bolsa

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (grad u, \boldsymbol{l}) \tag{48}$$

deňlik gelip çykýar. Eger *gradu* we $\boldsymbol{l}$ wektorlaryň arasyndaky burçy φ bilen belgilesek, onda

$$(gradu, \boldsymbol{l}) = |gradu||\boldsymbol{l}|\cos\varphi = |gradu|\cos\varphi = pr_l gradu$$

deňligiň esasynda (48) deňlik

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\, gradu\,|\cos\varphi = pr_l gradu \tag{49}$$

görnüşi alar. ▷

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1-nji netije. Funksiýanyň käbir nokatdaky $\boldsymbol{l}$ ugur boýunça önümi iň uly bahany $\boldsymbol{l}$ ugur gradiýentiň ugry bilen gabat gelende alýar we ol $|gradu|$ ululyga deňdir.

◁ (49) deňlikden görnüşi ýaly, ugur boýunça önüm iň uly bahany $\varphi = 0$ bolanda alýar, ýagny

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\, gradu\,|\cos 0 = |\, gradu\,| = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}\,. \triangleright$$

Başgaça aýdylanda, bu deňlik skalýar funksiýanyň gradiýentiniň ugruna beýleki ugurlara garanyňda çalt üýtgeýändigini görkezýär.

2-nji netije. $u = u(x, y, z)$ funksiýanyň $u(x, y, z) = C$ deňleme bilen kesgitlenen dereje üste geçirilen galtaşýanyň ugry boýunça önümi nola deňdir.

◁ Bu halda $u = u(x, y, z)$ funksiýanyň gradiýentiniň ugry berlen nokat arkaly dereje üste geçirilen normalyň ugry bilen gabat gelýär we ol galtaşýana perpendikulýardyr, ýagny $\varphi = \pi/2$. Şonuň üçin hem (49) deňlik esasynda agzalan ugur boýunça önüm nola deňdir. ▷

§ 7. 8. Köp üýtgeýänli funksiýanyň Teýlor formulasy

Käbir D köplükde kesgitlenen $z = z(x, y)$ funksiýa garalyň. Goý, şol köplügiň $M_o(a, b)$ nokadynyň käbir etrabynda funksiýanyň $(n+1)$-nji tertipli $(n \geq 1)$ üznüksiz hususy önümleri bar bolsun. $x = a + t\Delta x$, $y = b + t\Delta y$, $0 \leq t \leq 1$ üçin $\varphi(t) = f(x, y)$ t görä çylşyrymly funksiýadyr. Şunlukda, $t = 0$ bolanda $M_o(a, b)$ nokady, $t = 1$ bolanda bolsa $M(a + \Delta x, b + \Delta y)$ nokady alarys we ony M_o nokadyň garalýan etrabyna degişli hasap ederis.

Belli bolşy ýaly, bir üýtgeýänli $\varphi(t)$ funksiýanyň Teýlor formulasy

$$\varphi(t) = \varphi(t_o) + \frac{\varphi'(t_o)}{1!}(t - t_o) + \frac{\varphi''(t_o)}{2!}(t - t_o)^2 + ... +$$

$$+ \frac{\varphi^{(n)}(t_o)}{n!}(t - t_o)^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(t_o + \theta t)}{(n+1)!}(t - t_o)^{n+1},$$

bu ýerde $0<\theta<1$. Bu formuladan $t_o=0$ bolan hususy halda

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n +$$

$$+ \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \tag{50}$$

formulany alarys. Çylşyrymly $\varphi(t)=f(x, y)=f(a+t\Delta x,\ b+t\Delta y)$ funksiýanyň t görä önümlerini tapalyň:

$$\varphi'(t)=f'_x x'_t+f'_y y'_t=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y=df(x, y);$$

$$\varphi''(t)=f''_{xx}x'^2_t+f''_{xy}x'_t y'_t+f''_{yx}y'_t x'_t+f''_{yy}y'^2_t=$$

$$=f''_{xx}\Delta x^2+2f''_{xy}\Delta x\Delta y+f''_{yy}\Delta y^2=d^2f(x, y);$$

....

$$\varphi^{(n)}(t)=d^nf(x, y), \qquad \varphi^{(n+1)}(t)=d^{n+1}f(x, y).$$

Bu deňlikleriň iň soňkusynda t ululygy θt bilen şalşyryp, ondan öňündäkilerde bolsa $t=0$ goýup, (50) formula girýän $\varphi(t)$ funksiýanyň önümlerini taparys:

$$\varphi'(0)=df(a, b),$$

$$\varphi''(0)=d^2f(a, b),\ ...,\ \varphi^{(n)}(0)=d^nf(a, b),$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t)=d^{n+1}f(a+\theta t\Delta x,\ b+\theta t\Delta y).$$

Önümiň bu bahalaryny (50) deňlikde goýup we alnan deňlikde $t=1$ alyp, iki üýtgeýänli funksiýanyň Teýlor formulasyny alarys:

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(a,b)}{k!} + \frac{d^{n+1}f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)}{(n+1)!} \tag{51}$$

ýa-da

$$f(M) = f(M_o) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(M_o)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\tilde{M})}{(n+1)!}, \qquad (52)$$

bu ýerde $\tilde{M} = \tilde{M}(a + \theta\Delta x,\ b + \theta\Delta y) \in D$. (51) formula $n = 1$ bolanda şeýle görnüşde ýazylar:

$$f(x, y) = f(a, b) + [f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}\,(\tilde{a},\tilde{b})\Delta x^2 + 2f''_{xy}\,(\tilde{a},\tilde{b})\Delta x\Delta y + f''_{yy}\,(\tilde{a},\tilde{b})\Delta y^2\right], \qquad (53)$$

bu ýerde $\tilde{a} = a + \theta\Delta x$, $\tilde{b} = b + \theta\Delta y$, $0 < \theta < 1$.

Edil şonuň ýaly, köp üýtgeýänli $u = f(M)$, $M = M(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiýa üçin hem Teýloryň formulasyny getirip çykarmak bolar.

§ 7. 9. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumy

1. Ekstremumyň kesgitlenişi. Goý, $z = f(x, y)$ funksiýa $M_o(x_o, y_o)$ nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen bolsun. Eger ol nokadyň şeýle etraby bar bolup, şol etrabyň islendik $M(x, y)$ nokady üçin $f(x, y) \le f(x_o, y_o)$ ($f(x, y) \ge f(x_o, y_o)$) deňsizlik ýerine ýetse, onda M_o nokada $z = f(x, y)$ funksiýanyň maksimum (minimum) nokady diýilýär. Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryna onuň ekstremum nokatlary, şol nokatlardaky bahalaryna bolsa funksiýanyň ekstremumy diýilýär. Bu kesgitlemeden görnüşi ýaly, eger M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolsa, onda onuň şol nokatdaky $\Delta z = f(M) - f(M_o)$ artymy üçin $\Delta z \le 0$ ýa-da $\Delta z \ge 0$ deňsizlikleriň haýsydyr biri ýerine ýetýär we tersine, eger M_o nokadyň käbir etrabynda bu deňsizlikleriň haýsydyr biri ýerine ýetse, onda M_o funksiýanyň ekstremum nokadydyr. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumy hem şuňa meňzeşlikde kesgitlenilýär.

2. Ekstremumyň zerur şerti. Köp üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti aşakdaky teoremada görkezilýär.

8-nji teorema. Ekstremum nokadynda differensirlenýän funksiýanyň şol nokatdaky hususy önümleri nola deňdir.

◁ Subudyny $M_o(x_o, y_o)$ nokat onuň ekstremum nokady bolan iki üýtgeýänli $z=f(x, y)$ funksiýa üçin görkezeliň. Onuň üçin M_o nokadyň etrabyndaky $y=y_o$ şerti kanagatlandyrýan nokatlaryna seredeliň. Şunlukda, bir üýtgeýänli $g(x)=f(x, y_o)$ funksiýany alarys we $x=x_o$ ol funksiýanyň ekstremum nokadydyr. Şoňa görä bir üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti boýunça şol nokatda $g'(x_o)=f'_x(x_o, y_o)=0$ deňlik ýerine ýetýär. Şonuň ýaly hem bir üýtgeýänli $f(x_o, y)$ funksiýa garamak bilen $f'_y(x_o, y_o)=0$ deňligi alarys. Şeýlelikde, M_o ekstremum nokadynda

$$f'_x(x_o, y_o)=0, \quad f'_y(x_o, y_o)=0. \triangleright \tag{54}$$

(54) ýeterlik şert däldir. Ony $z=x^2-y^2$ funksiýa tassyklaýar. Onuň (0, 0) nokatdaky hususy önümleri nola deňdir, ýöne ol nokat onuň ekstremum nokady däldir, çünki şol nokatda onuň bahasy nola deňdir we (0, 0) nokadyň hiç bir etrabynda onuň alamaty hemişelik däldir: $x=0$ bolanda $z<0$ we $y=0$ bolanda $z>0$.

Şeýlelikde, (54) şert ekstremumyň zerur şertidir. Ol şertiň ýerine ýetýän nokatlaryna ekstremumyň bolup biljek nokatlary hem diýilýär.

2. Ekstremumyň ýeterlik şertleri. Ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň haçan ekstremum nokatlary bolýandygyna aşakdaky teorema jogap berýär.

9-njy teorema. Goý, $z=f(x, y)$ funksiýanyň $M_o(a, b)$ nokadyň käbir etrabynda ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolup, M_o nokatda onuň birinji hususy önümleri nola deň we

$$A=f''_{xx}(a, b), \quad B=f''_{xy}(a, b), \quad C=f''_{yy}(a, b) \tag{55}$$

bolsun. Eger

1) $AC-B^2>0$ bolsa, onda $A>0$ bolanda M_o funksiýanyň minimum, $A<0$ bolanda bolsa maksimum nokadydyr;

2) $AC-B^2<0$ bolsa, onda M_o nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur.

◁ Ikinji hususy önümleriň üznüksizligi sebäpli (55) esasynda

$$f''_{xx}(\tilde{a}, \tilde{b})=A+\alpha_1, \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_1 = 0,$$

$$f''_{xy}(\tilde{a}, \tilde{b})=B+\alpha_2, \quad \lim_{\Delta\rho\to 0}\alpha_2 = 0,$$

$$f''_{yy}(\tilde{a}, \tilde{b}) = C + \alpha_3, \qquad \lim_{\Delta\rho \to 0} \alpha_3 = 0,$$

bu ýerde $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Şoňa görä bu deňlikler we $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$ deňlikler esasynda (53) formula şeýle görnüşi alar:

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{2}[A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2] +$$

$$+\frac{1}{2}[\alpha_1 \Delta x^2 + 2\alpha_2 \Delta x\Delta y + \alpha_3 \Delta y^2].$$

Ony özgerdip,

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\Delta y^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x}{\Delta y} + C\right] +$$

$$+\frac{\Delta\rho^2}{2}\left[\alpha_1\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + 2\alpha_2 \frac{\Delta x}{\Delta\rho}\frac{\Delta y}{\Delta\rho} + \alpha_3\left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2\right]$$

ýa-da

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\Delta y^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\frac{\Delta x}{\Delta y} + C\right] + \alpha\Delta\rho^2 \qquad (56)$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\alpha_1\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + 2\alpha_2 \frac{\Delta x}{\Delta\rho}\frac{\Delta y}{\Delta\rho} + \alpha_3\left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2\right], \qquad \lim_{\Delta\rho \to 0} \alpha = 0.$$

Ýeterlik kiçi $\Delta\rho$ üçin (56) deňligiň sag böleginiň alamaty kwadrat yaýyň içindäki aňlatmanyň, ýagny $At^2 + 2Bt + C$ üçagzanyň alamaty bilen kesgitlenýär, bu ýerde $t = \Delta x/\Delta y$. Mälim bolşy ýaly, $AC - B^2 > 0$ we $A > 0$ bolanda üçagzanyň alamaty položitel, $AC - B^2 > 0$ we $A < 0$ bolanda üçagzanyň alamaty otrisateldir, $AC - B^2 < 0$ bolanda bolsa onuň alamaty üýtgeýändir. Şonuň üçin hem (56) deňligiň esasynda $AC - B^2 > 0$ we $A > 0$ bolanda $f(x, y) > f(a, b)$, ýagny M_o funksiýanyň minimum nokadydyr, $AC - B^2 > 0$ we $A < 0$ bolanda $f(x, y) < f(a, b)$, ýagny M_o funksiýanyň maksimum nokadydyr. $AC - B^2 < 0$ bolanda bolsa $f(x, y) - f(a, b)$ tapawut alamatyny üýtgedýär we soňa görä M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolup bilmez. ▷

11-nji mysal. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8$ funksiýanyň ekstremumyny tapmaly.

◁ Ilki bilen funksiýanyň hususy önümlerini tapalyň:

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = 2y + 4, \quad f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = 2.$$

Şunlukda, $x=1$, $y=-2$ bolanda $f'_x=0$, $f'_y=0$ bolar we şol nokatda $AC-B^2=2\cdot 2-0=4>0$, $A=2>0$. Şonuň üçin hem $M_o(1, -2)$ funksiýanyň minimum nokadydyr we $\min f(x, y)=f(1, -2)=3$. ▷

1-nji bellik. Eger $AC-B^2=0$ bolsa, onda M_o funksiýanyň ekstremum nokady bolup hem, bolman hem biler. Ony aşakdaky mysallar tassyklaýar.

12-nji mysal. $f(x, y)=x^2+2xy+y^2$, $g(x, y)=xy^3$ funksiýalaryň ekstremumyny derňemeli.

◁ Funksiýalaryň ikisi üçin hem $M_o(0, 0)$ ekstremumyň bolup biljek nokadydyr we şol nokatda $AC-B^2=0$ (özbaşdak barlaň!). Şunlukda, $f(x, y)=(x+y)^2\geq 0=f(0, 0)$ bolýandygy üçin M_o birinji funksiýanyň minimum nokadydyr, $g(0, 0)=0$ we M_o nokadyň etrabynda ol funksiýanyň alamatynyň üýtgeýändigi sebäpli, M_o nokat ikinji funksiýanyň ekstremum bokady bolup bilmez. ▷

2-nji bellik. Köp üýtgeýänli $f(M)$ funksiýa üçin $df(M_o)=0$ bolanda $f(M)-f(M_o)=\frac{1}{2}d^2f(\tilde{M})$ bolýandygy sebäpli, M_o nokat $d^2f(\tilde{M})>0$ bolanda funksiýanyň minimum, $d^2f(\tilde{M})<0$ bolanda maksimum nokadydyr.

§7. 10. Şertli ekstremum düşünjesi

1. Şertli ekstremumyň kesgitlenişi. $z=f(x, y)$ funksiýanyň x we y üýtgeýänleriniň

$$g(x, y)=0 \tag{57}$$

deňligi kanagatlandyrýan ekstremumyny tapmaklyga şertli ekstremum diýilýär. Şunlukda, (57) deňlemä baglanyşyk deňlemesi diýilýär.

Eger (57) deňleme $y=y(x)$ funksiýany kesgitleýän bolsa, onda ony $z=f(x, y)$ funksiýada goýup, x-e görä bir üýtgeýänli

$$z=f[x, y(x)] \tag{58}$$

funksiýany alarys. Şonuň üçin bu halda iki üýtgeýänli $z=f(x, y)$ funksiýanyň şertli ekstremumyny tapmak meselesi bir üýtgeýänli funksiýanyň ekstremumyny tapmaklyga getirilýär, ýöne (57) deňlemeden $y=y(x)$ funksiýany kesgitlemek hemişe başartýan däldir. Bu halda şertli ekstremumy tapmaklyga başgaça çemeleşmeli.

2. Lagranžyň usuly. Goý, $g(x, y)$ differensirlenýän funksiýa bolup, $\partial g/\partial y \neq 0$ bolsun. Onda mälim bolşy ýaly, $y_x{}' = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)$.

Çylşyrymly (58) funksiýany differensirläp, $z'_x = f'_x + f'_y y'_x$ deňligi alarys. Ol funksiýanyň ekstremumynyň zerur şerti $f'_x + f'_y y'_x = 0$ deňligi aňladýar. Bu deňlik esasynda $y_x{}' = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ bolar. y'_x önüm üçin alnan aňlatmalary deňeşdirip,

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{ýa-da}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

deňligi alarys. Bu ýerdäki deň gatnaşyklary $-\lambda$ bilen belgiläp, funksiýanyň şertli ekstremum nokadynda $\frac{f_x'}{g_x'} = \frac{f_y'}{g_y'} = -\lambda$ deňlikleri, olardan bolsa

$$f'_x + \lambda g'_x = 0, \quad f'_y + \lambda g'_y = 0 \tag{59}$$

deňlikleri alarys. Eger Lagranžyň funksiýasy atlandyrylýan

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{60}$$

funksiýa seretsek, onda (59) deňlikleri

$$L'_x(x, y, \lambda) = 0, \quad L'_y(x, y, \lambda) = 0 \tag{61}$$

görnüşde ýazmak bolar. (57)we (61) deňliklerden şertli ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň koordinatalary we λ parametriň bahalary kesgitlenýär.

Şeýlelikde, $z=f(x, y)$ funksiýanyň (57) baglanyşyk deňligi kanagatlandyrýan ekstremumynyň bolup biljek nokatlaryny tapmak üçin ilki bilen (60) deňlik boýunça Lagranžyň funksiýasyny düzüp, onuň x, y, λ boýunça hususy önümlerini nola deňleýärler we şol deňlemelerden x, y, λ kesgitlenýär. Ol deňlemeler şertli ekstremumyň zerur şertini aňladýar.

Üç we ondan-da köp üýtgeýänli funksiýalaryň şertli ekstremumy, ýagny ol funksiýanyň baglanyşyk deňlemeleri kanagatlandyrýan ekstremumy şonuň ýaly tapylýar. Mysal ücin, eger $u=f(x, y, z)$ funksiýanyň

$$g(x, y, z)=0, \quad p(x, y, z)=0 \tag{61}$$

şertleri kanagatlandyrýan ekstremumyny tapmak talap edilýän bolsa, onda ilki bilen Lagranžyň

$$L(x, y, z, \lambda, \mu)=f(x, y, z)+\lambda g(x, y, z)+\mu p(x, y, z)$$

funksiýasy girizilýär we (61) deňlemelere ýene-de üç

$$L'_x(x, y, z, \lambda, \mu)=0, \quad L'_y(x, y, z, \lambda, \mu)=0, \quad L'_z(x, y, z, \lambda, \mu)=0 \tag{62}$$

deňleme goşulýar we ol deňlemeler sistemasyndan ekstremumyň bolup biljek nokatlarynyň x, y, z koordinatalary we λ, μ parametrler kesgitlenýär. Şunlukda, (61) we (62) deňlemeler $u=f(x, y, z)$ funksiýanyň ekstremumynyň zerur şertini aňladýar.

13-nji mysal. $z=9-8x-6y$ funksiýanyň $x^2+y^2=25$ baglanyşyk deňlemesini kanagatlandyrýan ekstremumyny tapmaly.

◁ Ilki bilen (60) deňlikden peýdalanyp,

$$L(x, y, \lambda)=9-8x-6y+\lambda(x^2+y^2-25)$$

Lagranžyň funksiýasyny düzeliň we hususy önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-8+2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y}=-6+2\lambda y.$$

Olary nola deňläp, $x^2+y^2=25$ deňleme bilen bilelikde

$$\begin{cases} -8+2\lambda x=0; \\ -6+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

sistemany çözeliň. Onuň çözüwleri:

$$\lambda_1=1; \ x_1=4; \ y_1=3, \quad \lambda_2=-1; \ x_2=-4; \ y_2=-3.$$

Ikinji hususy önümleri tapyp, ikinji differensialy taparys:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}=0; \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda, \quad d^2L=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Ahyrky deňligiň esasynda $\lambda_1 = 1$; $x_1 = 4$; $y_1 = 3$ bolanda $d^2L > 0$ bolýandygy sebäpli, ol nokat $L(x, y, \lambda)$ funksiýanyň şertli minimum nokadydyr; $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$ bolanda $d^2L < 0$ we şonuň üçin bu nokat $L(x, y, \lambda)$ funksiýanyň şertli maksimum nokadydyr.

Şeýlelikde,

$$z_{\min} = \min f(x, y) = f(4, 3) = 9 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -41;$$

$$z_{\max} = \max f(x, y) = f(-4, -3) = 9 - 8 \cdot (-4) - 6 \cdot (-3) = 59. \ \triangleright$$

§ 7. 11. Tekizlikde çyzyklar maşgalasy

1. Birparametli deňlemeler maşgalasy. Tekizlikde C parametr üçin

$$F(x, y, C) = 0 \tag{63}$$

deňleme boýunça kesgitlenýän çyzyklaryň köplügine birparametrli çyzyklar maşgalasy diýilýär. Oňa 1) $y = x^2 + C$ – depeleri Oy okunda bolan parabolalaryň köplügini; 2) $y = (x - C)^2$ – depeleri Ox okunda bolan parabolalaryň köplügini; 3) $xy = C$ $(C \neq 0)$ – koordinatalar oklary asimptotalary bolan giperbolalaryň köplügini mysal getirmek bolar.

4-nji surat

Özüniň her bir nokadynda birparametrli deňlemeler maşgalasynyň käbir çyzygyna (özem dürli nokatlarda onuň dürli çyzyklaryna) galtaşýan çyzyga ol deňlemeler maşgalasynyň oramasy diýilýär (*4-nji surat*).

Goý, (63) birparametrli deňleme bilen kesgitlenýän çyzyklar maşgalasynyň $y = y(x)$ deňleme bilen kesgitlenýän oramasy bar bolsun, bu ýerde $y(x)$ differensirlenýän funksiýadyr. Goý, $M(x, y)$ nokat (63) deňlemäniň oramasynyň erkin nokady bolup, ol berlen çyzyklar maşgalasynyň käbir çyzygyna hem degişli bolsun. Ol çyzyga C parametriň käbir bahasy degişli bolup, ol bellenen x we y üçin (63) deňleme bilen kesgitlenýär, ýagny $C = C(x, y)$. Şonuň üçin oramanyň ähli nokatlary üçin $F[x, y, C(x, y)] = 0$ deňlik ýerine ýetýär. Eger

$y=y(x)$ bolsa, onda bu deňlik toždestwa öwrülýär. $C(x, y)$ funksiýany differensirlenýän hemişelikden tapawutly funksiýa hasap edip, ol toždestwony x boýunça differensirläliň:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}y' = 0$$

ýa-da

$$F'_x+F'_y y'+F'_C(C'_x+C'_y y')=0. \tag{64}$$

Bu deňlikden $M(x, y)$ nokatda orama geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini tapýarys. Şol nokatda berlen çyzyklar maşgalasynyň çyzygyna geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentini bolsa (63) deňlemeden taparys. Şol deňlemede C-niň hemişelikligi esasynda ony differensirläp,

$$F'_x+F'_y y'=0 \tag{65}$$

deňligi alarys. Çyzyklar maşgalasynyň çyzygyna we orama şol bir nokatda geçirilen galtaşýanyň burç koeffisiýentleriniň biri-birine deňligi üçin, (64) we (65) deňlemelerden

$$F'_C(C'_x+C'_y y')=0$$

deňligi alarys. Şerte görä $C(x, y)\neq const$ bolany üçin $(C'_x+C'_y y')\neq 0$. Şoňa görä-de oramanyň ähli nokatlary üçin $F'_C(x, y, C)=0$ deňlik ýerine ýetýär.

Şeýlelikde, (63) çyzyklar maşgalasynyň oramasy

$$F(x, y, C)=0, \quad F'_C(x, y, C)=0 \tag{66}$$

deňlemelerden kesgitlenýär.

1-nji bellik. $F(x, y)$ funksiýanyň hususy önümleriniň ikisiniň hem nola deň bolan nokatlaryna $F(x, y)=0$ çyzygyň aýratyn nokatlary diýilýär. Ol çyzygyň aýratyn nokatlary

$$F(x, y)=0, \quad F'_x(x, y)=0, \quad F'_y(x, y)=0$$

deňlemeler sistemasyndan kesgitlenýär.

2-nji bellik. Eger (63) çyzyklar maşgalasy üçin käbir $y=y(x)$ funksiýa onuň aýratyn nokatlarynyň köplügini kesgitleýän bolsa, onda ol nokatlaryň koordinatalary (66) deňlemeleri kanagatlandyrýar.

Şeýlelikde, (66) deňlemeler oramany ýa-da aýratyn nokatlaryň köplügini ýa-da olaryň ikisini bilelikde kesgitleýär.

Koordinatalary (66) deňlemeleri kanagatlandyrýan ähli nokatlaryň köplügine (63) çyzyklar maşgalasynyň diskriminant çyzygy diýilýär.

§ 7. 12. Empirik formulalar

Gözegçiligiň netijeleri hasaplanylanda köplenç şeýle meselä duş gelinýär: x we y ululyklaryň köpsanly bahalary belli, ýöne olaryň arasyndaky funksional baglylygyň häsiýeti belli däl. Alnan maglumatlar boýunça x we y ululyklaryň arasyndaky analitiki baglylygy tapmaly. Şeýle meseleleri çözmekde alynýan formulalara empirik formulalar diýilýär. Gözegçiligiň we tejribäniň netijesinde düzülýän empirik formulalar tebigy ylymlarda, hususan-da fizikada, himiýada we beýleki ylymlarda giňişleýin ulanylýar.

Empirik formulalary düzmek meselesi şeýle amala aşyrylýar. Goý, ölçegleriň netijeleri esasynda

x	x_1	x_2	x_3	....	x_k	x_{k+1}	....	x_n
y	y_1	y_2	y_3	....	y_k	y_{k+1}	....	y_n

tablisa düzülen bolsun we $y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ gözlenýän empirik formula bolsun, bu ýerde $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýa x ululyga we $C_1, C_2, ..., C_m$ parametrlere baglydyr. Goý, x_k we y_k degişlilikde tablisanyň birinji we ikinji setirindäki sanlar we $\varphi(x_k)=\varphi(x_k, C_1, C_2, ..., C_m)$ bolsun. Onda $\varphi(x_k)-y_k=\varepsilon_k$ $(k=1, 2, ..., n)$ sanlara gyşarmalar ýa-da hatalar diýilýär. $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýanyň $C_1, C_2, ..., C_m$ parametrleriniň $C_1^0, C_2^0, ...C_m^0$ bahalary nähili alnanda gyşarmalar iň kiçi bolar diýen meselä seredeliň. Gyşarmanyň iň kiçi bolmak kriterileriniň içinde giňişleýin ýaýrany iň kiçi kwadratlar usulyna esaslanýan kriteridir: $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_m)$ funksiýanyň parametrlerini gyşarmalaryň kwadratlarynyň

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 \tag{67}$$

jemi iň kiçi bolar ýaly nähili saýlap almaly?

Bu usuly ilki bilen x we y ululyklaryň çyzykly baglanyşykda bolan haly üçin beýan edeliň,ýagny bu halda iň kiçi kwadratlar usuly boýunça empirik formulanyň parametrlerini kesgitlemek meselesine seredeliň. Onuň üçin tablisadaky x_k we y_k sanlara tekizligiň gönüburçly dekart koordinatalaryndaky

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ ...,\ M_n(x_n, y_n)$$

nokatlaryň koordinatalary hökmünde seredeliň. Ol nokatlar tas käbir göni çyzykda ýatýar hasap edeliň. Bu halda x we y ululyklar çyzykly baglydyr diýip güman etmek tebigydyr, ýagny

$$y = ax + b, \tag{68}$$

bu ýerde a we b kesgitlenilmeli parametrlerdir. (68) deňligi

$$ax + b - y = 0 \tag{69}$$

görnüsde hem ýazmak bolar. $M_k(x_k, y_k)$ nokadyň (68) deňleme bilen kesgitlenýän göni çyzykda ýerleşýändigi takmyn bolany ücin, (68) formulanyň özi hem takmyndyr. Şonuň üçin (69) formulanyň çep böleginde x we y ululyklaryň ýerine tablisadan alnan x_k, y_k ($k = 1, 2, ..., n$) bahalary alsak, onda

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \varepsilon_1; \\ ax_2 + b - y_2 &= \varepsilon_2; \\ &\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n &= \varepsilon_n \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

deňlikleri alarys, bu ýerde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ – gyşarmalardyr.

a we b koeffisiýentleri gyşarmalar absolýut ululyklary boýunça mümkin boldugyça kiçi bolar ýaly saýlap almak talap edilýär. Iň kiçi kwadratlar usulyna laýyklykda a we b koeffisiýentleri

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 \tag{71}$$

gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly alýarys. Eger bu jem ýeterlik kiçi bolsa, onda gyşarmalaryň özleri hem absolýut ululyklary boýunça kiçi bolar. (70) deňlikleri (71) formulada goýup,

$$u = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ... + (ax_n + b - y_n)^2 \tag{72}$$

funksiýany, ýagny a we b ululyklara görä iki üýtgeýänli funksiýany alarys. Ol funksiýanyň a we b parametrlere görä iň kiçi bahany almagynyň zerur şerti $\frac{\partial u}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$

(72) funksiýanyň a we b görä hususy önümlerini nola deňläp,

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n}x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n}x_k &= \sum_{k=1}^{n}x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n}x_k + bn &= \sum_{k=1}^{n}y_k \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

deňlemeler sistemasyny alarys we ondan (68) empirik formulanyň a we b parametrlerini taparys.

Indi x we y ululyklaryň kwadrat baglylyk haly üçin iň kiçi kwadratlar usuly boýunça empirik formulanyň parametrlerini tapmak meselesine seredeliň. Onuň üçin ýene-de tablisadaky x_k we y_k sanlara tekizligiň nokatlarynyň gönüburçly dekart koordinatalary hökmünde garalyň we olara degişli $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), ..., M_n(x_n, y_n)$ nokatlar tas käbir parabolada ýerleşýär hasap edeliň. Bu halda x we y ululyklaryň arasynda takmyn kwadrat baglylyk bar diýip güman etmek tebigydyr, ýagny

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (74)$$

bu ýerde a, b we c kesgitlenilmeli parametrlerdir.

Eger (74) formulanyň sag böleginde x we y ululyklaryň ýerine tablisadan alnan x_k, y_k ($k=1, 2, ..., n$) bahalary goýsak, onda $z_k = ax_k^2 + bx_k + c$ bolar. Eger a, b, c parametrleri islendik k üçin $z_k = y_k$ ($k=1, 2, ..., n$) bolar ýaly saýlap bolsady, onda ol iň oňady bolardy, ýöne $n>3$ üçin adatça ony beýdip bolmaýar, çünki

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \quad y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c, \quad y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

deňliklerden kesgitlenýän a, b, c parametrler köplenç

$$y_4 = ax_4^2 + bx_4 + c, ..., y_n = ax_n^2 + bx_n + c$$

deňlikleri kanagatlandyrmaýar. Başgaça aýdylanda $z_k - y_k = \varepsilon_k$ ($k=1, 2, ..., n$) bolar, bu ýerde ε_k gyşarmalar ýa-da hatalardyr.

(74) empirik formulanyň a, b, c parametrlerini gyşarmalaryň kwadratlarynyň

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2 = (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + ... + (z_n - y_n)^2 =$$
$$= (ax_2^2 + bx_1 + c - y_1)^2 + (ax_2^2 + bx_2 + c - y_2)^2 + ... +$$
$$+ (ax_n^2 + bx_n + c - y_n)^2$$

jemi iň kiçi bolar ýaly kesgitläris. Onuň üçin bolsa

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi zerurdyr. $u = u(a, b, c)$ funksiýanyň a, b, c üýtgeýänler boýunça hususy önümlerini tapyp we olary nola deňläp,

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^2, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k + nc\sum_{k=1}^{n} y_k & \end{aligned}\right\}$$

normal deňlemeler sistemasyny alarys we bu sistemadan (74) empirik formulanyň parametrleriniň bahalaryny kesgitläris.

14-nji mysal. Goý, tejribäniň esasynda argumentiň bäş bahasyna gözlenýän y funksiýanyň degişli bäş bahasy alnan bolsun:

x	–2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

x we y ululyklaryň arasyndaky funksional baglylygy $y = ax + b$ çyzykly funksiýa görnüşinde aňlatmaly.

◁ Çyzykly funksiýanyň koeffisiýentlerini tapmak üçin (73) sistemadan peýdalanarys. Onuň üçin tablisany ulanyp alarys:

$$\sum_{k=1}^{5} y_k x_k = 16,5; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25; \quad \sum_{k=1}^{5} x_k = 5; \quad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8.$$

Şoňa görä (73) sistema şeýle görnüşi alar:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16,5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp taparys: $a = 0,425$, $b = 1,175$. Şeýlelikde, $y = 0,425x + 1,175$ gözlenýän göni çyzygyň deňlemesidir. ▷

Gönükmeler

1. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ funksiýanyň $f(1,\ 2)$, $f(2,\ -1)$, $f(2,\ 2)$ bahalaryny hasaplamaly.

2. Berlen $f(x,y)=xy+\dfrac{y}{x}$ funksiýa boýunça $f(y,\ x)$, $f(-x,\ -y)$, $f(1,\ t)$, $f(1,\ y/x)$ funksiýalary tapmaly.

Funksiýalaryň kesgitleniş oblastyny tapmaly:

3. $z=3x+2y-5$.

4. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

5. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$.

6. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

7. $u=\sqrt{xyz}$.

8. $u=x+\sqrt{yz}$.

Funksiýalaryň dereje çyzyklaryny tapmaly:

9. $z=x+y$.

10. $z=16x^2-9y^2$.

11. $z=\dfrac{1}{x^2+3y^2}$.

12. $z=\dfrac{y^2}{x}$.

Funksiýalaryň dereje üstlerini tapmaly:

13. $u=x-y+z$.

14. $u=x^2+y^2-z$.

15. $u=\dfrac{1}{x^2+9y^2+4z^2}$.

16. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Funksiýalaryň predellerini tapmaly:

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$.

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$.

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2y^3}{xy+2}$.

22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Funksiýalaryň üznüksizdigini subut etmeli:

23. $z=x-y+xy$.

24. $z=x^3+y^3-3xy$.

25. $u=x-y+z$.

26. $u=x^2+y^2-z^2$.

Funksiýalaryň üzülme nokatlaryny tapmaly:

27. $z=\dfrac{1}{(x+2)^2+(y-3)^2}$.

28. $z=\dfrac{1}{\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}}$.

29. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$.

30. $u=\dfrac{1}{\sin xyz}$.

Funksiýalaryň hususy önümlerini tapmaly:

31. $z=y\sin(2x-y)$.

32. $z=x^2\cos(x+3y)$.

33. $z=\sqrt[4]{4xy}$.

34. $z=2^{xy}$.

35. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

36. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Funksiýalaryň doly differensiallaryny tapmaly:

37. $z=x^4+y^4-3x^2y^2+5xy^3$.

38. $z=y^{3x}$.

39. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

40. $u=\dfrac{2y-3z^3}{4z-5x}$.

41. Funksiýanyň artymyny differensialy bilen çalşyryp, takmyn bahasyny hasaplamaly:

a) $\sqrt{(1,03)^2+(2,98)^2}$.

b) $1,98^{1,02}$.

ç) $\sqrt{(2,02)^2+(1,03)^2+(1,97)^2}$.

Funksiýalaryň ikinji tertipli hususy önümlerini tapmaly:

42. $z=x^2+y^2-xy$.

43. $z=\cos(2x-3y)$.

44. $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

45. $z=\dfrac{xy}{x+y}$.

Funksiýalaryň ekstremumyny tapmaly:

46. $z=(x-1)^2+4y^2$.

47. $z=x^2+2y^2-4x+12y$.

48. $z=2x^2-4xy+6y^2-8x+16y+19$.

49. $z=3x^3+2xy^2-51x-24y$.

50. Esasy c we C depesinde şol bir burçy bolan ähli üçburçluklardan perimetri iň uly bolan üçburçlugy tapmaly.

51. Dört $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ nokatlara çenli uzaklyklaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolan $M(x, y)$ nokady tapmaly.

52. Perimetri $2p$ bolan, bir tarapynyň daşyndan aýlananda göwrümi iň uly bolan jisimi emele getirýän üçburçlugy tapmaly.

Jogaplar

1. 4/5; –4/5; 1. **2.** $xy+y/x$; $xy+y/x$; $2t$; $2y/x$. **3.** Ähli Oxy tekizligi. **4.** Merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy 3-e deň tegelegiň içki we araçäk nokatlarynyň köplügi. **5.** Merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy 5-e deň tegelegiň içki nokatlarynyň köplügi. **6.** Oxy tekizligiň $x\le x^2+y^2<2x$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügi (aýjagaz). **7.** Giňişligiň $xyz\ge 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlarynyň köplügi. **8.** Giňişligiň: 1) $y\ge 0$, $z\ge 0$; 2) $y\le 0$, $z\le 0$ şertleri kanagatlandyrýan iki oktantynyň toplumy. **9.** $x+y=C$ (göni çyzyk). **10.** $16x^2-9y^2=C$ ($C\ne 0$ bolanda giperbolalar we $C=0$ bolanda iki göni çyzyk). **11.** $x^2+3y^2=C$ ($C>0$ bolanda ellipsler). **12.** $y^2=Cx$ (parabolalar). **13.** $x-y+z=C$ (tekizlikler). **14.** $x^2+y^2-z=C$ (paraboloidler). **15.** $x^2+9y^2+4z^2=C$ ($C>0$ bolanda ellipsoidler). **16.** $z^2=C^2(x^2+y^2)$ ($C\ne 0$ bolanda konuslar). **17.** 1. **18.** 12. **19.** 0. **20.** Predeli ýok. **21.** 1. **22.** Predeli ýok. **27.** $A(-2, 3)$. **28.** $A(-4,3)$. **29.** $z=x^2+y^2$ paraboloidde ýatýan nokatlar. **30.** Koordinatalar tekizliklerinde ýatýan nokatlar. **31.** $z'_x = 2y\cos(2x-y)$, $z'_y = \sin(2x-y) - y\cos(2x-y)$. **32.** $z'_x = 2x\cos(x+3y) - x^2\sin(x+3y)$, $z'_y = -3x^2\sin(x+3y)$. **33.** $z_x{}' = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{4x^2}}$, $z_y{}' = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{y}{4x^2}}$.

34. $z'_x = y2^{xy}\ln 2$, $z'_y = x2^{xy}\ln 2$. **35.** $z_x{}' = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $z_y{}' = \frac{-2x}{(x+y)^2}$.

36. $z_x{}' = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_y{}' = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$. **37.** $(4x^3 - 6xy^2 + 5y^3)dx + (4y^3 - 6x^2y + 15xy^2)dy$. **38.** $3y^{3x}\ln y dx + 3xy^{3x-1}dy$. **39.** $\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

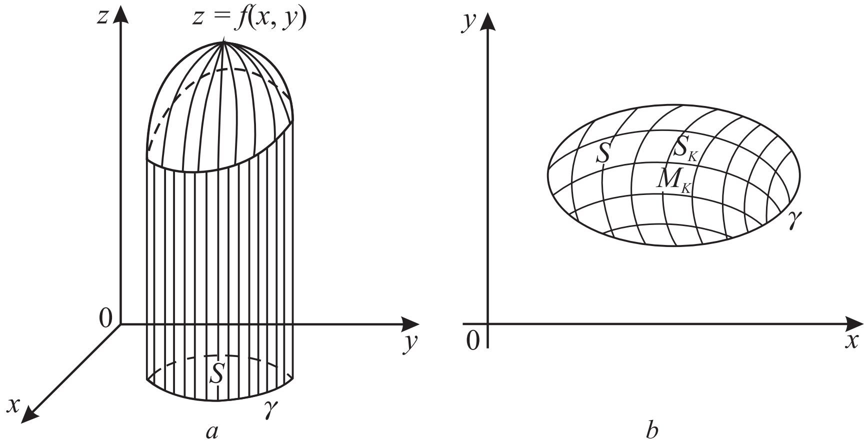
40. $\frac{3(2y-3z)}{(4z-5x)^2} + \frac{2(4z-5x)dy + (15x-8y)dz}{(4z-5x)^2}$. **41.** a) 3,153; b) 3,978; ç) 3,003.

42. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -1$. **43.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\cos x(2x-3y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9\cos x(2x-3y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6\cos x(2x-3y)$. **44.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^2}$. **45.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$. **46.** $\min f(x, y) = f(1, 0) = 0$. **47.** $\min f(x, y) = f(-3, 2) = -22$. **48.** $\min f(x, y) = f(1, -1) = 7$. **49.** $\max f(x, y) = f(-4, -1) = 152$, $\min f(x, y) = f(4, 1) = -152$, $A(-1, -4)$ we $B(1, 4)$ ekstremum nokatlary däl. **50.** Deňýanly. **51.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$. **52.** $x = \frac{p}{2}$, $y = \frac{3p}{2}$, $z = \frac{3p}{4}$.

II. 8. GAT INTEGRALLAR

§ 8. 1. Ikigat integrallaryň kesgitlenişi we häsiýetleri

1. Ikigat integrallara getirýän meseleler. 1) Silindrik jisimiň göwrümi hakyndaky mesele. Esasy Oxy tekizlikde ýerleşýän S tekiz figura bolan, gapdallaryndan emele getirijisi Oz okuna parallel we



5-nji surat

ugrukdyryjysy S figurany çäklendirýän γ çyzyk bolan silindrik üst bilen we ýokarsyndan $z=f(x, y)$ üst bilen çäklenen jisime seredeliň (*5-nji a surat*).

Silindrik jisim atlandyrylýan şol jisimiň göwrümini tapmak meselesine garalyň. Ony tapmak üçin S figurany çyzyklaryň tory arkaly $S_1, S_2, ..., S_n$ böleklere böleliň (*5-nji b surat*) we olaryň meýdanlaryny degişlilikde $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bilen belgiläliň. Her bir S_k $(k=1, 2, ..., n)$ bölekde erkin $M_k(x_k, y_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k)$ bahasyny S_k bölegiň ΔS_k meýdanyna köpeldeliň. Şonda, $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ köpeltmek hasyly esasynyň meýdany ΔS_k we $h_k=f(x_k, y_k)$ beýikligi bolan silindrik jisimiň göwrümidir. Şonuň ücin ol köpeltmek hasyllaryndan düzülen $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ jem berlen silindrik jisimi takmyn çalşyrýan basgançak şilindrik jisimiň V_n göwrümine deňdir:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k. \tag{1}$$

S_k $(k=1, 2, ..., n)$ bölekleriň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Onda $d\to 0 \Rightarrow n\to\infty$. Eger

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{2}$$

predel bar bolsa, onda şol predele silindrik jisimiň göwrümi diýilýär.

2) Plastinkanyň massasy hakyndaky mesele. *Oxy* tekizlikde γ çyzyk bilen çäklenen S figura seredeliň (*5-nji b surat*) we onda $\rho=f(x, y)$ dykyzlygy bolan jisim ýaýradylan bolsun. Plastinka atlandyrylýan ol figuranyň $\rho=f(x, y)\geq 0$ dykyzlygy belli halynda onuň massasyny tapmak meselesine garalyň. Onuň üçin 1-nji meseledäki ýaly S figurany böleklere bölüp, alnan bölekleriň meýdanlaryny ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n bilen belgiläliň. Her S_k bölekdäki dykyzlyk hemişelik we käbir nokatdaky dykyzlyga deň hasap edeliň, ýagny $\rho_k=f(x_k, y_k)$. Onda $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ köpeltmek hasyly plastinkanyň S_k böleginiň massasynyň takmyn bahasy, şeýle köpeltmek hasyllarynyň ählisiniň jemi bolsa S plastinkanyň özüniň massasynyň m_n takmyn bahasy bolar, ýagny

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k.$$

Şonuň üçin hem bu jemiň $d\to 0$ bolandaky predeli plastinkanyň massasynyň takyk bahasy bolar:

$$m = \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k. \qquad (3)$$

2. Ikigat integralyň kesgitlenişi. Tekizlikde ýapyk l çyzyk bilen çäklenen D oblastda kesgitlenen $z=f(x, y)$ funksiýa garalyň. D oblasty D_k ($k=1, 2, ..., n$) böleklere bölüp, olaryň meýdanlaryny ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n bilen belgiläliň. Her bir bölek D_k oblastda erkin $M_k(x_k, y_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky bahasyny ΔS_k meýdana köpeldeliň we şeýle köpeltmek hasyllaryndan

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \qquad (4)$$

jemi düzeliň. Oňa $f(x, y)$ funksiýanyň D oblast boýunça integral jemi diýilýär. D_k bölek oblastlaryň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň.

Eger $\forall\varepsilon>0$ san üçin şeýle $\delta>0$ san tapylyp, $d<\delta$ bolanda

$$|I-I_n|<\varepsilon$$

deňsizlik D oblastyň böleklere bölünmegine we D_k bölekden alynýan M_k nokada baglanyşyksyzlykda ýerine ýetýän bolsa, onda I sana I_n integral jemiň $d\to 0$ bolandaky predeli diýilýär.

Eger $d \to 0$ bolanda integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x, y)$ funksiýanyň D oblast boýunça ikigat integraly diýilýär we ol $\iint\limits_D f(x,y)ds$ ýa-da $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ bilen belgilenýär:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k, \tag{5}$$

bu ýerde $f(x, y)$ funksiýa integral astyndaky funksiýa, D bolsa integrirleme oblasty diýilýär.

Eger $f(x, y)$ funksiýa ýapyk kwadratlanýan D oblastda üznüksiz bolsa, onda (5) formulanyň sag bölegindäki predel bardyr (onuň subudyny [1] kitapdan görmek bolar). Bu halda $f(x, y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän funksiýa diýilýär. Şeýlelikde, her bir üznüksiz funksiýa integrirlenýändir. Üznüksiz bolmadyk funksiýalaryň integrirlenýäni hem, integrirlenmeýäni hem bardyr.

Bellik. Seredilen meseleleriň ikisi hem $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$ integral jemi düzmeklige we ol jemiň $d \to 0$ bolandaky predelini tapmaklyga getirildi. Ol predel bolsa kesgitleme boýunça $f(x, y)$ funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdir.

Şeýlelikde, (2) we (5) formulalaryň esasynda

$$V = \iint\limits_S f(x,y)ds$$

deňligi ýazyp bileris we ol ikigat integralyň geometrik manysyny aňladýar, ýagny esasy S bolan we ýokarsyndan $z = f(x, y)$ üst bilen çäklenen silindrik jisimiň göwrüminiň $f(x, y) \geq 0$ funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdigini görkezýär.

Şonuň ýaly-da (3) we (5) formulalaryň esasynda

$$m = \iint\limits_S f(x,y)ds$$

deňligi ýazyp bileris we ol ikigat integralyň fiziki manysyny aňladýar, ýagny üst dykyzlygy $\rho = f(x, y) \geq 0$ funksiýa bolan S plastinkanyň massasynyň berlen funksiýanyň S oblast boýunça ikigat integralyna deňdigini görkezýär.

Şeýlelikde, garalan meseleleriň ikisiniň hem ikigat integral düşünjesine getirýändigini gördük.

3. Ikigat integrallaryň häsiýetleri. 1) Eger $f(x, y)$ we $g(x, y)$ funksiýalar D oblastda integrirlenýän bolsa, onda olaryň algebraik jemi hem şol oblastda integrirlenýär we

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \iint_D f(x,y)ds \pm \iint_D g(x,y)ds$$

deňlik dogrudyr.

2) Hemişelik köpeldijini integral belgisiniň daşyna çykarmak bolar:

$$\iint_D kf(x,y)ds = k\iint_D f(x,y)ds.$$

3) Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän bolsa we D oblast kesişmeýän D_1 we D_2 böleklere bölünen bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds$$

deňlik dogrudyr.

4) Eger D oblastda integrirlenýän $f(x, y)$ we $g(x, y)$ funksiýalar $\forall(x, y) \in D$ üçin $f(x, y) \leq g(x, y)$ deňsizligi kanagatlandyrsa, onda

$$\iint_D f(x,y)ds \leq \iint_D g(x,y)ds.$$

5) Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän bolsa, onda $|f(x, y)|$ funksiýa hem D oblastda integrirlenýär we

$$\left|\iint_D f(x,y)ds\right| \leq \iint_D |f(x,y)|ds.$$

6) Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblastda integrirlenýän we $m \leq f(x, y) \leq M$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$mS \leq \iint_D f(x,y)ds \leq MS$$

deňsizlikler dogrudyr, bu ýerde S berlen D oblastyň meýdanydyr.

Ikigat integralyň bu häsiýetleri onuň kesgitlemesi ulanylyp, aňsatlyk bilen subut edilýär.

§8. 2. Ikigat integrallaryň hasaplanylyşy

1. Integrirleme oblastyň gönüburçluk haly. Goý, G oblast $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän gönüburçluk bolsun. Şol gönüburçlukda üznüksiz $f(x, y) \ge 0$ funksiýa üçin $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ integralyň hasaplanylyşyny görkezeliň.

Belli bolşy ýaly, bu integral esasy G gönüburçluk, ýokarsyndan $z = f(x, y)$ üst we gapdallaryndan $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ tekizlikler bilen çäklenen silindrik jisimiň göwrümidir:

$$V = \iint\limits_G f(x,y)ds.$$

Şonuň ýaly-da §6.6-da görkezilen formula boýunça ol göwrüm

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx,$$

bu ýerde $S(x)$ meýdan x nokat arkaly geçýän we Ox okuny perpendikulýar kesýän tekizligiň jisimi kesende kesikdäki alynýan figuranyň meýdanydyr. Ol kesikde alynýan figura bolsa bellenen x üçin ýokarsyndan $z = f(x, y)$ $(c \le y \le d)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýadyr we onuň $S(x)$ meýdany

$$S(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

formula boýunça tapylýar. Bu üç deňligiň esasynda ikigat integraly hasaplamak üçin

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy \right] dx \qquad (6)$$

formulany alarys. Şeýlelikde, ikigat integraly hasaplamaklygy iki sany kesgitli integraly hasaplamaklyga getirdik. Şunlukda, içki (kwadrat ýaýdaky) integral hasaplanylanda x hemişelik hasap edilýär.

Bellik. Subut edilen (6) formulanyň $f(x, y) < 0$ bolanda, şeýle-de $f(x, y)$ funksiýanyň gönüburçlukda alamatyny üýtgedýän haly üçin hem ýerine ýetýändigini görkezmek bolar.

(6) formulanyň sag bölegine gaýtalanýan integrallar diýilýär we ol

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \quad (7)$$

görnüşde ýazylýar. Edil şonuň ýaly,

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad (8)$$

formulany görkezmek bolar. (6)-(8) formulalaryň esasynda

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad (9)$$

deňligi alarys. Bu deňlik ikigat integralda gönüburçluk boýunça integrirlemegiň netijesiniň onuň integrirleme tertibine bagly däldigini görkezýär.

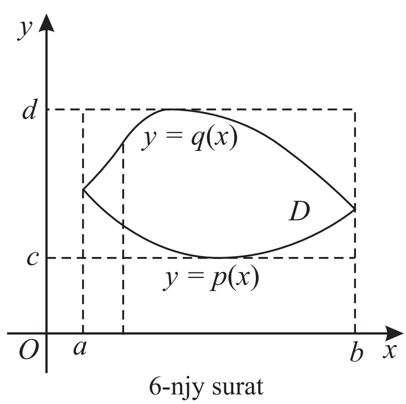
2. Integrirleme oblastynyň beýleki görnüşleri. a) Goý, D oblast aşagyndan $y = p(x)$ funksiýanyň grafigi, ýokarsyndan $y = q(x)$ funksiýanyň grafigi bilen çäklenen oblast bolup, Oy okuna parallel we D oblast bilen umumy nokady bolan islendik göni çyzyk D oblastyň araçägini diňe iki nokatda kesýän bolsun (*6-njy surat*). Oňa Oy okuna görä ýönekeý oblast diýeliň. Goý,

$$G\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

ol oblasty içinde saklaýan iň kiçi gönüburçluk bolsun. Eger $f(x, y)$ funksiýa D oblastda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol oblastda integrirlenýändir we

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in G \backslash D \end{cases}$$

funksiýa üçin integralyň 3-nji häsiýeti boýunça



6-njy surat

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_G F(x,y)dxdy \qquad (10)$$

deňlik dogrudyr. (6) formulanyň esasynda bolsa

$$\iint\limits_G F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)dy. \qquad (11)$$

$[p(x), q(x)]$ kesimiň tutuşlygyna D oblastda ýerleşýändigi sebäpli, $p(x) \le y \le q(x)$ bolanda $F(x, y)=f(x, y)$ we ol kesimiň daşynda $F(x, y)=0$. Şoňa görä hem bellenen x üçin

$$\int\limits_c^d F(x,y)dy = \int\limits_c^{p(x)} F(x,y)dy + \int\limits_{p(x)}^{q(x)} F(x,y)dy + \int\limits_{q(x)}^{d} F(x,y)dy = \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy.$$

Şoňa görä-de bu deňlik esasynda (11) deňligi

$$\iint\limits_G F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \qquad (12)$$

görnüşde ýazmak bolar. (10) we (12) formulalardan bolsa

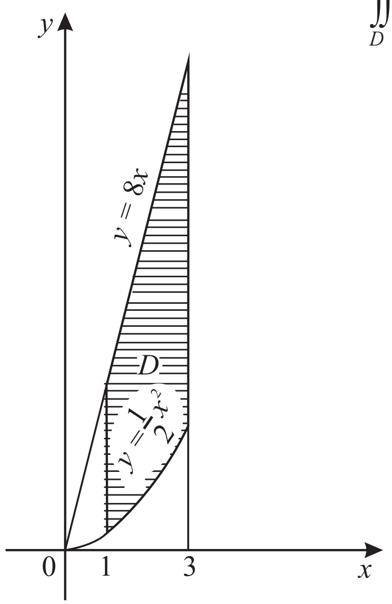
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy \qquad (13)$$

deňlik gelip çykýar.

1-nji mysal. $y=8x$, $y=x^2/2$, $x=1$, $x=3$ çyzyklar bilen çäklenen ýapyk D oblast boýunça (*7-nji surat*) $f(x, y)=$ $=x+2y$ funksiýanyň ikigat integralyny hasaplamaly.

◁ Bu mysaldaky D oblast Oy okuna görä ýönekeý bolan 7-nji suratdaky oblastdyr:

$$D\left\{1 \le x \le 3; \frac{1}{2}x^2 \le y \le 8x\right\}.$$



7-nji surat

Şoňa görä-de D oblast boýunça ikigat integraly (13) formulany ulanyp hasaplamak bolar:

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2/2}^{8x} (x+2y)dy = \int\limits_1^3 (xy+y^2)\Big|_{x^2/2}^{8x} dx =$$

$$= \int\limits_1^3 \left(72x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \left(24x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right)\Big|_1^3 = 602,1. \rhd$$

b) Eger D oblast $c \le y \le d$, $p_1(y) \le x \le q_1(y)$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän bolup, ol Ox okuna görä ýönekeý oblast bolsa we $f(x, y)$ funksiýa şol oblastda üznüksiz bolsa, onda a) haldaky ýaly

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{p_1(y)}^{q_1(y)} f(x,y)dx \tag{14}$$

deňligi subut etmek bolar.

ç) Eger D oblast hem Ox okuna görä, hem Oy okuna görä ýönekeý oblast bolup, şol oblastda $f(x, y)$ funksiýa üznüksiz bolsa, onda (13) we (14) formulalaryň ikisi hem dogrudyr we şonuň esasynda bu halda amatyna garap ikigat integraly hasaplamak üçin olaryň islendigini ulanmak bolar, çünki şol formulalar esasynda

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{p_1(y)}^{q_1(y)} f(x,y)dx \tag{15}$$

deňlik dogrudyr. Bu deňlik gaýtalanýan integrallarda integrirlemegiň tertibini üýtgedip bolýandygyny görkezýär. Ony köplenç gaýtalanýan integrallaryň birisiniň hasaplamasy kyn bolanda ulanýarlar. Ony ulanmak üçin ilki bilen berlen gaýtalanýan integralyň integrirleme çäkleri boýunça integrirleme oblasty kesgitleýärler we soňra şol oblast boýunça beýleki tertipdäki gaýtalanýan integralyň integrirleme oblastyny we çäklerini kesgitleýärler, ýagny berlen a, b, $p(x)$, $q(x)$ funksiýalar boýunça c, d, $p_1(y)$, $q_1(y)$ funksiýalar tapylýar (ýa-da tersine).

d) Eger D oblast Ox okuna görä-de, Oy okuna görä-de ýönekeý oblast bolman, ony şol görnüşdäki birnäçe oblastlalara bölüp bolýan bolsa, onda olaryň hersinde degişli formulalary ulanmak arkaly ikigat integraly hasaplamaklygy gaýtalanýan integrallary hasaplamaklyga getirmek bolar.

§ 8. 3. Ikigat integralda üýtgeýänleri çalşyrmak

1. Egriçyzykly koordinatalarda meýdan. *Oxy* tekizlikde endigan l çyzyk bilen çaklenen D oblasta seredeliň. Goý, x we y-e görä birbahaly

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{16}$$

funksiýalar D oblastda üznüksiz bolup, olaryň şol oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolsun.

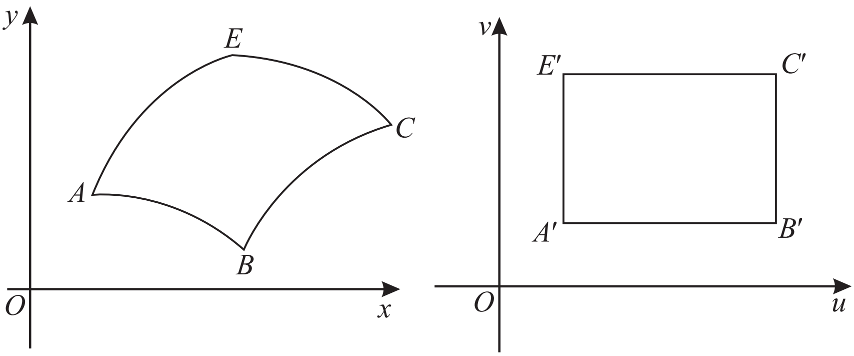
Goý, (16) deňlikler x we y ululyklary ýeke-täk kesgitleýän bolsun, ýagny

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{17}$$

bu ýerde $x(u, v)$, $y(u, v)$ funksiýalar *Ouv* tekizligiň D' oblastynda üznüksiz bolup, olaryň şol oblastda üznüksiz hususy önümleri bar bolsun.

Şerte görä (16) funksiýalar D oblastyň her bir $M(x, y)$ nokadyna D' oblastyň ýeke-täk $M'(u, v)$ nokadyny degişli edýär. (17) funksiýalar bolsa onuň tersine, her bir $M'(u, v) \in D'$ nokada ýeke-täk $M(x, y)$ nokady degişli edýär. Şoňa görä u we v sanlara $M(x, y)$ nokadyň täze koordinatalary hökmünde garamak bolar we olara M nokadyň egriçyzykly koordinatalary diýilýär.

Şeýlelikde, (16) funksiýalar D we D' oblastlaryň nokatlarynyň arasynda özära birbahaly degişliligi gurnaýar, ýagny D oblasty D' oblasta öwürýär. Şunlukda, D oblasty çäklendirýän l çyzyk D' oblasty çäklendirýän l' çyzyga özgerdilýär. Şu özgertmede bellenen u_o üçin *Ouv* tekizligiň $u = u_o$ göni çyzygyna *Oxy* tekizligiň parametrik deňlemesi $x = x(u_o, v)$, $y = y(u_o, v)$ görnüşde bolan käbir çyzygy degişli bolar (bu ýerde v parametrdir). Şonuň üçin hem şu öwürmede *Ouv* tekizligiň $u = u_o$, $u = u_o + \Delta u$, $v = v_o$, $v = v_o + \Delta v$ göni çyzyklar bilen çäklenen $A'B'C'E'$ gönüburçlugy *Oxy* tekizligiň egriçyzykly $ABCE$ dörtburçlugyna öwrüler (*8-nji surat*). Şunlukda, gönüburçlugyň depeleriniň koordinatalary $A'(u_o, v_o)$, $B'(u_o + \Delta u, v_o)$, $C'(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v)$, $E'(u_o, v_o + \Delta v)$, egriçyzykly dörtburçlugyň depeleriniň koordinatalary bolsa şeýle bolar:



8-nji surat

$$A(x_1, y_1), \qquad x_1 = x(u_o, v_o), \qquad y_1 = y(u_o, v_o),$$

$$B(x_2, y_2), \qquad x_2 = x(u_o + \Delta u, v_o), \qquad y_1 = y(u_o + \Delta u, v_o),$$

$$C(x_3, y_3), \qquad x_3 = x(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v), \qquad y_1 = y(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v),$$

$$E(x_4, y_4), \qquad x_4 = x(u_o, v_o + \Delta v), \qquad y_1 = y(u_o, v_o + \Delta v).$$

Tükeniksiz kiçi Δu, Δv ululyklaryň ýokary tertipli takyklygynda egriçyzykly $ABCE$ dörtburçlugyň meýdany $\overline{AE}$ we $\overline{AB}$ wektorlar esasynda gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir. Ol wektorlaryň koordinatalary bolsa şeýle kesgitlenýär:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = \{x(u_o + \Delta u, v_o) - x(u_o, y_o), y(u_o + \Delta u, v_o) - y(u_o, y_o)\},$$

$$\overline{AE} = \{x_4 - x_1, y_4 - y_1\} = \{x(u_o, v_o + \Delta v) - x(u_o, y_o), y(u_o, v_o + \Delta v) - y(u_o, y_o)\}.$$

Lagranžyň formulasyny ulanyp, olary şeýle ýazmak bolar:

$$\overline{AB} = \left\{\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right\}, \qquad \overline{AE} = \left\{\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right\}.$$

Bu wektorlaryň esasynda parallelogramyň meýdany

$$\Delta S = |[\overline{AB}, \overline{AE}]| = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta u \Delta v$$

ýa-da

$$\Delta S = |I(u, v)|\Delta S', \qquad \Delta S' = \Delta u \Delta v \tag{18}$$

formula boýunça tapylýar, bu ýerde

$$I = I(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

(19) kesgitleýjä (17) öwürmäniň ýakobiany diýilýär. Ony noldan tapawutly hasap ederis. Şeýlelikde, egriçyzykly koordinatalarda meýdan (18) formula boýunça tapylýar.

2. Ikigat integralda üýtgeýänleri çalşyrmak formulasy. Eger D oblastda üznüksiz $f(x, y)$ funksiýa üçin x we y üýtgeýänleri (17) formula boýunça u we v üýtgeýänler bilen çalşyrsak, onda

$$f(x, y)=f[x(u, v), y(u, v)]=F(u, v)$$

bolar. Bu funksiýanyň D oblast boýunça integral jemini düzeliň:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} F(u_k, v_k)\Delta S_k.$$

(18) deňlik esasynda ony şeýle ýazmak bolar:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \approx \sum_{k=1}^{n} F(u_k, v_k)|\,I\,|\Delta S_k'.$$

Bu deňlikde predele geçip, ikigat integralyň kesgitlemesi esasynda ikigat integralda üýtgeýänleri çalşyrmagyň

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]|\,J(u,v)\,|dudv \tag{20}$$

formulasyny alarys. Eger dekart koordinatalaryny $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ formula boýunça polýar koordinatalary bilen çalşyrsak, onda (19) formula boýunça

$$I = I(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \tag{21}$$

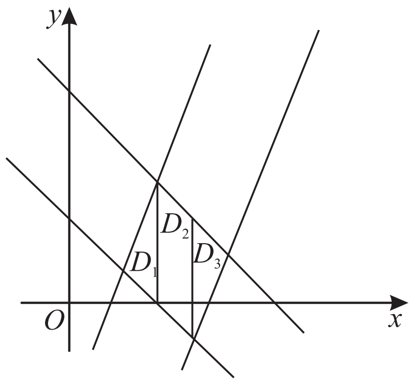
bolar. Şonuň üçin bu halda (20) formula esasynda

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi \tag{22}$$

formulany alarys.

2-nji mysal. Ikigat $\iint\limits_D (2x-y)dxdy$ integraly hasaplamaly, bu ýerde D oblast $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$ göni çyzyklar bilen çäklenen parallelogramdyr (*9-njy surat*).

◁ Suratdan görnüşi ýaly, D oblast Ox okuna görä-de, Oy okuna görä-de ýönekeý däldir. Şonuň üçin integrala (13) we (14) formulalary gönümel ulanyp bolmaýar. Olary ulanmak üçin D oblasty 9-njy suratda görkezilişi ýaly, üç bölege bölmeli we degişli üç integraly hasaplamaly.



9-njy surat

x we y üýtgeýänleri

$$u=x+y, \quad v=2x-y$$

formulalary ulanyp çalşyrma girizmek integraly hasaplamaklygy ýeňilleşdirýär. Bu çalşyrmada Oxy koordinatalar sistemasyndaky $x+y=1$, $x+y=2$ we $2x-y=1$, $2x-y=3$ göni çyzyklar Ouv koordinatalar sistemasynda degişlilikde $u=1$, $u=2$ we $v=1$, $v=3$ göni çyzyklara geçýär, ýagny D parallelogram integrirlemek üçin amatly bolan taraplary koordinatalar oklaryna parallel bolan D' gönüburçluga özgerdilýär. Bu halda ýakobian

$$I=I(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}.$$

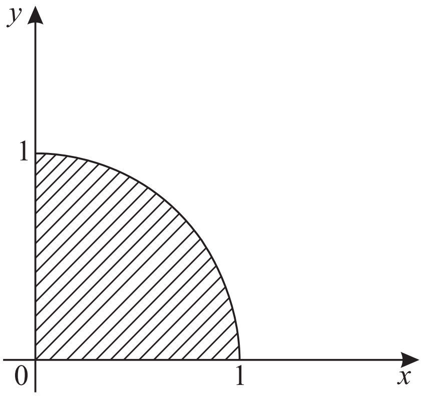
Şonuň üçin (20) formulany ulanyp, integraly hasaplarys:

$$\iint\limits_D (2x-y)dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{1}{3} v du dv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 v dv = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 du =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_1^2 du = \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}. \ ▷$$

Bellik. Integral astyndaky funksiýa ýa-da oblasty çäklendirýän çyzygyň deňlemesi özünde x^2+y^2 jemi saklaýan halynda, köplenç, integraly ýönekeýleşdirmek dekart koordinatalaryndan polýar koordinatalaryna geçmek arkaly amala aşyrylýar.

3-nji mysal. Ikigat $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ integraly hasaplamaly, bu ýerde D oblast $x^2+y^2=1$ töwerek bilen çäklenen tegelegiň birinji kwadrantda ýerleşýän dörtden bir bölegi (*10-njy surat*).



10-njy surat

◁ Dekart koordinatalaryny $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ formula boýunça polýar koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $x^2+y^2=\rho^2$ bolar we (21) formula esasynda ýakobian $I=\rho$ bolar. 10-njy suratdan görnüşi ýaly, φ burç 0-dan $\pi/2$-ä çenli, ρ bolsa 0-dan 1-e çenli üýtgeýär. Şonuň üçin (22) formulany ulanyp alarys:

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 e^{\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{2}(e-1)\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi = \frac{\pi}{4}(e-1). \ \triangleright$$

§ 8. 4. Ikigat integrallaryň ulanylyşy

1. Geometriýada ikigat integrallaryň ulanylyşy. Ikigat integrallaryň geometriýada käbir ulanylyşlaryna biz eýýäm duş geldik. Mysal üçin, § 8.1-de jisimiň göwrüminiň

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

formula boýunça tapylýandygyny görkezipdik. Eger ol formulada $f(x, y)=1$ alsak, onda $V=1\cdot S=S$ deňligi, ýagny D oblastyň meýdanyny hasaplamak üçin

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D dS$$

formulany alarys.

2. Fizikada ikigat integrallaryň ulanylyşy. 1) *Plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary.* Eger tekizligiň $M_1(x_1, x_2)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, x_n)$ nokatlarynda m_1, m_2, ..., m_n massalar ýerleşdirilen bolsa, onda § 1.1-iň 5-nji mysalynda görkezilişi ýaly, ol massalaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \tag{21}$$

formula boýunça tapylýar. Şu formuladan peýdalanyp, Oxy tekizligiň D oblastynda ýerleşýän plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny tapalyň. Goý, $\rho=\rho(x, y)$ plastinkanyň $M(x, y)$ nokadyndaky dykyzlygy bolsun. D oblasty n bölege bölüp, olaryň meýdanlaryny ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n bilen belgiläliň. Her bir D_k oblastdaky dykyzlygy hemişelik we $\rho_k=\rho_k(x_k, y_k)$ deň hasap edeliň we şol bölegiň $m_k=\rho_k(x_k, y_k)\Delta S_k$ massasy $M_k(x_k, x_k)$ nokatda toplanan bolsun. Onda n sany $M_k(x_k, x_k)$ material nokatlaryň sistemasynyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary (21) formula esasynda şeýle formula boýunça tapylýar:

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \rho(x_k, y_k) \Delta S_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k) \Delta S_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \rho(x_k, y_k) \Delta S_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k) \Delta S_k}. \tag{22}$$

Olar plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalarynyň takmyn bahalaryny aňladýar. Eger D_k oblastlaryň diametrleriniň iň ulusy bolan $d \to 0$ bolanda predele geçsek, onda (22) deňlikleriň sag bölegindäki jemleriň predelleri ikigat integrallara deň bolar. Şonuň esasynda (22) deňliklerde $d \to 0$ bolanda predele geçip, plastinkanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary üçin

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)dxdy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)dxdy \tag{23}$$

formulalary alarys, bu ýerde m ol plastinkanyň massasydyr:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy.$$

(23) formuladaky ikigat

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y) dxdy, \quad M_x = \iint_D y\rho(x, y) dxdy$$

integrallar boýunça D oblastdaky plastinkanyň degişlilikde Oy we Ox oklaryna görä statiki momentleri kesgitlenýär. Eger plastinka birjynsly, ýagny dykyzlyk hemişelik bolsa, onda (23) formula

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_D xdxdy, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_D ydxdy \tag{24}$$

görnüşi alar, bu ýerde S plastinkanyň ýerleşen D oblastynyň meýdanydyr.

2) *Plastinkanyň inersiýa momenti.* Massasy m bolan material nokadyň massasynyň şol nokatdan haýsydyr bir oka (nokada) çenli uzaklygynyň kwadratyna köpeltmek hasylyna material nokadyň şol oka (nokada) görä inersiýa momenti diýilýär.

Massalary $m_1, m_2, ..., m_n$ bolan $M_1, M_2, ..., M_n$ material nokatlaryň Ou okuna (O nokada) görä inersiýa momentleriniň

$$\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

jemine ol nokatlaryň şol oka (nokada) görä inersiýa momenti diýilýär, bu ýerde r_k material nokatdan Ou okuna (O nokada) çenli uzaklykdyr.

Şu kesgitlemeden peýdalanyp, dykyzlygy $\rho=\rho(x, y)$ bolan D plastinkanyň koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentlerini kesgitläliň. Onuň üçin D oblasty böleklere bölüp, onuň ΔS_k meýdanly D_k böleginiň $m_k=\rho_k(x_k, y_k)\Delta S_k$ massasy $M_k(x_k, y_k)$ nokatda toplanan hasap edeliň. Şunlukda, n material nokatlaryň sistemasyny alarys. Olardan Ox, Oy oklaryna we O başlangyja çenli r_k uzaklyklaryň degişlilikde

$$r_k = y_k, \quad r_k = x_k, \quad r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

bolýandygy sebäpli, material nokatlaryň sistemasynyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleri degişlilikde

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \rho(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

$$I_y = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \rho(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} r_k^2 m_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) \rho(x_k, y_k) \Delta S_k$$

deňlikler boýunça kesgitlener we olary degişlilikde plastinkanyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleriniň takmyn bahalary hökmünde almak bolar. Ol deňliklerde $d \to 0$ bolanda predele geçip, degişlilikde D plastinkanyň Ox, Oy oklaryna we O başlangyja görä inersiýa momentleriniň takyk bahalaryny alarys:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dxdy,$$

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy.$$

Bu deňliklerden görnüşi ýaly $I_o = I_x + I_y$.

§ 8. 5. Üçgat integrallar

1. Üçgat integralyň kesgitlenişi. Giňişlikde çäkli, ýapyk Q oblasta we şol oblastda kesgitlenen üznüksiz $u = f(x, y, z)$ funksiýa seredeliň. Q oblasty Q_k ($k = 1, 2, ..., n$) böleklere bölüp, olaryň göwrümlerini $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$ bilen belgiläliň. Her bir bölekde erkin $M_k(x_k, y_k, z_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k, z_k)$ bahasyny Q_k bölegiň ΔV_k göwrümine köpeldip, ähli şeýle köpeltmek hasyllaryndan

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \tag{25}$$

jemi düzeliň. Oňa $f(x, y, z)$ funksiýanyň Q oblast boýunça integral jemi diýilýär. Q_k bölekleriň d_k diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (25) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x, y, z)$ funksiýanyň Q oblast boýunça üçgat integraly diýilýär we ol $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV$ görnüşde belgilenýär.

Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV = \iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k.$$

Eger $f(x, y, z)$ funksiýa Q oblastda üznüksiz bolsa, onda bu deňligiň sag bölegindäki predel bardyr we ol predel Q oblastyň Q_k böleklere bölünmegine we her bölekde alynýan M_k nokatlara bagly däldir.

Eger Q oblastda göwrüm dykyzlygy üznüksiz $f(x, y, z)\geq 0$ funksiýa bilen aňladylýan käbir jisim paýlanan bolsa, onda $f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ köpeltmek hasyly Q_k bölegiň massasynyň takmyn bahasyny, (25) integral jem bolsa Q oblastyň özüniň massasynyň takmyn bahasyny aňladýar. Şonuň üçin ol massanyň takyk bahasy

$$m = \iiint\limits_Q f(x,y,z)dV \tag{26}$$

üçgat integral bilen aňladylýar we ol üçgat integralyň mehaniki manysyny görkezýär: üçgat integral integrirleme Q oblasty doldurýan massadyr.

Eger (26) formulada $f(x, y, z)=1$ bolsa, onda $m=V\cdot 1=V$ bolar we bu halda ol formula

$$V = \iiint\limits_Q dV = \iiint\limits_Q dxdydz \tag{27}$$

görnüşi alar we ol folmula boýunça Q oblastyň göwrümi tapylýar.

Üçgat integrallaryň hem ikigat integrallaryňky ýaly häsiýetleri bardyr.

2. Üçgat integrallaryň hasaplanylyşy. Q oblastyň käbir görnüşleri üçin üçgat integralyň hasaplanyş formulalaryny getirip çykaralyň. Eger: 1) Oz okuna parallel we Q oblast bilen umumy nokatlary bolan islendik göni çyzyk ol oblastyň araçägini diňe iki nokatda kesýän bolsa; 2) Q oblastyň Oxy tekizligine D proýeksiýasy Ox ýa-da Oy okuna görä ýönekeý oblast bolsa, onda Q oblasta Oz okuna görä ýönekeý oblast diýilýär.

Eger $f(x, y, z)$ funksiýa Oz okuna görä ýönekeý bolan Q oblastda üznüksiz bolsa we ol oblast aşagyndan $z = z_1(x, y)$ üst bilen, ýokarsyndan $z = z_2(x, y)$ üst bilen çäklenen bolsa, onda

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy \qquad (28)$$

formulanyň dogrudygyny görkezmek bolar. Şunlukda,eger Oy okuna görä ýönekeý D oblast $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän bolsa, onda

$$\iint\limits_{D} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy = \int\limits_{a}^{b} \left\{ \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (29)$$

formulany ýazyp bileris. Şonuň üçin (28) we (29) deňliklerden

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (30)$$

formula gelip çykýar. Eger Q oblast $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$, $c \leq z \leq C$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän parallelepiped bolsa, onda (30) formuladan hususy hal hökmünde şeýle formula gelip çykýar:

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{a}^{A} dx \int\limits_{b}^{B} dy \int\limits_{c}^{C} f(x,y,z)dz. \qquad (31)$$

Bellik. Eger D oblast Ox okuna görä ýönekeý bolup, ol $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, $c \leq y \leq d$ deňsizlikler boýunça kesgitlenýän bolsa, onda

$$\iint\limits_{D} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy = \int\limits_{c}^{d} \left\{ \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dx \right\} dy =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

deňligi ýazmak bolar we bu halda üçgat integraly hasaplamak üçin

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (32)$$

formulany alarys. (30) we (32) formulalaryň esasynda şeýle deňligi alarys:

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

2-nji bellik. Integrirleme Q oblastyň beýleki koordinatalar oklaryna görä ýönekeý bolan hallarynda hem üçgat integraly hasaplamak üçin degişli formulalary almak bolar. Şeýlelikde, üçgat integraly hasaplamak üçin integrirleme çäkleri dürli bolan alty görnüşdäki formulany alarys (olaryň ikisi (30) we (32) formulalar).

§ 8. 6. Üçgat integrallarda üýtgeýänleri çalşyrmak

1. Dekart koordinatalarynda üýtgeýänleri çalşyrmak. Goý, $Oxyz$ dekart koordinatalarynyň käbir Q oblastynda differensirlenýän

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \qquad (33)$$

funksiýalar berlen bolup, olar birbahaly

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \qquad (34)$$

funksiýalary kesgitleýän bolsun, bu ýerde $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ öz üýtgeýänlerine görä käbir Q' oblastda differensirlenýän funksiýalar.

(34) funksiýalar Q we Q' oblastlary özara-birbahaly öwürmekligi amala aşyrýar. Şunlukda, ikigat integral üçin subut edilen (20) formula meňzeşlikde üçgat integralda üýtgeýänleri çalşyrmagyň

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q'} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] | I | dudvdw \qquad (35)$$

formulasyny alarys, bu ýerde

$$I = I(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{36}$$

kesgitleýjä (34) funksiýalaryň ýakobiany diýilýär we ol noldan tapawutly hasap edilýär.

2. Üçgat integrallar silindrik we sferik koordinatalarynda. Eger dekart koordinatalaryny $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$ formulalar boýunça silindrik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u=\rho$, $v=\varphi$, $w=z$ alyp, (36) formuladan ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Şonuň üçin hem bu halda (35) formula şeýle görnüşi alar:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{Q'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz. \tag{37}$$

Eger-de dekart koordinatalaryny $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ ($r\geq 0$, $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\varphi<2\pi$) formulalar boýunça sferik koordinatalary bilen çalşyrsak, onda $u=r$, $v=\theta$, $w=\varphi$ alyp, (36) formulany ulanyp, ýakobiany taparys:

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 01 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \tag{38}$$

Bu deňligiň esasynda (35) formula

$$\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{D'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \tag{39}$$

görnüşde ýazylar.

3-nji mysal. $\iiint\limits_{Q} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz$ integraly hasaplamaly, bu ýerde Q oblast $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ şardyr.

$\lhd$ Integraly hasaplamak üçin dekart koordinatalaryny sferik koordinatalary bilen çalşyrarys. Şonda Q oblast $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$, $0 \le \rho < R$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän Q' oblasta özgerdiler. Şonuň üçin (39) formulany ulanyp alarys:

$$\iiint\limits_{Q} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}\,dxdydz = \iiint\limits_{Q'} \rho^5 \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} \rho^7 \sin\theta d\rho = \frac{\pi R^8}{2}. \rhd$$

§ 8. 7. Üçgat integrallaryň ulanylyşy

Üçgat integrallaryň ulanylyşyna biz eýýäm duş geldik, ýagny Q jisimiň göwrümi we göwrüm dykyzlygy $\rho=\rho(x, y, z)$ funksiýa bilen aňladylan material jisimiň massasy degişlilikde

$$V = \iiint\limits_{Q} dxdydz, \quad m = \iiint\limits_{Q} \rho(x,y,z)dxdydz$$

üçgat integrallar arkaly hasaplanylýar. Ikigat integrallaryň ulanylyşy ýaly, üçgat integraly göwrüm dykyzygy $\rho=\rho(x, y, z)$ funksiýa bilen aňladylýan Q material jisimiň agyrlyk merkeziniň $C(x_c, y_c, z_c)$ koordinatalary üçin

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} x\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} y\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_{Q} z\rho(x,y,z)dxdydz$$

formulalary alarys, bu ýerde m seredilýän Q jisimiň massasydyr we ol ýokarda görkezilen formula boýunça tapylýar. Şonuň ýaly-da, Q

material jisimiň Ox, Oy, Oz koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

formulalar boýunça tapylýar. Koordinatalar tekizliklerine görä inersiýa momentleri bolsa

$$I_{xy} = \iiint_Q z^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint_Q y^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

Gönükmeler

Gaýtalanýan integrallary hasaplamaly:

1. $\int_2^4 dx \int_1^2 xydy.$

2. $\int_3^5 dx \int_0^2 (x+y)dy.$

3. $\int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x}dy.$

4. $\int_1^3 dx \int_4^8 \frac{y}{x^2}dy.$

Berlen G gönüburçluklar boýunça integrallary hasaplamaly:

5. $\iint_G \frac{y}{x^2}dxdy,\ G=[2,4;\ 6,8].$

6. $\iint\limits_G (x^2 + y^2)dxdy,\ G=[0,1;\ 0,1].$

7. $\iint\limits_G (3xy^2 + 4y^3)dxdy,\ G=[0,1;\ 2,4].$

8. $\iint\limits_G (\sin(3x + 2y))dxdy,\ G=[0,\ \pi/4;\ 0,\ \pi/4].$

Berlen D oblastda üznüksiz bolan $f(x,\ y)$ funksiýa üçin $\iint\limits_D fdxdy$ ikigat integraly gaýtalanýan integrallar görnüşinde ýazyp, integrallaryň çäklerini goýmaly:

9. D oblast $y=x^2$, $y=4$ çyzyklar bilen çäklenen.

10. D oblast $x^2+y=2$, $y^3=x^2$ çyzyklar bilen çäklenen.

11. D oblast $x^2+y^2\leq 9$, $x+y\geq 3$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

12. D oblast $x^2+y^2\leq 1$, $x+4y\geq 1$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

13. D oblast $A(-2,\ -2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(6,\ 2)$ depeli üсburçluk.

14. D oblast depeleri $A(-2,\ 1)$, $B(1,\ 4)$, $C(5,\ 4)$, $D(-2,\ -3)$ bolan trapesiýa.

Gaýtalanýan integrallaryň integrirleme oblastyny gurup, olaryň integrirleme tertibini üýtgetmeli:

15. $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} f(x,y)dy.$

16. $\int_{-2}^{1} dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy \int_2^4 dx \int_1^2 xydy.$

Ikigat integrallary hasaplamaly:

17. $\iint\limits_D xdxdy$, D oblast $xy=6$, $x+y=7$ çyzyklar bilen çäklenen.

18. $\iint\limits_D x^4 ydxdy$, D oblast $xy=1$, $y-x=0$, $x=2$ çyzyklar bilen çäklenen.

19. $\iint\limits_D (xy^2+1)dxdy$, D oblast $0 \le x \le 2$, $x/2 \le y \le \sqrt{x/2}$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

20. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, D oblast $-1 \le x \le 3$, $x/2-1 \le y \le x/2+5/2$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

Polýar koordinatalaryny girizip, integrallary hasaplamaly:

21. $\iint\limits_D \sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$, D oblast $x^2+y^2 \le 9$ tegelek.

22. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D oblast $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ çyzyklar bilen çäklenen.

23. $\iint\limits_D (x^4+2x^2y^2+y^4)dxdy$, D oblast $x^2+y^2 \ge 1$, $x^2+y^2 \le 4$ deňsizlikler bilen kesgitlenen.

24. $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, D oblast $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ lemniskata bilen çäklenen.

Üýtgeýänleri çalşyryp, integrallary hasaplamaly:

25. $\iint\limits_D (x+y)^2 dxdy$, D oblast $x+y=1$, $x+y=3$, $y=5x$, $y=10x$ çyzyklar bilen çäklenen.

26. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^4}$, D oblast $x+y=1$, $x+y=2$, $3x-y=0$, $4x-y=0$ çyzyklar bilen çäklenen.

27. $\iint\limits_D \sqrt{16-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}^{\,2}\,dxdy$, D oblast $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ çyzyk bilen çäklenen.

28. $\iint\limits_D xydxdy$, D oblast $x^2=3y$, $x^2=5y$, $y^2=x$, $y^2=2x$ çyzyklar bilen çäklenen.

Berlen çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny tapmaly:

29. $xy-6=0$, $3x-2y=0$, $x-6y=0$.

30. $y=4-x^2$, $y=-\sqrt{4-x^2}$.

31. $x^2+y^2=4$, $y^2=3x$.

32. $y^2=5x$, $y^2=8x$, $y=8$.

Berlen üstler bilen çäklenen jisimleriň göwrümini hasaplamaly:

33. $x+2y-z=0$, $x-2y-2=0$, $x-2y+5=0$, $x=-1$, $x=3$, $z=0$.

34. $z=25-x^2-y^2$, $x=\pm 2$, $y=\pm 3$, $z=0$.

35. $x^2+y^2+z-c^2=0$, $z=0$.

Berlen çyzyklar bilen çäklenen birjynsly plastinkanyň koordinatalar oklaryna görä statiki momentlerini, agyrlyk merkezini we inersiýa momentlerini tapmaly:

36. $x+y=4$, $x-3y=0$, $x+5y=16$.

37. $y=x^2+1$, $y=x+3$.

38. $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$, $x=0$.

Integrallary hasaplamaly:

39. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 (x^2+y^2+z)dz.$

40. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-1-x}^0 dy \int\limits_{-1-x-y}^0 \dfrac{dz}{(4x+3y+z+2)^5}.$

Silindrik ýa-da sferik koordinatalaryna geçip, integrallary hasaplamaly:

41. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z)^2\,dxdydz$, Q oblast $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=c$ silindr bilen çäklenen.

42. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)^3\,dxdydz$, Q oblast $x^2+z^2=1$, $y=0$, $y=1$ silindr bilen çäklenen.

43. $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2+1)^3\,dxdydz$, Q oblast $x^2+y^2+z^2\le 1$ şaryň aşaky bölegi.

44. $\iiint\limits_Q \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)}$, Q oblast $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera we $z=0$ tekizlik bilen çäklenen.

Üýtgeýänleri çalşyryp, integrallary hasaplamaly:

45. $\iiint\limits_Q \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^n dxdydz$, Q oblast $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid bilen çäklenen.

46. $\iiint\limits_Q \dfrac{x^3y^3}{z}dxdydz$, Q oblast $y^2=x$, $y^2=2x$, $x^2=3y$, $x^2=4y$, $y^2=5z$, $y^2=6z$ parabolik silindrler bilen çäklenen.

Jogaplar

1. 9. **2.** 20. **3.** 10. **4.** 9. **5.** 3,5. **6.** 2/3. **7.** 268. **8.** $(\sqrt{2}+5)/12$.
9. $\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}fdy=\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}fdx$. **10.** $\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2}fdy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y^3}}^{\sqrt{y^3}}fdx+$ $-$
$+\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{2-y}fdx$. **11.** $\int_{0}^{3}dx\int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}}fdy$. **12.** $\int_{-1}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}fdy+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}fdy$.
13. $\int_{-2}^{2}dy\int_{\frac{y}{4}-\frac{3}{2}}^{2y+2}fdx$. **14.** $\int_{-2}^{1}dx\int_{x-1}^{x+3}fdy+\int_{1}^{5}dx\int_{x-1}^{4}fdy$. **15.** $\int_{1/2}^{1}dy\int_{1/y}^{2}f(x,y)dx+$ d y (,
$+\int_{1}^{2}dy\int_{y}^{2}f(x,y)dx$. **16.** $\int_{-4}^{-1}dy\int_{-\sqrt{-y}}^{y+2}f(x,y)dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{-y}}f(x,y)dx$. **17.** $20\dfrac{5}{6}$.

18. $7\frac{19}{21}$. **19.** 47/105. **20.** 49. **21.** $2\pi/3$. **22.** $7{,}5\pi$. **23.** 21π. **24.** $a^4/3$. **25.** 26. **26.** 3/160. **27.** $4\pi(64-\sqrt{15^3})$. **28.** 4. **29.** 12ln3. **30.** $32/3+2\pi$. **31.** $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+4\pi)$. **32.** 9,675. **33.** 49. **34.** 496. **35.** $\pi c^4/2$. **36.** $C(10/3,\ 2)$. **37.** $M_x=11{,}7$, $M_y=2{,}25$, $C(1/2,\ \ 3/15)$. **38.** $M_x=32/15$, $M_y=4/3$, $C(4/(3\pi-4),\ \ 32/(15\pi-20))$, $I_x=\pi-32/105$, $I_y=\pi-8/5$. **39.** 18,5. **40.** 0. **41.** $2\pi\left(\frac{ca^6}{6}+\frac{a^4c^2}{4}+\frac{a^2c^3}{6}\right)$. **42.** $\frac{431}{420}\pi$. **43.** $\frac{928}{315}\pi$. **44.** $\frac{\pi R(4-\pi)}{2}$. **45.** $\frac{4\pi abc}{2n+3}$. **46.** $\frac{675}{16}\ln 1{,}2$.

II.9. EGRIÇYZYKLY INTEGRALLAR

§ 9. 1. Egriçyzykly integral düşünjesine getirýän meseleler

1. Çyzygyň dugasynyň massasy hakyndaky mesele. Giňişligiň çyzygynyň AB dugasy boýunça dykyzlygy $\rho=\rho(x,\ y,\ z)$ bolan jisim ýerleşdirilen hasap edeliň. Şol material duganyň massasyny hasaplamak meselesine seredeliň. Onuň üçin AB dugany n sany $A_{k-1}A_k$ ($k=1,\ 2,\ ...,\ n$; $A_o=A$, $A_n=B$) dugalara böleliň we jisimiň her $A_{k-1}A_k$ dugadaky ortaça dykyzlygyny $\rho(x,\ y,\ z)$ funksiýanyň şol duganyň käbir $M_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ nokatdaky $\rho_k=\rho(x_k,\ y_k,\ z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. $A_{k-1}A_k$ duganyň Δl_k uzynlygyny ρ_k köpeldip, şol duganyň massasynyň $m_k=\rho(x_k,\ y_k,\ z_k)\,\Delta l_k$ takmyn bahasyny alarys. Şonuň esasynda

$$\sum_{k=1}^{n} m_k=\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k \tag{1}$$

jem AB duganyň massasynyň takmyn bahasy bolar. Şonuň üçin ol jemde $d=\max\limits_k \Delta l_k\to 0$ bolanda predele geçip, massanyň takyk bahasyny alarys:

$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k. \tag{2}$$

2. Üýtgeýän güýjüň işini hasaplamak meselesi. Eger $\boldsymbol{F}$ güýç (ululygy we ugry boýunça) hemişelik we geçilen $\overline{AB}=s$ ýol gönüçyzykly bolsa, onda $\boldsymbol{F}$ güýjüň şol ýol boýunça işi $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\varphi$ skalýar köpeltmek hasylyna deňdir, bu ýerde φ burç $\boldsymbol{F}$ we $\boldsymbol{s}$ wektorlaryň arasyndaky burçdur.

Goý, üýtgeýän

$$\boldsymbol{F}=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{3}$$

güýç giňişligiň çyzygynyň AB dugasy boýunça hereket edýän bolsun. Şol çyzyk boýunça hereket edip, A nokatdan B nokada geçende $\boldsymbol{F}$ güýjüň eden işini hasaplamaly.

AB dugany n sany $A_{k-1}A_k$ ($k=1, 2, ..., n$; $A_o=A$, $A_n=B$) dugalara böleliň. $A_{k-1}A_k$ dugada $\boldsymbol{F}$ güýç hemişelik we $\boldsymbol{F_k}=\boldsymbol{F}(M_k)$ deň hasap edeliň, bu ýerde $M_k \in A_{k-1}A_k$, $M_k=M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $A_k=A_k(x_k, y_k, z_k)$. Eger $A_{k-1}A_k$ horda hasap etsek, onda

$$\overline{A_{k-1}A_k} = \{\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k\},$$

bolar, bu ýerde

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, \quad \Delta y_k=y_k-y_{k-1}, \quad \Delta z_k=z_k-z_{k-1}.$$

Şonuň üçin hem $A_{k-1}A_k$ bölekde edilen iş

$$(\boldsymbol{F_k}, \overline{A_{k-1}A_k}) = P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k = R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k$$

formula bilen aňladylýar. Şoňa görä-de AB boýunça edilen işiň takmyn bahasy

$$W_n = \sum_{k-1}^{n}(\boldsymbol{F_k}, \overline{A_{k-1}A_k}) = \sum_{k-1}^{n}(P_k\Delta x_k + Q_k\Delta y_k + R_k\Delta z_k) \tag{4}$$

formula boýunça aňladylýar, bu ýerde

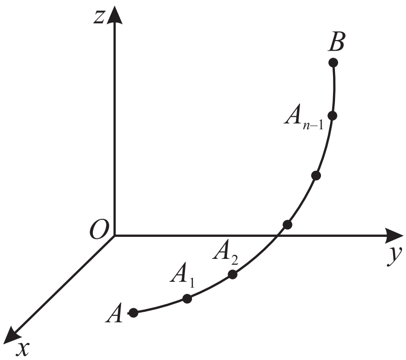
$$P_k=P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \quad Q_k=Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \quad R_k=R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k).$$

Edilen işiň takyk bahasy bolsa (4) jemiň $d\to 0$ bolandaky predeline deňdir, ýagny

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{d\to 0}\sum_{k-1}^{n}(P_k\Delta x_k + Q_k\Delta y_k + R_k\Delta z_k). \tag{5}$$

§ 9. 2. Egriçyzykly integralyň birinji görnüşi

1. Integralyň kesgitlenişi we häsiýetleri. Giňişligiň bölek endigan çyzygynyň AB dugasynda (*11-nji surat*) kesgitlenen $u=f(x, y, z)$ funksiýa seredeliň. AB dugany n sany $A_{k-1}A_k$ ($k=1, 2, ..., n$; $A_o=A$, $A_n=B$) dugalara böleliň we $A_{k-1}A_k$ duganyň uzynlygyny Δl_k bilen belgiläliň. Her bir $A_{k-1}A_k$ dugada erkin $M_k(x_k, y_k, z_k)$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k, z_k)$ bahasyny duganyň Δl_k uzynlygyna köpeldeliň we şeýle köpeltmek hasyllaryndan



11-nji surat

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \qquad (6)$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f(x, y, z)$ funksiýanyň berlen duga boýunça integral jemi diýilýär. Eger bu jemiň $d = \max\limits_k \Delta l_k \to 0$ bolanda predeli bar bolsa, onda şol predele $f(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça egriçyzykly integralynyň birinji görnüşi ýa-da AB duganyň uzynlygy boýunça integraly diýilýär we ol

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$$

görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k. \qquad (7)$$

Subut etmezden üznüksiz $u=f(x, y, z)$ fuksiýa üçin (6) integral jemiň predeliniň bardygyny belläliň.

Bellik. 1-nji meselede alnan (1) jem $\rho(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça integral jemidir we şonuň üçin ol integral jemiň (2) predeli $\rho(x, y, z)$ funksiýanyň AB duga boýunça egriçyzykly integralynyň birinji görnüşidir, ýagny material duganyň massasyny hasaplamak meselesi egriçyzykly integralyň birinji görnüşine getirdi.

Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň kesgitlemesinden onuň aşakdaky ýönekeý häsiýetleri gelip çykýar:

1) Egriçyzykly integralyň birinji görnüşi integrirleme duganyň ugruna bagly däldir, ýagny

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{BA} f(x,y,z)dl.$$

2) Eger $f(x, y, z)$ we $g(x, y, z)$ funksiýalar AB dugada integrirlenýän bolsa, onda olaryň algebraik jemi hem şol dugada integrirlenýändir we

$$\int_{AB}[f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dl = \int_{AB} f(x,y,z)dl \pm \int_{AB} g(x,y,z)dl$$

deňlik dogrudyr.

3) Hemişelik köpeldijini egriçyzykly integral belgisiniň daşyna çykarmak bolar:

$$\int_{AB} kf(x,y,z)dl = k\int_{AB} f(x,y,z)dl.$$

4) Eger AB duga AC we CB dugalardan düzülen bolup, $f(x, y, z)$ funksiýa AB dugada integrirlenýän bolsa, onda ol AC we CB dugalarda hem integrirlenýändir we

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{AC} f(x,y,z)dl + \int_{CB} f(x,y,z)dl$$

deňlik dogrudyr.

2. Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň hasaplanylyşy. Eger çyzyk parametrik görnüşde berlen bolsa:

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{8}$$

$$A=(x, y, z)|_{t=\alpha}, \quad B=(x, y, z)|_{t=\beta}$$

we $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiýalar üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda AB dugada üznüksiz $f(x, y, z)$ funksiýa üçin

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt \tag{9}$$

formulanyň dogrudygyny subut etmek bolar. Hususan-da, eger AB duga tutuşlygyna Oxy tekizlikde ýatýan bolsa ($z=0$), onda (9) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \qquad (10)$$

Eger tekizligiň AB dugasy $y=y(x)$ ($a\le x\le b$) deňleme bilen berlen bolup, $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa bolsa, onda (10) formuladan şeýle formula gelip çykýar:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f[x,y(x)]\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (11)$$

Eger-de tekizligiň AB dugasy polýar koordinatalarynda $\rho=\rho(\varphi)$ ($\alpha\le\varphi\le\beta$) deňleme bilen berlen bolup, $\rho(\varphi)$ funksiýa üznüksiz differensirlenýän bolsa, onda (10) formuladan

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f[\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi]\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi \qquad (12)$$

formula gelip çykýar.

§ 9. 3. Egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi

1. Integralyň kesgitlenişi we häsiýetleri. Giňişligiň çyzygynyň başlangyjy A we ahyry B bolan AB dugasyna seredeliň (*11-nji surat*). Goý, şol dugada üznüksiz

$$\boldsymbol{F}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k} \qquad (13)$$

wektor funksiýa berlen bolsun. AB dugany $A_{k-1}A_k$ ($k=1, 2, ..., n$; $A_0=A$, $A_n=B$) dugalara böleliň we $A_{k-1}A_k$ ($A_k=A_k$ (x_k, y_k, z_k)) dugada erkin $M_k=M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nokady alalyň. Onda $A_{k-1}A_k$ duganyň koordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalary şeýle bolar:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, \quad \Delta y_k=y_k-y_{k-1}, \quad \Delta z_k=z_k-z_{k-1}.$$

$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalaryň $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ nokatdaky bahalaryny degişlilikde Δx_k, Δy_k, Δz_k köpeldip, olary goşalyň:

$$P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k =$$

$$= P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k.$$

Şeýle aňlatmalaryň ählisi boýunça şeýle jemi düzeliň:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k]. \qquad (14)$$

Bu jeme (13) wektor funksiýanyň koordinatalar boýunça integral jemi diýilýär. $A_{k-1}A_k$ dugalaryň uzynlyklarynyň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (14) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele (13) wektor funksiýanyň egriçyzykly integralynyň ikinji görnüşi diýilýär we ol

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ýa-da gysgaça

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, kesgitleme boýunça

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n}[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k]. \qquad (15)$$

Bellik. Ikinji meseledäki (4) jem (13) görnüşdäki wektor funksiýanyň koordinatalar boýunça integral jemidir. Şonuň üçin hem ol integral jemiň (5) predeli şol wektor funksiýanyň egriçyzykly integralynyň ikinji görnüşidir, ýagny üýtgeýän güýjüň işini hasaplamak meselesi egriçyzykly integralyň ikinji görnüşine getirdi.

Kesgitleme boýunça egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi üçin

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz$$

deňlik ýerine ýetýär, ýagny integrirlemäniň ugry üýtgände egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi alamatyny üýtgedýär, çünki bu halda bölek dugalaryň koordinatalar oklaryna bolan proýeksiýalarynyň alamatlary üýtgeýär. Egriçyzykly integralyň birinji görnüşiniň beýleki häsiýetleri egriçyzykly integralyň ikinji görnüşi üçin hem ýerine ýetýär.

2. Egriçyzykly integralyň ikinji görnüşiniň hasaplanylyşy. Eger AB duga (8) parametrik deňlemeler boýunça berlen bolsa, onda

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) +$$

$$+ R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt \qquad (16)$$

formula dogrudyr. Eger AB duga Oxy tekizlikde ýerleşýän bolsa ($z=0$), onda (16) formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

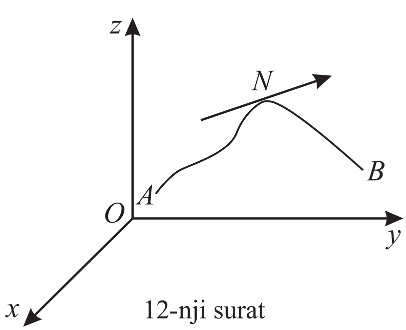
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt. \qquad (17)$$

Eger tekizligiň AB dugasy $y=y(x)$ ($a \le x \le b$) deňleme bilen berlen bolup, $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa bolsa, onda (17) formuladan

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{a}^{b} \{P[x,y(x)] + Q[x,y(x)]y'(x)\}dx \qquad (18)$$

formula gelip çykýar.



12-nji surat

3. Egriçyzykly integrallaryň birinji we ikinji görnüşleriniň arasyndaky baglanyşyk. Giňişlikde başlangyjy A we ahyry B nokatlarda bolan ugrukdyrylan AB duga seredeliň. Ol duganyň erkin N nokadynda geçirilen galtaşýany hem ugrukdyrylan göni çyzyk hasap edeliň (*12-nji surat*). Galtaşýanyň Ox, Oy, Oz koordinatalar oklary bilen emele getirýän burçlaryny degişlilikde α, β, γ bilen belgiläliň. Duganyň uzynlygynyň dl differensialy üçin $\overline{dl}=\{dx, dy, dz\}$ wektor galtaşýan boýunça ugrukdyrylandyr, şonuň üçin hem $dx=\cos\alpha dl$, $dy=\cos\beta dl$, $dz=\cos\gamma dl$. Bu deňlikler esasynda egriçyzykly integralyň ikinji görnüşini şeýle ýazmak bolar:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl.$$

Bu deňlik egriçyzykly integrallaryň birinji we ikinji görnüşlerini baglanyşdyrýan formuladyr. Eger AB duga Oxy tekizlikde ýerleşýän bolsa, onda $z=0$ bolar we bu formula şeýle görnüşi alar:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)dl,$$

çünki bu halda $\cos\beta=\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$.

§ 9. 4. Egriçyzykly integrallaryň ulanylyşy

1. Material duganyň massasy. Eger $\rho=\rho(x, y, z)$ funksiýa AB dugada ýerleşdirilen jisimiň dykyzlygyny aňladýan bolsa, onda (2) we (7) formulalardan ol material duganyň m massasy üçin

$$m = \int_{AB} \rho(x,y,z)dl \tag{19}$$

formula gelip çykýar.

2. Çyzygyň dugasynyň uzynlygy. Eger $\rho(x, y, z)\equiv 1$ bolsa, onda AB duganyň m massasy üçin $m=1\cdot l=l$ bolar. Şonuň üçin hem (19) formuladan AB duganyň l uzynlygyny hasaplamak üçin

$$l = \int_{AB} dl$$

formulany alarys.

3. Material duganyň agyrlyk merkezi. Eger $\rho=\rho(x, y, z)$ funksiýa AB dugada ýerleşdirilen jisimiň dykyzlygyny aňladýan bolsa, onda ol material duganyň agyrlyk $C(x_c, y_c, z_c)$ merkeziniň dekart koordinatalary üçin § 8.4-däki (23) formulalara meňzeşlikde

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\rho(x,y,z)dl, \qquad y_c = \frac{1}{m}\int_{AB} y\rho(x,y,z)dl,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{AB} z\rho(x,y,z)dl$$

formulalary alarys, bu ýerde m berlen AB duganyň massasydyr we ol (19) formula boýunça hasaplanýar.

4. Material duganyň inersiýa momentleri. Eger AB dugada dykyzlygy $\rho=\rho(x, y, z)$ funksiýa bilen aňladylýan jisim ýerleşdirilen bolsa, onda ol material duganyň koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri

$$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl,$$

$$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl,$$

$$I_z = \int_{AB} (y^2 + x^2)\rho(x,y,z)dl,$$

$$I_0 = \int_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dl$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

5. Üýtgeýän güýjüň işi. Eger AB dugada üznüksiz $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar üçin

$$\boldsymbol{F}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

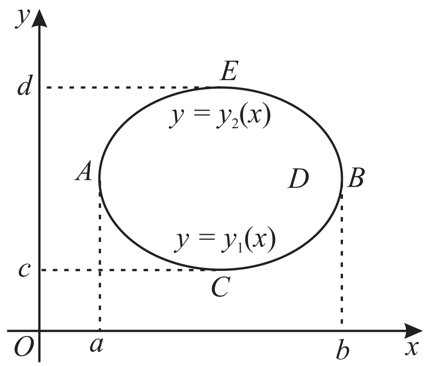
wektor funksiýa AB duga boýunça W işi edýän üýtgeýän güýji aňladýan bolsa, onda (5) we (15) formulalaryň esasynda

$$W = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

formulany alarys.

§ 9. 5. Griniň formulasy we onuň ulanylyşy

1. Griniň formulasy. Bu formula käbir D oblast boýunça ikigat integraly şol oblasty çäklendirýän ýapyk L çyzyk boýunça egriçyzykly integral bilen baglanyşdyrýan formuladyr. Bu formulany koordinatalar oklarynyň ikisine görä hem ýönekeý bolan D oblast üçin subut ederis. Goý, ol oblast aşagyndan $y=y_1(x)$ funksiýanyň grafigi (ACB duga), ýokarsyndan $y=y_2(x)$ funksiýanyň grafigi (AEB duga) bilen çäklenen bolup, olar bilelikde ýapyk L çyzygy emele getirýän bolsun (*13-nji surat*).



13-nji surat

Goý, D oblastda we onuň L araçäginde üznüksiz $P(x, y)$, $Q(x, y)$ funksiýalar berlen bolup, olaryň üznüksiz $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ önümleri bar bolsun, onda

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Bigg|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx = \int_{AEB} P(x,y)dx - \int_{ACB} P(x,y)dx =$$

$$= -\int_{BEA} P(x,y)dx - \int_{ACB} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx,$$

bu ýerde L ýapyk çyzyk boýunça hereket sagat diliniň aýlawynyň tersinedir. Şeýlelikde,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx \tag{20}$$

formulany subut etdik. Edil şonuň ýaly,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy \tag{21}$$

formulany görkezmek bolar, bu ýerde hem L ýapyk çyzyk boýunça hereket sagat diliniň aýlawynyň tersinedir. (21) deňlikden (20) deňligi aýryp, Griniň formulasy atlandyrylýan

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy \tag{22}$$

formulany alarys.

2. Griniň formulasynyň ulanylyşy. Eger (20), (21) we (22) formulalarda $P(x, y)=-y$, $Q(x, y)=x$ alsak, onda olar degişlilikde

$$\iint_D dxdy = \oint_L ydx, \quad \iint_D dxdy = \oint_L xdy, \quad 2\iint_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$$

görnüşleri alar.Bu formulalaryň üçüsiniň hem çep bölegindäki ikigat integral ýapyk D oblastyň meýdanyna deňdir. Şonuň üçin hem egriçyzykly integralyň kömegi bilen D oblastyň S meýdanyny tapmak üçin

$$S = \oint_L ydx, \quad S = \oint_L xdy, \quad S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$$

formulalary alarys.

II.10. ÜST INTEGRALLARY

§ 10. 1. Üst integrallary düşünjesine getirýän meseleler

1. Material üstüň massasy hakyndaky mesele. Kabir T üste seredeliň. Goý,ol üstde dykyzlygy $\rho=\rho(x, y, z)$ bolan massa ýerleşen bolsun. Şol material üstüň massasyny tapmak üçin T üsti dugalaryň tory arkaly T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k $(k=1, 2, ..., n)$ bilen belgiläliň. Her bir bölekde dykyzlyk hemişelik we erkin $M_k(x_k, y_k, z_k) \in T_k$ nokatdaky $\rho_k=\rho(x_k, y_k, z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. Onda $\rho_k\Delta S_k$ köpeltmek hasyly T_k bölegiň massasynyň takmyn bahasyny, şeýle köpeltmek hasyllaryndan düzülen

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} p(M_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k \tag{1}$$

jem bolsa T material üstüň massasynyň takmyn bahasyny aňladýar. Şoňa görä T_k bölekleriň diametrleriniň iň ulusy bolan d üçin

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k \tag{2}$$

predel ol massanyň takyk bahasyny aňladýar.

2. Üst arkaly geçýän suwuklyk akymy hakyndaky mesele. Goý,

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

tizlik bilen akýan suwuklyk bilen doldurylan käbir giňişlik oblasty berlen bolsun. Berlen T üst boýunça wagt birliginde akyp geçýän suwuklygyň Π mukdaryny tapmak meselesine seredeliň. Onuň üçin T üsti T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k ($k = 1, 2, ..., n$) bilen belgiläliň. Her bir bölekde tizlik hemişelik we şol bölegiň erkin $M_k(x_k, y_k, z_k)$ nokadyndaky $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}(x_k, y_k, z_k)$ bahasyna deň hasap edeliň. Şunlukda, birlik wagt aralygynda T_k bölek boýunça akyp geçýän suwuklygyň mukdary takmyn $v_{n_k} \Delta S_k$ köpeltmek hasylyna deň bolar, bu ýerde v_{n_k} ululyk $\boldsymbol{v}_k$ tizlik wektorynyň üstüň M_k nokadynda üste geçirilen $\boldsymbol{n}_k$ normalyň birlik wektory bilen kesgitlenýän oka bolan proýeksiýasy. Şonuň esasynda, eger α_k, β_k, γ_k burçlar $\boldsymbol{n}_k$ normalyň koordinatalar oklary bilen emele getirýän burçlary bolsa, onda

$$v_{n_k} = (\boldsymbol{v_k}, \boldsymbol{n_k}) = [P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k]$$

formulanyň esasynda

$$v_{n_k} \Delta S_k = [P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k$$

deňligi alarys. Şoňa görä-de ähli berlen üst boýunça wagt birliginde akyp geçýän suwuklygyň mukdary takmyn

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k \tag{3}$$

jeme deň bolar. Onuň $d \to 0$ bolandaky

$$\Pi = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k \tag{4}$$

predeli bolsa suwuklygyň takyk mukdaryna deň bolar. (3) we (4) deňliklerdäki $\cos\alpha_k \Delta S_k$, $\cos\beta_k \Delta S_k$, $\cos\gamma_k \Delta S_k$ köpeltmek hasyllary T_k üstüň degişlilikde Oyz, Oxz, Oxy tekizliklere proýeksiýalarydyr. Olary

$$(\Delta S_{yz})_k = \cos\alpha_k \Delta S_k, \quad (\Delta S_{xz})_k = \cos\beta_k \Delta S_k, \quad (\Delta S_{xy})_k = \cos\gamma_k \Delta S_k \qquad (5)$$

bilen belgiläp, (3) we (4) formulalary

$$\Pi_n = \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)(\Delta S_{zy})_k + Q(M_k)(\Delta S_{xz})_k + R(M_k)(\Delta S_{xy})_k], \qquad (6)$$

$$\Pi = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)(\Delta S_{zy})_k + Q(M_k)(\Delta S_{xz})_k + R(M_k)(\Delta S_{xy})_k] \qquad (7)$$

görnüşlerde ýazmak bolar.

§ 10. 2. Üst integrallarynyň birinji görnüşi

1. Integralyň kesgitlenişi. Goý, T üstde $u = f(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. T üsti dugalaryň tory arkaly T_k böleklere böleliň we ol bölekleriň meýdanlaryny ΔS_k ($k = 1, 2, ..., n$) bilen belgiläliň. Her bir bölekde erkin $M_k(x_k, y_k, z_k) \in T_k$ nokady alyp, funksiýanyň şol nokatdaky $f(x_k, y_k, z_k)$ bahasyny ΔS_k meýdana köpeldeliň we şeýle köpeltmek hasyllaryndan

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k \qquad (8)$$

jemi düzeliň. Bu jeme $f(x, y, z)$ funksiýanyň T üst boýunça integral jemi diýilýär. T_k bölekleriň diametrleriniň iň ulusyny d bilen belgiläliň. Eger $d \to 0$ bolanda (8) integral jemiň predeli bar bolsa, onda şol predele T üst boýunça üst integraly ýa-da üst integralyň birinji görnüşi diýilýär we ol $\iint\limits_T f(x, y, z)\,ds$ bilen belgilenýär, ýagny

$$\iint\limits_T f(x, y, z)\,ds = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k. \qquad (9)$$

Eger $f(x, y, z)$ funksiýa endigan T üstde üznüksiz bolsa, onda (8) integral jemiň predeli bardyr (ony subutsyz ulanarys).

1-nji bellik. 1-nji meseledäki (1) jem (8) görnüşdäki integral jemdir. Şonuň üçin (2) we (9) esasynda material üstüň massasyny tapmak meselesi üst integralynyň birinji görnüşine getirýär.

2. Integralyň hasaplanylyşy. T üstüň käbir görnüşleri üçin üst integralynyň birinji görnüşiniň hasaplanyşyny görkezeliň. Goý, endigan T üst $z=g(x, y)$ deňleme bilen berlen bolsun, bu ýerde $g(x, y)$ differensirlenýän funksiýadyr. Goý, T üst Oxy tekizlige birbahaly proýektirlenýän bolup, D oblast şol proýeksiýa bolsun.

Kesgitleme boýunça (9) deňlik ýerine ýetýär. Ol deňlikdäki integral jemi özgertmek maksady bilen üstüň deňlemesini $F(x, y, z)=0$ görnüşde ýazalyň, bu ýerde $F(x, y, z)=z-g(x, y)$. Bu üste geçirilen $\boldsymbol{n}$ normal wektoryň koordinatalary (§ 7.6 seret)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

bolar.

$$p = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad p_k = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{M_k}, \quad q_k = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{M_k} \tag{10}$$

belgileme esasynda $z-g(x, y)=0$ üste geçirilen $\boldsymbol{n}$ normalyň ugrukdyryjy kosinuslary şeýle formula boýunça aňladylar:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{11}$$

(5) formulanyň esasynda bolsa

$$\Delta S_k = \frac{(\Delta S_{xy})_k}{\cos\gamma_k} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,(\Delta S_{xy})_k$$

deňligi ýazyp bileris. Şonuň üçin hem integral jem

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f[x_k, y_k, g(x_k, y_k)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,(\Delta S_{xy})_k$$

görnüşi alar. Bu deňlikde $d\to 0$ bolanda predele geçip,

$$\iint_T f(x,y,z)ds = \iint_D f[x,y,g(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy \tag{12}$$

formulany alarys, bu ýerde p we q (10) deňlikden kesgitlenýär.

Şeýlelikde, T üst boýunça üst integralynyň birinji görnüşini hasaplamaklyk ol üstüň Oxy tekizlige proýeksiýasy bolan D oblast boýunça ikigat integraly hasaplamaklyga getirildi.

2-nji bellik. Eger endigan T üst $y=g(x, z)$ deňleme bilen berlen bolup, D_1 oblast ol üstüň Oxz tekizlige bolan proýeksiýasy bolsa, onda integraly hasaplamak üçin

$$\iint_T f(x,y,z)ds = \iint_{D_1} f[x,g(x,z),z]\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz$$

formula alynýar. Edil şonuň ýaly, eger T üst $x=g(y, z)$ deňleme bilen berlen bolup, D_2 oblast ol üstüň Oyz tekizlige bolan proýeksiýasy bolsa, onda üst integraly

$$\iint_T f(x,y,z)ds = \iint_{D_2} f[g(y,z),y,z]\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}\,dydz$$

formula boýunça hasaplanylýar.

§ 10. 3. Üst integrallarynyň ikinji görnüşi

1. Ikitaraplaýyn üst. Berlen T üstde käbir M nokady belläp, şol nokatda üste geçirilen birlik $\boldsymbol{n}$ normal wektoryň bir ugruny görkezeliň. Indi nokat arkaly üstde ýerleşýän we şol üstüň araçägi bilen umumy nokady bolmadyk ýapyk L çyzyk geçireliň. M nokady şol nokatda üste geçirilen birlik $\boldsymbol{n}$ wektor bilen bilelikde L çyzyk boýunça hereket etdireliň. Şunlukda, her bir täze nokatda $\boldsymbol{n}$ wektor üste normal bolmagynda galmalydyr we ol üznüksiz üýtgemelidir. Şeýle hereket edip, M nokat başdaky ýerine gelende birlik $\boldsymbol{n}$ wektoryň ugry öňküligine galar ýa-da onuň ugry garşylykly bolar.

Eger endigan üstde ýerleşýän we onuň araçägi bilen umumy nokatlary bolmadyk islendik ýapyk çyzyk boýunça şol üstüň normaly hereket edip, başdaky ýerine gelende ugruny üýtgetmeýän bolsa, onda ol üste ikitaraplaýyn üst diýilýär.

Eger-de üstde käbir ýapyk çyzyk bar bolup, şol çyzyk boýunça hereket edip normal başdaky ýerine gelende ugruny garşylykly tarapa üýtgedýän bolsa, onda ol üste birtaraplaýyn üst diýilýär.

Ikitaraplaýyn üste mysallar: 1) tekizlik, tekizligiň islendik bölegi, tegelek; 2) $z=z(x, y)$ deňleme arkaly kesgitlenen islendik endigan üst. Hakykatdan-da, üstüň her bir nokadynda normal geçirlende Oz okuň položitel ugry bilen ýiti burç emele getirýän tarapy onuň bir (ýokarky) tarapyny, kütek burç emele getirýän tarapy onuň beýleki (aşaky) tarapyny kesgitleýär; 3) Öz-özüni kesmeýän islendik ýapyk üst, mysal üçin, sfera, ellipsoid we ş.m. Göwrümi çäklendirýän üstüň her bir nokadynda normaly içine ugrukdyryp ol üstüň içki tarapyny, normaly daşyna ugrukdyryp, üstüň daşky tarapyny alarys.

Birtaraplaýyn üste ýönekeý mysal bolup Mýobiusyň listi atlandyrylýan üst hyzmat edýär.

2. Integralyň kesgitlenişi. Käbir endigan ikitaraplaýyn üstde kesgitlenen we üznüksiz $R=R(x, y, z)$ funksiýa seredeliň. Berlen T üsti T_1, ..., T_n böleklere böleliň. T üstüň we onuň bölekleriniň Oxy tekizlige proýeksiýalaryny D we D_1, ..., D_n bilen belgiläliň. D_k bölekleriň meýdanlaryny $(\Delta S_{xy})_k$ bilen belgiläliň. Her T_k bölekde erkin $M_k(x_k, y_k, z_{ki})$ nokady alyp,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k \tag{13}$$

jemi düzeliň, bu ýerde $(\Delta S_{xy})_k$ üstüň T_k böleginiň Oxy tekizlige proýeksiýasynyň ululygydyr we ol M_k nokatda üste geçirilen normal Oz oky bilen ýiti burç emele getirýän halynda D_k bölegiň položitel alamaty bilen alnan meýdanyna, kütek burç emele getirýän halynda bolsa otrisatel alamaty bilen alynýan meýdanyna deňdir. (13) jeme $R(x, y, z)$ funksiýanyň x we y koordinatalara görä T üst boýunça integral jemi diýilýär.

Eger $d\to 0$ bolanda (13) integral jemiň üstüň böleklere bölünmegine we şol böleklerde M_k nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli predeli bar bolsa, onda şol predele $R(x, y, z)$ funksiýanyň x we y koordinatalar boýunça üst integraly ýa-da üst integralynyň ikinji görnüşi diýilýär we ol

$$\iint_T R(x, y, z)\,dxdy$$

ýazgyda belgilenýär.

Diýmek, kesgitlemä görä

$$\iint_T R(x,y,z)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(x_k,y_k,z_k)(\Delta S_{xy})_k. \qquad (14)$$

Eger ikitaraplaýyn T üst endigan we şol üstde $R(x, y, z)$ funksiýa üznüksiz bolsa, onda $d \to 0$ bolanda (13) jemiň T üstüň böleklere bölünmegine we böleklerde alynýan M_k nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli predeliniň bardygyny subutsyz kabul edeliň.

Edil şuňa meňzeşlikde

$$\iint_T P(x,y,z)dydz = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(x_k,y_k,z_k)(\Delta S_{yz})_k, \qquad (15)$$

$$\iint_T Q(x,y,z)dxdz = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(x_k,y_k,z_k)(\Delta S_{xz})_k \qquad (16)$$

üst integrallaryň ikinji görnüşleri kesgitlenýär, bu ýerde $(\Delta S_{yz})_k$ we $(\Delta S_{xz})_k$ degişlilikde T_k bölegiň Oyz we Oxz tekizliklere bolan proýeksiýasynyň ululygydyr. (14), (15) we (16) esasynda umumy görnüşdäki

$$\iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_T P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \qquad (17)$$

üst integraly kesgitlenýär.

1-nji bellik. 2-nji meseledäki (6) jem $R(x, y, z)$ funksiýanyň T üst boýunça x we y koordinatalara görä, $Q(x, y, z)$ funksiýanyň x we z koordinatalara görä, $P(x, y, z)$ funksiýanyň z we y koordinatalara görä, integral jemleriniň jemidir. Şonuň üçin hem (7), (14), (15), (16) we (17) deňlikler esasynda üst arkaly geçýän suwuklyk akymy hakyndaky mesele üst integralynyň ikinji görnüşine getirýär, ýagny

$$\Pi = \iint_T P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

2-nji bellik. 2-nji meseledäki (4) predele hem (2) predel ýaly üst inegralyň birinji görnüşi diýilýär we ol

$$\iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS =$$

$$= \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(M_k)\cos\alpha_k + Q(M_k)\cos\beta_k + R(M_k)\cos\gamma_k]\Delta S_k$$

görnüşde belgilenýär.

(3) we (6) formulalaryň şol bir k boýunça (ýöne dürli görnüşdäki) jemleri aňladýandygy sebäpli, olaryň predelleri hem deňdir (ol predeller bar halynda), şonuň üçin hem

$$\iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \qquad (18)$$

deňlik dogrudyr we ol üst integrallarynyň birinji we ikinji görnüşleriniň baglanyşygyny görkezýär.

3. Integralyň hasaplanylyşy. Üst integralynyň ikinji görnüşi bolan (14) integraly hasaplamak üçin endigan T üst $z = g(x, y)$ deňleme bilen berlen hasap edeliň. Goý, ol üst Oxy tekizligiň D oblastyna özara-birbahaly proýektirlenýän bolsun. Bu halda (14) deňlikdäki integral jemi

$$\sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z_k)(\Delta S_{xy})_k = \sum_{k=1}^{n} R[x_k, y_k, g(x_k, y_k)](\Delta S_{xy})_k$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňlikde $d \to 0$ bolanda predele geçip, üstüň ýokarky tarapy üçin ($\cos\gamma > 0$ hal üçin)

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy = \iint_D R[x, y, g(x, y)]dxdy$$

formulany, aşaky tarapy üçin ($\cos\gamma < 0$ hal üçin) bolsa

$$\iint_T R(x, y, z)dxdy = -\iint_D R[x, y, g(x, y)]dxdy$$

formulany alarys. Şular ýaly formulalary (15), (16) we (17) integrallar üçin hem görkezmek bolar.

§10. 4. Üst integrallarynyň ulanylyşy

1. Material üstüň massasy. Eger T üstde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan jisim ýerleşdirilen bolsa, onda (2) we (9) formulalaryň esasynda ol material üstüň massasy

$$m = \iint_T \rho(x, y, z)dS \tag{19}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

2. Üstüň meýdany. Eger $\rho(x, y, z) = 1$ bolsa, onda $m = 1 \cdot S = S$ bolar we şonuň üçin (19) formuladan T üstüň S meýdanyny hasaplamak üçin

$$S = \iint_T dS \tag{20}$$

formula alynýar.

3. Material üstüň agyrlyk merkezi. Ikigat integral üçin degişli formulalaryň getirilip çykarylyşyna meňzeşlikde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan T material üstüň $C(x_c, y_c, z_c)$ agyrlyk merkeziniň koordinatalary

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_T x\rho(x, y, z)dS,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_T y\rho(x, y, z)dS,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iint_T z\rho(x, y, z)dS$$

formulalar boýunça kesgitlenýär, bu ýerde m material üstüň massasydyr we ol (19) formula boýunça tapylýar. Birjynsly üst üçin ($\rho(x, y, z)$ = hemişelik) bu formulalar ýönekeý görnüşi alar:

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_T xdS, \quad y_c = \frac{1}{S}\iint_T ydS, \quad z_c = \frac{1}{S}\iint_T zdS,$$

bu ýerde S üstüň meýdanydyr we ol (20) formula boýunça tapylýar.

4. Material üstüň inersiýa momentleri. Ikigat integral üçin degişli formulalaryň getirilip çykarylyşyna meňzeşlikde üst dykyzlygy $\rho = \rho(x, y, z)$ bolan T material üstüň koordinatalar oklaryna we koordinatalar başlangyjyna görä inersiýa momentleri

$$I_x = \iint_T (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_y = \iint_T (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_z = \iint_T (y^2 + x^2)\rho(x, y, z)dS,$$

$$I_0 = \iint_T (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS$$

formulalar boýunça kesgitlenýär.

§ 10. 5. Stoksuň formulasy

Stoksuň formulasy berlen üst boýunça integraly şol üsti çäklendirýän ýapyk çyzyk boýunça egriçyzykly integral bilen baglanyşdyrýan formuladyr.

Goý, ýapyk L çyzyk bilen çäklenen T üst $z = g(x, y)$ deňleme bilen berlen bolup, ol L çyzygyň Oxy tekizlikdäki proýeksiýasy bolan Γ çyzyk bilen çäklenen S oblasta özara-birbahaly proýektirlenýän bolsun (*14-nji surat*). Stoksuň formulasyny görkezmek üçin L çyzyk boýunça egriçyzykly integraly Γ çyzyk boýunça egriçyzykly integrala, ony bolsa S oblast boýunça ikigat integrala we iň soňunda ikigat integraly T üst boýunça üst integralyna özgerdeliň. Ýapyk L çyzygyň $z = g(x, y)$ deňleme bilen berlen T üstde ýatýandygy sebäpli

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \oint_\Gamma P[x, y, g(x, y)]dx \tag{21}$$

deňlik ýerine ýetýär. § 9.5-däki (20) formulanyň esasynda

$$\oint_\Gamma P[x, y, g(x, y)]dx = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy \tag{22}$$

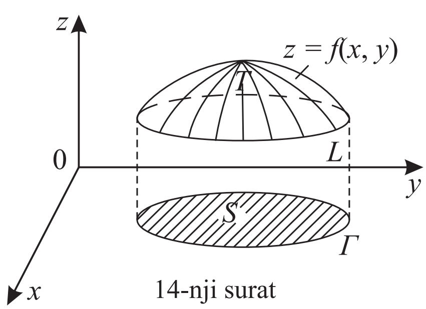
deňligi alarys.

Eger α, β, γ burçlar

$$z - g(x, y) = 0$$

üste geçirilen $\boldsymbol{n}$ normalyň koordinatalar oklary bilen emele getirýän burçlary bolsa, onda (10) we (11) formulalaryň esasynda

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$



14-nji surat

ýa-da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Bu deňligi ulanyp, (22) formulany şeýle ýazmak bolar:

$$\oint_K P[x,y,g(x,y)]dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy.$$

(18) formulanyň esasynda

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy =$$

$$= -\iint_T \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma dS = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS.$$

Şeýlelikde,

$$\oint_K P[x,y,g(x,y)]dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS.$$

Bu formulanyň esasynda (21) formuladan alarys:

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS.$$

Edil şonuň ýaly, degişli şertler ýerine ýetende

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS,$$

$$\oint_L R(x,y,z)dx = \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS$$

formulalary alarys. Bu alnan üç deňligi agzalaýyn goşup, Stoksuň formulasyny alarys:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_T \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]dS. \tag{23}$$

Bu formulany şeýle hem ýazmak bolar:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy +$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx. \qquad (24)$$

Bellik. Eger T üst Oxy tekizliginde ýatýan tekiz oblast bolsa, onda Stoksuň formulasyndan Griniň formulasy gelip çykýar, çünki bu halda deňligiň çep bölegindäki dz boýunça integral we sag bölegindäiki $dydz$, $dzdx$ boýunça integrallar nola deň bolar.

§ 10. 6. Ostrogradskiniň formulasy we onuň ulanylyşy

1. Ostrogradskiniň formulasy. Bu formula giňişligiň oblasty boýunça üçgat inegraly şol oblasty çäklendirýän üst boýunça üst integraly bilen baglanyşdyrýan formuladyr. Giňişligiň Oz okuna görä ýönekeý bolan (§8.5 seret) aşagyndan $z=z_1(x, y)$ üst, ýokarsyndan $z=z_2(x, y)$ üst we gapdallaryndan emele getirijisi Oz okuna parallel bolan silindrik üst bilen çäklenen G oblastyna garalyň. Onuň Oxy tekizlige proýeksiýasyny D bilen belgiläliň. Goý, $R(x, y, z)$ we onuň $R'_z(x, y, z)$ önümi G oblastda we onuň araçäginde üznüksiz funksiýalar bolsun. Belli bolşy ýaly, bu halda (§ 8.5, (28) seret)

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right]dxdy$$

deňlik ýerine ýetýär. Şunlukda,

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz = R(x,y,z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} = R[x,y,z_2(x,y)] - R[x,y,z_1(x,y)].$$

Şonuň üçin hem ahyrky iki deňlikden

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D R[x,y,z_2(x,y)]dxdy - \iint\limits_D R[x,y,z_1(x,y)]dxdy$$

deňlik gelip çykýär. Bu deňligiň sag bölegindäki ikigat integrallary üst integrallary bilen çalşyrmak bolar: birinjisini $z=z_2(x, y)$ deňleme bilen berlen T_2 üstüň ýokarky tarapy boýunça alnan üst integraly bilen, ikinjisini $z=z_1(x, y)$ deňleme bilen berlen T_1 üstüň ýokarky tarapy ýa-da minus alamaty bilen alnan T_1 üstüň aşaky tarapy boýunça üst integraly bilen çalşyrmak bolar. Şeýlelikde,

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{T_2} R[x,y,z]dxdy + \iint_{T_1} R[x,y,z]dxdy,$$

bu ýerde birinji integral T_2 üstüň ýokarky tarapy boýunça, ikinjisi T_1 üstüň aşaky tarapy boýunça alnan üst integralydyr. Bu integrallara T_3 silindrik üst boýunça alnan we nola deň bolan

$$\iint_{T_3} R[x,y,z]dxdy = \iint_{T_3} R[x,y,z]\cos\gamma dS$$

(T_3 üstde $\boldsymbol{n}$ wektoryň Oz okuna perpendikulýar bolany sebäpli $\cos\gamma=0$ bolýany üçin) integraly goşup,

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{T_2} R[x,y,z]dxdy +$$

$$+\iint_{T_1} R[x,y,z]dxdy + \iint_{T_3} R[x,y,z]dxdy$$

ýa-da

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_T R[x,y,z]dxdy = \iint_T R[x,y,z]\cos\gamma dS$$

deňligi alarys, bu ýerde $T=T_1+T_2+T_3$ berlen G oblasty çäklendirýän üstdir we integral ol üstüň daşky tarapy boýunça alynýandyr. Giňişligiň G oblasty we $Q(x, y, z)$, $Q'_y(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $P'_x(x, y, z)$ funksiýalar degişli şertleri kanagatlandyranda

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_T Q[x,y,z]dxdz = \iint_T Q[x,y,z]\cos\beta dS,$$

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_T P[x,y,z]dzdy = \iint_T P[x,y,z]\cos\alpha dS$$

deňlikleri görkezmek bolar. Ahyrky üç deňligi agzalaýyn goşup, Ostrogradskiniň formulasy atlandyrylýan

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \qquad (25)$$

ýa-da

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \qquad (26)$$

formulany alarys.

2. Ostrogradskiniň formulasynyň ulanylyşy. Bu formulanyň kömegi bilen giňişligiň käbir G oblastyny çäklendirýän T üst boýunça üst integralyny ulanyp, G oblastyň göwrümini tapmak bolar. Hakykatdan-da, P, Q, R funksiýalary $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$ deňlik ýerine ýeter ýaly saýlap,

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_G dxdydz = V \qquad (27)$$

deňligi alarys. Şonuň üçin hem bu halda Ostrogradskiniň (25) formulasyny ulanyp, Q oblastyň göwrümini tapmak üçin

$$V = \iint_T Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

formulany alarys.

Eger $P = \frac{1}{3}x,\ Q = \frac{1}{3}y,\ R = \frac{1}{3}z$ alsak, onda $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$ bolar we şonuň üçin (27) deňlik ýerine ýeter. Şoňa görä-de göwrüm tapylýan formula bu halda şeýle görnüşi alar:

$$V = \frac{1}{3}\iint_T xdydz + ydxdz + zdxdy. \qquad (28)$$

§ 10. 7. Wektor meýdanynyň akymy, diwergensiýasy, sirkulýasiýasy, rotory. Ostrogradskiniň we Stoksuň formulalarynyň wektor görnüşleri

1. Wektor meýdanynyň akymy. Belli bolşy ýaly, (§ 10.3-däki 1-nji we 2-nji bellikler esasynda) wagt birliginde T üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň Π mukdary

$$\Pi = \iint_T (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS \tag{29}$$

formula bilen aňladylýar. Şunlukda, Π ululyga suwuklygyň T üst arkaly akymy diýilýär. P, Q, R funksiýalaryň $\boldsymbol{F}=\{P, Q, R\}$ tizlik wektorynyň koordinatalary, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ululyklaryň üste geçirilen biplik $\boldsymbol{n}$ wektoryň koordinatalary bolýandygy sebäpli,

$$P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma=(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})$$

deňligiň esasynda (29) formulany

$$\Pi = \iint_T (\boldsymbol{F},\boldsymbol{n})dS \quad \text{ýa-da} \quad \Pi = \iint_T F_n dS \tag{30}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde F_n tizlik $\boldsymbol{F}$ wektorynyň T üstüň birlik $\boldsymbol{n}$ normalyna bolan proýeksiýasydyr:

$$F_n=(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{n}|\cos\varphi=|\boldsymbol{F}|\cos\varphi$$

(φ burç $\boldsymbol{F}$ we $\boldsymbol{n}$ wektorlaryň arasyndaky burçdur).

$\boldsymbol{F}$ wektor meýdany üçin $\iint_T F_n dS$ üst integralyna şol wektor meýdanynyň T üst arkaly akymy diýilýär.

Eger $\boldsymbol{F}$ wektor suwuklygyň hereketiniň tizligini aňladýan bolsa, onda $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň käbir üst arkaly akymy wagt birliginde şol üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň mukdaryna deňdir.

Başga görnüşdäki wektor meýdanlary üçin akymyň başgaça fiziki manysy bolar.

2. Wektor meýdanynyň diwergensiýasy. $\boldsymbol{F}=\{P, Q, R\}$ wektor meýdany üçin $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ jeme deň bolan we $div\boldsymbol{F}$ bilen belgilenýän skalýar funksiýa $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy (dargamasy) diýilýär. Şeýlelikde,

$$div\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{31}$$

Eger $\boldsymbol{F} = \{P, Q, R\}$ wektor G oblast arkaly akyp geçýän suwuklygyň tizlik wektory bolsa, onda belli bolşy ýaly, (26) formulanyň sag bölegindäki integral T üst arkaly G oblastdan wagt birliginde çykýan suwuklygyň mukdaryny aňladýar. Ol formulanyň çep böleginden we (31) formuladan görnüşi ýaly, suwuklygyň şol mukdary $\boldsymbol{F}$ wektoryň diwergensiýasynyň G oblast boýunça üçgat integralyna deňdir. Şonuň üçin hem $div\boldsymbol{F}=0$ bolanda T üst boýunça degişli integral hem nola deň bolar, ýagny ýapyk T üst arkaly akyp geçýän suwuklygyň mukdary nola deňdir.

Wektor meýdanynyň akymy we diwergensiýasy düşünjelerinden peýdalanyp, Ostrogradskiniň (26) formulasyny wektor görnüşinde ýazmak bolar:

$$\iiint_G div\boldsymbol{F}dV = \iint_T (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})dS. \tag{32}$$

Bu deňlik wektor meýdanynyň diwergensiýasynyň käbir G oblast boýunça üçgat integralynyň şol oblasty çäklendirýän T üst arkaly wektor meýdanynyň akymyna deňdigini görkezýär.

3. Wektor meýdanynyň sirkulýasiýasy. Goý, wektor meýdany

$$\boldsymbol{F} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{33}$$

wektor funksiýasy arkaly berlen bolsun, bu ýerde $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar endigan ýa-da bölek-endigan L çyzykda üznüksiz funksiýalar. Onda L çyzyk boýunça

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

egriçyzykly integrala $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň L çyzyk boýunça sirkulýasiýasy diýilýär. Eger L çyzyga geçirilen birlik galtaşýan wektor koordinatalar oklary bilen α, β, γ burçlaryny emele getirýän bolsa, onda $F_\tau = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ deňlik esasynda

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L F_\tau dl \tag{34}$$

deňligi ýazmak bolar. Eger $\boldsymbol{F}=\{P,\ Q,\ R\}$ güýç meýdany bolsa, onda onuň L çyzyk boýunça sirkulýasiýasy güýç meýdanynyň L boýunça edilen işini aňladýar. Başga görnüşdäki wektor meýdanlary üçin sirkulýasiýanyň başga fiziki manysy bardyr.

4. Wektor meýdanynyň rotory. (33) wektoryň koordinatalaryndan düzülen

$$\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}$$

wektora (33) wektor meýdanynyň rotory diýilýär we $rot\boldsymbol{F}$ bilen belgilenýär, ýagny

$$rot\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \qquad (35)$$

Ýatda saklamak üçin bu formulany

$$rot\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

görnüşde hem ýazmak bolar (bu ýerde $\frac{\partial}{\partial y}P$ görnüşdäki köpeltmek hasylyna $\frac{\partial P}{\partial y}$ hususy önüm diýip düşünmeli).

Indi (34) deňlikden we wektor meýdanynyň sirkulýasiýasy we rotory düşünjelerinden peýdalanyp, ozal subut edilen egriçyzykly we üst integrallaryny baglanyşdyrýan

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_T\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds$$

Stoksuň formulasyny wektor görnüşinde ýazalyň:

$$\oint_L F_\tau dl=\iint_T(rot\boldsymbol{F}(M),\boldsymbol{n})ds=\iint_T(rot\boldsymbol{F}(M))_n ds. \qquad (36)$$

Bu formula $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanynyň ýapyk L çyzyk boýunça sirkulýasiýasynyň L çyzyk bilen çäklendirilen T üst arkaly geçýän şol wektor meýdanynyň rotorynyň akymyna deňdigini görkezýär.

§ 10. 8. Gamilton operatory we onuň ulanylyşy. Potensial we solenoidal meýdany

1. Gamilton operatory. § 7.7-de girizilen skalýar funksiýanyň gradiýenti düşünjesinden görnüşi ýaly, $u=u(x, y, z)$ skalýar meýdanyndan *gradu* wektor meýdanyna geçmeklige käbir amal (operasiýa) hökmünde garamak bolar. Şunlukda, ol köp häsiýetleri boýunça differensirleme amalyna meňzeşdir, ýöne bir tapawudy bu halda skalýar funksiýa wektor funksiýasy (differensirleme amalynda bolsa skalýar funksiýa skalýar funksiýasy) degişli bolýar.

Skalýar u funksiýadan *gradu* wektora geçmeklik ∇ belgi bilen belgilenýär we oňa Gamilton (nabla) operatory diýilýär. Şeýlelikde,

$$\nabla u = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{37}$$

Köp halatlarda ∇ operatora koordinatalary $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ bolan simwoliki wektor hökmünde seretmek amatly bolýar:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{38}$$

Şunlukda, ol operasiýany skalýar u funksiýa ulanmaklyk (37) deňligi aňladýar.

2. Gamilton operatorynyň ulanylyşy. Bu operatoryň kömegi bilen käbir aňlatmalaryň ýönekeý görnüşlerde ýazylyşyny görkezeliň. Onuň üçin differensirlenýän

$$\boldsymbol{F} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{39}$$

wektor funksiýa seredeliň. Diwergensiýanyň kesgitlemesi we (38) deňlik esasynda

$$div\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R\right) = (\nabla, \boldsymbol{F}),$$

$$div\boldsymbol{F} = (\nabla, \boldsymbol{F}), \tag{40}$$

ýagny $\boldsymbol{F}$ wektoryň diwergensiýasy simwoliki ∇ wektor bilen $\boldsymbol{F}$ wektoryň skalýar köpeltmek hasylyna deňdir. (35) formula boýunça aňladylan $\boldsymbol{F}$ wektoryň rotory

$$rot\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = [\nabla, \boldsymbol{F}],$$

$$rot\boldsymbol{F} = [\nabla, \boldsymbol{F}], \tag{41}$$

ýagny $\boldsymbol{F}$ wektoryň rotory simwoliki ∇ wektor bilen $\boldsymbol{F}$ wektoryň wektor köpeltmek hasylyna deňdir. (39) formuladaky P, Q, R funksiýalaryň ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar hasap edip we (31), (35) formulalary peýdalanyp, $divrot\boldsymbol{F}$ tapalyň:

$$divrot\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0.$$

Şeýlelikde,

$$divrot\boldsymbol{F} = 0. \tag{42}$$

(40) we (41) formulalaryň esasynda

$$divrot\boldsymbol{F} = (\nabla, rot\boldsymbol{F}) = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{F}]) = (\nabla, (\nabla, \boldsymbol{F})).$$

Ahyrky iki formuladan

$$(\nabla, [\nabla, \boldsymbol{F}]) = (\nabla, (\nabla, \boldsymbol{F})) = 0$$

deňlik gelip çykýar we ol ikisi deň bolan üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň nola deňdigini görkezýär.

Ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolan $u = u(x, y, z)$ funksiýa üçin (35) we (37) formulalardan peýdalanyp, $rotgradu$ üçin aňlatmany tapalyň. (37) formulada $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ hasap edip alarys:

$$rotgradu = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0,$$

$$rotgradu=0. \tag{43}$$

(31) we (35) formulalaryň esasynda bu deňligiň çep bölegini

$$rotgradu=[\nabla, gradu]=[\nabla, \nabla u] \tag{44}$$

görnüşde ýazmak bolar. (43) we (44) formulalardan bolsa

$$[\nabla, \nabla u]=0 \tag{45}$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňlik skalýar köpeldijileri bilen tapawutlanýan iki simwoliki wektoryň wektor köpeltmek hasylynyň nola deňdigini görkezýär.

Goý, ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolan skalýar $u=u(x, y, z)$ funksiýa we onuň gradiýentiniň $\boldsymbol{F}$ wektor meýdany berlen bolsun:

$$\boldsymbol{F}=gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

(31) formuladan peýdalanyp $div(gradu)$ üçin aňlatmany alarys:

$$div(gradu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$div(gradu)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{46}$$

Bu deňligiň sag bölegindäki aňlatma u funksiýanyň Laplas operatory diýilýär we şeýle belgilenýär:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{47}$$

(37), (40) we (47) formulalaryň esasynda (46) formulany

$$(\nabla, \nabla u)=\Delta u \quad (\Delta=\nabla^2) \tag{48}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Bellik. $\Delta u=0$ ýa-da $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ deňlemä Laplasyň deňlemesi diýilýär. Bu deňlemäni kanagatlandyrýan $u=u(x, y, z)$ funksiýa garmoniki funksiýa diýilýär.

3. Potensial we solenoidal meýdany. Eger $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ wektor käbir skalýar funksiýanyň gradiýenti bolsa, ýagny

$$\boldsymbol{F} = gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{49}$$

onda $\boldsymbol{F}$ wektor meýdanyna potensial meýdany diýilýär. Ahyrky iki deňlikden

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

deňlikler gelip çykýar. $u = u(x, y, z)$ funksiýanyň ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar halynda ahyrky deňliklerden

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

ýa-da

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

deňlikleri alarys. Bu deňlikler esasynda (35) deňlikden

$$rot\boldsymbol{F} = 0 \tag{50}$$

deňlik gelip çykýar. Şeýlelikde, islendik potensial $\boldsymbol{F}$ meýdany üçin (50) deňlik ýerine ýetýändir. Eger $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$ wektor meýdany üçin

$$div\boldsymbol{F} = 0$$

bolsa, onda ol wektor meýdanyna solenoidal ýa-da trubka görnüşli wektor meýdany diýilýär. Berlen wektor meýdanynyň rotor meýdany solenoidal meýdanydyr.

§ 10. 9. Funksiýanyň doly differensiallylyk şerti

1. Oblastyň birbaglanyşyklylyk düşünjesi. Eger üçölçegli G oblasta degişli islendik ýapyk L çyzyk üçin şol çyzyk bilen çäklenen we tutuşlygyna G oblastyň içinde ýerleşýän üst bar bolsa, onda G oblasta üstleýin birbaglanyşykly oblast diýilýär. Şeýle oblastlara şar, ellipsoid bilen çäklenen oblast, iki konsentrik sfera bilen çäklenen oblast mysal bolup biler. Üstleýin birbaglanyşykly däl oblastyň mysaly oky şaryň merkezinden geçýän silindr kesilip aýrylan şar bolup biler. Üstleýin birbaglanyşykly oblastlar üçin ýerine ýetýän häsiýetler aşakdaky teoremadan gelip çykýar.

1-nji teorema. Eger $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ funksiýalar we olaryn birinji tertipli hususy önümleri käbir ýapyk çäkli üstleýin birbaglanyşykly G oblastda üznüksiz bolsa, onda aşakdaky dört tassyklama deňgüýçlüdir, ýagny olaryň islendik bіriniň ýerine ýetmeginden beýleki üçüsi gelip çykýar:

1. G oblastda ýerleşýän islendik ýapyk çyzyk üçin

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0. \tag{51}$$

2. G oblastyň islendik A we B nokatlary üçin egriçyzykly integral A we B nokatlary birleşdirýän ýola bagly däldir:

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

3. $Pdx+Qdy+Rdz$ aňlatma käbir funksiýanyň doly differensialydyr, ýagny G oblastda kesgitlenen şeýle $F(x, y, z)$ funksiýa tapylyp,

$$dF=Pdx+Qdy+Rdz. \tag{52}$$

4. G oblastda

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \tag{53}$$

deňlikler dogrudyr.

◁ Subut etmekligi

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$$

yzygiderlikde amala aşyrarys.

a) $1 \Rightarrow 2$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, 1 ýerine ýetsin. G oblastyň A we B nokatlaryny birleşdirýän we şol oblastda ýerleşýän iki ýola, ýagny ACB we AEB ýollara garalyň. Onda olaryň jemi bolan ýapyk $L=ACBEA$ çyzyk hem şol oblastda ýerleşýär. Şonuň üçin hem 1-nji şertiň esasynda

$$0 = \int_{ACBEA} Pdx + Qdy + dz = \int_{ACB} Pdx + Qdy + dz +$$

$$+\int\limits_{BEA} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz - \int\limits_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz,$$

ýagny

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AEB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

b) $2 \Rightarrow 3$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, egriçyzykly

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

integral integrirleme ýoluna bagly däl bolsun. Eger A nokadyň koordinatalaryny bellesek, ýagny $A = A(x_0, y_0, z_0)$ hasap etsek, onda ol integrala $B = B(x, y, z)$ nokadyň koordinatalarynyň funksiýasy hökmünde garamak bolar, ýagny

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{A(x_0,y_0,z_0)}^{B(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = F(x,y,z).$$

Ol funksiýanyň differensirlenýändigini we (52) deňligiň dogrudygyny görkezeliň. Onuň üçin G oblastyň her bir $B(x, y, z)$ nokadynda $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ we $\frac{\partial F}{\partial z}$ hususy önümleriň bardygyny we

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x,y,z) \quad (54)$$

deňlikleriň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir, çünki $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ we $R(x, y, z)$ funksiýalaryň üznüksizligi üçin (54) deňlik esasynda $F(x, y, z)$ funksiýa differensirlenýändir we (52) ýerine ýetýändir. $\frac{\partial F}{\partial x}$ hususy önümiň bardygyny görkezmek üçin $F(x, y, z)$ funksiýanyň x üýtgeýänine $x + \Delta x$ artym bereliň:

$$\Delta_x F = F(x + \Delta x, y, z) - F(x,y,z) = \int\limits_{AB_1} Pdx + Qdy + Rdz -$$

$$-\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz \quad (B_1 = B_1(x + \Delta x, y, z)).$$

Integralyň integrirleme ýoluna bagly däldigi esasynda AB_1 çyzygy AB çyzyk bilen Ox okuna parallel BB_1 kesimiň jemi hökmünde almak bolar. Şoňa görä

$$\Delta_x F = \int\limits_{BB_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{BB_1} Pdx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx$$

deňligi alarys. Bu deňligiň sag bölegindäki kesgitli integrala orta baha hakyndaky teoremany ulanyp,

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y, z) \quad (0<\theta<1)$$

deňligi alarys. Bu deňlikde $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip, $P(x, y, z)$ funksiýanyň üznüksizligi sebäpli, $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y,z)$ deňligi alarys. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y,z)$ we $\frac{\partial F}{\partial z} = R(x,y,z)$ deňlikleriň ýerine ýetýändigi bolsa şuňa meňzeşlikde görkezilýär.

ç) $3 \Rightarrow 4$ bolýandygyny görkezeliň. Goý, (52) deňlik ýerine ýetsin, onda (54) deňlikler dogrudyr. Şonuň üçin garyşyk önümler hakyndaky teorema esasynda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

deňlikleri alarys, çünki şerte görä $\frac{\partial P}{\partial y}$ we $\frac{\partial Q}{\partial x}$ önümler üznüksizdirler.

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

deňlikler hem edil şonuň ýaly subut edilýär.

d) $4 \Rightarrow 1$ görkezeliň. Goý, (53) deňlikler ýerine ýetsin we L çyzyk G oblastda ýerleşýän erkin ýapyk çyzyk, T bolsa G oblastyň içinde tutuşlaýyn ýerleşýän we L bilen çäklenen üst bolsun. Onda Stoksuň (23) formulasy esasynda

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Şeýlelikde, teorema doly subut edildi. ▷

Bellik. Egriçyzykly $\int\limits_L Pdx + Qdy$ integral üçin (53) şert $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ görnüşi alar.

Gönükmeler

Egriçyzykly integrallaryň birinji görnüşini hasaplamaly:

1. $\int\limits_L xdl$, L çyzyk $2y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň $A(1,\ 1)$ we $B(1,\ 1/2)$ nokatlarynyň arasyndaky dugasy.

2. $\int\limits_L \sqrt{1+x^2}\,dl$, L çyzyk $4y=x^4$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,\ 0)$ we $B(1,\ 1/4)$ nokatlarynyň arasyndaky dugasy.

3. $\int\limits_L y^2 dl$, L çyzyk $x^2+y^2=R^2$ $(y\geq 0)$ töweregiň ýokarky bölegi.

4. $\int\limits_L x^2 ydl$, L çyzyk $x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$ $(0\leq t\leq \pi/2)$ astroidiň dugasy.

Egriçyzykly integrallaryň ikinji görnüşini hasaplamaly:

5. $\int\limits_L \sqrt{x^2+3y}\,dy+(x-y)dx$, L çyzyk $y=x^2$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,\ 0)$ nokatdan $B(1,\ 1)$ nokada çenli dugasy.

6. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx + xydy$, L çyzyk $y=e^x$ funksiýanyň grafiginiň $A(0,\ 1)$ nokatdan $B(1,\ e)$ nokada çenli dugasy.

7. $\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{x^3+y^3}dl$, L çyzyk $x^2+y^2=R^2$ $(y\geq 0)$ töweregiň ýokarky bölegi.

8. $\int\limits_L (x + 2x^3y^2 - y^4)dx + (y^2 - 3x^2y^3 + 4xy)dy$, L aşakdaky çyzyklar:

a) $y=x$ göni çyzygyň $O(0, 0)$ nokatdan $A(1, 1)$ nokada çenli kesimi;

b) OBA döwük çyzyk, bu ýerde $B(1, 0)$ nokat;

ç) $y=x^2$ parabolanyň $O(0, 0)$ nokatdan $A(1, 1)$ nokada çenli dugasy.

9. $\int\limits_L (x^3 + 3x^2y^2)dx + (y^3 + 2x^3y)dy$, L aşakdaky çyzyklar:

a) $y=x$ göni çyzygyň $O(0, 0)$ nokatdan $A(1, 1)$ nokada çenli kesimi;

b) OBA döwük çyzyk, bu ýerde $B(1, 0)$ nokat;

ç) $y=x^2$ parabolanyň $O(0, 0)$ nokatdan $A(1, 1)$ nokada çenli dugasy.

d) $y=x^3$ çyzygyň $O(0, 0)$ nokatdan $A(1, 1)$ nokada çenli dugasy.

10. Çyzyklaryň görkezilen dugalarynyň uzynlygyny hasaplamaly:

a) $x=6a\cos t, y=6a\sin t, z=8at$ $(0\leq t\leq 2\pi)$;

b) $x=at,\ y = a\sqrt{2}\ln t,\ z=a/t$ $(1\leq t\leq 10)$.

11. Görkezilen ýapyk çyzyklar bilen çäklenen figuralaryň meýdanlaryny tapmaly:

a) $y=x^4, y^4=x$;

b) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ (astroida).

12. Dykyzlygy $\rho(x, y)$ bolan berlen material çyzygyň dugasynyň massasyny tapmaly:

a) $4y=x^4$ $(0\leq x\leq 1)$, $\rho(x, y)=y$;

b) $x=\ln y$ $(1\leq y\leq 4)$, $\rho(x,y) = y\sqrt{y^2+1}$.

Üst integrallarynyň birinji görnüşini hasaplamaly:

13. $\iint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)ds$, T üst $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ýarym sferadyr.

14. $\iint\limits_T y(x+z)ds,$ T üst $y=\sqrt{c^2-z^2}$ üstüň $x=0$, $x=a$ tekizlikler bilen kesilen bölegi.

15. $\iint\limits_T (x^2+y^2+z-2)ds,$ T üst $2z=9-x^2-y^2$ üstüň $z=0$ tekizlik bilen kesilen bölegi.

Üst integrallarynyň ikinji görnüşini hasaplamaly:

16. $\iint\limits_T (y^2+z^2)dxdy,$ T üst $z=\sqrt{9-x^2}$ üstüň $y=0$, $y=2$ tekizlikler bilen kesilen böleginiň ýokarky tarapy.

17. $\iint\limits_T (x^2+3y^2+z^2)dxdz,$ T üst $y=\sqrt{x^2+z^2}$ üstüň $y=0$, $y=1$ tekizlikler bilen kesilen böleginiň daşky tarapy.

18. $\iint\limits_T (2x+3y+4z)dxdy,$ T üst $x+y+z=6$ tekizligiň $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ silindr bilen kesilen böleginiň ýokarky tarapy.

19. Berlen wektor meýdanlarynyň diwergensiýalaryny tapmaly:

a) $(x^2-y^2)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j};$ ç) $x\vec{i}+y^2\vec{j}+z^3\vec{k};$

b) $(x^2-2xy+3y^2)\vec{i}+(xy-5y^2)\vec{j};$ d) $x^2\vec{i}-xy\vec{j}+xyz\vec{k}.$

20. Berlen wektor meýdanlarynyň rotorlaryny tapmaly:

a) $x^2\vec{i}-xy\vec{j}+xyz\vec{k};$

b) $y^2z\vec{i}+xz^2\vec{j}+x^2y\vec{k};$

ç) $xyz\vec{i}+(2x+3y-z)\vec{j}+(x^2+z^2)\vec{k}.$

21. $\vec{a}=bx\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$ wektor meýdanynyň $x-2y+2z=4$ tekizligiň koordinatalar oklary bilen çäklenen bölegi arkaly geçýän akymyny tapmaly.

22. $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ wektor meýdanynyň depeleri $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ nokatlarda bolan piramidanyň üsti arkaly geçýän akymyny hasaplamaly.

Jogaplar

1. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **2.** $\frac{8}{7}$. **3.** $\frac{\pi}{2}R^3$. **4.** $\frac{268}{1155}a^4$. **5.** $\frac{3}{2}$. **6.** $\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{12}$. **7.** $\frac{1}{2}$.
8. a) $\frac{17}{15}$; b) $\frac{25}{12}$; ç) $\frac{71}{36}$. **9.** a) 1,5; b) 1,5; ç) 1,5; d) 1,5. **10.** a) $20\pi a$; b) $9{,}9a$.
11. a) 0,6; b) $3\pi a^2/8$. **12.** a) $(2\sqrt{2}-1)/3$; b) 24. **13.** $2\pi R^4$. **14.** a^2c^2.
15. $\pi(500\sqrt{10}-23)/15$. **16.** 68. **17.** -2π. **18.** 114π. **19.** a) $2x+3y^2$; b) $3(x-4y)$; ç) $1+2y+3z^2$; d) $x(1+y)$. **20.** a) 0; b) $(x^2-2xz)\vec{i}+(y^2-2xy)\vec{j}+(z^2-2yz)\vec{k}$;
ç) $\vec{i}+(xy-2x)\vec{j}+(2-xz)\vec{k}$. **21.** 28. **22.** 1/3.

II.11. SAN HATARLARY

§ 11. 1. Hataryň ýygnanmagy we dargamagy

1. Hataryň kesgitlenişi we onuň jemi. Matematikanyň dürli bölümleri öwrenilende, şeýle hem meseleleri çözmekde onuň ulanylýan ýerlerinde tükenikli jemler bilen birlikde tükeniksiz jemlere, ýagny goşulyjylaryň sany tükeniksiz artýan jemlere duş gelinýär. Beýle jemleriň hemmesi bilen tükenikli jemler bilen geçirilýän amallary geçirip bolmaýar. Şonuň üçin hem biz ilki bilen ol jemleriň nämäni aňladýandygyny, olaryň häsiýetlerini we şonuň esasynda haýsy şertlerde tükenikli jemler bilen geçirilýän amallary tükeniksiz jemler bilen hem geçirip bolýandygyny anyklarys.

Hakyky sanlaryň $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ yzygiderliginden düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

aňlatma tükeniksiz san hatary ýa-da ýöne hatar diýilýär. Şunlukda, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sanlara onuň agzalary, a_n sana bolsa umumy ýa-da n-nji agzasy diýilýär. Umumy a_n agzasy belli bolan hatar berlen hasap edilýär. Mysal üçin, $a_n=\frac{1}{n^3}$ bolan (1) hatar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{n^3} + ...$$

görnüşde ýazylýar.

Käbir halatlarda bolsa hatar özüniň ilkinji agzalary arkaly

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

görnüşde hem berilýär. Bu halda berlen agzalar boýunça ol hataryň umumy agzasyny kesgitläp bolar. Mysal üçin, eger hatar ilkinji dört agzasy görkezilip,

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + ...$$

görnüşde berlen bolsa, onda onuň agzalarynyň sanawjylaryndan düzülen 2, 5, 8, 11, ... sanlar tapawudy 3 we ilkinji agzasy 2-ä deň bolan arifmetiki progressiýany düzýär. Şonuň üçin ol progressiýanyň umumy agzasy bolan $2+3(n-1)=3n-1$ sany sanawjylar üçin umumy agza hökmünde almak bolar. 2, 6, 18, 54, ... sanlardan durýan maýdalawjylar bolsa ilkinji agzasy 2-ä we maýdalawjysy 3-e deň bolan geometrik progressiýanyň agzalaryny aňladýar. Şonuň üçin hem geometrik progressiýanyň umumy agzasy bolan $2 \cdot 3^{n-1}$ sany maýdalawjylar üçin umumy agza hökmünde almak bolar. Şeýlelikde, hataryň umumy agzasy $a_n = \dfrac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1}}$.

Hataryň ilkinji n agzalaryndan düzülen

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

jeme hataryň bölekleýin jemi diýilýär. Şeýlelikde,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, ..., \quad S_n = a_1 + ... + a_n. \tag{2}$$

Eger (1) hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n\}$ yzygiderliginiň tükenikli predeli bar bolsa, onda ol hatara ýygnanýan hatar diýilýär. Şunlukda, $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ predele hataryň jemi diýilýär we

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3}$$

Eger-de $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli ýok bolsa ýa-da tükeniksizlige deň bolsa, onda (1) hatara dargaýan hatar diýilýär.

Kesgitleme esasynda hataryň ýygnanmagyny şeýle ýazmak bolar:

$$\left(S = \lim_{n \to \infty} S_n\right) \Leftrightarrow \text{ (hatar ýygnanýar).}$$

Bu ýazgydan ýygnanýan hataryň jeminiň ýeke-täkdigi gelip çykýar.

Bellik. Hataryň c sana köpeltmek hasyly diýip

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n + ...$$

hatara düşünilýär. Hatary sana köpeltmek onuň ýygnanmagyna hem, dargamagyna hem täsir etmeýär.

1-nji mysal. Geometrik progressiýanyň agzalaryndan düzülen

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \tag{4}$$

hataryň haýsy şertlerde ýygnanýandygyny görkezmeli.

◁ Bu hatar üçin (2) formulanyň esasynda

$$S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a - aq^n}{1 - q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Şoňa görä (5) deňlikden alarys:

1) $|q| < 1$ bolanda $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli bardyr:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

2) $|q| > 1$ ýa-da $q = 1$ bolanda $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$.

3) $q = -1$ bolanda (5) deňlikden

$$S_n = \frac{a(1 - (-1)^n)}{2}$$

bolýandygyny görýäris, ýagny $S_{2k} = 0$, $S_{2k-1} = a$, diýmek, bu halda $\{S_n\}$ yzygiderligiň predeli ýokdur.

Şeýlelikde, (4) hatar $|q| < 1$ bolanda ýygnanýar we $|q| \geq 1$ bolanda bolsa dargaýar. ▷

2-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ hataryň ýygnanýandygyny görkezmeli we onuň jemini tapmaly.

◁ Bu hatar üçin

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-2)n} + \frac{1}{(n-1)(n+1)} +$$

$$+\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\Big[\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) + \ldots +$$

$$+\Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\Big) + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big) + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)\Big].$$

Şoňa görä-de

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{3}{4}.$$

Diýmek, kesgitleme boýunça garalýan hatar ýygnanýar we onuň jemi $S=3/4$. ▷

2. Hataryň ýygnanma şertleri. Hatarlar nazaryýetiniň esasy meseleleriniň biri onuň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny anyklamakdyr. Dürli amaly meseleler çözülende köplenç, hataryň ýygnanýandygyny (jemini tapmazdan) ýa-da dargaýandygyny anyklamak talap edilýär. Şoňa görä, ilki bilen hataryň ýygnanmagy we dargamagy bilen baglanyşykly aşakdaky şertlere garalyň.

1-nji teorema (hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti). Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň umumy agzasynyň predeli nola deňdir, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{6}$$

◁ Goý, (1) hatar ýygnanýan bolsun, ýagny

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{7}$$

onda ýygnanýan yzygiderligiň häsiýeti esasynda

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S. \tag{8}$$

(7) we (8) deňlikleriň esasynda (2) deňlikden gelip çykýan $a_n = S_n - S_{n-1}$ deňlikde predele geçip, (6) deňligi alarys. ⊳

Bellik. (1) hataryň ýygnanmagy üçin (6) deňlik diňe zerur şert bolup, ol ýeterlik däldir. Onuň şeýledigi aşakdaky mysalda görkezilýär.

3-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ garmoniki hataryň dargaýandygyny görkezmeli.

⊲ Bu hatar üçin $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ýagny (6) şert ýerine ýetýär, ýöne ol dargaýar. Hakykatdan-da, eger tersine, ol ýygnanýar diýip güman etsek, onda onuň S jemi üçin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S, \quad \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

Ol bolsa

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

deňsizlige garşy gelýär. Şeýlelikde, garmoniki hatar dargaýar. ⊳

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije (hataryň dargamagynyň ýeterlik şerti). Eger

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \qquad (9)$$

bolsa, onda (1) hatar dargaýar.

⊲ Tersine güman edeliň. Goý, (1) hatar ýygnanýan bolsun, onda 1-nji teorema boýunça (6) deňlik ýerine ýetýär we ol (9) şerte garşy gelýär. Bu garşylyk biziň güman etmämiziň nädogrudygyny, ýagny hataryň dargaýandygyny görkezýär. ⊳

4-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+5}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

⊲ Bu hatar üçin $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3}$, ýagny (9) şert ýerine ýetýär we şonuň üçin netije boýunça hatar dargaýar. ⊳

Hataryň ýygnanmagynyň zerur we ýeterlik şerti subutsyz alynýan aşakdaky teoremada getirilýär.

2-nji teorema (Koşiniň kriterisi). $\forall\varepsilon>0$ üçin $N\ni n_0$ tapylyp, $\forall n>n_0$ we $\forall p\in N$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon \tag{10}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi (1) hataryň ýygnanmagy üçin zerur we ýeterlikdir.

3. Hataryň galyndysy we onuň häsiýetleri. (1) hataryň ilkinji n agzalarynyň taşlanmagyndan alnan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{11}$$

hatara (1) hataryň galyndysy diýilýär we ol r_n bilen belgilenýär.

3-nji teorema. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň islendik galyndysy hem ýygnanýar we tersine, eger hataryň haýsy-da bolsa bir galyndysy ýygnanýan bolsa, onda hataryň özi hem ýygnanýar. Şunlukda,

$$S=S_n+r_n \tag{12}$$

deňlik dogrudyr.

◁ Eger $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, $\tilde{S}_p = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$ degişlilikde (1) we (11) hatarlaryň bölekleýin jemleri bolsalar, onda $m=n+p$ üçin

$$S_m=S_n+\tilde{S}_p \tag{13}$$

bolar. Bu deňlikdeň görnüşi ýaly, bellenen n üçin $\lim\limits_{n\to\infty} S_m = S$ predeliň bar bolmagy üçin $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_p$ predeliň bar bolmagy, ýagny (1) hataryň ýygnanmagy üçin (11) hataryň ýygnanmagy zerur we ýeterlikdir. Şonuň esasynda (13) deňlikde $m\to\infty$ bolanda predele geçip, (12) deňligi alarys. ▷

Bu teoremadan şeýle netijeler gelip çykýar.

1. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda ol hatardan tükenikli sany agzalaryň goşulmagy, şeýle hem, taşlanmagy esasynda alnan hatar ýygnanýar.

2. Eger hatar ýygnanýan bolsa, onda onuň galyndysynyň predeli nola deňdir, ýagny $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

§ 11. 2. Agzalary otrisatel däl hatarlar

1. Agzalary otrisatel däl hatarlaryň ýygnanma nyşany. Hatarlary derňemekligi onuň agzalary otrisatel däl bolan halyndan başlalyň, çünki şeýle hatarlaryň ýygnanýandygyny ýa-da dargaýandygyny anyklamak ýeňildir.

4-nji teorema. Agzalary otrisatel däl (1) hataryň ýygnanmagy üçin onuň bölekleýin jemleriniň yzygiderliginiň ýokardan çäkli bolmagy zerur we ýeterlikdir.

◁ Eger $\forall n \in N$ üçin $a_n \geq 0$ bolsa, onda (1) hataryň S_n bölekleýin jemi üçin $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$ deňsizlik ýerine ýetýär. Ol bolsa $\{S_n\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigini aňladýar. Kemelmeýän yzygiderligiň predeliniň bar bolmagy üçin bolsa onuň ýokardan çäkli bolmagy zerur we ýeterlikdir. ▷

Bu teoremanyň şertlerinde hataryň S jemi we $\forall n \in N$ üçin

$$S_n \leq S. \tag{14}$$

2. Deňeşdirme nyşanlary. Hatarlary derňemekde ulanylýan usullaryň biri-de deňeşdirme usulydyr. Ol bolsa deňeşdirme nyşanlaryny ulanmaklyga esaslanýar. Şunlukda, deňeşdirilýän hatar hökmünde ýygnanýandygy ýa-da dargaýandygy mälim bolan hatarlar ulanylýar. Ony görkezmek üçin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{15}$$

hatarlara garalyň.

5-nji teorema (1.d.n.). Goý, (1) we (15) hatarlaryň agzalary $\forall n \in N$ üçin

$$0 \leq a_n \leq b_n \tag{16}$$

deňsizlikleri kanagatlandyrýan bolsun. Onda (15) hataryň ýygnanmagyndan (1) hataryň ýygnanmagy, (1) hataryň dargamagyndan bolsa (15) hataryň dargamagy gelip çykýar.

◁ Goý,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

we (15) hatar ýygnanýan bolsun. Onda $\{\tilde{S}_n\}$ yzygiderlik ýygnanýar we (15) hataryň $\tilde{S}$ jemi üçin (14) esasynda $\tilde{S}_n \leq \tilde{S}$ bolar. Şonuň üçin (16) deňsizlik esasynda $S_n \leq \tilde{S}_n \leq \tilde{S}$ deňsizlik gelip çykýar. Şoňa görä 4-nji teorema boýunça (1) hatar ýygnanýar.

Eger (1) hatar dargaýan bolsa, onda (15) hatar hem dargaýar, çünki tersine bolan halda teoremanyň subut edilen bölegi esasynda (1) hatar ýygnanýan bolup, ol bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Şeýlelikde, (15) hatar dargaýar. ▷

2-nji bellik. Teoremanyň tassyklamalary (16) deňsizlikler käbir $n_0 > 1$ agzadan başlap ýerine ýetende hem dogrudyr, çünki 3-nji teoremanyň 1-nji netijesi boýunça hataryň tükenikli sany agzalarynyň taşlanmagy onuň ýygnanmagyna täsir etmeýär.

1-nji deňeşdirme nyşanyndan 1-nji mysal esasynda amalyýetde ulanmak üçin amatly bolan şeýle netije alynýar.

1-nji netije. Eger $\forall n \in N$ üçin (ýa-da käbir $n_0 > 1$ agzadan başlap) $0 \leq a_n \leq q^n$, $q < 1$ şert ýerine ýetse, onda (1) hatar ýygnanýar, eger-de $a_n \geq q^n$, $q \geq 1$ şert ýerine ýetse, onda (1) hatar dargaýar.

5-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň umumy agzasy üçin $a_n = \frac{n}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$, ýagny $q = \frac{1}{3}$ üçin $a_n \leq q^n$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de, 1-nji netije esasynda garalýan hatar ýygnanýar. ▷

6-njy teorema (2.d.n.). Eger agzalary položitel bolan (1) we (15) hatarlar üçin

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < +\infty) \tag{17}$$

predel bar bolsa, onda (1) we (15) hatarlaryň ikisi hem birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

◁ Predeliň kesgitlemesi we (17) deňlik esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle n_0 nomer tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Ondan bolsa $\forall n>n_0$ üçin

$$-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-k<\varepsilon, \quad k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\varepsilon+k$$

deňsizlik gelip çykýar. ε sany $\varepsilon<k$ bolar ýaly alyp we $k-\varepsilon=m$ $(m>0)$, $k+\varepsilon=M$ $(M>0)$ begilemeler girizip, $\forall n>n_0$ üçin

$$m<\frac{a_n}{b_n}<M \quad \text{ýa-da} \quad mb_n<a_n<Mb_n \tag{18}$$

deňsizligi alarys. Eger (15) hatar ýygnanýan bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} Mb_n$ hatar hem ýygnanýar. Şoňa görä (18) deňsizlikleriň sagkysy we 1.d.n. boýunça (1) hatar hem ýygnanýar. Eger (1) hatar ýygnanýan bolsa, onda (18) deňsizlikleriň çepkisi we 1.d.n. boýunça $\sum_{n=1}^{\infty} mb_n$ hatar ýygnanýar. Şonuň üçin (15) hatar hem ýygnanýar.

Eger-de (1) we (15) hatarlaryň haýsy-da biri dargaýan bolsa, onda olaryň ikinjisi hem dargaýandyr, çünki ol ýygnanýar diýip güman edenimizde, teoremanyň subut edilen bölegi boýunça birinji hatar hem ýygnanýan bolardy, ol bolsa şerte garşy gelýär. ▷

3. Koşiniň we Dalamberiň nyşanlary. Hatarlary derňemekligi onuň öz agzalarynyň häsiýetleri esasynda hem geçirmek bolar.

7-nji teorema (Koşiniň nyşany). Eger agzalary otrisatel däl (1) hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r \tag{19}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r<1$ bolanda ýygnanýar, $r>1$ bolanda bolsa dargaýar.

◁ Yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesi we (19) esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin $N\ni n_0$ tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin

$$r-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<r+\varepsilon \tag{20}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär.

Eger $r<1$ bolsa, onda ε sany $q=r+\varepsilon<1$ bolar ýaly saýlap almak bolar (mysal üçin, eger $\varepsilon<1-r$ bolsa). Şonuň üçin (20) deňsizlikleriň ikinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $\sqrt[n]{a_n}<q$, $a_n<q^n$ $(q<1)$ deňsizlik ýerine ýeter we şonüň üçin 1.d.n. netijesi boýunça (1) hatar ýygnanýar.

Eger-de $r>1$ bolsa, onda ε sany $q=r-\varepsilon>1$ bolar ýaly almak bolar (mysal üçin, eger $\varepsilon<r-1$ bolsa). Şonuň üçin (20) deňsizlikleriň birinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $q<\sqrt[n]{a_n}$, $q^n<a_n$ $(q>1)$ deňsizlik ýerine ýeter we şonüň üçin 1.d.n. netijesi boýunça (1) hatar dargaýar. ▷

8-nji teorema (Dalamberiň nyşany). Eger agzalary položitel (1) hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \tag{21}$$

predel bar bolsa, onda ol hatar $r<1$ bolanda ýygnanýar, $r>1$ bolanda bolsa dargaýar.

◁ Yzygiderligiň predeliniň kesgitlemesi we (21) deňlik esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin $N\ni n_0$ tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin

$$r-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<r+\varepsilon \tag{22}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär.

Eger $r<1$ bolsa, onda $\varepsilon>0$ sany $q=r+\varepsilon<1$ bolar ýaly saýlap almak bolar. Şonuň üçin (22) deňsizlikleriň ikinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, $a_{n+1}<qa_n$ $(q<1)$ deňsizlik ýerine ýeter, ýagny ol deňsizlik $n=n_0+1$, $n=n_0+2$, $n=n_0+3$, ... üçin ýerine ýeter. Şonuň esasynda

$$a_{n_0+2}<a_{n_0+1}q,\quad a_{n_0+3}<a_{n_0+2}q<a_{n_0+1}q^2,$$
$$a_{n_0+4}<a_{n_0+3}q<a_{n_0+1}q^3,\ldots \tag{23}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär. $q<1$ bolanda geometrik progressiýanyň hatarynyň ýygnanýandygy sebäpli (1-nji mysal), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_0+1}q^n$ hatar hem ýygnanýar. Şonuň üçin (23) deňsizlik we 1.d.n. boýunça (1) hataryň galyndysy ýygnanýar. Şoňa görä 3-nji teorema boýunça (1) hataryň özi hem ýygnanýar.

Eger-de $r>1$ bolsa, onda ε sany $q=r-\varepsilon>1$ bolar ýaly saýlamak bolar. Şonuň üçin (22) deňsizlikleriň birinjisi esasynda $\forall n>n_0$ üçin $q<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_{n+1}>qa_n$ $(q>1)$. Ol bolsa n_0+1 nomerden başlap hataryň agzalarynyň artýandygyny görkezýär we şonuň üçin hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti ýerine ýetmeýär we hatar dargaýar. $\triangleright$

6-njy mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

$\triangleleft$ Bu hatar üçin

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}<1.$$

Şoňa görä-de Koşiniň nyşany boýunça hatar ýygnanýar. $\triangleright$

7-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n n!}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

$$\triangleleft\ a_n=\frac{n^3}{2^n n!},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!}:\frac{n^3}{2^n n!}=\frac{2^n n!(n+1)^3}{2^{n+1}(n+1)!n^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

deňlikleriň esasynda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

bolýandygy üçin Dalamberiň nyşany boýunça hatar ýygnanýar. $\triangleright$

3. Koşiniň integral nyşany. Funksiýalaryň käbir görnüşi üçin hususy däl integralyň ýygnanmagy hataryň ýygnanmagy bilen baglanyşyklydyr.

9-njy teorema (Koşiniň integral nyşany). Eger f funksiýa $[1, +\infty)$ aralykda üznüksiz, otrisatel däl we artmaýan bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{24}$$

hatar we

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx \tag{25}$$

hususy däl integral birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

$\lhd$ Goý, $P_k=[k, k+1]$, $k \in N$ we $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ bolsun. f funksiýanyň artmaýandygy esasynda $k \leq x \leq k+1$ bolanda

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \tag{26}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär we şert boýunça f funksiýa her bir P_k kesimde integrirlenýär. Şonuň üçin (26) deňsizlikleri k-dan $(k+1)$-e çenli integrirläp we soňra jemläp,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq S_n \tag{27}$$

deňsizlikler gelip çykýar.

Goý, (25) integral ýygnanýan we $\int_{1}^{\infty} f(t)dt = M$ bolsun, onda $\forall n > n_0$ üçin $\int_{1}^{n+1} f(x)dx \leq M$ bolar. Onuň esasynda bolsa (27) deňsizlikleriň birinjisinden $S_{n+1} \leq f(1)+M$ deňsizlik gelip çykýar, ýagny $\{S_n\}$ yzygiderlik ýokardan çäklidir. Onuň kemelmeýändigi bolsa (24) hataryň agzalarynyň otrisatel däldiginden gelip çykýar. Şeýlelikde, ol yzygiderligiň predeli bardyr, ýagny (24) hatar ýygnanýar.

Goý, (24) hatar ýygnanýan bolsun we $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Şunlukda, $\{S_n\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigi üçin $S_n \le S$. $\forall B \in [1, +\infty)$ üçin $n+1 \ge B$ şerti kanagatlandyrýan $N \ni n$ sany görkezmek bolar. Şonuň esasynda (27) deňsizlikleriň ikinjisini ulanyp, $\forall B \in [1, +\infty)$ üçin

$$\int_1^B f(x)dx \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n \le S$$

deňsizligi alarys. Ondan bolsa otrisatel däl funksiýanyň hususy däl (25) integralynyň ýygnanýandygy gelip çykýar.

Eger (24) hataryň ýa-da (25) integralyň haýsy-da birisi dargaýan bolsa, onda olaryň beýlekisi hem dargaýandyr, çünki tersine güman etmegimiz teoremanyň subut edilen bölegi esasynda olaryň ikisiniň hem ýygnanýan bolmagyna alyp barýar, ol bolsa şerte garşy gelýär. ▷

Şeýlelikde, (24) hatar bilen (25) integralyň ikisi hem birwagtda ýygnanýar ýa-da dargaýar.

8-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hataryň p parametriň haýsy bahalarynda ýygnanýandygyny we dargaýandygyny anyklamaly.

◁ Bu hataryň agzalary bolan $f(n) = \frac{1}{n^p}$ üçin $f(x) = \frac{1}{x^p}$ funksiýa $x \ge 1$ bolanda položitel we $p > 0$ üçin artmaýar, ýagny bu halda 9-njy teoremanyň şertleri ýerine ýetýär. Şonuň üçin şol teorema esasynda hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar, $0 < p \le 1$ bolanda bolsa dargaýar, çünki bu halda (25) hususy däl integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

görnüşi alar we ol integralyň $p > 1$ bolanda ýygnanýandygy, $0 < p \le 1$ bolanda bolsa dargaýandygy ozaldan mälimdir. Eger-de $p \le 0$ bolsa, onda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \ne 0$ we şonuň üçin hatar dargaýar. Şeýlelikde, hatar $p > 1$ bolanda ýygnanýar we $p \le 1$ bolanda bolsa dargaýar. ▷

Bellik. Eger hataryň ähli agzalary otrisatel bolsa, onda ony –1 sana köpeldip, ähli agzalary položitel hatary alarys. Şonuň üçin beýle hatarlary derňemek üçin hem agzalary otrisatel däl hatarlar üçin subut edilen teoremalary ulanmak bolýar, çünki hataryň agzalaryny sana köpeltmeklik onuň ýygnanmagyna-da, dargamagyna-da täsir etmeýär.

§ 11. 3. Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlar

1. Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatarlar. Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlary öwrenmekligi olaryň hususy haly bolan islendik iki goňşy agzalarynyň alamatlary dürli bolan hatardan başlalyň. Şeyle hatara agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar diýilýär we ol

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1}a_n + ... \quad (28)$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde $\forall n \in N$ üçin $a_n > 0$.

10-njy teorema (Leýbnisiň nyşany). Eger (28) hataryň agzalary üçin

1º. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2º. $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in N$

şertler ýerine ýetse, onda (28) hatar ýygnanýar we

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \quad (29)$$

$$|r_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}, \quad (30)$$

bu ýerde S we S_n degişlilikde (28) hataryň jemi we bölekleýin jemi.

◁ Eger $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ bolsa, onda 2-nji şert esasynda $\forall n \in N$ üçin $S_{2(n+1)} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$, ýagny $\{S_{2n}\}$ kemelmeýän yzygiderlikdir. Ondan başga-da

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

deňsizligiň esasynda ol yzygiderlik ýokardan çäklidir. Diýmek, onuň $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ predeli bardyr. Şoňa görä $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ deňlik we 1-nji şert esasynda $\{S_{2n+1}\}$ yzygiderligiň hem predeli bardyr:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Şeýlelikde, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ predel bardyr we (28) hatar ýygnanýar.

Indi (29) we (30) deňsizlikleri görkezeliň. 2-nji şert esasynda

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \le S_{2n-1},$$

ýagny $\{S_{2n+1}\}$ artmaýar. Şoňa görä $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ deňlikleriň we $\{S_{2n}\}$ yzygiderligiň kemelmeýändigi esasynda (29) deňsizlikler gelip çykýar. Ony $S_{2n-1} - a_{2n} \le S \le S_{2n} + a_{2n+1}$ görnüşde ýazyp, $S_{2n-1} - S \le a_{2n}$ we $S - S_{2n} \le a_{2n+1}$ deňsizlikleri alarys. Olardan bolsa $\forall n \in N$ üçin (30) gelip çykýar. ⊳

9-njy mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

⊲ Agzalarynyň alamatlary gezekleşýän bu hatar üçin $p>0$ bolanda Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä hatar şol nyşan esasynda ýygnanýar. ⊳

Bu hataryň hususy haly bolan $p=1$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

hatar hem ýygnanýar we onuň S jemi üçin (29) esasynda $n=1$ bolanda $1/2 \le S \le 5/6$ deňsizlikler ýerine ýetýär.

2. Absolýut ýygnanýan hatarlar. (1) hatar bilen bilelikde onuň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{31}$$

hatara garalyň.

Eger (1) hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen (31) hatar ýygnanýan bolsa, onda (1) hatara absolýut ýygnanýan hatar diýilýär.

11-nji teorema. Her bir absolýut ýygnanýan hatar ýygnanýandyr.

⊲ Eger (31) hatar ýygnanýan bolsa, onda Koşiniň kriterisi esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall p \in N$ üçin

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä n we p belgileriň şol bir bahalary we $\forall \varepsilon > 0$ üçin

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

ýagny Koşiniň kriterisi boýunça (1) hatar ýygnanýar. ▷

Bellik. (1) hataryň ýygnanmagyndan (31) hataryň ýygnanmagy gelip çykmaýar. Oňa 9-njy mysaldaky hatardan $p = 1$ bolanda alynýan we ýygnanýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \tag{32}$$

hatar mysal bolup biler, çünki bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen hatar dargaýan garmoniki hatardyr.

Eger (1) hatar ýygnanýan bolup, (31) hatar dargaýan bolsa, onda bu halda (1) hatara şertli (absolýut däl) ýygnanýan hatar diýilýär. Şeýle hatara (32) hatar mysal bolup biler.

10-njy mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$ hataryň absolýut ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

hatar 8-nji mysal esasynda $p > 1$ bolanda ýygnanýar we şonuň üçin berlen hatar absolýut ýygnanýar, 11-nji teorema esasynda bolsa ol ýöne hem ýygnanýar. ▷

4. Hatarlar bilen geçirilýän amallar. Eger (1) hatardan başga

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{33}$$

hatara garasak, onda olardan alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + ... + (a_n \pm b_n) + ... \qquad (34)$$

hatara (1) we (33) hatarlaryň algebraik jemi diýilýär.

12-nji teorema. Eger (1) we (33) hatarlar ýygnanýan bolsa, onda (34) hatar hem ýygnanýar we

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (35)$$

deňlik dogrudyr.

◁ Eger $S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S''_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ we $S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)$ bolsa, onda $S_n = S'_n \pm S''_n$ bolar we şert boýunça $\lim_{n\to\infty} S'_n = S'$, $\lim_{n\to\infty} S''_n = S''$ predeller bardyr. Şonuň üçin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n \pm \lim_{n\to\infty} S''_n = S' \pm S'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S,$$

ýagny (35) ýerine ýetýär we

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S' \pm S''. \ ▷$$

Agzalary

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \quad (n = 1, 2, ...) \qquad (36)$$

deňlik boýunça kesgitlenýän

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + ... + c_n + ... \qquad (37)$$

hatara (1) we (33) hatarlaryň köpeltmek hasyly diýilýär.

Absolýut ýygnanýan (1) we (33) hatarlaryň köpeltmek hasyly bolan (37) hataryň hem absolýut ýygnanýandygyny we onuň jeminiň (1) we (33) hatarlaryň jemleriniň $S' \cdot S''$ köpeltmek hasylyna deňdigini belläliň.

Bellik. Tükenikli jemden tapawutlylykda hatarlar bilen ähli amallary ýerine ýetirip bolýan däldir,ýöne 12-nji teoremadan görnüşi ýaly, ýygnanýan hatarlary goşup hem, aýryp hem bolýar. Şunlukda, alynýan hatarlar hem ýygnanýar. Islendik hatarda onuň agzalarynyň orunlaryny üýtgedip, şeýle hem onuň agzalaryny toparlap bolýan däldir. Mysal üçin, eger

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ... \qquad (38)$$

hataryň agzalaryny

$$1-(1-1)-(1-1)...-(1-1)+...=1-0-...-0-...$$

ýa-da

$$(1-1)+(1-1)...+(1-1)+...=0+0+...+0+...$$

görnüşde toparlasak, onda iki halda hem ýygnanýan hatar alynýar we olaryň jemleri degişlilikde 1 we 0 bolar, ýöne (38) hatar dargaýar, çünki ol hatar üçin

$$S_{2n}=0 \quad (n=1, 2, ...), \qquad S_{2n+1}=1 \quad (n=0, 1, 2, ...)$$

we şonuň esasynda bölekleýin jemleriň predeli ýokdur.

Eger hatar absolýut ýygnanýan bolsa, onda bu halda ol hataryň agzalarynyň orunlarynyň üýtgedilmeginden alynýan hatar hem absolýut ýygnanýar we hataryň jemi önküligine galýar.

Eger hatar şertli ýygnanýan bolsa, onda bu halda ol hataryň agzalarynyň orunlaryny üýtgedip, onuň jemi islendik sana deň bolar ýaly edip, hat-da ol hatary dargaýan hatar görnüşine hem özgertmek bolýandygyny görkezmek bolar.

Gönükmeler

Hatarlaryň jemlerini tapmaly:

1. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$

2. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + ...$

3. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + ...$

4. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{84} + ...$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

Deňeşdirme nyşanlaryny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1+5^{2n}}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n+1)}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n^2+3}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6+n^2}$. **12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$. **14.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$.

Koşiniň integral nyşanyny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}$. **17.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Dalamberiň we Koşiniň nyşanlaryny ulanyp, hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. **20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(2n-1)}$. **22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{6^n}$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-2}{3n+1}\right)^n$.

Agzalarynyň alamatlary üýtgeýän hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. **27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. **28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos an}{n^3}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{1+(-3)^{2n}}$. **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Hatarlaryň absolýut ýa-da şertli ýygnanmagyny derňemeli:

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. **31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n(3n+1)}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+3^n}$.

Jogaplar

1. 4/3. **2.** 5/6. **3.** 3. **4.** 4/7. **5.** 1/2. **6.** 1/3. **7.** 1/4. **8.** 3/4. **9.** Ýygnanýar. **10.** Ýygnanýar. **11.** Dargaýar. **12.** Ýygnanýar. **13.** Ýygnanýar. **14.** Dargaýar. **15.** Ýygnanýar. **16.** Ýygnanýar. **17.** Dargaýar. **18.** Dargaýar. **19.** Ýygnanýar. **20.** Ýygnanýar. **21.** Ýygnanýar. **22.** Ýygnanýar. **23.** Dargaýar. **24.** Ýygnanýar. **25.** Ýygnanýar. **26.** Ýygnanýar. **27.** Dargaýar. **27.** Ýygnanýar. **28.** Ýygnanýar. **29.** Ýygnanýar. **30.** Şertli ýygnanýar. **31, 32.** Absolýut ýygnanýar.

II. 12. FUNKSIONAL YZYGIDERLIKLER WE HATARLAR

§ 12.1. Funksional yzygiderligiň we hataryň ýygnanmagy

1. Funksional yzygiderligiň ýygnanmagy. Agzalary käbir X köplükde kesgitlenen funksiýalar bolan

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \qquad (1)$$

yzygiderlige funksional yzygiderlik diýilýär we ol $\{f_n(x)\}$ bilen belgilenilýär. $x = a \in X$ nokat üçin ol $\{f_n(a)\}$ san yzygiderligidir. Şonuň üçin nokatda funksional yzygiderligiň derňelişi san yzygiderligiňki ýalydyr.

Eger $\{f_n(a)\}$ yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda (1) yzygiderlige a nokatda ýygnanýan funksional yzygiderlik diýilýär. Eger $\{f_n(a)\}$ yzygiderlik dargaýan bolsa, onda (1) yzygiderlige a nokatda dargaýan funksional yzygiderlik diýilýär.

Eger (1) yzygiderlik her bir $x \in X$ nokatda ýygnanýan bolsa, onda onuň predeli käbir $f(x)$ funksiýa bolar we oňa (1) yzygiderligiň predeli diýilýär we ol

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in X \qquad (2)$$

görnüşde ýa-da gysgaça $f_n \xrightarrow[X]{} f$ görnüşde ýazylýar. Şunlukda, X köplüge yzygiderligiň ýygnanma oblasty diýilýär.

Aýdylanlardan we (2) ýazgydan peýdalanyp, yzygiderligiň X köplükde ýygnanmagyna şeýle kesgitleme bermek bolar.

Eger $\forall\varepsilon>0$ we her bir $x\in X$ üçin $N\ni n_0=n_0(\varepsilon, x)$ tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $\{f_n(x)\}$ yzygiderlige X köplükde $f(x)$ funksiýa ýygnanýan yzygiderlik diýilýär.

Bu kesgitlemede $n_0=n_0(\varepsilon, x)$ ýazylmagynyň sebäbi, ol $\forall\varepsilon>0$ we her bir $x\in X$ üçin olara degişli n_0 belginiň bolmalydygyny aňladýar.

1-nji mysal. $f_n(x)=\dfrac{1+n}{n+x^2}$ yzygiderligiň ýygnanma oblastyny we predelini tapmaly.

◁ Yzygiderligiň ähli agzalary $\boldsymbol{R}$ köplükde kesgitlenendir we her bir $x\in\boldsymbol{R}$ üçin

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n+x^2}=1.$$

Diýmek, yzygiderligiň ýygnanma oblasty ol yzygiderligiň agzalarynyň kesgitlenme oblasty bolan $\boldsymbol{R}$ bilen gabat gelýär we ol yzygiderligiň predeli $f(x)=1$ funksiýa bolar. ▷

2. Funksional hataryň ýygnanmagy. Agzalary käbir X köplükde kesgitlenen $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ funksiýalar bolan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (3)$$

hatara funksional hatar diýilýär.

Ol hatardan $x=a\in X$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)=u_1(a)+u_2(a)+...+u_n(a)+... \qquad (4)$$

hatar san hatarydyr. Eger bu hatar ýygnanýan bolsa, onda (3) hatara *a* nokatda ýygnanýan hatar, *a* nokada bolsa onuň ýygnanma nokady diýilýär.

San hatary üçin bolşy ýaly, funksional hatary derňemek hem agzalary ol funksional hataryň bölekleýin jemleri bolan

$$S_1(x), S_2(x), ..., S_n(x), ... \qquad (5)$$

yzygiderligi derňemeklige getirilýär. Şeýle hem her bir (1) funksional yzygiderlige

$$f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots+[f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots$$

hatar degişli bolup, $\{f_n(x)\}$ onuň bölekleýin jeminiň yzygiderligidir, ýagny $S_n(x)=f_n(x)$.

Aýdylanlaryň esasynda funksional hatar üçin subut edilýän her bir teoremadan funksional yzygiderlik üçin degişli teoremany we tersine, her bir funksional yzygiderlik üçin subut edilýän teoremadan funksional hatar üçin degişli teoremany almak bolar.

Eger (3) hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n(x)\}$ yzygiderliginiň her bir $x \in X$ nokatda $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ predeli bar bolsa, onda (3) hatara X köplükde ýygnanýan hatar, X köplüge bolsa onuň ýygnanma oblasty diýilýär. Şunlukda, $S(x)$ funksiýa (3) hataryň jemi diýilýär we ol şeýle ýazylýar:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \qquad x \in X. \tag{6}$$

Funksional hataryň ilkinji n agzalarynyň taşlanmagyndan alynýan hatara ol hataryň galyndysy diýilýär.

Eger (3) funksional hatar X köplükde ýygnanýan bolsa, onda onuň galyndysy hem şol köplükde ýygnanýar. Bu halda hataryň $S(x)$ we galyndysynyň $r_n(x)$ jemi hem-de $S_n(x)$ bölekleýin jemi üçin

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x), \qquad x \in X$$

deňlik dogrudyr. Ondan bolsa

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \qquad x \in X$$

deňlik gelip çykýar.

§ 12. 2. Funksional yzygiderligiň we hataryň deňölçegli ýygnanmagy

1. Funksional yzygiderligiň deňölçegli ýygnanmagy. Eger $\forall \varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0 = n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda (1) yzygiderlige X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýan yzygiderlik diýilýär. Ol gysgaça şeýle ýazylýar:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in X \quad \text{ýa-da} \quad f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Bu kesgitlemede $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ýazylmagynyň sebäbi n_0 belginiň diňe ε sana bagly bolup, ýöne x ululyga bagly däldigini görkezýär.

Bu kesgitlemeden görnüşi ýaly, (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanmagyndan $\rho_n = \sup\limits_X |f(x) - f_n(x)|$ üçin

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 \tag{7}$$

deňlik gelip çykýar. Tersine hem dogrudygy aňsat görkezilýär.

Şonuň üçin (1) yzygiderligiň X köplükde $f(x)$ funksiýa deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek üçin (7) deňligiň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.

1-nji mysal. $\{x^n\}$ yzygiderligiň 1) $X=[0, 1]$; 2) $X=[0, b]$ $(b<1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

◁ 1) $0 \le x < 1$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ we $x=1$ bolanda onuň predeliniň bire deňligi sebäpli, $\{x^n\}$ yzygiderligiň predeli

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \ \textit{bolanda}, \\ 1, & x = 1 \ \textit{bolanda} \end{cases}$$

bolar. Şoňa görä $f_n(x)=x^n$ üçin $\rho_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| = 1$ we bu halda (7) ýerine ýetmeýär, şoňa görä yzygiderlik deňölçegsiz ýygnanýar.

2) $x \in [0, b]$ $(b<1)$ bolanda $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ bolýandygy sebäpli,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} |x^n| = \lim_{n\to\infty} b^n = 0.$$

Şonuň üçin bu halda yzygiderlik deňölçegli ýgnanýar. ▷

2. Funksional hataryň deňölçegli ýygnanmagy. Eger (3) funksional hataryň bölekleýin jeminiň $\{S_n(x)\}$ yzygiderligi X köplükde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hatara X köplükde deňölçegli ýygnanýan hatar diýilýär.

Eger $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ we $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ bolsa, onda (3) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy $\forall\varepsilon>0$ üçin $N \ni n_0 = n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall x \in X$ üçin

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon \quad \text{ýa-da} \quad |r_n(x)|<\varepsilon \tag{8}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegini aňladýar.

Şeýlelikde, funksional yzygiderligiň deňölçegli ýygnanma kriterisi esasynda (3) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\rho_n = \sup\limits_X |r_n(x)|$ we $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 0$ deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

2-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)$ hataryň 1) $X=[0, 1]$; 2) $X=[0, b]$ $(b<1)$ köplüklerde ýygnanmagyny derňemeli.

◁ Bu hataryň bölekleýin jemi üçin

$$S_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+...+(x^{n-1}-x^n)=1-x^n$$

deňligiň esasynda 1) $x\in[0, 1]$ bolanda

$$S_n(x) = \begin{cases} 1-x^n, & 0\le x<1, \\ 0, & x=1 \end{cases}, \qquad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0\le x<1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

bolar. Şonuň üçin bu halda $\rho_n = \sup\limits_{[0,1]}|r_n(x)| = 1$ we şoňa görä hatar deňölçegsiz ýygnanýar. 2) $x\in[0, b]$ $(b<1)$ bolanda

$$\rho_n = \sup_{[0,b]}|r_n(x)| = \sup_{[0,b]}|x^n| = b^n \quad \text{we} \quad \lim_{n\to\infty}\rho_n = 0.$$

Şonuň üçin bu halda hatar deňölçegli ýygnanýar. ▷

Funksional hataryň deňölçegli ýygnanma kriterisi aşakdaky subutsyz getirilýän teoremada beýan edilýär.

1-nji teorema (Koşiniň kriterisi). (3) hataryň X köplükde deňölçegli ýygnanmagy üçin $\forall\varepsilon>0$ üçin $N\ni n_0=n_0(\varepsilon)$ tapylyp, $\forall n>n_0 \wedge \forall p\in N$ we $\forall x\in X$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Indi bolsa hataryň geňölçegli ýygnanma nyşanyny getireliň.

2-nji teorema (Weýerştras). Eger $\forall n>n_0\ge 1$ we $\forall x\in X$ üçin

$$|u_n(x)|\le a_n \tag{10}$$

deňsizlik ýerine ýetip, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ san hatary ýygnanýan bolsa, onda (3) hatar X köplükde deňölçegli ýygnanýar.

$\lhd$ Şerte görä, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ san hatarynyň ýygnanýandygy sebäpli, san hatary üçin Koşiniň kriterisi esasynda $\forall\varepsilon>0$ üçin $N \ni n_0$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall p \in N$ üçin $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu deňsizligiň we (10) şertiň esasynda $\forall n > n_0$, $\forall p \in N$ we $\forall x \in X$ üçin

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon. \tag{11}$$

Şonuň üçin 1-nji teorema esasynda hatar deňölçegli ýygnanýar. $\rhd$

3-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hataryň [–1, 1] kesimde deňölçegli ýygnanmagyny derňemeli.

$\lhd$ $\forall x \in [-1, 1]$ üçin $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ we $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hatar ýygnanýar. Şoňa görä Weýerştrasyň nyşany esasynda hatar [–1, 1] kesimde deňölçegli ýygnanýar. $\rhd$

Weýerştrasyň teoremasyndan şeýle netije gelip çykýar.

1-nji netije. Eger $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýan bolsa, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

hatarlar islendik aralykda deňölçegli ýygnanýar.

$\lhd$ $\forall x \in R$ üçin $|b_n \sin nx| \leq |b_n|$ we $|b_n \cos nx| \leq |b_n|$ deňsizlikleriň ýerine ýetýändigi we $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ san hatarynyň ýygnanýandygy sebäpli, subudy 2-nji teoremadan gelip çykýar. $\rhd$

4-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ hataryň $\boldsymbol{R}$ köplükde deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmeli.

$\triangleleft\ b_n = \frac{1}{n^2} > 0$ bolany üçin $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ san hatary absolýut ýygnanýar. Şonuň üçin hem garalýan hatar 1-nji netije esasynda $\boldsymbol{R}$-de deňölçegli ýygnanýar. $\triangleright$

§ 12. 3. Deňölçegli ýygnanýan funksional hatarlaryň häsiýetleri

1. Hataryň jeminiň üznüksizligi. Deňölçegli ýygnanýan hatarlaryň wajyp häsiýetleriniň bardygyny görkezeliň.

3-nji teorema. Eger agzalary X aralykda üznüksiz bolan (3) hatar şol aralykda deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda ol hataryň $S(x)$ jemi X aralykda üznüksizdir.

$\triangleleft$ (3) hataryň X aralykda deňölçegli ýygnanýandygy sebäpli, onuň $S_n(x)$ bölekleýin jemi we $r_n(x)$ galyndysy üçin şol aralykda, hususan-da bellenen erkin $a \in X$ nokatda şeýle deňlikler ýerine ýetýär:

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad S(a) = S_n(a) + r_n(a).$$

Olaryň ikinjisini birinjisinden agzalaýyn aýryp alarys:

$$S(x) - S(a) = S_n(x) - S_n(a) + r_n(x) - r_n(a).$$

Bu deňlikden bolsa

$$|S(x) - S(a)| \le |S_n(x) - S_n(a)| + |r_n(x)| + |r_n(a)| \tag{12}$$

deňsizlik gelip çykýar. Üznükziz funksiýalaryň tükenikli jemi hökmünde $S_n(x)$ funksiýa X aralykda üznüksizdir, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta > 0$ tapylyp, $|x - a| < \delta$ bolýan $\forall x \in X$ üçin $|S_n(x) - S_n(a)| < \varepsilon/3$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýle hem hataryň deňölçegli ýygnanýandygy esasynda, $\forall \varepsilon > 0$ üçin $N \ni n_0$ tapylyp, $\forall n > n_0$ we $\forall x \in X$ üçin $|r_n(x)| < \varepsilon/3$, hususan-da $|r_n(a)| < \varepsilon/3$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şonuň üçin (12) deňsizlik esasynda $\forall \varepsilon > 0$ üçin $\delta > 0$ tapylyp, $|x - a| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x \in X$ üçin

$$|S(x) - S(a)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýär we ol $S(x)$ funksiýanyň erkin a nokatda üznüksizdigini, ýagny X aralykda üznüksizdigini görkezýär. ⊳

Bellik. Teoremanyň tassyklamasy esasynda

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to a} S(x) = S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x)$$

deňlik ýerine ýetýär we ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatarda agzalaýyn predele geçip bolýandygyny görkezýär.

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Eger ähli agzalary X aralykda üznüksiz bolan hataryň jemi üznüksiz funksiýa bolmasa, onda ol hatar şol aralykda deňölçegli ýygnanýan däldir.

⊲ Tersine güman edeliň, ýagny hatar X aralykda deňölçegli ýygnanýan bolsun. Onda 3-nji teorema boýunça hataryň jemi şol aralykda üznüksiz bolup, şerte garşy gelýär we alnan garşylyk netijäni subut edýär. ⊳

5-nji mysal. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ funksiýanyň san okunda üznüksizdigini görkezmeli.

⊲ Hataryň ähli agzalary san okunda üznüksiz we hatar 4-nji mysal esasynda deňölçegli ýygnanýar. Şonuň üçin 3-nji teorema boýunça onuň jemi bolan $S(x)$ funksiýa şol köplükde üznüksizdir. ⊳

2. Hataryň agzalaýyn integrirlenmegi.

4-nji teorema. Eger ähli agzalary $[a, b]$ kesimde üznüksiz (3) hatar şol kesimde $S(x)$ jeme deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda $S(x)$ funksiýa $[a, b]$ kesimde integrirlenýär, $a \le c \le x \le b$ üçin

$$\int_c^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n(t)dt \tag{13}$$

deňlik dogrudyr we bu deňligiň sag bölegindäki hatar $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

◁ Teoremanyň şertlerinde $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ we $\rho_n = \sup_{[a,b]} |r_n(x)|$ üçin $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Şonuň esasynda $n \to \infty$ bolanda

$$\left| \int_c^x S(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x u_k(t)dt \right| = \left| \int_c^x S(t)dt - \int_c^x \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \right| =$$

$$= \left| \int_c^x S(t)dt - \int_c^x S_n(t) \right| = \left| \int_c^x [S(t) - S_n(t)]dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |S(t) - S_n(t)| dt \leq (b-a)\rho_n \to 0,$$

ýagny (13) deňlik ýerine ýetýär. ▷

Eger (13) deňligi

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_k(t)dt, \quad c, x \in [a, b]$$

görnüşde ýazsak, onda bu deňlik hatary agzalaýyn integrirläp bolýandygyny görkezýär.

4. Hataryň agzalaýyn differensirlenmegi.

5-nji teorema. Eger ähli agzalary $[a, b]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän (3) hatar ýygnanýan bolsa we

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{14}$$

hatar $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda (3) hatar hem $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar, onuň $S(x)$ jemi şol kesimde üznüksiz differensirlenýär we

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{15}$$

◁ Eger $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan (14) hataryň jemini $p(x)$ bilen belgilesek, onda 3-nji teorema boýunça ol $[a, b]$ kesimde üznüksizdir. 4-nji teorema boýunça (14) hatary agzalaýyn integrirlemek bolar:

$$\int_a^x p(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \quad (a \le x \le b). \tag{16}$$

Şol teorema boýunça bu deňligiň sag bölegindäki hatar [a, b] kesimde deňölçegli ýygnanýar. Şonuň üçin Nýuton-Leýbnisiň formulasy boýunça alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$

deňligiň sag bölegindäki hatar hem [a, b] kesimde deňölçegli ýygnanýar. Şert boýunça $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ san hatary ýygnanýar, ýagny ol [a, b] kesimde deňölçegli ýygnanýar. Şonuň üçin [a, b] kesimde deňölçegli ýygnanýan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ we $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$ hatarlaryň jemi hökmünde (3) hatar şol kesimde deňölçegli ýygnanýar.

Nýuton-Leýbnisiň formulasy boýunça (16) deňligi

$$\int_a^x p(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = S(x) - S(a)$$

görnüşde ýazmak bolar. Ondan bolsa

$$S(x) = \int_a^x p(t)dt + S(a)$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňligiň iki bölegini hem differensirläp alynýan $S'(x)=p(x)$ deňlikden we $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ deňlikden (15) deňlik gelip çykýar. ⊳

Eger (15) deňligi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary agzalaýyn differensirläp bolýandygyny görkezýär.

6-njy mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ hataryň jeminiň önümini tapmaly.

$\triangleleft \left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ deňsizligiň we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ san hatarynyň ýygnanýandygy sebäpli, Weýerştrasyň nyşany boýunça garalýan hatar deňölçegli ýygnanýandyr. Goý, $S(x)$ onuň jemi bolsun. Edil ýokardaky ýaly, Weýerştrasyň nyşany boýunça

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hatar hem deňölçegli ýygnanýar. Şonuň esasynda hatar üçin 5-nji teoremanyň ähli şertleri ýerine ýetýär we şol teorema boýunça garalýan hatary agzalaýyn differensirläp bolýar, ýagny

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \triangleright$$

§ 12. 4. Derejeli hatarlar

1. Derejeli hataryň kesgitlenişi we ýygnanmagy. Funksional hatarlaryň içinde öwrenmekde has ýönekeýi we şonuň bilen birlikde amalyýetde köp ulanylýany

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{17}$$

görnüşdäki hatardyr. Oňa derejeli hatar, c_n sanlara bolsa onuň koeffisiýentleri diýilýär. (17) hataryň hususy görnüşi bolan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18}$$

hatar hem derejeli hatardyr. Bu derejeli hatarlary derňemeklik birmeňzeşlikde alnyp barylýandygy sebäpli, ýönekeýlik üçin biz esasan (18) hatary derňejekdiris.

Derejeli hataryň funksional hatarlaryň hususy haly bolýandygy sebäpli, funksional hatarlar üçin girizilen ähli düşünjeler, subut edilen teoremalar derejeli hatarlara hem degişlidir, ýöne käbir düşünjeler diňe derejeli hatarlara mahsusdyr. Şonuň üçin biz şolara aýratyn garajakdyrys.

10-njy teorema (Abel). Eger (18) derejeli hatar $x_0 \neq 0$ nokatda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar $|x|<|x_0|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin hem ýygnanýar, özem absolýut ýygnanýar.

◁ Şerte görä, (55) hatardan $x = x_0$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \tag{19}$$

san hatary ýygnanýar. Şoňa görä-de hataryň ýygnanmagynyň zerur şerti esasynda, (19) hataryň umumy agzasynyň predeli nola deňdir. Şoňa görä predeliň häsiýeti boýunça $\{c_n x_0^n\}$ yzygiderlik çäklidir, ýagny $M>0$ san tapylyp, $\forall n \in N$ üçin $|c_n x_0^n| \leq M$ deňsizlik ýerine ýetýär. Bu deňsizligiň esasynda

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \tag{20}$$

Eger $|x|<|x_0|$ bolsa, onda $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ we şonuň üçin hem $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ hatar ýygnanýar. Şol sebäpli (20) deňsizlik we deňeşdirme teoremasy esasynda (18) hatar $|x|<|x_0|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin absolýut ýygnanýar. Şonuň üçin ol hatar ýöne hem ýygnanýar. ▷

Bu teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Eger (18) hatar x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda ol hatar $|x|>|x_1|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin hem dargaýar.

◁ Tersine güman edeliň. Goý, hatar $|\tilde{x}|>|x_1|$ şerti kanagatlandyrýan käbir $\tilde{x}$ üçin ýygnanýan bolsun. Onda $|x_1|<|\tilde{x}|$ deňsizligiň esasynda 6-njy teorema boýunça hatar x_1 nokatda hem ýygnanýan bolar, ol bolsa şerte garşy gelýär we bu garşylyk teoremany subut edýär. ▷

Bu teoremanyň we netijäniň esasynda, eger derejeli hatar x_0 nokatda ýygnanýan bolsa, onda $(-|x_0|, |x_0|)$ interwalyň ähli nokatlarynda ol hatar absolýut ýygnanýar, eger-de x_1 nokatda dargaýan bolsa, onda $(-|x_1|, |x_1|)$ interwalyň daşynda ýerleşýän ähli nokatlarda ol hatar dargaýar.

2. Derejeli hataryň ýygnanma radiusy we interwaly. Eger (18) hatar $|x|<R$ bolanda ýygnanýan bolup, $|x|>R$ bolanda dargaýan bolsa, onda R sana ol hataryň ýygnanma radiusy, $(-R, R)$ interwala bolsa ýygnanma interwaly diýilýär.

(18) görnüşdäki islendik derejeli hatar $x=0$ nokatda ýygnanýar, çünki ol nokatda hataryň birinji agzasyndan beýleki ähli agzalary nola deň we şonuň esasynda onuň bölekleýin jeminiň predeli bardyr, ýöne derejeli hatar ähli san okunda hem, san okunda ýerleşýän interwalda hem ýygnanýan bolup biler. Onuň şeýledigini aşakdaky mysallar görkezýär.

8-nji mysal. Derejeli hatarlaryň ýygnanmagyny derňemeli:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \qquad \text{ç) } \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

$\lhd$ $\forall x$ üçin

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça san okunda ýygnanýar;

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|,$$

ýagny hatar Dalamberiň nyşany boýunça $|x|<1$ bolanda ýygnanýar, $|x|>1$ bolanda bolsa dargaýar;

$$\text{ç) } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

şoňa görä hatar Dalamberiň nyşany boýunça dargaýar. Diýmek, hatar diňe bir $x=0$ nokatda ýygnanýar. $\rhd$

Bellik. Eger (18) derejeli hatar diňe bir nokatda ýygnanýan bolsa, onda $R=0$, eger-de ol hatar ähli x üçin ýygnanýan bolsa, onda $R=\infty$ hasap edilýär.

Beýleki hallarda (18) hataryň ýygnanma radiusynyň onuň koeffisiýentleri arkaly tapylyş formulasyny görkezeliň.

Goý, $\forall n=1, 2, \ldots$ üçin $c_n \neq 0$ we

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{R} \tag{21}$$

predel bar bolsun. Onda Dalamberiň nyşanyny $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n x^n|$ hatara ulanyp alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||x| = \frac{|x|}{R}.$$

Şonuň üçin hatar $|x|<R$ bolanda ýygnanýar, $|x|>R$ bolanda dargaýar, ýagny R (18) hataryň ýygnanma radiusydyr. (21) deňligiň esasynda ýygnanma radiusy tapmak üçin şeýle formula alynýar:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{22}$$

Bellik. (17) derejeli hataryň hem ýygnanma radiusy (22) formula boýunça tapylýar, ýöne ol hataryň ýygnanma interwaly $|x-a|<R$ deňsizlikden kesgitlenýär, ýagny $(a-R,\ a+R)$ interwaldyr.

3. Derejeli hataryň jeminiň üznüksizligi we integrirlenmegi.

7-nji teorema. Eger $R>0$ san (18) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda $0<r<R$ şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $[-r,\ r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

$\lhd$ Abeliň teoremasy boýunça (18) hatar $x=r$ nokatda absolýut ýygnanýar, ýagny

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

san hatary ýygnanýar we şoňa görä $|x|\le r$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall x$ üçin $|c_n x^n|\le|c_n|r^n$ deňsizligiň esasynda, Weýerştrasyň nyşany boýunça (18) hatar $|x|\le r$ üçin, ýagny $[-r,\ r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar. $\rhd$

Bu teorema gysgaça şeýle okalýar: özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde derejeli hatar deňölçegli ýygnanýar. Ol teoremadan şeýle netijeler alynýar:

1-nji netije. Özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde derejeli hataryň $S(x)$ jemi üznüksiz funksiýadyr.

2-nji netije. Derejeli hatary özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde agzalaýyn integrirlemek bolar.

Bellik. 7-nji teorema esasynda eger $R>0$ san (17) hataryň ýygnanma radiusy bolsa, onda $0<r<R$ şerti kanagatlandyrýan $\forall r$ üçin ol hatar $[a-r,\ a+r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar.

Bu belligiň esasynda ahyrky teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

3-nji netije. (17) derejeli hataryň $S(x)$ jemi özüniň ýygnanma interwalynda tutuşlygyna ýerleşýän islendik kesimde üznüksiz, integrirlenýär we ýygnanma interwalyna degişli bolan $\forall x$ üçin

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x c_n (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}. \tag{23}$$

4. Derejeli hataryň jeminiň differensirlenmegi.

8-nji teorema. Eger $R>0$ san (18) hataryň ýygnanma radiusy we $S(x)$ ol hataryň jemi bolsa, onda ol hatardan agzalaýyn differensirlenip alynýan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \tag{24}$$

hataryň hem ýygnanma radiusy R bolar we $\forall x \in (-R, R)$ üçin

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}. \tag{25}$$

$\lhd$ Ilki (24) hataryň $(-R, +R)$ interwalda tutuşlygyna ýerleşýän islendik $[-r, +r]$ kesimde ýygnanýandygyny görkezeliň. Abeliň teoremasy boýunça $r<x_0<R$ deňsizligi kanagatlandyrýan bellenen $x_0 \in (-R, R)$ üçin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ san hatary ýygnanýar. Şonuň üçin şeýle $K>0$ san tapylyp, $\forall n$ üçin $|c_n x_0^n| \le K$ deňsizlik ýerine ýetýär. Onda $|x|\le r$ bolanda

$$|nc_n x^{n-1}| \le |nc_n r^{n-1}| = n|c_n x_0^{n-1}|\left|\frac{r}{x_0}\right|^{n-1} \le n\frac{K}{x_0}q^{n-1} \tag{26}$$

deňsizlik ýerine ýetýär, bu ýerde $q=r/x_0<1$. Şeýlelikde, $|x|\le r$ bolanda (24) hataryň agzalary

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{K}{x_0}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$$

san hatarynyň agzalaryndan uly däldir. Bu hatar Dalamberiň nyşany boýunça ýygnanýar:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1.$$

Şonuň üçin Weýerştrasyň nyşany boýunça (24) hatar $[-r, r]$ kesimde deňölçegli ýygnanýar we 5-nji torema boýunça ony agzalaýyn differensirlemek bolar, ýagny (25) deňlik islendik $x \in [-r, r]$ üçin ýerine ýetýär. Şonuň esasynda (24) hatar $(-R, +R)$ interwalyň her bir nokadynda ýygnanýar we (25) deňlik ýerine ýetýär.

$(-R, +R)$ interwalyň daşynda (24) hataryň dargaýandygyny görkezmek maksady bilen tersine, hatar $x_2 > R$ nokatda ýygnanýar diýip güman edeliň. (24) hatary $R < x_1 < x_2$ üçin $[0, x_1]$ kesimde integrirläp, (18) hatary alarys. Ol hatar $x_1 > R$ nokatda ýygnanýan bolmaly, bu bolsa şerte garşy gelýär. Şeýlelikde, (24) hatar $|x| < R$ bolanda ýygnanýar we $|x| > R$ bolanda dargaýar. Diýmek, $(-R, +R)$ interwal ol hataryň hem ýygnanma interwalydyr. ▷

Bellik. Eger (25) deňligi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

görnüşde ýazsak, onda ol deňlik teoremanyň şertlerinde hatary ýygnanma interwalynyň islendik içki nokadynda agzalaýyn differensirläp bolýandygyny we differensirlenip alnan hataryň hem ýygnanma radiusynyň R bolýandygyny görkezýär.

Bu bellik esasynda 8-nji teoremadan şeýle netije gelip çykýar.

Netije. Derejeli hatary ýygnanma interwalynda islendik gezek agzalaýyn differensirlemek bolar.

§ 12. 5. Teýloryň hatary we onuň ulanylyşy

1. Teýloryň hatary. Goý, $f(x)$ funksiýa $(a-R, a+R)$ interwalda $(x-a)$-nyň derejeleri boýunça hatara dagydylýan bolsun, ýagny

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_k(x-a)^k + \ldots \quad (|x-a| < R). \qquad (27)$$

Bu hataryň koeffisiýentleriniň nähili tapylýandygyny görkezmek maksady bilen ol hatary ýygnanma interwalynda differensirläliň:

$$f'(x)=A_1+2A_2(x-a)+3A_3(x-a)^2+4A_4(x-a)^3+...+kA_k(x-a)^{k-1}+...;$$

$$f''(x)=2A_2+2\cdot 3A_3(x-a)+3\cdot 4A_4(x-a)^2+...+k(k-1)A_k(x-a)^{k-2}+...;$$

$$f'''(x)=2\cdot 3A_3+2\cdot 3\cdot 4A_4(x-a)+...+k(k-1)(k-2)A_k(x-a)^{k-3}+...;$$

....

$$f^{(k)}(x)=k(k-1)(k-2)...2A_k+(k+1)k...2(x-a)+... .$$

Bu deňlikleriň ählisinde $x=a$ goýup alarys:

$$f(a)=A_0,\quad f'(a)=A_1,\quad f''(a)=2A_2,$$

$$f'''(a)=2\cdot 3A_3,\quad ...,\quad f^{(k)}(a)=2\cdot 3...(k-1)kA_k.$$

Bu deňliklerden (27) hataryň koeffisiýentlerini taparys:

$$A_0=f(a),\qquad A_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\qquad (k=1,2,...). \tag{28}$$

Bu aňlatmalary (27) hatarda goýup alarys:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$

$$+...+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+... . \tag{29}$$

Bu deňligiň sagyndaky hatara Teýloryň hatary diýilýär. Ondan $a=0$ bolanda alynýan

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+... \tag{30}$$

hatara Makloreniň hatary diýilýär.

Funksiýany Teýloryň derejeli hatary görnüşinde aňlatmagyň zerur we ýeterlik şertini görkezmek üçin Teýloryň formulasyna garalyň. Eger $S_n(x)$ Teýloryň hatarynyň bölekleýin jemi bolsa, onda Teýloryň formulasyny

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x) \tag{31}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $r_n(x)$ Teýloryň formulasynyň galyndy agzasy:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (c \in (a-R,\, a+R)). \tag{32}$$

(31) deňlikden görnüşi ýaly, Teýloryň hatarynyň $f(x)$ funksiýa ýygnanmagy üçin

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \tag{33}$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Funksiýanyň Teýloryň hatary boýunça aňladylmagynyň amalyýetde ulanmak üçin amatly bolan ýeterlik şerti aşakdaky teoremada beýan edilýär.

9-nji teorema. Eger $|x-a|<R$ şerti kanagatlandyrýan ähli x üçin $f(x)$ funksiýanyň önümleriniň hemmesi şol bir $K>0$ san bilen çäklenen bolsa, ýagny

$$|f^{(n)}(x)| \le K \quad (n=1, 2, ...) \tag{34}$$

bolsa, onda ol funksiýa üçin Teýloryň hatary $(a-R,\, a+R)$ interwalda ýygnanýar we onuň jemi $f(x)$ funksiýa deňdir.

◁ Teoremanyň şertlerinde (32) deňlikden alarys:

$$|r_n(x)| = |f^{(n+1)}(c)|\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le K\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad (|x-a|<R). \tag{35}$$

Dalamberiň nyşany boýunça $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ hataryň ýygnanýandygy sebäpli, ol hataryň umumy agzasy nola ymtylýar, ýadny $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle n_0 nomer tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin $\left|\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{\varepsilon}{K}$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şeýlelikde, $\forall\varepsilon>0$ üçin n_0 nomer tapylyp, $\forall n>n_0$ we $\forall x \in (a-R,\, a+R)$ üçin $|r_n(x)|<\varepsilon$, ýagny $f(x)$ funksiýanyň Teýlor hatarynyň şol funksiýa ýygnanmagynyň zerur we ýeterlik şerti bolan (33) deňlik ýerine ýetýär. ▷

Subut etmezden funksiýanyň Teýloryň hataryna dagydylmasynyň ýeke-täkdigini belläliň.

2. Funksiýalaryň Teýloryň hataryna dagydylyşy. Käbir elementar funksiýalaryň Teýloryň hataryna ($a=0$ halda) dagydylyşynyň mysallaryny görkezeliň.

1) $f(x)=(1+x)^p$, p – hakyky san.

Bu funksiýanyň önümlerini tapalyň:

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1};$$

$$f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2};$$

$$f'''(x)=p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3};$$

....

$$f^{(n)}(x)=p(p-1)...(p-(n-1))(1+x)^{p-n}.$$

Onda

$$f(0)=1,\quad f'(0)=p,\quad f''(0)=p(p-1),\quad f'''(0)=p(p-1)(p-2),\quad ...,$$

$$f^{(n)}(0)=p(p-1)...[p-(n-1)]$$

bolar. Şoňa görä (30) formula boýunça $f(x)=(1+x)^p$ funksiýa üçin Teýloryň hatary şeýle görnüşde bolar:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}x^n. \qquad (36)$$

(22) formulany ulanyp, bu hataryň ýygnanma radiusyny tapalyň:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p(p-1)...(p-n+1)(n+1)!}{p(p-1)...(p-n+1)(p-n)n!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{p-n}\right|=1.$$

Seýlelikde, (36) hatar $|x|<1$ bolanda ýygnanýar. Ol hataryň jeminiň $|x|<1$ bolanda $(1+x)^p$ funksiýa deňdigini, ýagny ol funksiýa üçin Teýloryň

$$(1+x)^p=1+\frac{p}{1}x+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+...+$$

$$+\frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!}x^n+... \qquad (37)$$

formulasyny görkezmek bolar.

Bu formuladan peýdalanyp, dürli funksiýalaryň derejeli hatara dagydylyşyny görkezmek bolar. Mysal üçin, $p=-1$ bolanda (37) formuladan $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ funksiýanyň hatara dagydylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...(|x|<1). \quad (38)$$

Eger bu formulada x-i $(-x)$ bilen çalşyrsak, onda $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ funksiýanyň derejeli hatara dagydylyşyny alarys:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...(|x|<1). \quad (39)$$

(38) we (39) deňlikleri 0-dan x-e çenli integrirläp, degişlilikde

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}+...(|x|<1), \quad (40)$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^k}{k}-...(|x|<1) \quad (41)$$

formulalary alarys.

2) $f(x)=e^x$ funksiýanyň islendik önümi üçin $(-r, r)$ interwalda $|f^{(n)}(x)|=e^x<e^r$ deňsizligiň ýerine ýetýändigi sebäpli, ol funksiýa üçin

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (42)$$

formulany alarys. Bu deňligiň esasynda

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+... \quad (43)$$

formulany, olardan bolsa $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ deňlikler esasynda

$$chx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad shx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (44)$$

formulalary alarys.

3) $f(x)=\sin x$ we 4) $f(x)=\cos x$ funksiýalaryň ikisi üçin hem $|f^{(n)}(x)|\le 1$ bolýandygy sebäpli, olaryň ikisi hem Teýloryň hataryna dagydylýar:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{45}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{46}$$

(42)-(46) hatarlaryň hemmesi san okunda ýygnanýar.

3. Teýloryň hatarynyň ulanylyşy. Hatarlar dürli takmyn hasaplamalarda, hususan-da, trigonometrik we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny, sanlaryň logarifmlerini we kökleri, kesgitli integrallary hasaplamakda giňden ulanylýar. Logarifm we görkezijili funksiýalaryň bahalaryny hasaplamakda (40), (41) we (42), (43), sinusyň we kosinusyň bahalaryny hasaplamakda (45) we (46), kökleri hasaplamakda (37) formulalary ulanmak bolar. Integraly takmyn hasaplamak üçin ilki integral astyndaky funksiýa hatara dagydylýar we soňra ol hatar agzalaýyn integrirlenilýär. Olary myssallarda görkezeliň.

9-njy mysal. cos1 sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

$\lhd$ $x=1$ bolanda (46) formuladan alarys:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} -$$

$$- \frac{1}{720} + \frac{1}{40320} - \ldots .$$

Bu hatar alamatlary gezekleşýän hatapdyr we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şeýle hataryň jemi onuň ilkinji n agzalarynyň jemi bilen çalşyrylanda alnan hatanyň ilkinji taşlanan agzanyň modulyndan uly däldigi we $\frac{1}{40320} < \frac{1}{10000} = 0,0001$ bolýandygy sebäpli, berlen takyklykda hasaplamak üçin hataryň ilkinji dört agzalarynyň jemini almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\cos 1 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} \approx 0,5403. \rhd$$

10-njy mysal. $\sqrt{26}$ sany 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

$\lhd$ (37) formulany ulanmak üçin, ilki ony özgerdeliň:

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = \sqrt{25(1+1/25)} = 5(1+1/25)^{1/2}.$$

$x = 1/25$ we $p = 1/2$ üçin (37) formulany ulanyp alarys:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{25}\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{25}\right)^4+\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2\cdot 25}-\frac{1}{2^3\cdot 25^2}+\frac{1}{2^4\cdot 25^3}-\frac{5}{2^7\cdot 25^4}+\ldots.$$

Bu hatar ikinjiden başlap agzalarynyň alamatlary gezekleşýän hatar we onuň üçin Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýär. Şoňa görä $\dfrac{1}{2^4\cdot 25^3} = \dfrac{1}{250000} < 0,0001$ bolýandygy üçin hataryň ilkinji üç agzasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{50}-\frac{1}{8\cdot 625} = \frac{5099}{5000}.$$

Şonuň esasynda $\sqrt{26} \approx 5\cdot\dfrac{5099}{5000} = 5,099.$ ▷

11-nji mysal. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x/4)}{x}dx$ integraly 0,0001 takyklykda hasaplamaly.

◁ Ilki bilen (45) formuladan peýdalanyp, integral astyndaky aňlatmany özgerdeliň:

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{x} = \frac{\frac{x}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{4}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{x}{4}\right)^7+\ldots}{x} =$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{3!}\frac{x^2}{4^3}+\frac{1}{5!}\frac{x^4}{4^5}-\frac{1}{7!}\frac{x^6}{4^7}+\ldots.$$

Alnan hatary agzalaýyn integrirläp alarys:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x/4)}{x}dx = \left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{x^5}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{x^7}{7\cdot 7!\cdot 4^7}+\ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\cdot 4^7}+\ldots.$$

Bu hatar üçin hem Leýbnisiň nyşanynyň şertleri ýerine ýetýändigi we $\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{10000}$ bolýandygy üçin, hataryň iki agzasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde,

$$\int_0^1 \frac{\sin(x/4)}{x}dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 4^3}\approx 0,25000-0,00086=0,2491. \triangleright$$

§ 12. 6. Agzalary kompleks bolan hatarlar

1. Kompleks sanlaryň yzygiderliginiň predeli. Kompleks sanlaryň $\{c_n\}$ yzygiderligine garalyň, bu ýerde $c_n=a_n+ib_n$, a_n we b_n hakyky sanlar.

Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle n_0 nomer tapylyp, $\forall n>n_0$ üçin $|c_n-c|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda $c=a+ib$ sana $\{c_n\}$ yzygiderligiň predeli diýilýär. Bu halda $\{c_n\}$ yzygiderlige c sana ýygnanýan yzygiderlik diýilýär we ol $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ görnüşde ýazylýar.

Kompleks sanyň modulynyň kesgitlemesi boýunça

$$|c_n-c|=|a_n+ib_n-(a+ib)|=|(a_n-a)+i(b_n-b)|=$$
$$=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}=\rho(M_n,M), \qquad (1)$$

bu ýerde $\rho(M_n, M)$ san $M_n(a_n, b_n)$ we $M(a, b)$ nokatlaryň, ýagny c_n we c sanlary şekillendirýän nokatlaryň arasyndaky uzaklykdyr. Şonuň üçin $|c_n-c|<\varepsilon \Leftrightarrow \rho(M_n, M)<\varepsilon$ esasynda c sanyň $\{c_n\}$ yzygiderligiň predeli bolmagynyň geometrik manysy $\forall\varepsilon>0$ üçin ol yzygiderligiň n_0 nomerden soňky ähli agzalarynyň merkezi c nokatda bolan ε radiusly tegelekde ýerleşýändigini we n-iň artmagy bilen onuň c sana çäksiz ýakynlaşýandygyny aňladýar.

$\{c_n\}=\{a_n+ib_n\}$ yzygiderligiň ýygnanmagy $\{a_n\}$ we $\{b_n\}$ yzygiderlikleriň ýygnanmagyna deňgüýçlüdir (ony (1) deňligi ulanyp aňsat görkezmek bolar).

2. Agzalary kompleks sanlar bolan hataryň ýygnanmagy. Eger agzalary $c_n=a_n+ib_n$ kompleks sanlar bolan

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{2}$$

hataryň bölekleýin $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ jeminiň $\{S_n\}$ yzygiderliginiň predeli bar bolsa, onda (2) hatara ýygnanýan hatar, $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ predele bolsa onuň jemi diýilýär.

Agzalary kompleks sanlar bolan (2) hatara agzalary hakyky sanlar bolan iki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hatarlar degişlidir. Kompleks sanlaryň yzygiderligi üçin bolşy ýaly, (2) hataryň ýygnanmagynyň şol iki hataryň ýygnanmagyna deňgüýçlüdigini görkezmek bolar. Eger şonda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S'$ we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S''$ bolsa, onda $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = S' + iS''$ bolar.

Agzalary kompleks sanlar bolan (2) hatar üçin onuň agzalarynyň modullaryndan düzülen hatara garalyň:

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|. \tag{3}$$

Bu hataryň agzalary hakyky sanlardyr.

10-njy teorema. Eger (2) hataryň agzalarynyň modullaryndan düzülen (3) hatar ýygnanýan bolsa, onda (2) hatar ýygnanýandyr.

$\triangleleft$ Goý, $c_n = a_n + ib_n$ bolsun, onda $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ bolar. Şonuň üçin

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|, \quad |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|$$

deňsizlikler ýerine ýetýär. Agzalary otrisatel däl hakyky sanlar bolan hatarlar üçin belli bolan deňeşdirme nyşany boýunça bu ýerden (3) hataryň ýygnanmagyndan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hatarlaryň, ýagny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ we $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hatarlaryň absolýut we şonuň esasynda olaryň özleriniň hem ýygnanmagy gelip çykýar. Olaryň ýygnanmagy bolsa (2) hataryň ýygnanmagyna deňgüýçlüdir. $\triangleright$

Subut edilen bu teorema agzalary kompleks sanlar bolan hatarlary derňemekde agzalary otrisatel däl hakyky sanlar bolan hatarlar üçin belli bolan ähli nyşanlary ulanmaklyga mümkinçilik berýär.

12-nji mysal. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ hataryň ýygnanmagyny derňemeli.

$\triangleleft$ Hataryň agzalarynyň absolýut ululyklaryndan düzülen hatara Dalamberiň nyşanyny ulanyp alarys:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!|1+i|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 < 1,$$

ýagny hatar absolýut ýygnanýar we şonuň esasynda teorema boýunça hatar ýygnanýar. $\triangleright$

3. Agzalary kompleks funksiýalar bolan derejeli hatarlar.

$c = a + ib$, $c_k = a_k + ib_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ ...)$ kompleks sanlardan we $z = x + iy$ kompleks funksiýadan düzülen

$$c_0 + c_1(z-c) + c_2(z-c)^2 + ... + c_n(z-c)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n \quad (4)$$

hatara derejeli hatar diýilýär, bu ýerde a, b, a_k, b_k hakyky sanlar bolup, x we y hakyky funksiýalardyr. Bu hatardan $c = 0$ bolanda alynýan

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (5)$$

hatar hem derejeli hatardyr. (5) hatary (4)-den $w = z - c$ çalşyrma girizip hem almak bolar. Ýönekeýlik üçin (5) hatary derňäris.

Abeliň teoremasy. Eger (5) derejeli hatar $z = z_0 \neq 0$ bolanda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar $|z| < |z_0|$ şerti kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin hem ýygnanýar, özem absolýut ýygnanýar.

Bu teoremanyň subudy agzalary hakyky sanlar bolan derejeli hatar üçin degişli teoremanyň subut edilişi ýalydyr.

Abeliň teoremasynyň tassyklamasynyň geometrik manysy şeýledir: eger (5) derejeli hatar kompleks tekizligiň käbir z_0 nokadynda ýygnanýan bolsa, onda ol hatar radiusy $|z_0|$ we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelegiň içinde ýygnanýandyr.

Abeliň teoremasyndan görnüşi ýaly, (5) hataryň ýygnanma oblasty radiusy R we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan tegelek bolup, şol tegelegiň içinde hatar absolýut ýygnanýar, onuň araçäginde, ýagny töweregiň nokatlarynda hatar ýygnanýan hem, dargaýan hem bolup biler. Şol tegelege (5) hataryň ýygnanma tegelegi, onuň R radiusyna bolsa ýygnanma radiusy diýilýär. Eger hatar diňe bir nokatda ýygnanýan bolsa, onda $R=0$ hasap edilýär, eger-de hatar ähli z üçin ýygnanýan bolsa, onda $R=\infty$ hasap edilýär.

(5) hataryň ýygnanma radiusynyň tapylyşy agzalary hakyky sanlar bolan hatar üçin tapylyşy ýalydyr. Mysal üçin, ony $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ formula boýunça tapmak bolar.

13-nji mysal. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ hataryň ýygnanma radiusyny tapmaly.

$\lhd$ Hatar üçin $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$

Şonuň üçin hatar islendik z ücin ýygnanýar.

4. Eýleriň formulasy. Eger kompleks z funksiýa üçin

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

hatara seretsek, onda 13-nji mysalyň esasynda ol hatar ähli z üçin ýygnanýar. Onuň jemini e^z bilen belgiläliň, ýagny

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots.$$

Bu deňlikde $z=ix$ çalşyrmany girizip, şeýle deňligi alarys:

$$e^{ix} = 1+\frac{(ix)}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\ldots+\frac{(ix)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right).$$

Şeýlelikde, (45) we (46) formulalar esasynda bu deňligi şeýle ýazmak bolar:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{6}$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x. \qquad (7)$$

(6) we (7) formulalara Eýleriň formulasy diýilýär. Ol formulalardan $\cos x$ we $\sin x$ funksiýalar üçin şeýle formulalar alynýar:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Eger $z = x + iy$ bolsa, onda $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy}$ deňligiň esasynda (6) deňligi ulanyp,

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

formulany alarys.

§ 12. 7. Furýeniň hatarlary

1. Furýeniň trigonometrik hatary. Trigonometrik funksiýalaryň sistemasy atlandyrylýan

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \qquad (1)$$

sistema garalyň. Onuň şeýle häsiýetleri bardyr:

1. Sistemanyň islendik dürli iki funksiýasynyň köpeltmek hasylynyň $[-\pi, \pi]$ kesimdäki integraly nola deňdir. Bu häsiýete (1) sistemanyň şol kesimdäki ortogonallyk häsiýeti diýilýär.

2. $\forall n \in N$ üçin

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \pi$$

deňlik dogrudyr.

◁ Hakykatdan-da $\forall n, m \in N$, $n \neq m$, üçin

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] dx =$$

$$= \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx =$$

$$= -\frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi. \triangleright$$

Berlen (1) trigonometrik funksiýalaryň sistemasy esasynda düzülen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2}$$

hatara Furýeniň trigonometrik hatary, ol hatardaky a_0, a_n, b_n $(n \in N)$ sanlara bolsa onuň koeffisiýentleri diýilýär.

11-nji teorema. Goý, (2) hatar $[-\pi, \pi]$ kesimde deňölçegli ýygnanýan bolsun we onuň $f(x)$ jemi üçin

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3}$$

deňlik ýerine ýetsin, onda (2) hataryň koeffisiýentleri üçin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n=0, 1, 2, ..., \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n=1, 2, ...$$

formulalar dogrudyr.

◁ (3) deňligiň sag bölegindäki hataryň $[-\pi, \pi]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandygy we onuň ähli agzalarynyň şol kesimde üznüksizligi sebäpli, ol hataryň $\cos mx$ $(m=0, 1, 2, ...)$ funksiýa köpeldilmeginden alynýan hatar hem şol kesimde deňölçegli ýygnanýandyr we ol hataryň ähli agzalary üznüksizdir. Şoňa görä ol hatary $[-\pi, \pi]$ kesimde agzalaýyn integrirläp bolýandyr.

Aýdylanlaryň esasynda (3) deňligiň iki bölegini hem $\cos mx$ funksiýa köpeldip we alnan hatary $[-\pi, \pi]$ kesimde agzalaýyn integrirläp hem-de (1) sistemanyň häsiýetlerinden peýdalanyp,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx = \pi a_m, \quad m=0, 1, 2, ...$$

deňligi alarys. Edil şuňa meňzeşlikde, (3) deňligiň iki bölegini hem $\sin mx$ funksiýa köpeldip we alnan hatary $[-\pi, \pi]$ kesimde integrirläp,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx dx = \pi b_m, \quad m=1, 2, ...$$

deňligi alarys. Bu deňliklerden bolsa subut edilmeli (4) deňlikler gelip çykýar. ▷

Koeffisiýentleri (4) formulalar boýunça kesgitlenýän (2) trigonometrik hatara f funksiýa üçin Furýeniň trigonometrik hatary ýa-da gysgaça Furýeniň hatary, a_n we b_n sanlara bolsa Furýeniň koeffisiýentleri diýilýär.

$[-\pi, \pi]$ kesimde f funksiýa üçin düzülen Furýeniň hatary

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{5}$$

görnüşde ýazylýar. Bu ýazgy (2) hataryň f funksiýa üçin Furýeniň hatary bolup, ol hataryň jeminiň f funksiýa deň bolýandygyny aňlatmaýar, ýöne 1-nji teorema esasynda islendik deňölçegli ýygnanýan trigonometrik Furýeniň hatary şol hataryň jeminiň Furýe hatarydyr.

f funksiýa üçin düzülen Furýeniň hatary haýsy şertlerde şol funksiýa ýygnanýarka diýen soraga jogaby aşakdaky teorema berýär.

12-nji teorema. Goý, $f(x)$ funksiýa we onuň $f'(x)$ önümi $[-\pi, \pi]$ kesimde üznüksiz ýa-da olaryň 1-nji görnüşdäki tükenikli sany üzülme nokatlary bar (ýagny bölek üznüksiz) bolsun. Onda $f(x)$ funksiýanyň Furýe hatary san okunda ýygnanýar, şonda funksiýanyň üznüksiz bolan her bir $x \in (-\pi, \pi)$ nokadynda hataryň jemi $f(x)$ funksiýa deň bolar, funksiýanyň her bir üzülme x_0 nokadynda bolsa hataryň jemi $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ bolar. $[-\pi, \pi]$ kesimiň uçlarynda bolsa ol jem $S(\pm\pi) = \dfrac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ bolar.

Bellik. Eger san okunda kesgitlenen we 2π periodly periodik $F(x)$ funksiýa üçin $[-\pi, \pi]$ kesimde $F(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetse, onda $F(x)$ funksiýa $f(x)$ funksiýanyň periodik dowamy diýilýär.

Eger $[-\pi, \pi]$ kesimde Furýeniň hatary $f(x)$ funksiýa ýygnanýan bolsa, onda ol hatar san okunda onuň periodik dowamyna ýygnanýar.

2. Jübüt we täk fuksiýalar üçin Furýeniň hatarlary. Eger $[-\pi, \pi]$ kesimde f funksiýa jübüt bolsa, onda bu halda $f(x)\cos nx$ funksiýa hem jübüt bolar, $f(x)\sin nx$ funksiýa bolsa täk bolar. Şonuň üçin kesgitli integralyň häsiýeti boýunça (4) formula

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n=0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

$$b_n=0, \quad n=1, 2, ...$$

görnüşi alar we bu deňlikleriň esasynda jübüt funksiýanyň Furýe hatary

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{7}$$

görnüşde ýazylar. Bu halda Furýeniň hatary diňe kosinuslary özünde saklaýar.

Eger f funksiýa $[-\pi, \pi]$ kesimde täk bolsa, onda $f(x)\cos nx$ funksiýa hem täkdir, $f(x)\sin nx$ funksiýa bolsa jübütdir. Şoňa görä Furýeniň koeffisiýentleri

$$a_n=0, \quad n=0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n=1, 2, ... \tag{8}$$

görnüşi alar. Şonuň esasynda täk funksiýanyň Furýe hatary şeýle ýazylar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{9}$$

Bu halda Furýeniň hatary diňe sinuslary özünde saklaýar.

14-nji mysal. $f(x)=x$ funksiýany Furýeniň hataryna dagytmaly.

◁ Bu funksiýa üçin 12-nji teoremanyň şertleri ýerine ýetýär, şoňa görä ol funksiýa Furýeniň hataryna dagydylýar. Onuň täkdigi sebäpli, (8) formula esasynda $a_n=0$, b_n bolsa (8)-den kesgitlenýär. Bölekleýin integrirlemek usuly esasynda

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Şonuň üçin (9) formula boýunça

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + ...\right). \triangleright$$

15-nji mysal. $f(x)=x^2$ funksiýany Furýeniň hataryna dagytmaly.

◁ Bu funksiýa üçin 12-nji teoremanyň şertleri ýerine ýetýär, şoňa görä ol funksiýa Furýeniň hataryna dagydylýar. Onuň jübütdigi sebäpli, (6) formula esasynda $b_n=0$, a_n bolsa (6)-dan kesgitlenýär. Bölekleýin integrirlemek usuly esasynda

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx\right] = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Şonuň üçin (7) formula boýunça

$$x^2 = \frac{\pi^3}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - ...\right). \triangleright$$

3. [–l, l] kesimde kesgitlenen funksiýa üçin Furýeniň hatary. Ýokarda garalan [$-\pi$, π] kesimde kesgitlenen $f(x)$ funksiýa üçin Furýeniň hatarynyň teoriýasyny [$-l$, l] kesimde kesgitlenen funksiýa geçirmek maksady bilen $x = lt/\pi$ çalşyrma girizeliň. Şunlukda, $-l \le x \le l$ bolanda $-\pi \le t \le \pi$ bolar. Şonuň üçin t üýtgeýäniň funksiýasy bolan $p(t)=f(lt/\pi)$ funksiýa [$-\pi$, π] kesimde kesgitlenen funksiýa hökmünde garap, onuň üçin Furýeniň hataryny ýazmak bolar:

$$p(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Bu hataryň Furýe koeffisiýentleri şeýle kesgitlenýär:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos ntdt, \qquad n=0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin ntdt, \qquad n=1, 2, ...$$

Ozalky x üýtgeýäne geçip, [$-l$, l] kesimde berlen f funksiýa üçin Furýeniň hataryny we onuň koeffisiýentlerini

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} xdx, \qquad n=0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} xdx, \qquad n=1, 2, ...$$

görnüşde ýazarys. Şunlukda, eger f jübüt bolsa, onda onuň Furýe hatary we koeffisiýentleri

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} xdx, \qquad n=0, 1, 2, ...,$$

görnüşi alar. Eger-de f täk bolsa, onda olar şeýle görnüşi alar:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \qquad n=1, 2, \ldots .$$

Eger funksiýa $[0, l]$ kesimde berlen bolsa, onda ony talap edilişine görä diňe kosinuslar boýunça hem, diňe sinuslar boýunça hem Furýeniň hataryna dagytmak bolar. Onuň üçin berlen funksiýany $[-l, 0]$ kesime jübüt funksiýa hökmünde ýa-da täk fuňksiýa hökmünde dowam etdirmeli, ýöne $[0, l]$ kesimde berlen funksiýany $[-l, 0]$ kesime başga hili hem dowam etdirmek bolar.

§ 12. 8. Ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary

8-nji kesgitleme. Eger $[a, b]$ kesimde integrirlenýän funksiýalaryň

$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots \tag{10}$$

sistemasynyň islendik iki dürli funksiýalary üçin

$$\int_a^b p_k(x)p_m(x)dx = 0 \qquad (k \neq m) \tag{11}$$

deňlik ýerine ýetse, onda (10) sistema $[a, b]$ kesimde ortogonal sistema diýilýär. Eger-de ondan daşgary

$$\int_a^b p_k^2(x)dx = 1 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

şert hem ýerine ýetse, onda (10) sistema ortonormirlenen sistema diýilýär.

Trigonomertrik (1) sistemanyň $[-\pi, \pi]$ kesimde (11) deňligi kanagatlandyrýandygyny biz ýokarda görkezipdik, ýagny (1) sistema şol kesimde ortogonal sistemadyr. Şol sistemanyň ikinji häsiýeti boýunça

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots$$

sistema $[-\pi, \pi]$ kesimde ortonormirlenen sistemanyň mysaly bolup biler.

$[a, b]$ kesimde ortogonal bolan (10) sistema esasynda düzülen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \tag{13}$$

funksional hatara ortogonal sistemanyň hatary, c_n ($n=0, 1, 2, ...$) sanlara bolsa ol hataryň koeffisiýentleri diýilýär.

Trigonometrik sistema üçin Furýeniň hatarynyň koeffisiýentleriniň kesgitlenişi ýaly, (13) hataryň hem koeffisiýentlerini kesgitlemek bolar.

Goý, f funksiýa $[a, b]$ kesimde (13) hatara dagydylýan bolsun we ol hatar f funksiýa ýygnanýan bolsun, ýagny

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x). \tag{14}$$

Goý, (10) sistema $[a, b]$ kesimde ortogonal we $k=0, 1, 2, ...$ üçin

$$\int_a^b p_k^2(x)dx \neq 0 \tag{15}$$

bolsun. (13) hataryň koeffisiýentlerini tapmak üçin, ol hatardan $p_k(x)$ funksiýa köpeldilmeginden alynýan hatar agzalaýyn $[a, b]$ kesimde integrirlenýär diýip kabul edeliň. Şonuň esasynda (14) deňligiň iki bölegini hem $p_k(x)$ funksiýa köpeldip we soňra alnan hatary $[a, b]$ kesimde integrirläp, (11) şertiň esasynda

$$\int_a^b f(x)p_k(x)dx = \int_a^b p_k(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)dx = c_k \int_a^b p_k^2(x)dx$$

deňligi alarys we (15) şertiň esasynda hataryň koeffisiýentlerini taparys:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)p_k(x)dx}{\int_a^b p_k^2(x)dx}, \quad k=0, 1, 2, ... \tag{16}$$

Bellik. Eger (13) hatar $[a, b]$ kesimde f funksiýa deňölçegli ýygnanýan we $p_k(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolsalar, onda bu halda hem ol hataryň koeffisiýentleri (16) boýunça kesgitlenýändir, çünki bu halda (14) hatardan çäkli $p_k(x)$ funksiýa köpeldilip alynýan hatar hem $[a, b]$ kesimde deňölçegli ýygnanýandyr we şonuň üçin hem ony agzalaýyn integrirläp bolýandyr.

9-njy kesgitleme. Koeffisiýentleri (16) formulalar boýunça kesgitlenýän (13) hatara f funksiýanyň $[a, b]$ kesimdäki (10) ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary, c_n sanlara bolsa Furýeniň koeffisiýentleri diýilýär.

f funksiýa üçin (10) ortogonal sistema boýunça Furýeniň hatary

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

görnüşde ýazylýar.

Ortogonal sistemanyň Furýe hatary üçin hem ol hataryň haýsy şertlerde ýygnanýandygyny, haýsy şertlerde hataryň jeminiň berlen funksiýa deň bolýandygyny, haýsy şertlerde deňölçegli ýygnanýandygyny we beýleki häsiýetlerini görkezýän teoremalary subut etmek bolar.

§ 12. 9. Furýeniň hatarynyň kompleks görnüşi

Goý,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{17}$$

Furýeniň hatary berlen bolsun. Eger ozaldan mälim bolan

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) = -\frac{i}{2}(e^{inx} - e^{-inx})$$

formulalardan peýdalansak, onda (17) hatary

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}$$

görnüşde ýazmak bolar. Eger

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \overline{c_n}$$

belgilemeleri girizsek, onda ony has ýönekeý

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{18}$$

görnüşde ýazyp bileris. Indi bolsa $\cos nx \pm i\sin nx = e^{\pm inx}$ formuladan peýdalanyp, (18) hataryň Furýe koeffisiýentlerini kompleks görnüşde kesgitlemek üçin

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i\sin nx]dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad n=1, 2, ...$$

formulalary alarys. Bu formulalary birikdirip, olary

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n=0, \pm1, \pm2, ... \tag{19}$$

formula arkaly aňlatmak bolar.

Şeýlelikde, Furýeniň (2) hataryny kompleks görnüşde aňlatdyk we onuň koeffisiýentlerini kesgitlemek üçin kompleks görnüşdäki formulalary görkezdik.

(19) deňligiň bahasyny (18) formulada goýup, Furýeniň hatarynyň

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{int}}dt$$

görnüşde ýazylyşyny alarys. Edil şuňa meňzeşlikde $[-l, l]$ kesimde berlen f funksiýa üçin Furýeniň hataryny hem kompleks görnüşde ýazmak bolar.

Bellik. Biz bu ýerde $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n$ görnüşdäki hatara duş geldik. Onuň ýygnanmagyna nähili düşünilýändigini ýatlalyň. Ol hatar üçin

$S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} z_k$ jeme onuň n tertipli bölekleýin jemi diýilýär. Şunlukda, eger $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ predel bar bolsa, onda oňa ýygnanýan hatar we S sana onuň jemi diýilýär.

5-nji mysal. $f(x)=|x|$ funksiýany $(-\pi, \pi)$ interwalda kompleks görnüşdäki Furýeniň hataryna dagytmaly.

$\triangleleft$ (19) formulany ulanyp, ilki bilen Furýeniň koeffisiýentlerini tapalyň:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|dx = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} xdx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2},$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} xe^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} xe^{-inx}dx = -\frac{1}{2\pi n^2}e^{-inx}(inx+1)\Big|_{-\pi}^{0} +$$

$$+\frac{1}{2\pi n^2}e^{-inx}(inx+1)\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{1}{2\pi n^2}e^{in\pi}(1-in\pi) +$$

$$+\frac{1}{2\pi n^2}e^{-in\pi}(1+in\pi) = -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{\cos\pi n}{\pi n^2} + \frac{\sin n\pi}{n} = \frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1].$$

Tapylan koeffisiýentleri (18) formulada goýup, berlen funksiýanyň

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)x}}{(2k+1)^2}$$

görnüşdäki kompleks Furýeniň hataryny alarys. $\triangleright$

Gönükmeler

Funksional hatarlaryň ýygnanma oblastlaryny tapmaly:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{2n}(3x+2)^{2n-1}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3+x^{2n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5-x^2}{4}\right)^n$.

Funksional hatarlaryň deňölçegli ýygnanmagyny derňemeli:

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+3^n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4+n^4}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt[3]{n}}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Derejeli hatarlaryň ýygnanma radiusyny we interwalyny tapmaly:

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{2n}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}(x+3)^n$.

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n} x^2$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x+1)^n$.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n 2^{2n} x^n$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-e)^n$.

Funksiýalary Maklореniň hataryna dagytmaly:

19. $f(x)=sh3x$.

21. $f(x)=\cos 2x$.

23. $f(x)=\frac{1}{3x+4}$.

20. $f(x)=\ln(x+5)$.

22. $f(x)=\frac{1}{x+8}$.

24. $f(x)=\frac{1}{3-2x}$.

Jogaplar

1. Ähli x üçin ýygnanýar. **2.** $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. **3.** $(-3/4, -7/12)$. **4.** $(-\infty, 0)$. **5.** Ähli $x\neq\pm1$ üçin ýygnanýar. **6.** $(-3, -1)$, $(1, 3)$. **7–11.** Ähli x üçin deňölçegli ýygnanýar. **12.** Ähli x üçin ýygnanýar, ýöne deňölçegli däl. **13.** $R=4$, $(-4, 4)$. **14.** $R=1/9$, $(-1/9, 1/9)$. **15.** $R=1/4$, $(-1/4, 1/4)$. **16.** $R=0$. **17.** $R=\infty$. **18.** $R=1/e$, $(-1/e, 1/e)$. **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

20. $\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n$ $(-5<x<5)$. **21.** $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{3(n+1)}}$ $(|x|<8)$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{2(n+1)}}$ $\left(|x|<\frac{4}{3}\right)$.

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$ $\left(|x|<\frac{3}{2}\right)$.

III BAP

DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

III.1. BIRINJI TERTIPLI DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§ 1. 1. Differensial deňlemeler barada esasy düşünjeler

1. Differensial deňlemäniň kesgitlenişi we onuň çözüwi. Eger deňlemede gözlenýän funksiýa we onuň dürli tertipdäki önümleri saklanýan bolsa, onda bu deňlemä differensial deňleme diýilýär. Deňlemedäki gözlenýän funksiýanyň önüminiň ýokary tertibine deňlemäniň tertibi diýilýär.

Eger gözlenýän funksiýa bir üýtgeýänli bolsa, onda degişli differensial deňlemä ady differensial deňleme diýilýär. Eger-de gözlenýän funksiýa birnäçe üýtgeýänli bolsa, onda bu differensial deňlemä hususy önümli differensial deňleme diýilýär.

n-nji tertipli umumy ady differensial deňleme

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0 \tag{1}$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde x bagly däl üýtgeýän ululyk, $y=y(x)$ gözlenýän funksiýa, $y', y'', ..., y^{(n)}$ gözlenýän funksiýanyň önümleri, $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ bolsa berlen funksiýa.

Eger (1) deňleme $y^{(n)}$-e görä çözülen bolsa, onda ol deňlemäni

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Eger (a, b) interwalda kesgitlenen we n gezek differensirlenýän $y=\varphi(x)$ funksiýa $\forall x \in (a, b)$ üçin (1) deňlemäni

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

toždestwa öwürýän bolsa, onda $y=\varphi(x)$ funksiýa şol deňlemäniň (a, b) interwalda kesgitlenen çözüwi diýilýär.

(1) deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga şol deňleme üçin Koşiniň meselesi diýilýär.

(2) deňleme üçin Koşiniň meselesiniň çözüwiniň barlygynyň we ýeke-täkliginiň şertleri aşakdaky teoremada getirilýär (teoremany subutsyz kabul etjekdiris).

1-nji teorema. Eger $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ funksiýa we onuň $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ boýunça hususy önümleri

$$|x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b, \quad |y' - y'_0| \le b, ..., |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \le b$$

$$(a > 0, b > 0)$$

deňsizlikler bilen kesgitlenen G oblastda üznüksiz, diýmek:

$$|f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})| \le C, \qquad \left| \frac{\partial f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}} \right| \le C_1$$

$$(k=0, 1, ..., n-1)$$

çäkli bolsa, onda (1) deňlemäniň $|x-x_0| \le h$ kesimde (3) şerti kanagatlandyrýan ýeke-täk $y=y(x)$ çözüwi bardyr, bu ýerde

$$C>0, \quad C_1>0, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{\max\limits_G (C, |y'|, ..., |y^{(n-1)}|)}\right),$$

$$M(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \in G, \quad M(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in G.$$

Eger

$$\varphi = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \qquad (4)$$

funksiýa **1)** $C_1, C_2, ..., C_n$ erkin hemişelikleriň islendik bahalarynda (1) deňlemäni toždestwa öwürýän bolsa;

2) (3) şerti kanagatlandyrýan $C_1, C_2, ..., C_n$ tapylýan bolsa, onda (4) funksiýa (1) differensial deňlemäniň umumy çözüwi diýilýär.

(1) deňlemäniň (4) umumy çözüwinden erkin hemişelikleriň berlen bahasyndan alnan çözüwine, ýagny $y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ çözüwe berlen deňlemäniň hususy çözüwi diýilýär.

Eger (1) differensial deňlemäniň umumy çözüwi anyk däl görnüşde

$$G(x, y, C_1, C_2, ..., C_n)=0$$

deňlemeden kesgitlenýän bolsa, onda oňa şol deňlemäniň umumy integraly diýilýär.

§ 1. 2. Birinji tertipli differensial deňlemeleriň görnüşleri

1. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemeler. Eger deňleme

$$F(x, y, y')=0 \tag{5}$$

görnüşde berlen bolsa, onda oňa umumy görnüşdäki birinji tertipli differensial deňleme diýilýär.

Eger (5) deňlemäni y'-e görä çözüp bolsa, onda ol $y'=f(x, y)$ ýa-da $dy-f(x, y)dx=0$ görnüşde ýazylýar. Bu deňleme

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{6}$$

deňlemäniň hususy halydyr.

(5) deňlemäniň $y(x_0)=y_0$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyga şol deňleme üçin Koşiniň meselesi diýilýär.

Indi (6) deňlemäniň

$$P(x, y)=f(x)\varphi(y), \quad Q(x, y)=f_1(x)\varphi_1(y)$$

bolandaky hususy halyna seredeliň:

$$f(x)\varphi(y)dx+f_1(x)\varphi_1(y)dy=0. \tag{7}$$

Bu deňlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän (ýa-da üýtgeýänleri bölekleňýän) deňleme diýilýär.

$f_1(x)\varphi(y)\neq 0$ bolanda (7) deňlemäni $f_1(x)\varphi(y)$-e bölüp alarys:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx+\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy=0. \tag{8}$$

Bu deňlemä üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilen (ýa-da üýtgeýänleri böleklenen) deňleme diýilýär. Ol deňlemede dx-iň ýanynda diňe x-e, dy-iň ýanynda diňe y-e bagly funksiýa bardyr. (8) deňlemäni integrirläp, ol deňlemäniň

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy = C$$

umumy integralyny taparys.

1-nji mysal. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ deňlemäniň $y(1)=1$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$ görnüşde ýazyp we ony $y \neq 0$ bolanda $y^{-\frac{2}{3}}dx$ aňlatma köpeldip, $y^{-\frac{2}{3}}dy = 3dx$ deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni integrirläp, onuň umumy çözüwini taparys:

$$\int y^{-\frac{2}{3}}dy = \int 3dx, \quad y^{\frac{1}{3}} = x + C \quad \text{ýa-da} \quad y=(x+C)^3.$$

$y(1)=1$ şerti ulanyp, C-ni tapalyň:

$$y(1)=(1+C)^3=1, \quad C=0.$$

Diýmek, berlen meseläniň çözüwi $y=x^3$ bolar. ▷

2. Birjynsly differensial deňlemeler. Eger islendik t üçin

$$F(tx, ty)=t^nF(x, y) \tag{9}$$

toždestwo ýerine ýetýän bolsa, onda $F(x, y)$ funksiýa n ölçegli birjynsly funksiýa diýilýär.

Mysal üçin,

$$F_1(x, y)=4x+3y, \quad F_2(x,y) = x^2\cos\frac{x}{y} + xy, \quad F_3(x,y) = \frac{x-y}{y}$$

funksiýalar degişlilikde bir, iki we nol ölçegli birjynsly funksiýalardyr. Hakykatdan-da,

$$F_1(tx, ty)=4tx+3ty=t(4x+3y)=tF_1(x, y),$$

$$F_2(tx,ty) = (tx)^2\cos\frac{tx}{ty} + txty = t^2\left(x^2\cos\frac{x}{y} + xy\right) = t^2F_2(x,y),$$

$$F_3(tx,ty) = \frac{tx-ty}{ty} = \frac{x-y}{y} = t^0F_3(x,y).$$

Eger $P(x, y)$ we $Q(x, y)$ şol bir n ölçegli birjynsly, ýagny

$$P(tx, ty)=t^nP(x, y), \quad Q(tx, ty)=t^nQ(x, y),$$

funksiýalar bolsa, onda (6) deňlemä birjynsly differensial deňleme diýilýär. Eger bu ýerde $t = \frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ alsak, onda

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x,y), \quad Q\left(1,\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n}Q(x,y)$$

deňlikler alnar. Seýlelikde, bu halda

$$P(x,y) = x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right), \quad Q(x,y) = x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

bolar. Ol funksiýalary (6)-da ornunda goýup,

$$x^nP\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + x^nQ\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

ýa-da

$$P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy = 0 \tag{10}$$

deňlemäni alarys. Eger bu deňlemede $u=y/x$ ýa-da $y=ux$ belgileme girizsek, onda ol şeýle görnüşi alar:

$$P(1, u)dx+Q(1, u)(udx+xdu)=0 \quad \text{ýa-da}$$

$$(P(1, u)+uQ(1, u))dx+xQ(1, u)du=0.$$

Alnan deňleme üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemedir. Eger bu differensial deňlemäniň umumy integraly $\Phi(x, u, c)=0$ bolsa, onda (6) birjynsly differensial deňlemäniň umumy integraly $\Phi\left(x,\frac{y}{x},c\right) = 0$ bolar.

2-nji mysal. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ deňlemäniň çözüwini tapmaly.

◁ Berlen deňlemäni $x(x\neq 0)$ üýtgeýäne bölüp, ony

$$y' = \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

görnüşde ýazalyň. Onuň birjynsly differensial deňlemedigi aýdyňdyr. $y=ux$ belgilemäni ulanyp, $u'x + u = \sqrt{1-u^2} + u$ ýa-da

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemeden üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni we ony integrirläp, $\arcsin u = \ln|x| + \ln C_1$ $(C_1 > 0)$ ýa-da $\arcsin u = \ln C_1|x|$ deňligi alarys. $C_1|x| = \pm C_1 x$ bolýanlygy üçin $\pm C_1 = C$ belgilemäni ulanyp, $\arcsin u = \ln Cx$ deňligi alarys, bu ýerde $|\ln Cx| \leq \frac{\pi}{2}$. $u = \frac{y}{x}$ deňligi göz öňünde tutup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx \quad \text{ýa-da} \quad y = x\sin\ln Cx.$$

Deňlemäniň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edenimizde, deňlemäniň iki bölegini hem $x\sqrt{1-u^2}$ bölüpdik. Şonuň üçin käbir çözüwleri ýitirmegimiz mümkin. Goý, $x=0$ we $\sqrt{1-u^2} = 0$ bolsun. $u = \frac{y}{x}$ çalşyrmany ulanýanymyz üçin $x \neq 0$. Ikinjisinden $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$ ýa-da $y = \pm x$ alarys. Deňlemede ornunda goýup, $y = x$ we $y = -x$ funksiýalaryň hem berlen deňlemäniň çözüwidigini alarys. ▷

§ 1. 3. Birinji tertipli çyzykly we doly differensially deňlemeler

1. Birinji tertipli çyzykly differensial deňlemeleriň kesgitlenişi we umumy çözüwiniň tapylyşy. Gözlenýän funksiýa we onuň önümine görä birinji derejeli bolan

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{11}$$

deňlemä birinji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär, bu ýerde $y = y(x)$ gözlenýän funksiýa, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$ berlen üznüksiz funksiýalar. Deňlemäni $a(x) \neq 0$ funksiýa bölüp,

$$y' + p(x)y = f(x) \tag{12}$$

deňlemäni alarys, bu ýerde

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad f(x) = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

(12) deňlemäniň çözüwini $u = u(x)$, $v = v(x)$ funksiýalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde gözläliň:

$$y = uv. \tag{13}$$

Bu funksiýany we onuň $y' = u'v + uv'$ önümini (12) deňlemede goýup alarys:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

ýa-da

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x). \tag{14}$$

$v = v(x)$ funksiýany

$$v' + p(x)v = 0 \tag{15}$$

deňlemäni çözüp taparys. (15)-i göz öňünde tutup, (14)-den alarys:

$$u'v = f(x). \tag{16}$$

(15) we (16) deňlemeler üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemelerdir. (15) deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Ony

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

görnuşde ýazyp, üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edeliň we integrirläliň:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \quad v = C_1 e^{-\int p(x)dx}. \tag{17}$$

Tapylan $v(x)$ funksiýany (16) deňlemede ornunda goýup, $u' = \frac{1}{C_1} f(x) e^{\int p(x)dx}$ deňlemäni alarys. Ony integrirläp taparys:

$$u(x) = \frac{1}{C_1} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_2. \tag{18}$$

(17) we (18) formulalar boýunça tapylan v we u funksiýalary (13)-de ornunda goýup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right) \quad (C = C_1 C_2). \tag{19}$$

3-nji mysal. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ deňlemäni çözmeli.

◁ (19) formulany peýdalanyp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň:

$$y = e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(2\int xdx + C\right) =$$

$$= e^{-x^2}(x^2 + C). \triangleright$$

2. Doly differensially deňlemeleriň kesgitlenişi we umumy çözüwi. Eger (6) deňlemäniň çep bölegi käbir $F=F(x,y)$ funksiýanyň doly differensialy, ýagny $dF=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ bolsa, onda (6) deňlemä doly differensially deňleme diýilýär.

Bu ýagdaýda (6) deňlemäni $dF(x, y)=0$ görnüşde ýazyp, ol deňlemäniň $F(x, y)=C$ umumy integralyny taparys. $F=F(x, y)$ funksiýa üçin

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

deňlik esasynda şeýle deňlikleri alarys:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

Aşakdaky tassyklama dogrudyr.

(6) deňlemäniň doly differensially deňleme bolmagy üçin $P(x, y)$ we $Q(x, y)$ funksiýalaryň kesgitlenen D oblastynda $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ we $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ üznüksiz önümleri bar bolup,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{20}$$

şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Eger (20) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (6) deňlemäniň umumy integraly

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

ýa-da

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

görnüşde tapylýar.

4-nji mysal. $2x\cos^2 ydx + (8\sqrt[3]{y} - x^2\sin 2y)dy = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde

$$P(x, y) = 2x\cos^2 y, \quad Q(x,y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2\sin 2y.$$

Şonuň esasynda

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2x(-2\sin y\cos y) = -2x\sin 2y,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -2x\sin 2y.$$

Şeýlelikde, (20) deňlik ýerine ýetýär we şonuň üçin berlen deňleme doly differensially deňlemedir. Onuň umumy integraly:

$$\int_0^x 2x\cos^2 ydx + \int_0^y 8\sqrt[3]{y}\,dy = C,$$

$$x^2\cos^2 y + 6y\sqrt[3]{y} = C.$$

Bu ýerde (x_0, y_0) nokadyň ornuna koordinatalar başlangyjyny aldyk we umumy integraly tapmagyň ikinji formulasyny ulandyk.

3. Deňlemäniň doly differensially deňlemä getirilişi. Eger (20) şert ýerine ýetmese, onda (6) deňleme doly differensially deňleme däldir. Käbir hallarda bu deňlemäni integrirleýji köpeldiji atlandyrylýan $\mu = \mu(x, y)$ funksiýa köpeldip, doly differensially deňlemä getirmek bolar.

1-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe x-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji şeýle kesgitlenýär:

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx}. \tag{21}$$

2-nji hal. Eger

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \psi(y)$$

bolsa, ýagny gatnaşyk diňe y-e bagly funksiýa bolsa, onda integrirleýji köpeldiji

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy} \tag{22}$$

formuladan tapylýar.

5-nji mysal. $ydx + x(\ln x - y^3)dy = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu ýerde $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x(\ln x - y^3)$. Şonuň üçin $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \ln x - y^3$ we (20) şert ýerine ýetmeýär, ýöne

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1 - 1 - \ln x + y^3}{x(\ln x - y^3)} = -\frac{1}{x} = \varphi(x)$$

bolýany üçin (21) formulany ulanyp, berlen deňlemäni doly differensially deňlemä getirýän $\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ integrirleýji köpeldijini taparys. Şonuň üçin berlen deňlemäniň iki bölegini hem $1/x$-e köpeldip alarys:

$$\frac{y}{x}dx + (\ln x - y^3)dy = 0.$$

Alnan deňlemäniň doly differensially deňlemedigini görkezmek kyn däldir. (x_0, y_0) nokady $(1; 0)$ diýip, berlen deňlemäniň umumy çözüwini alarys:

$$\int_1^x \frac{y}{x}dx + \int_0^y (-y^3)dy = C, \quad y\ln x\,\Big|_1^x - \frac{y^4}{4}\Big|_0^y = C$$

ýa-da $y\ln|x| - \frac{y^4}{4} = C$. ▷

III.2. ÝOKARY TERTIPLI DIFFERENSIAL DEŇLEMELER

§ 2. 1. Käbir *n*-nji tertipli integrirlenýän differensial deňlemeleriň görnüşleri. Tertibi peseldilýän deňlemeler

1. $y^{(n)}=f(x)$ görnüşdäki deňleme. Üznüksiz $f(x)$ funksiýa üçin bu deňlemäniň umumy çözüwini n gezek integrirläp taparys:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)dxdx + C_1 x + C_2,$$

....

$$y = \int ... \int f(x)dx...dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n.$$

Alnan funksiýa berlen deňlemäniň umumy çözüwidir. Bu çözüwde kesgitsiz integrallary ýokarky çägi üýtgeýänli kesgitli integrallar bilen çalşyrmak bolar, ýagny ony

$$y = \int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx...dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazmak bolar. Koşiniň

$$\int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx...dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

formulasyny peýdalanyp, umumy çözüwi

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_9}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

görnüşde ýazarys. Eger berlen deňlemäniň

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y'_0,\ \ ...,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (1)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaklyk talap edilýän bolsa, onda berlen deňlemäni yzygiderli n gezek x_0-dan x-e çenli integrirläp, bu meseläniň çözüwini taparys:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt +$$

$$+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + ... + y_0' \,(x-x_0) + y_0$$

ýa-da

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + y_0.$$

1-nji mysal. $y'''=\sin x+\cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Üç gezek yzygiderli integrirläp, alarys:

$$y''=-\cos x+\sin x+C_1,$$

$$y'=-\sin x-\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y = \cos x - \sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Indi berlen deňlemäniň $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapalyň. Bu şertleri ulanyp, näbelli hemişelikleri tapmak üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases}2 = 1 + C_3,\\ 1 = -1 + C_2,\\ 0 = -1 + C_1.\end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 1.$$

Şeýlelikde, deňlemäniň berlen şertleri kanagatlandyrýan hususy çözüwi

$$y = \cos x - \sin x + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1. \,\triangleright$$

2. $F(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0$ görnüşdäki deňleme. $y^{(n-1)}=z$ çalşyrmany ulanyp, bu deňlemäni $F(z, z')=0$ görnüşde ýazarys. Eger alnan deňlemäniň umumy çözüwi $z=\varphi(x, C_1)$ bolsa, onda çalşyrmanyň esasynda 1-nji görnüşdäki $y^{(n-1)}=\varphi(x, C_1)$ differensial deňlemäni alarys.

2-nji mysal. $z''' = \sqrt{1+(y'')^2}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\lhd$ $y''=z$ çalşyrmany ulanyp, birinji tertipli $z' = \sqrt{1+z^2}$ ýa-da $\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$ deňlemäni alarys. Üýtgeýänleri aýyl-saýyl edeliň we alnan deňlemäni integrirläliň:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = dx, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = x + C_1. \tag{2}$$

$z=sht$, $dz=chtdt$ çalşyrmany ulanyp alarys:

$$\int \frac{chtdt}{\sqrt{1+sh^2t}} = x + C_1 \quad \text{ýa-da} \quad t=x+C_1$$

Diýmek, $z=sh(x+C_1)$. Ony $y''=z$ deňlemede ornunda goýup, alnan $y''=sh(x+C_1)$ deňlemäni iki gezek yzygiderli integrirläliň:

$$y'=ch(x+C_1)+C_2,$$

$$y=sh(x+C_1)+C_2x+C_3. \rhd$$

3. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)})=0$ görnüşdäki deňleme. Eger $y^{(k)}=z$ çalşyrmany ulansak, onda

$$y^{(k+1)}=z', \ y^{(k+2)}=z'', ..., y^{(n)}=z^{(n-k)} \tag{3}$$

bolar we şonuň üçin berlen deňleme $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)})=0$ görnüşi alar. Eger alnan $(n-k)$-njy tertipli bu deňlemäniň umumy çözüwi $z=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ bolsa, onda $y^{(k)}=z$ çalşyrma boýunça 1-nji görnüşdäki $y^{(k)}=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ deňlemäni alarys. Bu deňlemäni k gezek yzygiderli integrirläp, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys.

3-nji mysal. $xy^{V}-y^{IV}=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapyň.

$\lhd$ $y^{IV}=z$ çalşyrmany girizeliň, onda $y^{V}=z'$ bolar we berlen deňleme $xz'-z=0$ görnüşi alar. Bu deňlemäni $x\frac{dz}{dx} = z$ görnüşde ýazyp we üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ deňlemäni alarys. Ony integrirläp,

$$\ln|z|=\ln|x|+\ln|C_1| \quad \text{ýa-da} \quad z=C_1x$$

deňligi alarys. Çalşyrmany göz öňünde tutup, $y^{IV}=C_1x$ deňlemäni alarys. Ony dört gezek yzygiderli integrirläliň:

$$y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1\frac{x^3}{3!} + C_2x + C_3,$$

$$y' = C_1\frac{x^4}{4!} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,$$

$$y = C_1\frac{x^5}{5!} + C_2\frac{x^3}{3!} + C_3\frac{x^2}{2!} + C_4x + C_5$$

ýa-da

$$y = \overline{C_1}x^5 + \overline{C_2}x^3 + \overline{C_3}x^2 + C_4x + C_5,$$

bu ýerde: $\overline{C_1} = \dfrac{C_1}{5!},\ \overline{C_2} = \dfrac{C_2}{3!},\ \overline{C_3} = \dfrac{C_3}{2!}$. ▷

4. $F(y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$ görnüşdäki deňleme. $y'=z$ çalşyrma ulanylyp, berlen deňlemäniň tertibi bir birlik kemeldilýär. Bu ýerde täze girizilen z üýtgeýän y-e görä funksiýadyr: $z=z(y)$. $y'=z(y)$ deňligi differensirläp alarys:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = z\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right) =$$

$$= z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

we şuňa meňzeşlikde beýleki ýokary tertipli önümleri taparys. Olary berlen deňlemede ornunda goýup, $(n-1)$-nji tertipli deňlemäni alarys.

4-nji mysal. $y''+(y')^2=2e^{-y}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ $y'=z(y)$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ çalşyrmalary ulanyp, z üýtgeýäne görä birinji tertipli $z\dfrac{dz}{dy} + z^2 = 2e^{-y}$ deňlemäni alarys. $z^2=u$ çalşyrmany ulanyp, $\frac{1}{2}\frac{du}{dy} + u = 2e^{-y}$ ýa-da $\frac{du}{dy} + 2u = 4e^{-y}$ çyzykly deňlemäni alarys. Bu deňlemäniň umumy çözüwini (19) formulany ulanyp taparys:

$$u = e^{-\int 2dy}\left(\int 4e^{-y}e^{\int 2dy} + C_1\right) =$$

$$= e^{-2y}\left(4\int e^{-y}e^{2y}dy + C_1\right) = e^{-2y}(4e^{y} + C_1) = 4e^{-y} + C_1 y^{-2y}.$$

Ony ulanyp,

$$(y')^2 = u = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y} \quad \text{ýa-da} \quad y' = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$$

birinji tertipli deňlemäni alarys. Ol üýtgeýänleri aýyl-saýyl edilýän deňlemedir. Onuň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip we alnan deňlemäni integrirläp, onuň umumy çözuwini taparys:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{4e^{y} + C_1}}{e^{y}}, \qquad \pm\int\frac{e^{y}dy}{\sqrt{4e^{y} + C_1}} = x + C_2,$$

$$\pm\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{y} + \tilde{C}_1)}{\sqrt{e^{y} + \tilde{C}_1}} = x + C_2, \quad \pm\sqrt{e^{y} + \tilde{C}_1} = x + C_2 \quad (\tilde{C}_1 = C_1/4)$$

ýa-da

$$e^{y} + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2, \quad y = \ln|(x + C_2)^2 - \tilde{C}_1|. \ \triangleright$$

§ 2. 2. *n*-nji tertipli differensial deňlemeler

1. *n*-nji tertipli çyzykly deňlemäniň çözüwleriniň häsiýetleri.

$$q_0(x)y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = f_1(x) \qquad (4)$$

görnüşli deňlemä n-nji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilýär, bu ýerde $y = y(x)$ gözlenýän funksiýa, $f_1(x)$, $q_k(x)$ $(k = \overline{0, n})$ berlen funksiýalar. Olary käbir $[a, b]$ kesimde üznüksiz funksiýalar diýip hasap ederis.

Eger $f_1(x) \not\equiv 0$ bolsa, onda (4) deňlemä birjynsly däl deňleme, eger $f_1(x) \equiv 0$ bolsa, onda birjynsly deňleme diýilýär.

$q_0(x) \neq 0$ bolanda (4) deňlemäni $q_0(x)$ funksiýa bölüp alarys:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x), \tag{5}$$

bu ýerde

$$P_k(x)=\frac{q_k(x)}{q_0(x)} \quad (k=\overline{1,n}), \quad f(x)=\frac{f_1(x)}{q_0(x)}.$$

$q_0(x)\neq 0$ bolanda n-nji tertipli birjynsly deňleme

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{6}$$

görnüşi alar.

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y \tag{7}$$

belgilemäni girizip, (6) deňlemäni

$$L[y]=0 \tag{8}$$

görnüşde ýazalyň. Cyzykly differensial operator diýilýän $L[y]$ operatoryň şeýle häsiýetleri bardyr:

$$L[Cy]\equiv CL[y] \quad (C=const), \tag{9}$$

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]. \tag{10}$$

Hakykatdan-da,

$$L[Cy]\equiv(Cy)^{(n)}+p_1(x)(Cy)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)(Cy)'+p_n(x)(Cy)\equiv$$

$$\equiv C(y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y)=CL[y].$$

$$L[y_1+y_2]\equiv(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)(y_1+y_2)\equiv$$

$$\equiv(y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1'+p_n(x)y_1)+$$

$$+(y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y_2'+p_n(x)y_2)\equiv L[y_1]+L[y_2].$$

(9), (10) formulalary ulanyp, aşakdaky tassyklamalary subut edeliň:

1-nji teorema. Eger y_1 çyzykly birjynsly $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwi bolsa, onda Cy_1 hem bu deňlemäniň çözüwidir, bu ýerde $C=const$.

$\triangleleft$ Teoremanyň şertine görä $L[y_1]\equiv 0$, onda (9) formulany peýdalanyp alarys: $L[Cy_1]\equiv CL[y_1]\equiv 0$, $L[Cy_1]\equiv 0$. $\triangleright$

2-nji teorema. Eger y_1 we y_2 funksiýalar $L[y]=0$ birjynsly deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda y_1+y_2 funksiýa hem bu deňlemäniň çözüwidir. $\triangleright$

$\triangleleft$ Teoremanyň şertine görä $L[y_1]\equiv 0$, $L[y_2]\equiv 0$. (10) formulany peýdalanyp, alarys:

$$L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]\equiv 0, \quad L[y_1+y_2]\equiv 0.$$

Diýmek, y_1+y_2 funksiýa $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwi. $\triangleright$

1-nji netije. Eger y_1, y_2, ..., y_n funksiýalar $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwleri bolsa, onda

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

funksiýa hem bu deňlemäniň çöwüdir, bu ýerde C_1, C_2, ..., C_n erkin hemişelikler. Bu tassyklama 1-nji we 2-nji teoremalardan gelip çykýar.

3-nji teorema. Eger $P_k(x)$ $(k=\overline{0, n})$ hakyky koeffisiýentli $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwi $y(x)=u(x)+iv(x)$ kompleks funksiýa bolsa, onda hakyky $u(x)$ we hyýaly $v(x)$ bölekler hem bu deňlemäniň çözüwidir.

$\triangleleft$ Teoremanyň şertine görä $L[u(x)+iv(x)]\equiv 0$. (9), (10) formulalary ulanyp, alarys:

$$L[u(x)+iv(x)]\equiv L[u(x)]+iL[v(x)]\equiv 0,$$

bu ýerden $L[u(x)]\equiv 0$ we $iL[v(x)]\equiv 0$ toždestwolary alarys. $\triangleright$

2. Çyzykly bagly we çyzykly bagly däl funksiýalar. Wronskiniň kesgitleýjisi. Eger $[a, b]$ kesimde kesgitlenen

$$y_1=y_1(x), \ y_2=y_2(x), \ ..., \ y_n=y_n(x) \qquad (11)$$

funksiýalar üçin $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$ şerti kanagatlandyrýan hakyky α_1, α_2, ..., α_n sanlar bar bolup,

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=0, \quad \forall x\in[a, b] \qquad (12)$$

deňlik ýerine ýetse, onda (11) funksiýalara çyzykly bagly diýilýär.

Eger (12) deňlik diňe

$$\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0 \qquad (13)$$

bolanda ýerine ýetse, onda (11) funksiýalar çyzykly bagly däl diýilýär. Mysal üçin, $[a, b]$ kesimde kesgitlenen

$$y_1=1,\, y_2=x,\, y_3=x^2,\, ...,\, y_n=x^{n-1} \tag{14}$$

funksiýalar bu kesimde çyzykly bagly däl.

Hakykatdan-da, $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+...+\alpha_nx^{n-1}=0$, deňlik $\forall x\in[a,\ b]$ üçin diňe $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ bolanda ýerine ýetýär. Sebäbi hakyky koeffisiýentli $(n-1)$ derejeli köpagzanyň nollarynyň sany $(n-1)$-den köp däldir.

Eger $i\neq j$ bolanda $k_i\neq k_j$ bolsa, onda

$$y_1=e^{k_1x},\quad y_2=e^{k_2x},\quad ...,\quad y_n=e^{k_nx}, \tag{15}$$

we

$$e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ ...,\ x^{n_1}e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ ...,\ x^{n_2}e^{k_2x},$$

$$e^{k_px},\ xe^{k_px},\ ...,\ x^{n_p}e^{k_px} \tag{16}$$

funksiýalar hem islendik $[a,\ b]$ kesimde çyzykly bagly däldir.

Eger $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiýalaryň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda bu funksiýalar çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, eger $y_1\equiv 0$ bolsa, onda

$$1y_1(x)+0y_2+...+0y_n=0$$

bolar, bu ýerde: $\alpha_1=1\neq 0$.

Eger n sany funksiýalaryň arasynda $k(k<n)$ sanysy çyzykly bagly bolsa, onda ähli funksiýalar hem çyzykly baglydyr. Hakykatdan-da, ýönekeýlik üçin, eger $\alpha_1\neq 0$ bolanda $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ky_k=0$ bolsa, onda

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ky_k+0y_{k+1}+...+0y_n=0,\quad \alpha_1\neq 0.$$

$y_1=y_1(x)$ we $y_2=y_2(x)$ $(y_1\not\equiv 0,\ y_2\not\equiv 0)$ funksiýalaryň çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň proporsional bolmagy zerur we ýeterlikdir. Hakykatdan-da, eger $y_2=ky_1$ $(k=\text{const})$ bolsa, onda $ky_1-y_2=0$ ýa-da $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0$, bu ýerde $\alpha_2=-1\neq 0$. Tersine, goý, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$ bolanda $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0$ we $\alpha_2\neq 0$ bolsun, onda $y_2=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}y_1$ ýa-da $y_2=ky_1$, $k=-\alpha_1/\alpha_2$.

Mysal üçin, $y_1=x$, $y_2=2x$ funksiýalar islendik $[a,\ b]$ kesimde çyzykly baglydyr; $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ $(k_1\neq k_2)$ funksiýalar çyzykly bagly däldir.

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{17}$$

funksiýalar islendik $[a, b]$ kesimde çyzykly bagly däldir.

4-nji teorema. Eger $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ..., $y_n = y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde çyzykly bagly bolsa, onda

$$W(x) = W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{18}$$

kesgitleýji $[a, b]$ kesimde toždestwolaýyn nola deňdir.

◁ Teoremanyň şertine görä $y_1(x)$, $y_2(x)$ ..., $y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde çyzykly baglydyr. Kesgitlemä görä bu kesimde

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0$$

deňlik $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \neq 0$ bolanda ýerine ýetýär.

Bu toždestwony $(n-1)$ gezek differensirläp alarys:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_n y_n = 0, \\ &a_1 y_1' + a_2 y_2' + ... + a_n y_n' = 0, \\ &... ... ... \\ &a_1 y_1^{(n-1)} + a_2 y_2^{(n-1)} + ... + a_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

Islendik $x \in [a, b]$ üçin α_1, α_2, ..., α_n näbellilere görä birjynsly algebraik deňlemeler sistemasyny aldyk. Bu sistemanyň noldan tapawutly çözüwi bolmagy üçin onuň kesgitleýjisi nola deň bolmaly, ýagny $W(x) = 0$ deňlik ýerine ýetmeli. ▷

(18) kesgitleýjä Wronskiniň kesgitleýjisi diýilýär.

5-nji teorema. Eger $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ..., $y_n = y_n(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz $P_k(x)$ $(k = \overline{0, n})$ koeffisiýentli

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + ... + P_n(x) y = 0 \tag{20}$$

deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, onda Wronskiniň $W = W[y_1, y_2, ..., y_n]$ kesgitleýjisi $[a, b]$ kesimiň hiç bir nokadynda nola deň däldir.

◁ Tersine güman edeliň, ýagny $x_0 \in [a, b]$ nokatda Wronskiniň kesgitleýjisi nola deň bolsun. Bu halda

$$\left.\begin{aligned} &a_1 y_1(x_0) + a_2 y_2(x_0) + \ldots + a_n y_n(x_0) = 0, \\ &a_1 y_1'(x_0) + a_2 y_2'(x_0) + \ldots + a_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + a_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

algebraik deňlemeler sistemasynyň noldan tapawutly çözüwi bardyr $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots. + a_n^2 \neq 0)$, çünki bu sistemanyň kesgitleýjisi Wronskiniň $W(x_0)$ kesgitleýjisidir we ol nola deňdir.

1-nji netije esasynda

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \quad (22)$$

funksiýa (20) deňlemäniň çözüwidir. Bu deňlemäniň çözüwi (21)-e görä

$$y(x_0) = 0, \; y'(x_0) = 0, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýar. Bu başlangyç şerti (20) deňle-mäniň $y \equiv 0$ çözüwi hem kanagatlandyrýar. Diýmek, 1-nji teorema görä (22) deňlemäniň çözüwi $y(x) = 0$, ýagny

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 + \ldots. + a_n^2 \neq 0).$$

Bu deňlik esasynda $x_0 \in [a, b]$ nokatda $y_1(x)$, $y_2(x)$ ..., $y_n(x)$ funksiýalar çyzykly bagly. Ol bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Bu garşylyk teoremany subut edýär. ▷

3. *n*-nji tertipli birjynsly çyzykly deňlemäniň umumy çözüwi.

6-njy teorema. Eger $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ..., $y_n = y_n(x)$ funksiýalar koeffisiýentleri $[a, b]$ kesimde üznüksiz bolan birjynsly (20) deňlemäniň şol kesimde kesgitlenen çyzykly bagly däl çözüwleri bolsa, onda bu deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \quad (23)$$

formula bilen kesgitlenýär, bu ýerde c_1, c_2, ..., c_n erkin hemişelikler.

◁ 3-nji teoremany göz öňünde tutup, (23) funksiýanyň (20) deňlemäni toždestwa öwürýändigini göreris. Indi

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

şerti kanagatlandyrýan (23) çözüwinden c_1, c_2, ..., c_n hemişelikleri kesgitläliň, ýagny

$$\left.\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ &c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = y_0', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

sistemany çözeliň. Bu sistemanyň kesgitleýjisi Wronskiniň kesgitleýjisidir. Teoremanyň şertine görä $[a, b]$ kesimde kesgitlenen $y_1(x)$, $y_2(x)$ ..., $y_n(x)$ funksiýalar çyzykly bagly däl, şol sebäpli islendik $x_0 \in [a, b]$ nokat üçin $W(x_0) \neq 0$. Diýmek, (24) sistemanyň ýeketäk c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0 çözüwi bardyr. Bu bolsa (23) funksiýanyň (20) deňlemäniň umumy çözüwidigini aňladýar. ▷

2-nji netije. Çyzykly birjynsly deňlemäniň çyzykly bagly däl çözüwleriniň iň uly sany deňlemäniň tertibine deňdir.

Kesgitleme. n-nji tertipli çyzykly birjynsly deňlemäniň islendik n çyzykly bagly däl çözüwine bu deňlemäniň fundamental çözüwi diýilýär.

§2. 3. *n*-nji tertipli çyzykly differensial deňlemeler

1. Hemişelik koeffisiýentli birjynsly deňlemeler we olaryň çözülişi.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (25)$$

deňlemä n-nji tertipli hemişelik koeffisiýentli birjynsly çyzykly deňleme diýilýär, bu ýerde a_1, a_2, ..., a_n hemişelik sanlar.

(25) deňleme (6) deňlemäniň hususy halydyr. Şonuň üçin §2.2-däki alnan netijeler (25) deňleme üçin dogrudyr. (25) deňlemäniň çözüwini

$$y = e^{kx} \quad (k = const) \qquad (26)$$

görnüşde gözläliň. Bu funksiýany we onuň

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx},\ \ldots,\ y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

önümlerini (25) deňlemede ornunda goýup alarys:

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0$$

ýa-da

$$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n) = 0.$$

(26) funksiýanyň (25) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (27)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

(27) deňlemä (25) deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär. Bu n-nji derejeli algebraik deňlemäniň n sany köki bardyr, olaryň içinde gabat gelýäni-de, kompleks san bolýany-da bolmagy mümkin.

1. Häsiýetlendiriji deňlemäniň n sany dürli hakyky kökleri bar. Bu kökleri $k_1, k_2, ..., k_n$ $(k_i \neq k_j,\ i \neq j)$ bilen belgiläliň.Bu köklere degişli (25) deňlemäniň çözüwleri

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ ...,\ y_n = e^{k_n x} \qquad (28)$$

funksiýalar bolar. Bu funksiýalar $[a, b]$ kesimde çyzykly bagly däldir ((15)-e seret). 6-njy teoremanyň netijesine görä, (25) deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x} \qquad (29)$$

formula boýunça kesgitlenýär.

5-nji mysal. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesini ýazalyň:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

Onuň kökleri $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$ bolar. Şoňa görä berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}. \ \triangleright$$

2. Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri hakyky sanlar bolup, olaryň m sanysy özara deň, beýlekileri dürli bolsun:

$$k_1 = k_2 = ... = k_m,\ k_{m+1},\ k_{m+2},\ ...,\ k_n.$$

Berlen deňlemäniň olara degişli çözüwleri

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_1 x},\ ...,\ y_m = e^{k_1 x},\ y_{m+1} = e^{k_{m+1} x},\ ...,\ y_n = e^{k_n x}$$

bolar. Bu çözüwler çyzykly baglydyr, sebäbi *m* sany çözüw gabat gelýär. *m* sany gabat gelýän çözüwlere *m* sany çyzykly bagly däl

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = xe^{k_1 x},\ ...,\ y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

çözüwleri degişli edip bolar, şeýlelikde

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = xe^{k_1 x},\ ...,\ y_m = x^{m-1} e^{k_1 x},\ y_{m+1} = e^{k_{m+1} x},\ ...,\ y_n = e^{k_n x}$$

çözüwler çyzykly bagly däldir. Berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 xe^{k_1 x} + ... + c_m x^{m-1} e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + ... + c_n e^{k_n x}$$

ýa-da

$$y = (c_1 + c_2 x + ... + c_m x^{m-1}) e^{k_1 x} + c_{m+1} e^{k_{m+1} x} + ... + c_n e^{k_n x}$$

funksiýa bolar.

6-njy mysal. $y'''-2y''+y'=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\lhd$ Häsiýetlendiriji deňlemesi: $k^3-2k^2+k=0$. Bu deňlemäniň çözüwleri $k_1=k_2=1$, $k_3=0$ bolar. Umumy çözüwi ýazalyň:

$$y=(c_1+c_2x)e^x+c_3. \rhd$$

3. Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleriniň arasynda kompleks sanlar hem bar bolsun: $k_1=\alpha-i\beta$, $k_2=\alpha+i\beta$. Olara degişli çözüwler:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

3-nji teoremanyň netijesine görä, $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiýalar berlen deňlemäniň çözüwleridir.

Goý, häsiýetlendiriji deňlemäniň galan k_3, k_4, ..., k_n kökleri dürli we hakyky sanlar bolsun, onda berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x} + c_3 e^{k_3 x} + ... + c_n e^{k_n x}.$$

7-nji mysal. $y'''+4y''+13y'=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesi $k^3+4k^2+13k=0$, onuň kökleri $\lambda_1=-2-3i$, $\lambda_2=-2+3i$, $\lambda_3=0$ bolar. Ol kökleri ulanyp, deňlemäniň umumy çözüwini ýazalyň:

$$y=(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)e^{-2x}+c_3. \ \triangleright$$

2. Birjynsly däl deňlemeleriň umumy çözüwi. Aşakdaky n-nji tertipli birjynsly däl differensial deňlemä garalyň:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x), \tag{30}$$

bu ýerde $p_k(x)$ $(k=\overline{1, n})$, $f(x)$ funksiýalar $[a, b]$ kesimde üznüksiz.

Berlen deňlemäni

$$L[y]=f(x) \tag{31}$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde

$$L[y]\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y.$$

7-nji teorema. Eger $y_0=y_0(x)$ funksiýa birjynsly $L[y]=0$ deňlemäniň çözüwi, $y_1=y_1(x)$ funksiýa degişli birjynsly däl $L[y]=f(x)$ deňlemäniň çözüwi bolsa, onda $y_0+y_1=y_0(x)+y_1(x)$ funksiýa birjynsly däl deňlemäniň çözüwidir.

◁ Teoremanyň şertine görä $L[y_0]\equiv 0$, $L[y_1]=f(x)$. Bu toždestwolaryň we çyzykly operatoryň häsiýetleri esasynda

$$L[y_0+y_1]=L[y_0]+L[y_1]\equiv 0+f(x), \quad L[y_0+y_1]\equiv f(x).$$

Bu ýerden y_0+y_1 funksiýanyň $L[y]=f(x)$ deňlemäniň çözüwidigi gelip çykýar. ▷

3-nji netije. Eger $y_0=y_0(x)$ funksiýa $L[y]=0$ deňlemäniň umumy çözüwi, $y_1=y_1(x)$ funksiýa $L[y]=f(x)$ deňlemäniň haýsy-da bolsa bir hususy çözüwi bolsa, onda y_0+y_1 funksiýa $L[y]=f(x)$ deňlemäniň umumy çözüwidir.

3. Birjynsly däl hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeleriň hususy we umumy çözüwleriniň tapylyşy. Hemişelik koeffisiýentli birjynsly däl

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{32}$$

deňlemä garalyň, bu ýerde a_k $(k=\overline{1, n})$ hakyky sanlar, $f(x)$ bolsa $[a, b]$ kesimde üznüksiz funksiýa.

(32) deňlemä degişli bolan birjynsly deňlemäni ýazalyň:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0. \tag{33}$$

Eger (33) deňlemäniň umumy y_0 çözüwi we (32) deňlemäniň haýsy-da bolsa bir y_1 hususy çözüwi belli bolsa, onda 3-nji netije boýunça y_0+y_1 funksiýa (32) deňlemäniň umumy çözüwidir. (33) deňlemäniň umumy çözüwiniň tapylyşyna § 2.3-de seredipdik.

(32) deňlemäniň hususy çözüwi $f(x)$ funksiýanyň dürli görnüşleri üçin näbelli koeffisiýentler usuly bilen tapylýar.

1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, bu ýerde $P_n(x)$ n derejeli köpagza.

Eger α san degişli häsiýetlendiriji deňlemäniň köki däl bolsa, onda $y_1=e^{\alpha x}Q_n(x)$ bolar, bu ýerde $Q_n(x)$ koeffisiýentleri kesgitlenilmeli n derejeli köpagzadyr.

8-nji mysal. $y'''-y''+y'-y=x^2+x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Ilki bilen bu deňlemäniň birjynslysynyň umumy çözüwini tapmak üçin häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň:

$$k^3-k^2+k-1=0 \Rightarrow k_1=1,\ k_2=-i,\ k_3=i,$$

diýmek, birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi

$$y_0=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x.$$

Hususy çözüwi

$$y_1=ax^2+bx+c$$

görnüşde gözläliň. Önümlerini tapyp, berlen deňlemede ornunda goýup,

$$y_1'=2ax+b, \quad y_1''=2a, \quad y_1'''=0,$$

$$0-2a+2ax+b-ax^2-bx-c=x^2+x,$$

$$-ax^2+(2a-b)x-2a+b-c=x^2+x$$

deňligi alarys. Bu deňlikden x-iň deň derejeleriniň koeffisiýentlerini deňläp, a, b, c sanlary tapmak üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\left.\begin{aligned} -a &= 1, \\ 2a-b &= 1, \\ -2a+b-c &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad a=-1, \quad b=-3, \quad c=-1.$$

Bulary ornunda goýup, hususy çözüwi taparys:

$$y_1 = -x^2 - 3x - 1.$$

Sonuň üçin berlen deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = y_0 + y_1 = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - x^2 - 3x - 1. \rhd$$

Eger α san häsiýetlendiriji deňlemäniň m kratny köki bolsa, onda hususy çözüw $y_1 = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ görnüşde bolar.

9-njy mysal. $y'' + 7y' = e^{-7x}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\lhd$ Bu deňlemä degişli birjynsly deňlemäniň umumy çözüwini tapmak üçin onuň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň:

$$k^2 + 7k = 0 \Rightarrow k_1 = -7, \quad k_2 = 0.$$

Şonuň üçin birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y_0 = C_1 e^{-7x} + C_2.$$

$\alpha = -7$ sanyň häsiýetlendiriji deňlemesiniň bir köki bilen gabat geleni üçin berlen deňlemäniň hususy çözüwi $y_1 = axe^{-7x}$ görnüşde bolar. Bu funksiýanyň önümlerini tapyp, berlen deňlemede ornunda goýalyň:

$$y_1' = ae^{-7x} - 7axe^{-7x}, \quad y_1'' = -14ae^{-7x} + 49axe^{-7x},$$

$$-14ae^{-7x} + 49axe^{-7x} + 7ae^{-7x} - 49axe^{-7x} = e^{-7x}.$$

Bu ýerden a sany taparys: $-7a = 1$, $a = -\frac{1}{7}$. Onda hususy çözüw

$y_1 = -\frac{1}{7}xe^{-7x}$. Şeýlelikde, deňlemäniň umumy çözüwi

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{-7x} + C_2 - \frac{1}{7}xe^{-7x}. \rhd$$

2) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta + R_m(x)\sin\beta x)$.

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks sanlar häsiýetlendiriji deňlemäniň kökleri bolmasa, onda hususy çözüw $y_1 = e^{\alpha x}(Q_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$ görnüşde bolar, bu ýerde $k = \max\{n, m\}$.

10-njy mysal. $y'' + 25y = \cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\lhd$ Hüsiýetlendiriji deňlemäni düzeliň we onuň kökleri tapalyň. $k^2 + 25 = 0$, $k_1 = 5i$, $k_2 = -5i$. Şonuň üçin

$$y_0 = C_1\cos5x + C_2\sin5x$$

funksiýa birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi bolar. Onuň hususy çözüwi $y_1 = a\cos x + b\sin x$ görnüşde bolar. Ol funksiýany we onuň

$$y_1' = -a\sin x + b\cos x, \quad y_1'' = -a\cos x - b\sin x$$

önümlerini berlen deňlemede orunlaryna goýup, näbelli a we b hemişelikleri taparys:

$$-a\cos x - b\sin x + 25a\cos x + 25b\sin x = \cos x,$$

$$24a\cos x + 24b\sin x = \cos x, \quad a = \frac{1}{24}, \quad b = 0.$$

Şeýlelikde, hususy we umumy çözüwler şeýle bolar:

$$y_1 = \frac{1}{24}\cos x, \quad y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \frac{1}{24}\cos x. \ \triangleright$$

Eger $\alpha \pm i\beta$ kompleks san häsiýetlendiriji deňlemäniň r kratny köki bolsa, onda deňlemäniň hususy çözüwi şeýle görnüşde bolar:

$$y_1 = x^r e^{\alpha x}(Q_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x).$$

11-nji mysal. $y'' + y = \sin x - \cos x$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

$\triangleleft$ Häsiýetlendiriji deňlemäni düzüp, onuň köklerini tapalyň: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i,\ k_2 = i$, şonuň üçin birjynsly deňlemäniň umumy çözüwi:

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Berlen deňlemäniň hususy çözüwi $y_1 = x(a\cos x + b\sin x)$ görnüşde bolar. Ony we onuň önümlerini berlen deňlemede ornunda goýup, näbelli hemişelikleri taparys:

$$y_1' = a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x),$$

$$y_1'' = -2a\sin x + 2b\cos x + x(-a\cos x - b\sin x),$$

$$-2a\sin x + 2b\cos x - x(a\cos x + b\sin x) + x(a\cos x + b\sin x) = \sin x - \cos x,$$

$$-2a\sin x + 2b\cos x = \sin x - \cos x,$$

$$-2a = 1, \quad 2b = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Şeýlelikde,

$$y_1 = -\frac{1}{2}x(\cos x + \sin x),$$

$$y = y_0 + y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x). \rhd$$

4. Çyzykly differensial deňlemäni çözmek üçin Lagranžyň usuly. Eger

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y = 0 \tag{34}$$

deňlemäniň $y_1(x)$ hususy çözüwi belli bolsa, onda $y = y_1 z$ belgilemäni girizip, deňlemäniň tertibini bir birlik kemeldip bolýar, alnan deňleme hem çyzykly deňlemedir.

Eger (34) deňlemäniň k sany hususy çözüwi belli bolsa, onda bu deňlemäniň tertibini k birlik kemeldip bolar.

Eger (34) deňlemäniň umumy çözüwi belli bolsa, onda onuň kömegi bilen

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y = f(x) \tag{35}$$

deňlemäniň çözüwini tapyp bolar, bu usula Lagranžyň usuly diýilýär.

Goý, $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ funksiýa (34) deňlemäniň umumy çözüwi bolsun. (35) deňlemäniň çözüwi

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n \tag{36}$$

görnüşde gözlenilýär, bu ýerde $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ funksiýalar häzirlikçe näbellidir. Olary tapmak üçin ilki

$$\left.\begin{aligned} y_1C_1' + y_2C_2' + ... + y_nC_n' &= 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + ... + y_n'C_n' &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + ... + y_n^{(n-1)}C_n' &= f(x). \end{aligned}\right\}$$

sistemadan olaryň $C_k'(x)$ $(k=\overline{1, n})$ önümlerini kesgitläliň:

$$\frac{dC_k}{dx} = \varphi_k(x), \quad i=\overline{1, n},$$

soňra olary integrirläp, funksiýalaryň özlerini taparys:

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)dx + \overline{C_k},$$

bu ýerde $\overline{C_k}$ $(k=\overline{1, n})$ erkin hemişelikler. Tapylan $C_k=C_k(x)$ $(k=\overline{1, n})$ funksiýalaryň bahalaryny (36)-da ornunda goýup, (35) deňlemäniň umumy çözüwini taparys.

12-nji mysal. Hususy çözüwi $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ bolan

$$xy''+2y'+xy=0$$

deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ üçin $y = \frac{\sin x}{x}z$ çalşyrmany girizeliň, bu ýerde z täze gözlenýän funksiýa. Funksiýany we onuň önümlerini

$$y=y_1z, \quad y'=y_1'z+y_1z', \quad y''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z''$$

berlen deňlemede ornunda goýup alarys:

$$(xy_1''+2y_1'+xy_1)z+xy_1z''+2(xy_1'+y_1)z'=0,$$

y_1-iň berlen deňlemäniň çözüwi bolany üçin $xy_1''+2y_1'+xy_1=0$ bolar we deňleme şeýle görnüşi alar:

$$xy_1z''+2(xy_1'+y_1)z'=0.$$

$y_1 = \frac{\sin x}{x}$ bolany üçin bu ýerden $z''\sin x+2z'\cos x=0$ deňlemäni alarys. Alnan deňlemäni $\frac{z''}{z'} + 2\frac{\cos x}{\sin x} = 0$ görnüşde ýazyp we soňra integrirläp taparys:

$$\ln|z'|+2\ln|\sin x|=\ln C_1 \quad \text{ýa-da} \quad z'\sin^2 x=C_1.$$

Deňlemäniň üýtgeýänlerini aýyl-saýyl edip, ony integrirläliň:

$$z=-C_1\operatorname{ctg}x+C_2 \quad \text{ýa-da} \quad z=\overline{C}_1\operatorname{ctg}x+C_2 \quad (\overline{C}_1=-C_1).$$

Tapylan z-i ornunda goýup, berlen deňlemäniň çözüwini taparys:

$$y = \overline{C}_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}. ▷$$

13-nji mysal. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly.

◁ Ilki bilen $y''+y=0$ deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin bu deňlemäniň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerini tapalyň:

$$k^2+1=0 \Rightarrow k_1=-i, \quad k_2=i.$$

Sonuň üçin $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$. Indi berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapalyň. Onuň üçin $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$ hasap edip, ony

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \tag{37}$$

görnüşde gözläliň we $C_1(x)$, $C_2(x)$ näbelli funksiýalary

$$\left.\begin{aligned} \cos xC_1'(x)+\sin xC_2'(x)&=0,\\ -\sin xC_1'(x)+\cos xC_2'(x)&=\frac{1}{\cos x}\end{aligned}\right\}$$

sistemadan tapalyň:

$$C_1'(x)=-\mathrm{tg}x, \quad C_2'(x)=1.$$

Integrirläp alarys: $C_1(x)=\ln|\cos x|+\overline{C}_1$, $C_2(x)=x+\overline{C}_2$.
Tapylan funksiýalary (37)-de ornunda goýup, berlen deňlemäniň umumy çözüwini taparys:

$$y=\overline{C}_1\cos x+\overline{C}_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x. \ \triangleright$$

Gönükmeler

1. $y=\varphi(x, c)$ (c – erkin hemişelik) funksiýa berlen differensial deňlemäniň çözüwimi?

1) $y=x^2(1+ce^{1/x})$, $x^2y'+(1-2x)y=x^2$;
2) $y=ce^x-e^{-x}$, $xy''+2y'-xy=0$;
3) $y=ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$, $y'+2y=e^x$;
4) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$;
5) $x^2+y^4=cy^2$, $xydy=(x^2-y^4)dy$;
6) $y=cx+\frac{1}{c}$, $\quad xy'-y+\frac{1}{y}=0$;
7) $y=\frac{2+cx}{1+2x}$, $2(1+x^2y')=y-xy'$.

2. Differensial deňlemäni çözmeli:
1) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$; 2) $xydx+(x+1)dy=0$;

3) $xy'=y^2+1$;
4) $(x+xy)dy+(y-xy)dx=0,\ y(1)=1$;
5) $(1+y^2)dx+xydy=0$;
6) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$;
7) $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy=0$;
8) $e^{-y}(1+y')=1$;
9) $y'=a^{x+y}\quad (a>0,\ a\neq 1)$;
10) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$;
11) $e^x\sin^3 y+(1+e^{2x})\cos y y'=0$;
12) $2x^2yy'+y^2=2$.

3. Deňlemäni çözmeli:
1) $(x+2y)dx-xdy=0$;
2) $xy'=y(\ln y-\ln x)$;
3) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$;
4) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$;
5) $x^2dy-(y^2-xy+x^2)dx=0$;
6) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;
7) $y^2+x^2y'-xyy'=0$;
8) $xy'-y-x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=0$;
9) $xy'-y\cos\ln\dfrac{y}{x}=0$;
10) $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$.

4. Berlen deňlemäniň umumy çözüwini tapmaly:
1) $xy'-2y=2x^4$;
2) $(2x-y^2)y'=2y$;
3) $(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1),\ y(-2)=2$;
4) $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$;
5) $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$;
6) $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos^3 x}$,
7) $\left(e^{-y^2/2}-xy\right)dy-dx=0$;
8) $y'+xe^xy=e^{(1-x)e^x}$;
9) $(2e^y-x)y'=1$;
10) $(\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y)y'=1$;
11) $y'=\dfrac{y}{34-y^2}$;
12) $y'-2xy=2xe^2$.

5. Deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly:
1) $(x\ln y-x^2+\cos y)dy+(x^3+y\ln y-y-2xy)dx=0$;
2) $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx+\left(y-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)dy=0$;
3) $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$;
4) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$;

5) $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$;
6) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$;
7) $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$;
8) $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x dy=0$;
9) $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$;
10) $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$;
11) $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$;
12) $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$;
13) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$;
14) $(x^2+y)dx-xdy=0$;
15) $(x+y^2)dx-2xydy=0$;
16) $(2x^2+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$;
17) $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$;
18) $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y dy=0$;
19) $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$.

6. Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwini tapmaly:

1) $y^{IV}=\frac{8}{(x-3)^5}$;
2) $y'''=x+\cos x$;
3) $y''=xe^x$, $y(0)=y'(0)=1$;
4) $y''-2x\ln x=0$;
5) $y'''=\sqrt{1-y''^2}$;
6) $y''=\sqrt{1+y'^2}$;
7) $y''=y'^2$;
8) $y''=\sqrt{1-y'^2}$;
9) $y''=1+y'^2$;
10) $y''=\sqrt{1+y'}$;
11) $y''=y'\ln y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
12) $y''+y'+2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$;
13) $y'''+y'^2=0$;
14) $xy''+y'=0$;
15) $xy''=(1+2x^2)y'$;
16) $xy''=y'+x^2$;
17) $x\ln x y''=y'$;
18) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$;
19) $y'^2=(3y-2y')y''$;
20) $y''^2-2y'y'''+1=0$;
21) $yy''-2yy'\ln y=y'^2$.

7. Aşakdaky funksiýalar özleriniň kesgitleniş oblastynda çyzykly baglymy?

1) $4, x$; 3) $x, 2x, x^2$; 5) $1, \sin x, \cos 2x$;
2) $1, 2, x, x^2$; 4) $\sin x, \cos x, \cos 2x$; 6) $5, \cos^2 x, \sin^2 x$.

Wronskiniň kesgitleýjisini hasaplamaly:

7) $1, x$; 9) $1, 2, x^2$; 11) $e^x, 2^{ex}, e^{-x}$.
8) $x, \dfrac{1}{x}$; 10) e^{-x}, xe^{-x};

Çözüwleriň fundamental sistemasy berlen. Çyzykly birjynsly differensial deňlemäni ýazmaly:

12) e^{-x}, e^x; 14) e^x, xe^x, x^2e^x; 16) $e^{2x}, \sin x, \cos x$;
13) e^{-2x}, xe^{-2x}; 15) $1, \sin x, \cos x$; 17) $1, e^{-x}\sin x, e^{-x}\cos x$.

8. Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly:

1) $y''-2y'-4y=0$; 2) $3y''-2y'-8y=0$; 3) $y''+6y'+9y=0$;
4) $y'''-3y''+3y'-y=0, y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=3$;
5) $y''-6y'+18y=0$; 7) $y^{VI}+2y^{V}+y^{IV}=0$; 9) $y^{IV}-y=0$;
6) $y'''+6y''+11y'+6y=0$; 8) $y'''-8y=0$; 10) $2y'''-3y''+y'=0$.

9. Aşakdaky deňlemeleriň umumy (hususy) çözüwlerini tapmaly:

1) $y''-3y'+2y=e^{3x}(x^2+x)$; $y(0)=1, y'(0)=-2$;
2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$; 9) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$;
3) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$; 10) $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$;
4) $y''-2y'-3y=e^{4x}$; 11) $y''-3y'+2y=x\cos x$;
5) $y''-y=2e^x-x^2$; 12) $y''-y'+y=6xe^x$;
6) $y''-3y'+2y=\sin x$; 13) $y''+y=x\sin x$;
7) $y''+4y'-2y=8\sin 2x$; 14) $y''+4y'+4y=xe^{2x}$;
8) $y''+y=4x\cos x$; 15) $y''-4y'+5y=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$.

Lagranžyň usulyny peýdalanyp çözmeli:

16) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$; 19) $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$;
17) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$; 20) $y'''+y''=\dfrac{x-1}{x^2}$;
18) $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$; 21) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Jogaplar

1. 1) Hawa, 2) Ýok, 3) Hawa, 4) Hawa, 5) Hawa, 6) Ýok, 7) Hawa. **2.** 1) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=c$; 2) $y=c(x+1)e^{-x}$, $x=-1$; 3) $\operatorname{arctg}y=\ln|cx|$; 4) $y-x+\ln|cx|=0$; 5) $x^2(1+y^2)=c$; 6) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$; 7) $\ln|x|=c+\sqrt{y^2+1}$, $x=0$; 8) $e^x=c(1-e^{-y})$; 9) $a^x+a^{-y}=c$; 10) $1+e^y=c(1+x^2)$; 11) $\operatorname{arctg}e^x=\frac{1}{2\sin^2 y}+c$; 12) $y^2-2=ce^{1/x}$; **3.** 1) $x+y=cx^2$, $x=0$; 2) $y=xe^{1+cx}$; 3) $x^2+2xy-y^2=C$; 4) $x(y-x)=cy$, $y=0$; 5) $(x-y)\ln cx=x$; 6) $y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2$, $y=x$; 7) $y=ce^{y/x}$; 8) $\sin\frac{y}{x}=cx$; 9) $\ln cx=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$, $y=xe^{2\pi k}$, $k=0, \pm1, \pm2,\ldots$; 10) $x\ln cx=2\sqrt{xy}$, $y=0$, $x=0$. **4.** 1) $y=cx^2+x^4$; 2) $x=cy-\frac{1}{2}y^2$; 3) $y=x^2-\frac{3x}{x-1}$; 4) $y=\sin x+c\cos x$; 5) $y=(c+x^3)\ln x$. 6) $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 7) $x=(c+y)e^{\frac{-y^2}{2}}$; 8) $y=(c+x)e^{(1-x)e^x}$; 9) $x=ce^{-y}+e^y$; 10) $x=-\cos y\sin y+c\sin y$; 11) $x=cy^3+y^2$, $y=0$; $y=(c+x^2)e^{x^2}$. **5.** 1) $x^4+4xy(\ln y-1)-4x^2y+4\sin y=c$; 2) $x^2+y^2+2\arcsin\frac{x}{y}=c$; 3) $x^4+x^2y^2+y^4=c$; 4) $x^3+3x^2y^2+y^4=c$; 5) $x^2-3x^3y^2+y^4=c$; 6) $xe^{-y}-y^2=c$; 7) $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=c$; 8) $x-y^2\cos^2x=c$; 9) $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=c$; 10) $x^2+1=2(c-2x)\sin y$; 11) $2x+\ln(x^2+y^2)=c$; 12) $x+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=c$; 13) $xy^2-2x^2y-2=cx$, $\mu=1/x^2$; 14) $x-\frac{y}{x}=c$, $\mu=\frac{1}{x^2}$; 15) $x\ln|x|-y^2=cx$, $\mu=\frac{1}{x^2}$; 16) $5\operatorname{arctg}x+2xy=c$, $x=0$, $\frac{1}{1+x^2}$; 17) $y^3+x^3(\ln x-1)=cx^2$, $\mu=\frac{1}{x^4}$; 18) $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=c$, $\mu=e^x$; 19) $x^2-\frac{7}{y}-3xy=c$, $\mu=\frac{1}{y^2}$.

6. 1) $y=\frac{1}{3(x-3)}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$; 2) $y=\frac{x^4}{24}-\sin x+c_1x^2+c_2x+c_3$; 3) $y=(x-2)e^x+x+2$; 4) $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{5}{18}x^3+c_1x+c_2$; 5) $y=c_3+c_2x-\sin(x+c_1)$; 6) $y=\operatorname{ch}(x+c_1)+c_2$; 7) $y=c_2-\ln|c_1-x|$; 8) $y=c_2-\cos(c_1+x)$;

9) $y=c_2-\ln|\cos(c_1+x)|$; 10) $y=\dfrac{(x+c_1)^2}{12}-x+c_2$; 11) $y=x$; 12) $y=-2x$; 13) $y=(x+c_1)\ln|x+c_1|+c_2x+c_3$; 14) $y=c_1\ln|x|+c_2$; 15) $y=c_1e^{x^2}+c_2$; 16) $y=\dfrac{x^3}{3}+c_1x^2+c_2$; 17) $y=c_1x(\ln x-1)+c_2$; 18) $y=(c_1x-c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}+1}+c_2$;

19) $x=3c_1p^2+\ln c_2p$, $y=2c_1p^3+p$, $y=c$; 20) $12(c_1y-x)=c_1^2(x+c_2)^3+c_3$; 21) $\ln y=c_1\mathrm{tg}(c_1x+c_2)$, $\ln|(\ln y-c_1)/(\ln y+c_1)|=2c_1x+c_2$, $(c-x)\ln y=1$, $y=c$.

7. 1) Hawa; 2) Ýok; 3) Ýok; 4) Hawa; 5) Hawa; 6) Ýok; 7) 1; 8) $-\dfrac{2}{x}$; $x\neq 0$; 9) 0; 10) e^{-2x}; 11) 0; 12) $y''-y=0$; 13) $y''+4y'+4y=0$; 14) $y'''-3y''+3y'-y=0$; 15) $y'''+y'=0$; 16) $y'''-2y''+y'-2y=0$; 17) $y'''+2y''+2y'=0$.

8. 1) $y=c_1e^{(1+\sqrt{5})x}+c_2e^{(1-\sqrt{5})x}$; 2) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-\frac{4}{5}x}$; 3) $y=e^{-3x}(c_1+c_2x)$; 4) $y=e^x(1+x)$; 5) $y=e^{3x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$; 6) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}$; 7) $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+e^{-x}(c_5+c_6x)$; 8) $y=c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}\,x+c_3\sin\sqrt{3}\,x)$; 9) $y=c_1e^x+c_2e^x+c_3\cos x+c_4\sin x$; 10) $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{x/2}$. **9.** 1) $y=4(e^x-e^{2x})+\dfrac{1}{2}(x^2-2x+2)e^{3x}$; 2) $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$; 3) $y=e^x\left(c_1+c_2-\ln\sqrt{x^2+1}+x\,\mathrm{arctg}\,x\right)$; 4) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+\dfrac{1}{5}e^{4x}$; 5) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+(2x-2)e^x$; 6) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+0{,}1\sin x+0{,}3\cos x$; 7) $y=c_1e^{(\sqrt{6}+2)x}+c_2e^{(\sqrt{6}-2)x}-\dfrac{16\cos 2x+12\sin 2x}{25}$; 8) $y=c_1\cos x+c_2\sin 2x+x\cos x+x^2\sin 2x$; 9) $y=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)e^{-x}-\dfrac{1}{4}xe^{-x}\cos 2x$; 10) $y=c_1+c_2e^{5x}-0{,}2x^3-0{,}12x^2-0{,}048x+0{,}02(\cos 5x-\sin 5x)$; 11) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+(0{,}1x-0{,}12)\cos x-(0{,}3x+0{,}34)\sin x$; 12) $y=(c_1+c_2x+x^3)e^x$; 13) $y=\left(c_1-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(c_2+\dfrac{x}{4}\right)\sin x$; 14) $y=(c_1+c_2x)e^{-2x}+\left(\dfrac{x}{16}-\dfrac{1}{32}\right)e^{2x}$; 15) $y=\left(c_1\cos x+c_2\sin x-\dfrac{x}{2}\cos x+x\sin x\right)e^{2x}$; 16) $y=(c_1-x)\cos x+(c_2+\ln|\sin x|)\sin x$; 17) $y=e^x(x\ln|x|+c_1x+c_2)$; 18) $y=c_1e^x+c_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$; 19) $y=c_1e^x+c_2+\cos e^{-x}$; 20) $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+1-x+x\ln|x|$; 21) $y=e^{-x}\left(\dfrac{4}{5}(x+1)^{5/2}+c_1+c_2x\right)$.

III.3. MATEMATIKI FIZIKANYŇ ESASY DEŇLEMELERI

§3. 1. Hususy önümli differensial deňlemeler

1. Hususy önümli differensial deňlemeleriň kesgitlenişi. Tebigatyň köp hadysalary, meselem, yrgyldylar, ýylylyk geçirijilik, diffuziýa we ş.m hadysalar matematiki fizikada hususy önümli differensial deňlemelere getirilip öwrenilýär.

Kesgitleme. Erkin x, y, ..., z üýtgeýänleri, şol üýtgeýänlere görä $u(x, y, ..., z)$ funksiýany we ol funksiýanyň hususy önümlerini baglanyşdyrýan differensial deňlemä hususy önümli differensial deňleme diýilýär.

$u = u(x, y, ..., z)$ funksiýanyň hususy önümli differensial deňlemesi umuman

$$F\left(x, y, ..., z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial u}{\partial z}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x^{k_1}, \partial y^{k_2}, ..., \partial z^{k_i}}\right) = 0 \qquad (1)$$

görnüşde ýazylyp bilner, bu ýerde $k_1 + k_2 + ... + k_i = k$.

Differensial deňlemä girýän hususy önümleriň iň ýokary tertibine deňlemäniň tertibi diýilýär.

Eger funksiýa we onuň hususy önümleri deňlemede goýlanda ol deňleme toždestwa öwrülýän bolsa, onda şol funksiýa deňlemäniň çözüwi diýilýär.

2. Ikinji tertipli differensial deňlemeler. Biz diňe ikinji tertipli we iki, üç erkin üýtgeýän argumentlere görä hususy önümli differensial deňlemelere seretjekdiris.

$u(x, y)$ funksiýa we onuň hususy önümlerine görä çyzykly bolan deňlemä hususy önümli çyzykly differensial deňleme diýilýar.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u + F(x,y) = 0 \qquad (2)$$

deňleme iki üýtgeýänli $u = u(x, y)$ funksiýa görä ikinji tertipli çyzykly birjynsly däl differensial deňlemedir. Eger bu deňlemede $F(x, y) \equiv 0$ bolsa, ýagny

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u = 0$$

deňleme ikinji tertipli birjynsly çyzykly differensial deňlemedir.

Eger-de hususy önümli differensial deňlemeler diňe ýokary tertipli hususy önümlerine görä çyzykly bolsa, onda ol deňlemelere kwaziçyzykly differensial deňlemeler diýilýär.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

deňleme kwaziçyzykly ikinji tertipli deňleme bolup, bu ýerde $u(x, y)$ funksiýa we onuň birinji tertipli hususy önümleri islendik görnüşde gabat gelmegi mümkin.

$$(x^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + x^5u^3 = (x^2+3x)y$$

deňleme oňa mysal bolup biler.

1-nji mysal.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

deňlemäniň çözüwini tapmaly.

◁ Deňlemeden görnüşi ýaly, gözlenilýän $u(x, y)$ funksiýa x-e bagly bolman, ol diňe y-e bagly funksiýadyr: $u(x, y)=\varphi(y)$, bu ýerde $\varphi(y)$ erkin funksiýadyr. Hakykatdan-da, ol funksiýanyň x-e görä önümi nola deň bolar. Şoňa görä-de $u=\varphi(y)$ funksiýa (4) deňlemäniň çözüwidir. ▷

2-nji mysal.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y \qquad (5)$$

deňlemäniň çözüwini tapmaly.

◁ (5) deňlemäniň çözüwi

$$u(x, y)=y^3+y\varphi(x)+\psi(x) \tag{6}$$

görnüşde bolar, bu ýerde $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ erkin funksiýalar.

Hakykatdan-da, (6) deňligiň iki böleginden hem y-e görä iki gezek önüm alsak:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

we $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ululygyň bahasyny (5) deňlemede ornuna goýsak, onda biz toždestwo alarys. $\triangleright$

§ 3.2. Hususy önümli ikinji tertipli çyzykly differensial deňlemeleriň klassifikasiýasy

1. Hususy önümli differensial deňlemeleriň tipleri. Iki üýtgeýänli ikinji tertipli hususy önümli

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{7}$$

differensial deňlemä seredeliň. Eger berlen oblastda $B^2-AC>0$ şert ýerine ýetse, onda (7) deňlemä giperbolik, $B^2-AC=0$ bolanda parabolik, $B^2-AC<0$ bolanda bolsa elliptik tipli (görnüşli) deňleme diýilýär.

Eger B^2-AC aňlatma berlen oblastda alamatyny üýtgedýän bolsa, onda (7) deňlemä garyşyk görnüşli deňleme diýilýär. Mysal üçin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

deňleme islendik oblastda giperbolik tipli deňlemedir, çünki

$$B^2-AC=1^2-1\cdot(-3)=1+3=4>0.$$

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

deňleme islendik oblastda elliptik tipli deňlemedir, çünki

$$B^2-AC=0^2-(1+x^2)(1+y^2)<0.$$

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

deňleme islendik oblastda parabolik tipli deňlemä degişlidir, çünki

$$B^2-AC=(xy)^2-x^2y^2=0.$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

deňleme garyşyk tipli deňlemedir, ýagny $y>0$ bolanda elliptik tipli deňleme, $y<0$ bolanda giperbolik tipli deňlemedir.

2. Çyzykly hususy önümli differensial deňlemeleriň täze üýtgeýänleri girizip özgerdilişi. Ikinji tertipli hususy önümli

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{9}$$

deňlemä seredeliň.

Täze ξ we η üýtgeýänleri

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y) \tag{10}$$

görnüşde girizeliň, bu ýerde $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ argumentlerine görä iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar. Bu funksiýalaryň ýakobiany

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{11}$$

we (10) funksiýalar x we y-e görä

$$x=x(\xi, \eta), \quad y=y(\xi, \eta)$$

görnüşde aňladylýar.

x we y-e bagly $u(x, y)$ funksiýanyň önümlerini täze ξ we η üýtgeýänlere görä tapalyň:

$$\left.\begin{aligned} & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y; \\ & u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}; \\ & u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_\eta\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xy}; \\ & u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Tapylan aňlatmalary (9) deňlemede ornuna goýup alarys:

$$A_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + 2B_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + C_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} +$$

$$+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0, \quad (13)$$

bu ýerde

$$\left.\begin{aligned} & A_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2; \\ & B_1(\xi,\eta) = A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}; \\ & C_1(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Gös göni barlamak bilen

$$B_1^2 - A_1C_1 = (B^2 - AC)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = (B^2 - AC)I^2 \quad (15)$$

bolýandygyna göz ýetirmek bolar.

Diýmek, (9) we (13) deňlemeler şol bir görnüşli deňlemelere degişlidir, ýagny täze üýtgeýänleri girizmek deňlemäniň tipini üýtgetmeýär.

§3. 3. Ikinji tertipli deňlemeleriň kanonik görnüşe getirilişi

1. Giperbolik tipli deňlemeleriň kanonik görnüşe getirilişi. Hususy önümli birinji tertipli

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (16)$$

deňlemä seredeliň, bu ýerde $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$ (9) deňlemedäki funksiýalardyr, özem $A \neq 0$.

(16) deňlemäni

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times$$

$$\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0 \qquad (17)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \qquad (18)$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \qquad (19)$$

Bu deňlemeleriň her biri ady differensial deňlemeleriň sistemasyna getirilýär, ýagny

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \qquad (20)$$

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}} \qquad (21)$$

ýa-da

$$Ady - (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0, \qquad (22)$$

$$Ady - (B - \sqrt{B^2 - AC})dx = 0. \qquad (23)$$

Soňky deňlemeleri bir deňleme görnüşde aňlatmak bolar, ýagny

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0. \qquad (24)$$

Goý, $\varphi_1(x, y) = c_1$, $\varphi_2(x, y) = c_2$ funksiýalar degişlilikde (22) we (23) deňlemeleriň çözüwleri bolsun. Bu ýagdaýda

$$u = \varphi_1(x, y), \quad u = \varphi_2(x, y), \qquad (25)$$

funksiýalar degişlilikde (18) we (19) deňlemeleriň çözüwidir hem-de şol birwagtda (16) deňlemäniň çözüwidir. (25) deňlemeler bilen kesgitlenýän çyzyklara (9) deňlemäniň häsiýetlendiriji çyzyklary ýa-da bu deňlemäniň häsiýetlendirijisi diýilýär. (24) deňlemä häsiýetlendiriji deňleme diýilýär.

Eger (10) formuladaky $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ funksiýalaryň ornuna (25) funksiýalary alsak, onda (13) deňleme has ýönekeý görnüşe geler, sebäbi onuň käbir koeffisiýentleri nola deň bolar.

Goý,

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (26)$$

deňleme seredilýän oblastda giperbolik tipli deňleme bolsun, ýagny bu oblastda $B^2-AC>0$ şert ýerine ýetýän bolsun.

Goý, A we C koeffisiýentler birwagtda nola deň bolmasyn, ýagny kesgitlilik üçin $A\neq 0$ bolsun.

$B^2-AC>0$ bolany üçin (22) we (23) deňlemeler sistemasynyň hakyky dürli $\varphi_1(x, y)=c_1$, $\varphi_2(x, y)=c_2$ integrallary, ýagny çözüwleri bolar.

(10) formuladaky $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ funksiýalaryň ornuna $\varphi_1(x, y)$ we $\varphi_2(x, y)$ funksiýalary alyp, olaryň degişlilikde (18), (19) deňlemeleriň çözüwleri bolýandygyny göz öňünde tutup, (14) formulalar esasynda alarys:

$$A_1 = A\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Onda (13) deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$2B_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0. \qquad (27)$$

Ýakobianyň noldan tapawutlylygy esasynda $B_1\neq 0$. Şonuň üçin bu deňlemäni $2B_1$-e bölüp alarys:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (28)$$

(28) deňlemä giperbolik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diýilýär.

1-nji bellik. Eger $A=C=0$ bolsa, onda (26) deňleme eýýäm kanonik görnüşdedir.

2-nji bellik. (28) deňlemede

$$\xi=\mu+\nu, \quad \eta=\mu-\nu, \quad \mu=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad \nu=\frac{\xi-\eta}{2}$$

täze üýtgeýän ululyklary girizip, ony

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}=\phi_1\left(\mu,\nu,u,\frac{\partial u}{\partial\mu},\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)$$

görnüşe getirmek bolýar.

2. Parabolik tipli deňlemeleriň kanonik görnüşe getirilişi. (9) deňlemäniň

$$B^2-AC=0 \tag{29}$$

şerti kanagatlandyrýan halyna seredeliň.

Goý, A we B koeffisiýentler birwagtda nola deň bolmasyn. Kesgitlilik üçin $A\neq 0$ bolsun.

(29) şert esasynda (18) we (19) deňlemeler gabat gelýär, we

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{30}$$

deňlemäni alarys.

Eger $\varphi(x, y)$ funksiýa (30) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa, onda bu funksiýanyň

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{31}$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezeliň.

(30) deňlemäniň iki bölegini hem B-e köpeldip we (29) şerti göz öňünde tutup alarys:

$$0=AB\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}=AB\frac{\partial\varphi}{\partial x}+AC\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Bu ýerden $A\neq 0$ şerti göz öňünde tutup, (31) deňlemäni alarys. Bu ýagdaýda (25) birinji integrallar gabat gelýär. Goý, $\varphi(x, y)=C$ birinji integral bolsun. Onda $u=\varphi(x, y)$ (30) deňlemäniň çözüwidir. Şonda $u=\varphi(x, y)$ funksiýa (31) deňlemäni hem kanagatlandyrýar.

Goý, $\xi=\varphi(x, y)$ bolsun. Şeýle $\xi=\xi(x, y)$ saýlamada (13) deňlemäniň A_1 we B_1 koeffisiýentleri nola deňdir. Hakykatdan-da, (14) formulanyň ikinjisini özgerdip alarys:

$$B_1 = \left(A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(B\frac{\partial\xi}{\partial x} + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Bu ýerden $B_1 \equiv 0$, sebäbi $\xi = \varphi(x,\ y)$ funksiýa (30) we (31) deňlemeleriň çözüwidir.

$\xi = \varphi(x,\ y)$ funksiýa (16) deňlemäniň çözüwi bolany üçin $A_1 \equiv 0$ bolar.

$\eta = \eta(x, y)$ funksiýanyň ornuna $\xi = \varphi(x, y)$ funksiýa bilen

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

şerti kanagatlandyrýan islendik funksiýany almak bolar. Özgerdilen (13) deňlemede $C_1 \neq 0$ bolýandygyny görkezmek bolar.

Hakykatdan-da, (14) deňlemäniň üçünji formulasynda $B^2 - AC = 0$ şerti ulanyp alarys:

$$C_1 = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A}\left[A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]^2.$$

Bu ýerden $C_1 \neq 0$, başga ýagdaýda kwadrat ýaýyň içi nola deň bolmaly, ýagny

$$A\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0.$$

Bu deňleme we (30) deňleme birjynsly sistemany emele getirýär, onuň noldan tapawutly çözüwi bardyr ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Şeýlelikde, bu sistemanyň kesgitleýjisi nola deňdir, ýagny

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

bu bolsa $I \neq 0$ şerte garşy gelýär.

Diýmek, (9) deňleme

$$C_1(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$$

görnüşi alar.

$C_1 \neq 0$ bolany üçin bu deňlemäni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{32}$$

görnüşde ýazmak bolar.

(32) deňlemä parabolik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diýilýär.

Bellik. Eger $A=0$, $B=0$ bolsa, onda (9) deňleme eýýäm kanonik görnüşe getirilendir.

3. Elliptik tipli deňlemeleriň kanonik görnüşe getirilişi. Goý, (9) deňleme elliptik tipli deňleme bolsun, ýagny seredilýän oblastda

$$B^2 - AC < 0 \tag{33}$$

şert ýerine ýetsin.

Bu şertiň esasynda (22) we (23) deňlemeleriň çatyrymly kompleks integrallary bardyr: $\varphi_1(x, y)=C_1$, $\varphi_2(x, y)=C_2$, özem

$$\varphi_1(x, y)=\xi(x, y)+i\eta(x, y),\ \varphi_2(x, y)=\xi(x, y)-i\eta(x, y),$$

bu ýerde $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ funksiýalar x we y üýtgeýänli hakyky funksiýalar.

$\varphi_1(x, y)$ funksiýa (16) deňlemäniň çözüwi, onda

$$A\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ýa-da

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + i\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + i\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Bu toždestwonyň çep bölegini özgerdip alarys:

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] +$$

$$+2i\left[A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] \equiv 0.$$

Bu ýerden şeýle toždestwolar gelip çykýar:

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] \equiv 0,$$

$$A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}=0.$$

(14) formula we bu toždestwolar esasynda

$$A_1\equiv C_1,\quad B_1\equiv 0. \tag{34}$$

Onda (13) deňleme şeýle görnüşi alar:

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

(32), (11) we (15) şertlerden $A_1\neq 0$, şonuň üçin soňky deňlemäni

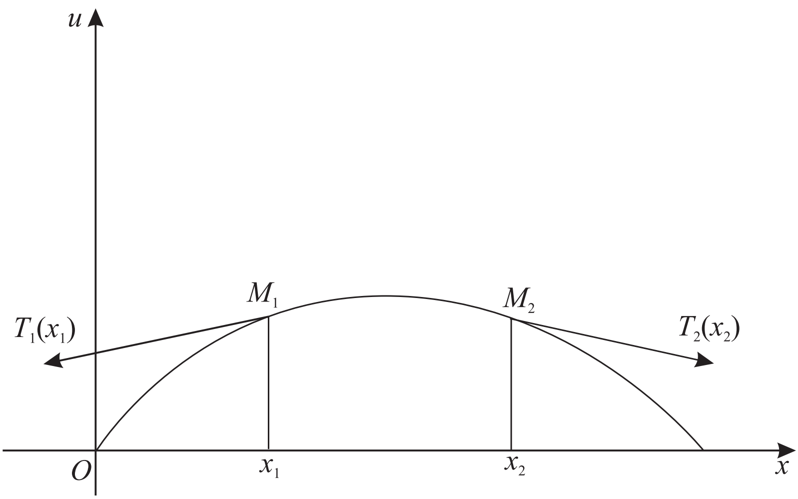
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{35}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Bu deňlemä elliptik tipli deňlemäniň kanonik görnüşi diýilýär.

§3. 3. Giperbolik deňlemeler

1. Kirşiň yrgyldylarynyň deňlemesiniň getirilip çykarylyşy. Uçlaryndan dartylan kirşi alalyň. Kirş diýip örän inçe we erkin egrelýän sim sapajygyna düşünjekdiris. Kirşe täsir edýän dartyş güýjüň agyrlyk güýje garanyňda has uludygy sebäpli, agyrlyk güýjüni hasaba aljak däldiris.



1-nji surat

Deňagramlylyk ýagdaýda kirşiň ugry Ox okunyň ugry bilen gabat gelýär diýeliň. Biz kirşiň kese yrgyldysyna seredeliň; yrgyldy diňe bir tekizlikde bolup geçýär we kirşiň hemme nokatlary Ox okuna perpendikulýar hereket edýär diýeliň. Wagtyň islendik pursatynda kirşiň nokatlarynyň deňagramlylyk ýagdaýyndan üýtgemegini $u=u(x, t)$ bilen belgiläliň. Wagtyň islendik pursatynda $u=u(x, t)$ funksiýanyň grafigi şol pursatdaky kirşiň formasyny görkezjekdigi aýdyňdyr.

Indi has kiçi yrgyldylara garap geçýänligimiz üçin $u=u(x, t)$-iň we onuň $\frac{\partial u}{\partial x}$ önüminiň kiçi bolanlygy sebäpli, $u=u(x, t)$ funksiýanyň we $\frac{\partial u}{\partial x}$ önüminiň kwadratlaryny hem-de olaryň köpeltmek hasylyny hasaba aljak däldiris.

Kirşiň (x_1, x_2) aralygyny alalyň. Alnan aralyk yrgyldy wagtynda M_1M_2 aralyga deformirlenýär (*1-nji surat*). M_1M_2 duganyň l uzynlygy kesgitli integralyň kömegi bilen aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

Şu ýerden görnüşine görä, kiçi yrgyldylar wagtynda kirşiň islendik alnan aralygynda süýnmeklik döremeýär, ýagny aralygyň uzynlygy öňküligine galýar. Onda Gukuň kanuny esasynda kirşiň islendik nokadynda täsir edýän $T(x)$ dartyş güýji wagta görä üýtgemeýär. Indi $T(x)$ dartyş güýjüniň x-e bagly däldigini görkezeliň. Kirşiň (x_1, x_2) aralygynda M_1 we M_2 nokatlaryna galtaşýanlaryň ugry boýunça ugrukdyrylan dartyş güýji, daşky güýçler we inersiýa güýji täsir edýär. Diňe kese yrgyldylara seredýänligimiz üçin inersiýa güýji we daşky güýçler Ou okuna paralleldir. Onda

$$T_1(x_1)\cos\alpha(x_1) - T_2(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

bu ýerde $\alpha(x)$ burç Ox okunyň položitel ugry bilen, t wagtda kirşiň abssissasy x bolan nokadyna geçirlen galtaşýan çyzyk bilen emele getiren burçudyr:

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}.$$

Şerte görä $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0$, onda $\cos\alpha(x) \approx 1$, bu ýerden $T_1(x_1) \approx T_2(x_2)$ deňligiň islendik x_1 we x_2 üçin ýerine ýetýänligi sebäpli $T = T_0$, ýagny islendik x, t üçin T dartyş güýji hemişelikdir. Indi kirş yrgyldysynyň deňlemesini getirip çykarmaga girişeliň. Munuň üçin kirşiň (x_1, x_2) aralygyna täsir edýän ähli güýjüň jemi deňagramlaşmalydyr diýen Dalamberiň prinsipinden peýdalanalyň. Kirşiň M_1 we M_2 nokatlaryna täsir edýän dartyş güýjüniň Ou okuna bolan proýeksiýasyny Y diýsek, onda

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)].$$

Indi biziň öňki talap eden şertlerimiziň esasynda

$$\sin\alpha(x) = \frac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

bolar. Diýmek,

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]$$

ýa-da

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

deňligiň esasynda

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Eger kirşiň (x_1, x_2) aralygynda täsir edýän Ou okuna parallel bolan daşky güýjüň dykyzlygyny $p(x, t)$ bilen belgilesek, onda (x_1, x_2) aralyga täsir edýän güýjüň ululygy

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx$$

bolar.

Eger kirşiň dykyzlygyny $\rho(x)$ bilen belgilesek, onda M_1M_2 aralygyň inersiýa güýji

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

ululyga deňdir.

Kirşiň (x_1, x_2) aralygyna täsir edýän güýçleriň Ou okuna proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmalydyr:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t)\right]dx = 0.$$

Bu ýerden x_1 we x_2 ululyklaryň erkinliginiň esasynda alarys:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) = 0. \tag{36}$$

Eger kirş birjynsly bolsa, onda $\rho(x)$-hemişelikdir: $\rho(x)=\rho_0$. Onda (36) deňlemede $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ we $f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho_0}$ belgilemeleri girizip, ony

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

görnüşde ýazyp bileris.

Eger kirşe daşky güýç täsir etmeýän bolsa, onda $p(x, t)=0$ we

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{37}$$

(37) deňlemä kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi diýilýär.

2. Başlangyç we gyra şertler. Ikinji tertipli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{38}$$

deňleme XVIII-nji asyrda Danil Bernulli, Dalamber we Eýler tarapyndan öwrenilipdir. (38) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bardyr, diýmek, kirşiň yrgyldysyny doly kesgitlemek üçin (38) deňlemäniň ýeke özi ýeterlik däldir. Kirşiň yrgyldysyny doly kesgitlemek üçin käbir tebigy şertler ýüze çykýar. Nokadyň dinamikasyndan belli bolşuna görä, nokadyň hereketini doly kesgitlemek üçin onuň başlangyç ýagdaýyny we başlangyç tizligini bilmek zerurdyr. Diýmek, kirşiň yrgyldysyny doly kesgitlemek üçin wagtyň $t=0$ pursatynda onuň islendik nokadynyň ýagdaýyny we başlangyç tizligini bilmek zerurdyr:

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{39}$$

(39) şertler başlangyç şertler diýlip atlandyrylýar. Eger kirşiň çäklenen bölegine seredilýän bolsa, onda onuň gyra nokatlarynda yrgyldynyň nähili bolýandygyny bilmek zerur. Eger kirşiň uçlary berkidilen bolsa, onda

$$u|_{x=0}=0; \qquad u|_{x=l}=0 \tag{40}$$

şertler hem berilmelidir. (40) şertlere gyra şertler diýilýär.

Eger yrgyldylar maýyşgak membranada (metal listi) döreýän bolsa, onda şeýle yrgyldylaryň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y).$$

Eger membrana daşky güýç täsir etmeýän bolsa, onda $f(x, y)=0$ we membrananyň erkin yrgyldysynyň deňlemesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

görnüsi alar.

Eger membrananyň yrgyldysynyň deňlemesine seredilse, onda başlangyç şertler aşakdaky ýaly bolar:

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x, y); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x,y).$$

Eger membrananyň gyrasy berkidilen bolsa, onda

$$u|_L=0$$

gyra şerti alarys. Göwrümde geçýän akustik yrgyldylaryň deňlemesini şeýle ýazmak bolar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z).$$

Wakuumdaky elektromagnit yrgyldylaryň hem üç ölçegli yrgyldylar deňlemesine getirilýändigini biz belläp geçmelidiris. Şu hili deňlemeler üçin başlangyç we gyra şertler aşakdaky ýaly bolar:

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x, y, z); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z); \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_S = 0,$$

bu ýerde $\vec{n}$ -wektor S-üstüň içki normal wektory.

3. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesiniň çözüwi (Dalam beriň çözüwi). Kirş yrgyldysynyň deňlemesi giperbolik tipe degişli bolan hususy önümli deňlemeleriň iň ýönekeýleriniň biridir. Ilki bilen uzynlygy çäklendirilmedik kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesiniň çözüwine seredeliň. Öňden belli bolşy ýaly, kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{41}$$

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

$x-at=c_1$ we $x+at=c_2$ çyzyklar (41) deňlemäniň häsiýetlendirijileridir. Eger $x-at=\xi$, $x+at=\eta$ diýsek, onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ululyklaryň tapylan bahalaryny (41) deňlemede ornuna goýsak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{42}$$

deňlemäni alarys.

Bu ýerden

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi). \tag{43}$$

Eger (43) deňligi ξ-ä görä integirlesek, onda

$$u = \int f(\xi)d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{44}$$

deňligi alarys, bu ýerde $f_1(\xi) = \int f(\xi)d\xi$, $f_2(\eta)$-erkin funksiýalar.

(44) deňlikde ξ we η ululyklaryň bahalaryny ýerine goýalyň:

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at). \tag{45}$$

Eger f_1 we f_2 iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda (45) aňlatma (41) deňlemäniň çözüwidir. Şu çözüwiň ilkinji bolup Dalamber tarapyndan açylandygy üçin oňa Dalamberiň çözüwi diýilýär. Şu çözüwiň fiziki manysyna seredeliň. Ýönekeýlik üçin $f_2(\eta) = 0$ diýsek, onda yrgyldaýan nokatlaryň üýtgemesi $u_1 = f_1(x - at)$ aňlatma arkaly kesgitlenip bilner.

Erkin X nokat alalyň. Edil şunuň ýaly süýşme wagtyň $t > 0$ pursatynda koordinatasy $x + at$ deň bolan nokatdan döreýär. Diýmek, şu ýerden görnüşine görä u-nyň üýtgemesi kirş boýunça a tizlik bilen sag tarapa süýşýär, ýagny $u_1 = f_1(x - at)$ funksiýa tolkunyň sag tarapa ýaýraýşyny häsiýetlendirýär. Edil şunuň ýaly, $u_2 = f_2(x + at)$ funksiýa şol tekizlikdäki tolkunyň çep tarapa ýaýraýşyny kesgitleýär.

Diýmek, (45) çözüw garşylykly ugurlara ýaýraýan tolkunlaryň jemidir.

4. Koşiniň meselesi.

3-nji mysal. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty < x < +\infty,\ t > 0)$ deňlemäniň

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \tag{46}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan $u(x, t)$ çözüwini tapmaly.

◁ Kirşiň uzynlygynyň çäksiz bolany üçin gyra şertler berilmeýär. Eger (45) formulada $t = 0$ diýip (46) başlangyç şerti göz öňünde tutsak, onda $f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

şertden bolsa

$$\psi(x) = -a[f_1'(x) - f_2'(x)] \tag{47}$$

deňligi alarys. (47) deňligi integrirläp,

$$f_1(x)-f_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz+c$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \quad f_1(x)-f_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \psi(z)dz+c$$

ýa-da

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz+\frac{c}{2}; \tag{48}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz-\frac{c}{2}.$$

(48) bahalary (45)-de ornuna goýup alarys:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz+\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz-\frac{c}{2}.$$

Bu ýerden kesgitli integralyň häsiýetini ulanyp taparys:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \triangleright \tag{49}$$

Eger $\varphi(x)$ funksiýanyň üznüksiz ikinji, $\psi(x)$ funksiýanyň üznüksiz birinji önümi bar bolsa, onda (49) funksiýa erkin yrgyldaýan kirşiň deňlemesi üçin Koşiniň meselesiniň çözüwidir. Kirşiň erkin yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşiniň meselesiniň çözüwiniň barlygy we şol çözüwiň ýeke-täkligi (49) formulanyň alnyşyndan görünýär. Indi şol çözüwiň durnukly çözüw bolmak meselesine seredeliň. Haçan-da $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiýalary aşakdaky

$$|\varphi(x)-\overline{\varphi}(x)|<\delta, \quad |\psi(x)-\overline{\psi}(x)|<\delta$$

şertleri kanagatlandyrýan $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$ funksiýalar bilen çalşyranymyzda ilki başdaky $u(x, t)$ çözüw bilen täze $\overline{u}(x, t)$ çözüwleriň tapawudynyň absolýut ululygy islendik $[0, t_0]$ wagt aralygynda ε-dan kiçi bolar ýaly şeýle $\delta > 0$ sany görkezmek mümkin. Şu tassyklamany subut etmek üçin (49) formulany peýdalanalyň:

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| \leq \frac{|\varphi(x+at) - \overline{\varphi}(x+at)|}{2} +$$

$$+\frac{|\varphi(x-at) - \overline{\varphi}(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(z) - \overline{\psi}(z)|dz.$$

Bu ýerden alarys:

$$|u(x,t) - \overline{u}(x,t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a}2at = \delta(1+t). \tag{50}$$

Eger $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t}$ diýsek, onda $|u(x, t) - \overline{u}(x, t)| < \varepsilon$ bolar.

Eger goýlan meseläniň çözüwi bar bolup, ol çözüw hem ýeke-täk we durnukly bolsa, onda ol meselä korrekt goýlan diýilýär. Görşümiz ýaly, kirş yrgyldysynyň deňlemesi üçin Koşiniň meselesi korrekt goýlan meseledir.

4-nji mysal. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ deňlemäniň

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

◁ Bu çözüwi tapmak üçin

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$$

formuladan peýdalanalyň.

Biziň bu meselämizde $\varphi(x) = x^2$; $\psi(x) = x$, $a = 1$.

Diýmek,

$$u(x,t) = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} zdz,$$

$$\int_{x-t}^{x+t} zdz = \frac{z^2}{2}\Big|_{x-t}^{x+t} = \frac{(x+t)^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}.$$

Bu ýerden

$$u(x,t) = \frac{(x-t)^2}{2} + \frac{(x+t)^2}{2} + \frac{(x+t)^2}{4} - \frac{(x-t)^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}(x+t)^2 + \frac{1}{4}(x-t)^2;$$

$$u(x,t) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}xt + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xt + \frac{1}{4}t^2 = x^2 + xt + t^2. \triangleright$$

5. Kirşiň deňlemesiniň Furýeniň usuly bilen çözülişi. Furýeniň ýa-da üýtgeýänleri böleklemek usuly hususy önümli differensial deňlemeleri çözmekde giňden ulanylýan usullaryň biridir. Goý, kirş iki tarapyndan berkidilen bolsun.

5-nji mysal.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{51}$$

deňlemäniň

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{52}$$

gyra we

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \tag{53}$$

başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly.

$\triangleleft$ Deňlemäniň toždestwolaýyn nola deň bolmadyk käbir hususy çözüwini

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{54}$$

görnüşde gözläliň.

(54) deňlikden tapylan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

ikinji önümleriň bahalaryny (51) deňlemede ýerine goýup alarys:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

ýa-da

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Soňky deňligiň çep bölegi diňe t, sag bölegi bolsa diňe x-e bagly. Haçan-da deňligiň sag bölegi x we t bagly bolmadyk hemişelik sana deň bolanda bu hemişelik sany λ bilen belgilesek, onda

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{55}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{56}$$

deňlikleri alarys.

λ-nyň käbir bahalarynda (56) deňlemäniň (52) gyra şertleri kanagatlandyrýan toždestwolaýyn nola deň bolmadyk çözüwi bardyr.

λ-nyň şeýle bahalaryna onuň hususy bahalary diýilýär. Şol bahalara degişli çözüwe bolsa (56), (52) gyra meselesiniň hususy funksiýalary diýilýär. Indi (52), (56) gyra meselesiniň hususy bahalaryny we hususy funksiýalaryny tapalyň. Ady differensial deňlemeler teoriýasyndan belli bolşuna görä, $\lambda < 0$ bolanda (56) deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky ýaly bolar:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

c_1, c_2 – erkin hemişelik sanlar.

(52) gyra şertleri ulanyp alarys:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Bu sistemanyň çözüwi $c_1=0$, $c_2=0$ bolar. Onda $X(x)=0$. Eger $\lambda=0$ diýsek, onda (56) deňlemäniň umumy çözüwi $X(x)=c_1+c_2x$ bolar. Ýene-de gyra şertleriň esasynda $c_1=0$, $c_2=0$ alarys. Eger-de $\lambda>0$ bolsa, onda (56) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$$

görnüşde bolar. Gyra şertleri ulansak, onda

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0 \end{cases}$$

sistema alnar.

Sistemanyň birinji deňlemesinden $c_1=0$ alynýar, ýöne ikinji deňlemesinden $c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$ deňligi alarys, indi $c_2 \neq 0$ diýsek, onda $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$, ýagny $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$, k-erkin bitin san ($k=1, 2, 3,...$).

Diýmek, (56) we (52) gyra meselesiniň noldan tapawutly çözüwi diňe $\lambda k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ bolanda bolup biler. λ-nyň şu hususy bahalaryna aşakdaky ýaly hususy funksiýalar degişlidir:

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Şu funksiýalar hemişelik takyklygynda hasaplanýar.

λ hususy bahalar bolanda (55) deňlemäniň umumy çözüwi aşakdaky ýaly bolar (ady differensial deňlemeler teoriýasyna seret):

$$T_k = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

bu ýerde a_k, b_k – erkin hemişelik sanlar.

Şeýlelikde,

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left[a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

$u_k(x, t)$ funksiýa a_k, b_k erkin hemişelik ululyklaryň islendik bahalarynda (51) deňlemäni we (52) gyra şertleri kanagatlandyrýar.

(51) deňlemäniň birjynsly we çyzykly deňleme bolýandygy üçin

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (57)$$

funksiýa hem (51) deňlemäni kanagatlandyrýar.

Şu ýerde aýdylan tassyklamalaryň ýerine ýetmegi üçin (57) hataryň deňölçegli ýygnanmagy we x, t boýunça agzalaýyn iki gezek differensirlenýän bolmagy ýeterlikdir. Hataryň deňölçegli ýygnanmagy we x, t üýtgeýan boýunça hataryň agzalarynyň ikinji önümleriniň bolmagy üçin $\varphi(x)$ funksiýanyň üznüksiz ikinji tertipli önümi bar bolup, üçünji tertipli önüminiň I-nji görnüsdäki tükenikli sany üzülme nokatlarynyň bolmagy we $\psi(x)$ funksiýanyň üznüksiz birinji önümleriniň barlygy, ikinji tertipli önüminiň bolsa, birinji görnüşdäki tükenekli sany üzülme nokatlarynyň bolmagy ýeterlikdir.

Hataryň her bir

$$\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

görnüşdäki jemi (52) gyra şerti kanagatlandyrýanlygy üçin, (57) hataryň $u=u(x,\ t)$ jemi hem (52) şerti kanagatlandyrýar. Indi bize $u=u(x,\ t)$ funksiýa berlen (53) başlangyç şertleri kanagatlandyrar ýaly, a_k, b_k hemişelik sanlary kesgitlemek gerek. Onuň üçin üýtgeýän ululyga görä (57) deňligiň önümini taparys:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi at}{l} + b_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Indi $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ başlangyç şertleri ulanalyň:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}; \tag{59}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{60}$$

(59) we (60) aňlatmalar $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň $(0,\ l)$ interwalda sinuslar boýunça Furýeniň hataryna dagydylmasydyr. Furýeniň hatarynyň koeffisiýentleri bolan a_k, b_k bize belli bolan $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalar arkaly

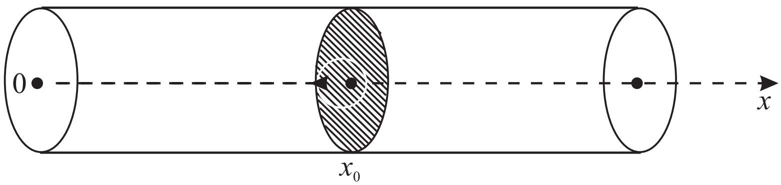
$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;$$

formulalar boýunça kesgitlenýär. ▷

§3. 4. Parabolik deňlemeler

1. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi. Metaldan ýasalan bir steržen alalyň we şol sterženiň gapdal üsti ýylylyk geçirmeýär diýeliň. Eger başlangyç ýagdaýda sterženiň dürli bölekleri dürli temperaturada gyzdyrylan diýsek, onda sterženiň has gyzgyn böleginden pes gyzgyn bölegine ýylylyk geçer. Eger sterženiň esaslary hem ýylylyk geçirmeýän bolsa, onda wagtyň geçmegi bilen sterženiň hemme ýerinde temperatura deňleşer.

Çyzykly ýylylyk geçirijilik hadysasyna seredilende, alnan steržen gaty inçe diýip kabul edilýär: wagtyň islendik pursatynda onuň kese kesiginiň hemme nokatlarynda temperatura birmeňzeşdir. Eger sterženiň oky deregine Ox okuny kabul etsek, onda $u=u(x, t)$ temperatura x we t wagta görä funksiýa hökmünde garamak mümkin.



Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesini getirip çykarmak üçin iki sany öňden belli bolan fiziki ululyklara seredeliň:

1) Birjynsly jisimiň temperaturasyny Δu ululyga ýokarlandyrmak üçin gerek bolan ýylylygyň mukdary

$$c\rho V\Delta u \tag{61}$$

ululyga deňdir. V – jisimiň göwrümi, ρ – onuň dykyzlygy, c – udel ýylylyk sygymy.

2) Sterženiň kese kesiginden Δt wagtyň içinde akyp geçýän ýylylygyň mukdary kesigiň meýdanyna, kesige perpendikulýar ugur boýunça temperaturanyň üýtgeýiş tizligine, Δt wagt aralygyna proporsionaldyr:

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t. \tag{62}$$

Bu ýerde S – kese kesigiň meýdany, k – ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti, $\frac{\partial u}{\partial x}$ bolsa Ox okunuň položitel ugry boýunça temperaturanyň üýtgeýiş tizligi.

Akymynyň ululygy položitel hasap edilýän ýylylyk akymy Ox okunyň artýan ugry bilen gabat gelýandigi üçin (62) aňlatmada minus alamatyny alýarys. Eger $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ bolsa, onda x-iň artmagy bilen temperatura hem artar. Ýylylyk bolsa temperaturanyň ýokary ýerinden kiçi tarapyna akar. Diýmek, ýylylyk akymynyň ugry x-iň kemelýän ugry bilen gabat gelýär. Şonuň üçin $\frac{\partial u}{\partial x}$ önümiň öňünde minus alamaty goýulýar.

Sterženiň kese kesiginiň abssissalary degişlilikde x we $x+\Delta x$ bolan aralygyny alalyň we onuň üçin ýylylyk balansyny düzeliň.

(62) formula esasynda abssissasy x bolan kesikden Δt wagtyň içinde akyp geçýän ýylylygyň mukdary $-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$ ululyga deňdir.

Eger ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululyklary hasaba almasak, onda $\frac{\partial u}{\partial x}$ hususy önümleriniň $x+\Delta x$ nokatdaky bahasyny aşakdaky ýaly hasaplamak bolýar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + d_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Bu ýerden görnüşine görä, abssissasy $x+\Delta x$ bolan kesikden geçýän ýylylygyň mukdary $-kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t$; x kese kesikden we $x+\Delta x$ kesikden geçýän ýylylyk akymlarynyň mukdarlarynyň tapawudyny bilip, Δt wagtyň içinde sterženiň alnan aralygynyň alan ΔQ ýylylyk mukdaryny taparys:

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t;$$

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t. \tag{63}$$

Ikinji tarapdan bolsa, şu Δt wagt içinde temperatura takmynan $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \approx \Delta u$ ululyga artýar. Diýmek,

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \qquad (S\Delta x = V \text{göwrüm}). \tag{64}$$

Alnan (63) we (64) deňlikleri deňeşdirip alarys:

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

ýa-da

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{65}$$

$\frac{k}{c\rho} = a^2$ bilen belgiläp,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{66}$$

deňlemäni alarys.

(66) deňlemä ýylylyk geçirijilik deňlemesi diýilýär.

k hemişelige temperatura geçirijilik koeffisiýenti diýilýär. (66) deňleme birjynsly we çyzykly deňlemedir. Goý, sterženiň käbir böleklerinde ýylylyk bölüp çykaryjylar ýa-da ýylylyk siňdirjiler bar diýeliň ýa-da başgaça aýdanymyzda sterženiň içinde ýylylyk çeşmeleri bar diýeliň.Ýylylygyň bölünip çykmak ýa-da siňdirilmek hadysalaryny ýylylyk çeşmeleriniň dykyzlygy diýilýän düşünjäniň üsti bilen häsiýetlendirmek has amatly bolýar.

Ýylylyk çeşmesiniň dykyzlygy diýip, sterženiň $(x,\ x+\Delta x)$ aralygynda gysga $(t,\ t+\Delta t)$ wagt aralygynda $F(x,\ t)\Delta x\Delta t$ ululyga deň bolan ýylylyk mukdaryny bölüp çykarýan $F(x,\ t)$ funksiýa düşünilýär.

$F(x,\ t)<0$ bolsa, onda ýylylyk bölünip çykmaýar, tersine ýylylyk ýitgisi bolýar. Mysal üçin, sterženden hemişelik elektrik togy akyp geçende sterženden ýylylyk bölünip çykýar. Bu ýagdaýda $F(x,\ t)=I^2R=const.$ I-togyň ululygy (güýji), R-sterženiň garşylygy. Sterženiň içinde ýylylyk çeşmesi bar bolsa, onda (65) ýylylyk balansyny alanymyzda ýylylyk bölünip çykmasyny nazara almaly, ýagny (65) deňlemäniň sag bölegine $F(x,\ t)\Delta x\Delta t$ ululygyň $S\Delta x\Delta t$ ululyga bölünmesini goşmaly:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S}F(x,t). \tag{67}$$

Deňligiň iki bölegini hem $c\rho$ ululyga bölüp we

$$\frac{1}{c\rho s}F(x,t) = f(x,t)$$

belgileme girizip alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{68}$$

(68) deňleme ýylylyk geçirijiligiň deňlemesidir (sterženiň içinde ýylylyk çeşmesi bar).

(68) deňleme birjynsly deňleme däldir.

Eger ýylylyk geçirijilik deňlemesine iki ölçegli jisimde (plastinkada) seretsek, onda onuň deňlemesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x,y,t)$$

görnüşde bolar. Indi ýylylyk geçirijilik deňlemesine üç ölçegli jisimde seretsek, onda ýylylyk geçirijilik deňlemesi şeýle görnüşde bolar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t). \tag{69}$$

Eger-de seredilýän oblastyň içinde ýylylyk çeşmesi bolmasa, onda $f(x, y, z, t) = 0$ bolar we (69) şeýle görnüşe geçer:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{70}$$

(70) deňleme birjynsly deňlemedir.

Eger-de jisimiň içinde ýylylyk çeşmesi bolmasa we jisimiň ähli nokatlarynda wagtyň geçmegi bilen temperatura üýtgemese, onda $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ bolar we jisimde temperaturanyň paýlanmak hadysasy Laplasyň deňlemesi atlandyrylýan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{71}$$

deňlemäni kanagatlandyrýar.

Ýylylyk geçirijilik deňlemesine seredilende başlangyç şert diýmeklik, başlangyç $t = 0$ pursatynda jisimiň ähli nokatlarynda temperatura belli diýmekdir. $u|_{t=0}=\varphi(x, y, z)$, gyra şert bolsa seredilýän fiziki meselelere baglylykda aşakdaky üç görnüşde bolup biler.

1. Wagtyň islendik pursatynda jisimiň tutuş üstünde temperatura belli hasap edilýär:

$$u|_S=\varphi(x, y, t).$$

2. Jisimiň üstünde temperatura belli däl, ýöne jisime girýän ýa-da ondan çykýan ýylylyk akymy belli hasap edilýär:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(x,y,z),$$

$\vec{n}$ – üstüň normalynyň birlik wektory.

3. Birinji we ikinji gyra şertleriň umumylaşdyrylan görnüşi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - hu\right)\Big|_S = F(x,y,z),$$

h – daşky ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti.

Üçünji gyra meselesi köplenç jisim özünden ýylylyk goýberende ulanylýar.

Hakykatdan-da, tejribeler esasynda alnyşyna görä, T temperaturaly jisimiň üstüniň ds böleginden dt wagt aralygynda T_0 temperaturaly daşky gurşawa goýberilýän ýylylygyň mukdary T_1-T_0, ds, dt ululyklara göni proporsional:

$$dQ=\alpha(T_1-T_0)dsdt,$$

bu ýerde α-ýylylyk berliş koeffisiýenti. Şeýlelikde, jisimden daşary çykýan ýylylyk akymy

$$q=\alpha(T_1-T_0).$$

Basga tarapdan bolsa ýylylyk geçirijilik netijesinde jisimiň iç tarapynda şeýle ýylylyk akymy jemlenmelidir:

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Soňky iki deňlemäniň sag böleklerini deňläp alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\alpha}{k}(T_1-T_0).$$

Eger $\frac{\alpha}{k} = h$ diýsek we $T = u|_S$ bolsa, onda alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial n} - hu\Big|_S = hT_0.$$

Indi daşky gurşawyň temperaturasy dürli nokatlarda dürli diýeliň. Eger h, T_0 ululyklaryň koordinatalar bilen baglanyşygy belli diýsek, onda h, T_0 ululyklara käbir $F(x, y, z)$ funksiýa hökmünde seretmek bolar we biz üçünji tipli gyra meselesine geleris.

2. Ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi üçin Furýeniň usuly. Öňden belli bolşuna görä, gapdal üsti ýylylyk geçirmeýän steržende ýylylyk çeşmesi ýok wagtynda ýylylyk geçirijiligiň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{81}$$

Eger steržen çäksiz uzyn bolsa (iki çetinden çäklendirilmedik steržene seredilse), onda onuň ortalaryndaky temperaturanyň ýaýraýşyna diňe ilki başdaky steržene ýaýran temparatura täsir edýär. Gyra nokatlardaky temperatura wagtyň ep-esli dowamynda onuň ortalaryna täsir edip bilmeýär. Şonuň üçin hem çäksiz uzyn steržende ýylylyk geçirijilik deňlemesine seredilende diňe başlangyç şertli meselä garalýar.

6-njy mysal. (81) deňlemäni we

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{82}$$

başlangyç şerti kanagatlandyrýan funksiýany tapmaly.

◁ Bu meseläni çözmekden öňürti (81) deňlemäni has ýönekeýleşdireliň. Onuň üçin t üýtgeýän ululygy $\tau = a^2 t$ bilen çalşyralyň. Onda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = a^2 \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

bolar we täze girizilen τ üýtgeýäne görä (81) deňleme

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{83}$$

görnüşe geçer.

Başlangyç (82) şert hem

$$u(x, \tau)|_{\tau=0} = f(x) \qquad (84)$$

görnüşi alar.

Goýlan meseläni çözmek üçin Furýeniň usulyndan peýdalanalyň. Ilki bilen deňlemäniň käbir hususy çözüwini tapalyň. (83) deňlemäniň hususy çözüwini

$$u(x, \tau) = X(x)T(\tau) \qquad (85)$$

görnüşde gözläliň.

$u(x, \tau)$ funksiýanyň we onuň önümleriniň bahalaryny (83) deňlemede ýerine goýup alarys:

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

ýa-da

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (86)$$

(86) deňlemäniň çep bölegi x-e bagly däl, sag bölegi bolsa τ-a bagly däl. Diýmek,

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c; \qquad c - const,$$

bu ýerden

$$T(\tau) = \bar{c}_1 e^{c\tau} \qquad (87)$$

deňligi alarys.

Ýylylyk geçirijiligiň tebigatyndan belli bolşuna görä, sterženiň islendik $x = x_0$ kese kesigindäki $u(x, \tau) = X(x)T(\tau)$ temperatura τ-yň islendik ($\tau \to \infty$) bahasynda absolýut ululygy boýunça çäksiz artyp bilmez.

Haçan-da $\tau \to \infty$ ($t \to \infty$) diýsek, onda (87) deňlikde c hökman otrisatel ululyk bolmaly.

Eger $c = -\lambda^2$ belgileme girizsek, onda

$$T(\tau) = \bar{c} e^{-\lambda^2 \tau}.$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (88)$$

deňlemäniň umumy çözüwiniň

$$X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$$

bolýandygy bize ady differensial deňlemeler teoriýasyndan bellidir. Şeýlelikde, biz (83) deňlemäniň

$$u(x,\tau)=[c_1\overline{c_1}\cos\lambda x+c_2\overline{c_1}\sin\lambda x]e^{-\lambda^2\tau}$$

çözüwini taparys, bu ýerde c_1, c_2, $\overline{c}_1$ – hemişelik sanlardyr. Gysgaça $\alpha=c_1\overline{c}_1$, $\beta=c_2\overline{c}_1$ diýsek,

$$u(x,\tau)=(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau} \tag{89}$$

deňligi alarys. $u(x,\ \tau)$ funksiýa λ-nyň islendik bahasynda (83) deňlemäni kanagatlandyrýar. Onda biz λ-nyň her bir bahasyna degişli α we β ululyklary saýlap alyp bileris. Diýmek, α we β ululyklara λ-a ululyga görä funksiýa hökmünde seretmek mümkin. Şeýlelikde, (83) deňlemäniň

$$u_\lambda(x,\tau)=[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda^2\tau} \tag{90}$$

görnüşli hususy çözüwleriniň maşgalasyny tapdyk. Ol deňlemäniň birjynsly we çyzykly deňleme bolanlygy üçin

$$u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_\lambda(x,\tau)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \tag{91}$$

funksiýa hem (83) deňlemäniň çözüwidir.

Indi bize (91) funksiýa başlangyç (84) şerti kanagatlandyrýan bolar ýaly $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ ululyklary saýlap almak gerek.

(91) deňlikden $\tau=0$ bolanda (82) esasynda

$$u|_{\tau=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda=f(x) \tag{92}$$

deňligi alarys.

Matematiki analizden belli bolşuna görä, $f(x)$ funksiýany Furýeniň integralyna dagytmaklyk aşakdaky ýaly bolar:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi. \tag{93}$$

$$\cos\lambda(\xi-x)=\cos\lambda\xi\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\sin\lambda x$$

formulany nazara alsak, (93) deňligi başgaça ýazmak mümkin:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi \right] \cos\lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \right) \sin\lambda x \right\} d\lambda. \qquad (94)$$

(92) we (94) deňlikleri deňeşdirip,

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

sistemany alarys.

Şu ýerde birzady bellemek gerek. $f(x)$ funksiýany Furýeniň integralyna dagytmak üçin $f(x)$ funksiýany Furýeniň hataryna dagydyp bolýanlygy we $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ integralyň ýygnanýanlygy ýeterlikdir. $f(x)$ funksiýadan edilýän talaplaryň hiç birisi goýlan meseläniň fiziki manysyna-da garşy çykmaýar, sebäbi $f(x)$ başlangyç wagtda sterženiň ähli nokatlarynyň temperaturasyny görkezýär. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ integralyň ýygnanmagynyň talap edilmegi bolsa, steržendäki ýylylyk energiýasynyň çäklidigini görkezýär. $\alpha(\lambda)$ we $\beta(\lambda)$ ululyklaryň bahasyny (91) deňlikde ýerine goýup,

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\{\cos\lambda x \cos\lambda\xi + \sin\lambda x \sin\lambda\xi\} e^{-\lambda^2\tau} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi) e^{-\lambda^2\tau} d\xi \qquad (96)$$

deňligi alarys. Tapylan $u(x, \tau)$ (96) funksiýa (83) deňlemäni we (84) başlangyç şerti kanagatlandyrýar. Diýmek, $u(x, \tau)$ goýlan meseläniň çözüwidir. Indi käbir elementar öwürmeler geçireliň. (96) formulanyň sag böleginde integrirlemegiň tertibini çalşyrsak, onda

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda\right\}d\xi \tag{97}$$

formulany alarys, indi $\lambda=\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$; $\frac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}=\omega$ bilen belgilesek, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega d\sigma=\frac{1}{\sqrt{\tau}}I(\omega).$$

Bu ýerden

$$I(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi};$$

$$I'(\omega)=-\frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega d\sigma=-\frac{\omega}{2}I(\omega). \tag{98}$$

$$I'(\omega)=-\frac{\omega}{2}I(\omega)$$

deňlemäni çözüp alarys:

$$I(\omega)=ce^{-\frac{\omega^2}{4}}. \tag{99}$$

Indi $I(0)=\sqrt{\pi}$ başlangyç şerti peýdalanyp, c-ni taparys:

$$c=\sqrt{\pi}.$$

(99) deňlikde $c=\sqrt{\pi}$ bahany ýerine goýup alarys:

$$I(\omega)=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \tag{100}$$

ω-nyň bahasyny ýerine goýsak, onda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}. \tag{101}$$

Indi bolsa (101) aňlatmanyň bahasyny (97) deňlikde ýerine goýalyň:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi. \tag{102}$$

Tapylan funksiýa (83) deňlemäni we (84) başlangyç şerti kanagatlandyrýar.

Hakykatdan hem, eger

$$\omega = \frac{(x-\xi)}{2\sqrt{\tau}}; \quad \xi = x - 2\omega\sqrt{\tau}; \quad d\xi = -2\sqrt{\tau}\, d\omega$$

diýsek, onda (102) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2\omega\sqrt{\tau}) e^{-\omega^2} d\omega$$

we

$$u\big|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x)\sqrt{\pi} = f(x).$$

Şu ýerden görnüşine görä, başlangyç (84) şert ýerine ýetýär. Indi (102) funksiýanyň (83) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny barlalyň.

$$\varphi_\xi(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} \tag{103}$$

funksiýa (83) deňlemäni kanagatlandyrýar.

Hakykatdan hem,

$$\frac{\partial\varphi_\xi}{\partial\tau} = \left\{ -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}},$$

$$\frac{\partial^2\varphi_\xi}{\partial x^2} = \left\{ -\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\tau}} + \frac{(x-\xi)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}.$$

Alnan deňlikleri deňeşdirsek, onda

$$\frac{\partial\varphi_\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\varphi_\xi}{\partial x^2}.$$

Diýmek, (102) funksiýa (83) deňlemäni kanagatlandyrýar.

$\varphi_\xi(x,\ \tau)$ funksiýany ξ parametre görä integrirlemekden alnan $u(x,\ t)$ funksiýanyň hem (83) deňlemäniň çözüwi bolýandygy aýdyňdyr.

Indi (102) formulada τ ululygyň ornuna $\tau = a^2t$ ululygy goýsak, onda (82) başlangyç şerti we (81) deňlemäni kanagatlandyrýan $u(x, t)$ funksiýany alarys:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}} d\xi.$$

(103) deňlikde τ-nyň ornuna $\tau = a^2t$ bahasyny goýalyň:

$$\varphi_\xi(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{104}$$

$\varphi_\xi(x, t)$ funksiýa hem (81) deňlemäniň çözüwidir. ▷

Şu çözüwe ýylylyk geçirijiligiň fundamental çözüwi diýilýär.

3. Ýylylyk geçirijilik deňlemesi üçin birinji gyra meselesiniň çözüwi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{105}$$

ýylylyk geçirijilik deňlemesi üçin D:$\{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ gönüburçlukda birinji gyra meselesine seredeliň.

7-nji mysal. D oblastda (105) deňlemäni,

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 < x < l) \tag{106}$$

başlangyç we

$$u|_{x=0} = \mu_1(t); \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) \tag{107}$$

gyra şertlerini kanagatlandyrýan funksiýany tapmaly.

Bu ýerde $f(x, t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ berlen üznüksiz we $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$ şertleri kanagatlandyrýan funksiýalar.

◁ Biz ilki bilen D oblastda birjynsly

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{108}$$

deňlemäni we başlangyç

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{109}$$

hem-de

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{110}$$

gyra şertleri kanagatlandyrýan $u(x, t)$ funksiýany tapalyň. Bu meseläni çözmek üçin Furýeniň usulyndan peýdalanalyň. (108) deňlemäniň hususy çözüwlerini

$$u(x, t)=X(x)T(t) \tag{111}$$

görnüşde gözläliň. Bu ýerden

$$u_{xx}=X''(x)T(t), \quad u_t=X(x)T'(t).$$

u_{xx}, u_t-niň bahalaryny (108) deňlemede ýerine goýup,

$$X(x)T'(t)=a^2T(t)X''(x)$$

ýa-da

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda \tag{112}$$

deňlikleri alarys. (112) deňliklerden bolsa iki sany

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{113}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{114}$$

ady differensial deňlemeleri alarys.

(108) deňlemäniň (111) görnüşdäki toždestwolaýyn nola deň bolmadyk çözüwini tapmak üçin, (114) deňlemäniň $X(0)=0$, $X(l)=0$ şertleri kanagatlandyrýan nola deň bolmadyk çözüwini tapmak zerurdyr. Öňden belli bolşuna görä, (114) deňlemäniň toždestwolaýyn nola deň bolmadyk çözüwleri λ parametriň $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n=1, 2, 3, ...)$ bahalary üçin bardyr:

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{115}$$

Parametriň $\lambda=\lambda_n$ bahalaryna (113) deňlemäniň

$$T_n(t)=a_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)t}$$

çözüwleri degişlidir. Bu ýerde a_n erkin ululyk. Ýokardaky alnan maglumatlardan görnüşine görä, ähli

$$u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=a_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{116}$$

funksiýalar (108) deňlemäni we (110) gyra şertleri kanagatlandyrýar. (108) deňlemäniň çyzykly we birjynsly deňleme bolýandygy üçin

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{117}$$

funksiýa hem (108) deňlemäniň çözüwidir.

Indi (109) başlangyç şertiň ýerine ýetmegini talap edeliň:

$$u_n(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{118}$$

Bu ýerden görnüşine görä, (118) aňlatma berlen $\varphi(x)$ funksiýanyň sinuslar boýunça $(0, l)$ interwalda Furýeniň hataryna dagydylmasydyr.

a_n koeffisiýentler öňden belli bolan

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{119}$$

formula boýunça tapylýar.

Matematiki analiziň «trigonometrik hatarlar» diýlen bölüminden belli bolşuna görä, eger $\varphi(x)$ funksiýa we onuň birinji önümi $(0, l)$ interwalda üznüksiz bolsa, (tükenikli nokatlarda funksiýanyň birinji önüminiň birinji görnüşdäki üzülme nokatlarynyň bolmagy mümkindir), onda (118) hatar deňölçegli we absolýut ýygnanýandyr. $t \geq 0$ bolanda

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

bolanlygy üçin (117) hatar hem absolýut we deňölçegli ýygnanýan hatardyr. Şonuň üçin hem (117) formula bilen kesgitlenen $u(x, t)$ funksiýa $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ oblastda üznüksizdir we (109) başlangyç, (110) gyra şertleri kanagatlandyrýandyr. Indi (117) formula bilen kesgitlenen funksiýanyň (108) deňlemäni kanagatlandyrýandygyny görkezmek gerek. Onuň üçin (117) hatary agzalaýyn t ululyga görä bir gezek, x-e görä iki gezek differensirläp alnan hatarlaryň absolýut we deňölçegli ýygnanýandygyny görkezmek ýeterlikdir. (117) hatary agzalaýyn differensirläp alnan hatarlaryň absolýut we deňölçegli ýygnanýanlygy aşakdaky deňsizliklerden görünýär:

$$0 < \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{n^2\pi^2}{l^2}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad t>0.$$

Indi D oblastda başlangyç

$$u|_{t=0}=0 \tag{120}$$

we gyra

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{t=l}=0 \tag{121}$$

şerteleri hem-de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{122}$$

deňlemäni kanagatlandyrýan $u(x, t)$ funksiýany tapalyň. Onuň üçin $f(x, t)$ funksiýa we onuň birinji önüminiň üznüksizligini ($f(x, t)$ funksiýanyň birinji önüminiň birinji görnüşdäki tükenikli üzülme nokatlarynyň bolmagy mümkin) we $f(0, t)=f(l, t)=0$ şertiň ýerine ýetmegini talap edeliň.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{123}$$

funksiýany hatar görnüşde gözläliň.

Eger $f(x, t)$ funksiýany sinuslar boýunça Furýeniň hataryna dagytsak, onda alarys:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{124}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{125}$$

(123) deňlikden $\frac{\partial u}{\partial t}$ we $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ önümleri tapalyň:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $f(x, t)$ ululyklaryň bahalaryny (122) deňlemede goýup,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)=0 \quad (n=1, 2, 3, ...). \tag{126}$$

Indi başlangyç şerti ulanyp,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

deňligi alarys. Bu ýerden $T_n(t)$ üçin

$$T_n(0)=0 \tag{127}$$

başlangyç şerti alarys. (126) deňlemäniň başlangyç (127) şerti kanagatlandyrýan çözüwi aşakdaky görnüşde bolar:

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau. \tag{128}$$

$T_n(t)$-niň bahasyny (123) aňlatmada ýerine goýup, meseläniň çözüwini tapýarys:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{129}$$

Eger-de başlangyç şert toždestwolaýyn nola deň bolmasa, onda (129) çözüwe

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

birjynsly deňlemäniň $u|_{t=0}=\varphi(x)$ başlangyç, $u(0, t)=0$; $u(l, t)=0$ gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwini goşmaly. ▷

Meseläniň goýluşynyň umumylygyny çäklendirmezden başdaky goýlan meselede gyra şertlerini

$$u|_{x=0}=\mu_1(t)\equiv 0; \quad u|_{x=l}=\mu_2(t)\equiv 0$$

görnüşde alyp bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin täze

$$u(x, t)=\omega(x, t)+\vartheta(x, t), \quad \omega(x,t)=\mu_1(t)+[\mu_2(t)-\mu_1(t)]\frac{x}{l}$$

funksiýalary girizeliň, bu ýerde $\vartheta(x, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t), \quad \overline{f}(x, t) = f(x, t) - \omega_t(x, t)$$

deňlemäniň $\vartheta(x, 0) = \varphi(x) - \omega(x, 0)$ başlangyç we

$$\begin{cases} \vartheta(0,t) = u(0,t) - \omega(0,t) = 0 \\ \vartheta(l,t) = u(l,t) - \omega(l,t) = 0 \end{cases}$$

gyra şertlerini kanagatlandyrýan çözüwi.

Bu ýerden görnüşi ýaly, $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$ gyra şertlerdäki $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiýalary hemişe nola deňdir diýip almak mümkin.

4. Diffuziýanyň deňlemesi. Eger gurşaw dürli konsentrasiýaly gaz bilen doldurylsa,onda diffuziýa hadysasy uly konsentrasiýaly ýerden kiçi konsentrasiýaly ýere bolup geçýär. Eger ereýän maddanyň konsentrasiýasy berlen göwrümde hemişelik bolmasa, onda şuňa meňzeş hadysa suwuklyklarda-da bolup geçýär.

Diffuziýa baradaky meselelerde näbelli funksiýa bolup diffuzirlenýän maddanyň konsentrasiýasy hyzmat edýär, özem c bilen belgilenilýär, yagny $c = c(x, y, z, t)$.

Diffuziýa prosesi ýylylyk ýaýramak prosesine meňzeş, şonuň üçin $c = c(x, y, z, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \tag{130}$$

deňlemäni kanagatlandyrmaly.

D $(D > 0)$ hemişelik sana diffuziýa koeffisiýenti diýilýär.

Başlangyç şert

$$c = c(x, y, z, t)|_{t=0} = f(x, y, z), \tag{131}$$

bu ýerde $f(x, y, z)$ berlen funksiýanyň başlangyç konsentrasiýasyny kesgitleýär.

Gyra şertler diýip esasan aşakdaky şertlere aýdylýar:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{132}$$

$$c(x, y, z, t)|_{\Gamma} = c_0. \tag{133}$$

Bu ýerde Γ diffuziýa bolup geçýän oblastyň araçägi.

(132) şert diffuzirlenýän maddanyň oblastynyň araçäginiň geçilmeýän diwardygyny görkezýär. (133) şert oblastyň araçäginde konsentrasiýany kesgitleýär.

Diffuziýanyň çyzykly meseleleri (ýagny geçirilmeýän diwarly inçejik ýuka trubkada bolýan diffuziýa baradaky meseleler) aşakdaky ýaly bolar.

8-nji mysal. $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ deňlemäniň $c(x, t)|_{t=0}=f(x)$ başlangyç we $\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x = x_0} = 0$ gyra şerti kanagatlandyrýan $c=c(x, t)$ çözüwini tapmaly.

Bu mysal steržende ýylylygyň ýaýrama meselesiniň çözülişine meňzeşlikde Furýeniň usuly bilen çözülýär.

§3. 5. Elliptik deňlemeler

1. Laplasyň deňlemesine getirýän meseleler. Eger ýylylyk geçirijilik prosesine δ üst bilen çäklenen T jisimde seretsek, onda jisimiň dürli nokatlaryndaky temperatura aşakdaky deňlemäni kanagatlandyrýar (ýylylyk çeşmesi ýok diýip hasap edilýär):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (134)$$

Eger ýylylyk geçirijilik prosesine has ýukajyk plastinkada seretsek, onda plastinkanyň dürli nokatlaryndaky temperatura aşakdaky üç ölçegli (ýylylyk çeşmesi ýok hasap edilýär)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (135)$$

deňlemäni kanagatlandyrýar.

Goý, indi ýylylyk geçirijilik stasionar hala geçipdir diýeliň. Başgaça aýdylanda jisimiň dürli nokatlaryndaky temperatura wagta bagly bolman diňe nokadyň x, y, z koordinatalaryna bagly bolsun.

Eger temperatura wagta bagly bolmaýan bolsa, onda $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ bolýar. Bu ýerden görnüşine görä jisimiň ýa-da plastinkanyň dürli nokatlaryndaky temperatura degişlilikde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{136}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{137}$$

deňlemeleri kanagatlandyrýar.

(136), (137) deňlemelere Laplasyň deňlemeleri diýilýär.

Jisimiň islendik nokadyndaky temperaturany bilmek üçin bize jisimiň δ üstüniň her bir nokadyndaky temperaturasyny bilmek gerek.

(136), (137) deňlemelerden görnüşine görä, T jisimiň, plastinkanyň nokatlaryndaky temperaturalaryna degişlilikde $u(x, y, z)$ we $u(x, y)$ funksiýa hökmünde seretmek mümkin.

Meseleler. 1) Jisimiň içki nokatlarynda (136) deňlemäni, jisimiň üstki nokatlarynda berlen

$$u|_{\delta} = \varphi(M) \tag{138}$$

bahany kanagatlandyrýan $u(x, y, z)$ funksiýany tapmaly. Şu mesele birinji gyra meselesi ýa-da Dirihläniň meselesi diýlip atlandyrylýar.

2) Eger jisimiň üstki nokatlarynda temperatura belli bolman onuň ýerine üstüň normalynyň proporsional bolýan ýylylyk akymy belli bolsa, onda (138) şertiň ýerine

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\delta} = \varphi(M) \tag{139}$$

gyra şert berilýär. Bu mesele ikinji gyra meselesi ýa-da Neýmanyň meselesi diýlip atlandyrylýar.

Bu ýerde $\frac{\partial u}{\partial n}$ $u(x, y, z)$ funksiýanyň δ üstüň normalynyň ugry boýunça önümidir.

3) Eger (138) ýa-da (139) şertleriň ýerine $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_{\delta} = f(M)$ şerti kanagatlandyrýan $u(x, y, z)$ funksiýany tapmaklyk talap edilse, onda beýle mesele üçünji gyra meselesi diýlip atlandyrylýar.

2. Iki ölçegli Laplasyň deňlemesi üçin Dirihläniň meselesi. Iki ölçegli

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{140}$$

Laplasyň deňlemesine merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly tegelekde seredeliň.

9-njy mysal. R radiusly tegelekde (140) deňlemäni kanagatlandyrýan we tegelegi çäklendirýän l töwerekde berlen

$$u|_l=f(r) \qquad 141)$$

bahany kabul edýän $u(x, y)$ funksiýany tapmaly.

◁ Bu meseläni Furýeniň usuly bilen çözeliň. Onuň üçin ilki bilen polýar koordinatalaryna geçeliň:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{142}$$

(142) çalşyrma ulanylyp, (140) deňleme aşakdaky görnüşe getirilýär:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{143}$$

Onda $u|_l=f$ şertimiz hem $u|_{r=R}=f_1(\varphi)$ görnüşi alar.

(143) deňlemäniň çözüwini Furýeniň usulyny ulanyp,

$$u=\Phi_1(r)\Phi_2(\varphi) \tag{144}$$

görnüşde gözläliň.

(144) deňligiň esasynda (143) deňlemeden

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right)\Phi_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2}\Phi_1$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right) = -\frac{1}{\Phi_2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2}. \tag{145}$$

(145) deňlikden görnüşine görä, deňligiň çep bölegi r-e, sag bölegi bolsa φ ululyga bagly. Diýmek, beýle deňlik diňe hemişelik ululyga deň bolup biler:

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right) = \lambda; \tag{146}$$

$$\frac{1}{\Phi_2}\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2} = -\lambda; \tag{147}$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\varphi^2} + \lambda\Phi_2 = 0. \tag{148}$$

Bu ýerde λ-hemişelik ululyk.

(148) ady differensial deňlemäni çözüp alarys:

$$\Phi_2(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi. \tag{149}$$

A, B erkin hemişelik ululyklar.

Indi λ-nyň islendik özbaşdak bahany alyp bilmeýandigini görkezeliň. $\mu(r, \varphi)$ nokady alalyň. Eger-de φ-niň ýerine $\varphi+2\pi$ alsak, onda ýene öňki nokadymyzy alarys. Bu ýerden görnüşine görä, biziň φ ululyga görä alan funksiýamyz periody 2π-e deň bolan periodik funksiýa bolmaly, ýagny $\Phi_2(\varphi+2\pi)=\Phi_2(\varphi)$.

Onda (149) formuladan görnüşine görä, $\sqrt{\lambda}$ bitin san bolmaly:

$$\sqrt{\lambda} = n \quad (n=1, 2, 3, ...) \quad \text{ýa-da} \quad \lambda=n^2.$$

(149) formulada λ ululygyň bahasyny goýsak, onda

$$\Phi_2(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi \tag{150}$$

deňligi alarys.

Indi (146) deňlemede λ-nyň bahasyny ýerine goýup alarys:

$$\frac{r}{\Phi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi_1}{dr}\right) = n^2,$$

$$r^2\frac{d^2\Phi_1}{dr^2} + r\frac{d\Phi_1}{dr} - n^2\Phi_1 = 0. \tag{151}$$

(151) deňlemäni çözmek üçin $\Phi_1=r^\alpha$ diýip belgiläliň. Bu ýerden

$$\frac{d\Phi_1}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}, \qquad \frac{d^2\Phi_1}{d\varphi^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

ululyklaryň bahalaryny (151) deňlemede ýerine goýup,

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha+\alpha r^\alpha-n^2r^\alpha=0 \quad \text{ýa-da} \quad \alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemeden α-ny tapýarys: $\alpha=\pm n$.

Şeýlelik bilen (151) deňlemäniň $\Phi_1 = r^n$ çözüwini tapdyk. Şu deňlemäniň $\Phi_1 = r^{-n}$ çözüwini taşlaýarys, sebäbi ol çözüw $n > 0$ bolanda tegelegiň merkezinde $r = 0$ bolanda tükeniksizlige öwrülýär. Şunluk bilen biz

$$u_n(r, \varphi) = r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{152}$$

funksiýany tapdyk.

Biziň seredýän deňlemämiziň birjynsly we çyzykly deňleme bolýandygy sebäpli, (152) görnüşdäki hususy çözüwleriň jemi hem Laplasyň deňlemesini kanagatlandyrýar:

$$u_n(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{153}$$

Bu çözüwi Furýeniň hataryna meňzeş görnüşde ýazmak üçin $A_0 = \frac{a_0}{2}$; $A_n = a_n$, $B_n = b_n$ belgileme girizip alarys:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{154}$$

(154) deňlikdäki näbelli a_0, a_n, b_n ululyklary kesgitlemek üçin $u|_{r=R} = f_1(\varphi)$ şerti ulanalyň. (154) deňlikde $r = R$ goýsak, onda

$$f_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi) \tag{155}$$

deňligi alarys.

(155) deňlik $f_1(\varphi)$ funksiýanyň Furýeniň hataryna dagydylmasydyr. Furýeniň koeffisiýentlerini kesgitlemek üçin belli bolan formulalary ulanalyň:

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\psi) \sin n\psi d\psi,$$

ýagny

$$a_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f_1(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad b_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_0^{2\pi} f_1(\psi) \sin n\psi d\psi.$$

Şeýlelikde, R radiusly tegelekde Laplasyň deňlemesi üçin Dirihläniň meselesiniň çözüwini almak üçin (155) formulada a_n, b_n ululyklaryň bahalaryny ýerine goýmak ýeterlikdir. ▷

Gönükmeler

1. Aşakdaky deňlemeleriň haýsylarynyň hususy önümli differensial deňlemedigini anyklamaly:

1) $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x \cos u_y+\sin u_x \sin u_y=0$;

2) $u_{xx}^2+u_{yy}^2-(u_{xx}-u_{yy})^2=0$;

3) $\sin^2(u_{xx}+u_{xy})+\cos^2(u_{xx}+u_{xy})-u=1$;

4) $\sin(u_{xy}+u_x)-\sin u_{xy}\cos u_x-\cos u_{xy}\sin u_x+2u=0$;

5) $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{tg}u-u_x\sec^2 u-3u+2=0$

6) $\log|u_x u_y|-\log|u_x|-\log|u_y|+5u-6=0$.

2. Aşakdaky deňlemeleriň tertiplerini kesgitlemeli:

1) $\log|u_{xx}u_{yy}|-\log|u_{xx}|-\log|u_{yy}|+u_x+u_y=0$;

2) $u_x u_{xy}^2+(u_{xx}^2-2u_{xy}^2+u_y)^2-2xy=0$;

3) $\cos^2 u_{xy}+\sin^2 u_{xy}-2u_x^2-3u_y+u=0$;

4) $2(u_x-2u)u_{xy}-\frac{\partial}{\partial y}(u_x-2u)^2-xy=0$;

5) $\frac{\partial}{\partial x}(u_{yy}^2-u_y)-2u_{yy}\frac{\partial}{\partial y}(u_{xy}-u_x)-2u_x+2=0$;

6) $2u_{xx}u_{xxy}-\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}-u_y)^2-2u_y u_{xxy}+u_x=0$.

3. Aşakdaky deňlemeleriň haýsy tipe degişlidigini kesgitlemeli:

1) $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+2u-x^2y=0$;

2) $2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+2u_x+2u_y-u=0$;

3) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y+3u-xy^2=0$;

4) $4u_{xx}+2u_{yy}-6u_{zz}+6u_{xy}+10u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$;

5) $2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yz}+3u_x-u=0$;

6) $u_{xx}+2u_{yy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-xu_x+yu_z=0.$

4. Aşakdaky deňlemeleri kanonik görnüşe getirmeli:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0;$

2) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0;$

3) $2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y-2u=0;$

4) $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0;$

5) $9u_{xx}-6u_{xy}+u_{yy}+10u_x-15u_y-50u+x-2y=0;$

6) $u_{xx}+4u_{xy}+10u_{yy}-24u_x+42u_y+2(x+y)=0.$

5. Aşakdaky deňlemeleriň umumy çözüwlerini tapmaly:

1) $2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}=0;$

2) $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0;$

3) $3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+\frac{5}{16}u=0.$

6. Aşakdaky Koşiniň meselelerini çözmeli:

1) $4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0,$

$u(x,y)|_{y=0}=\varphi(x), \quad u_y(x,y)|_{y=0}=\psi(x);$

2) $u_{xx}-2u_{xy}+4e^y=0, \quad u(x,y)|_{x=0}=\varphi(y), \quad u_x(x,y)|_{x=0}=\psi(x);$

3) $u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0,$

$u(x,y)|_{y=x}=x+\cos x, \quad u_y(x,y)|_{y=\sin x}=\sin x.$

7. $0<x<l$, $t>0$ oblastda $u_{tt}=a^2u_{xx}$ deňlemäniň aşakdaky garyşyk şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly:

1) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin\frac{2\pi}{l}x;$

2) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x);$

3) $u(0,t)=u_x(l,t)=0,\ u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x;$

4) $u(0,t)=u_x(l,t)=0,\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x+\sin\frac{3\pi}{2l}x;$

5) $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(0,t)=\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+$
$+\cos\frac{5\pi}{2l}x;$

6) $u_x(0, t)=u(l, t)=0$, $u(x, 0)=\varphi(x)$, $u_t(x, 0)=\psi(x)$.

8. $0<x<l$, $t>0$ oblastda $u_t=a^2u_{xx}$ deňlemäniň aşakdaky garyşyk şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly:

1) $u(0, t)=u(l, t)=0$, $u(x, 0)=Ax$;
2) $u(0, t)=u_x(l, t)=0$, $u(x, 0)=\varphi(x)$;
3) $u_x(0, t)=u(l, t)=0$, $u(x, 0)=A(l-x)$;
4) $u_x(0, t)=u_x(l, t)=0$, $u(x, 0)=U$;
5) $u_x(0, t)=u_x(l, t)+hu(l, t)=0$, $u(x, 0)=\varphi(x)$, $h>0$;
6) $u_x(0, t)-hu(0, t)=u(l, t)=0$, $u(x, 0)=U$, $h>0$.

9. $0<x<p$, $0<y<s$ gönüburçlukda aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan Laplasyň deňlemesiniň $u(x, y)$ çözüwini tapmaly:

1) $u(0, y)=u_x(p, y)=0$, $u(x, 0)=0$, $u(x, s)=f(x)$;
2) $u_x(0, y)=u_x(p, y)=0$, $u(x, 0)=A$, $u(x, s)=Bx$;
3) $u(0, y)=U$, $u_x(p, y)=0$, $u_y(x,0) = T\sin\dfrac{\pi x}{2p}$, $u(x, s)=0$.

Jogaplar

1. 1) Ýok; 2) Hawa; 3) Ýok; 4) Ýok; 5) Ýok; 6) Ýok. **2.** 1) Birinji; 2) Ikinji; 3) Birinji; 4) Birinji; 5) Ikinji; 6) Ikinji. **3.** 1) Giperbolik; 2) Elliptik; 3) Parabolik; 4) Parabolik; 5) Giperbolik; 6) Elliptik; **4.** 1) hemme ýerinde elliptik, $\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta}-8\vartheta=0$, $\xi=y-x$, $\eta=2x$; 2) hemme ýerinde parabolik, $\vartheta_{\eta\eta}+18\vartheta_{\xi}+9\vartheta_{\eta}-9\vartheta=0$, $\xi=x+y$, $\eta=x$; 3) hemme ýerinde giperbolik, $\vartheta_{\xi\eta}+3\vartheta_{\xi}-\vartheta_{\eta}+2\vartheta=0$, $\xi=y-x$, $\eta=2y-x$; 4) hemme ýerinde giperbolik, $\vartheta_{\xi\eta}+\vartheta_{\xi}-2\vartheta_{\eta}+\vartheta+\eta=0$, $\xi=2x-y$, $\eta=x+y$; 5) hemme ýerinde parabolik, $27\vartheta\eta_{\eta}-105\vartheta_{\xi}+30\vartheta_{\eta}-150\vartheta-2\vartheta+5\eta=0$, $\xi=x+3y$, $\eta=x$; 6) hemme ýerinde elliptik, $\vartheta_{\xi\xi}+\vartheta_{\eta\eta}+15\vartheta_{\xi}-4\sqrt{6}\,\vartheta_{\eta}+\frac{1}{3}\xi+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta=0$, $\xi=y-2x$, $\eta=\sqrt{6}\,x$. **5.** 1) $u=f(x+y)+\varphi(3x+2y)$; 2) $u=\varphi(y-x)+e^{\frac{x-y}{2}}\psi(y-2x)$; 3) $u=[\varphi(x+3y)+\psi(3x+y)]e^{\frac{7x+y}{16}}$. **6.** 1) $u(x,y)=\varphi\left(x-\frac{2}{3}y^3\right)+$ ψ a

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\psi(\alpha)d\alpha;$$ 2) $$u(x,y)=(1+2x-e^{2x})e^{y}+\varphi(y)+\frac{1}{2}\int\limits_{y}^{2x+y}\psi(z)dz.$$

3) $u(x, y)=x+\cos(x-y+\sin x)$; **7.** 1) $u(x,y)=\frac{1}{2\pi\alpha}\sin\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x$;

2) $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+b_n\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,$

$b_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$; 3) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x+$

$+\cos\frac{5a\pi}{2l}t\sin\frac{5\pi}{2l}x$; 4) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{2l}t\sin\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}t\sin\frac{3\pi}{2l}x+$

$+\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)a\pi}{2l}t\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$; 5) $u(x,t)=\cos\frac{a\pi}{2l}t\cos\frac{\pi}{2l}x+$

$+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi}{2l}t\cos\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi}{2l}t\cos\frac{5\pi}{2l}$; 6) $u(x,t)=$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{(2k+1)a\pi}{2l}t+b_k\sin\frac{(2k+1)a\pi}{2l}t\right]\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx,\quad\int_0^l\psi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx,$

$b_k=\frac{4}{(2k+1)a\pi}$. **8.** 1) $u(x,t)=\frac{2lA}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x$;

2) $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ bu ýerde

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx$; 3) $u(x,t)=\frac{8lA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\times$

$\times e^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$; 4) $u(x,t)=U$; 5) $u(x,t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{h^2+\lambda_k^2}{l(h^2+\lambda_k^2)+h}\times\right.$

$\left.\times\int_0^l\varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi d\xi\right\}e^{-a^2\lambda_k^2t}\cos\lambda_kx,$ bu ýerde λ_k sanlar $\lambda\mathrm{tg}\lambda l=h$ deňlemäniň

položitel kökleri. 6) $u(x,t)=2U\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k[l(h^2+\lambda_k^2)+h]}e^{-a^2\lambda_k^2t}\Phi_k(x),$

bu yerde $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_kx+h\sin\lambda_kx$. λ_k bolsa $h\mathrm{tg}\lambda l=-\lambda$ deňlemäniň

položitel kökleri. **9.** 1) $u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}xsh\frac{(2k+1)\pi}{2p}y,$

$$a_k = \frac{2}{p} sh^{-1} \frac{(2k+1)\pi s}{2p} \int_0^p f_x \sin \frac{(2k+1)\pi}{2p} x dx; \ 2) \ u(x,y) = \frac{(p^2 B - 2A)y}{2s} +$$

$$+ A - \frac{4pB}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 sh \frac{(2k+1)\pi s}{p}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{p} x sh \frac{(2k+1)\pi}{p} y;$$

$$3) \ u(x,y) = U + \frac{2p}{\pi} \left[Tsh \frac{\pi}{2p} y - \left(ch^{-1} \frac{\pi s}{2p} \right) \left(\frac{2U}{p} + Tsh \frac{\pi s}{2p} \right) ch \frac{\pi}{2p} y \right] \sin \frac{\pi}{2p} -$$

$$- \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ch^{-1} \frac{(2k+1)\pi s}{2p}}{2k+1} ch \frac{(2k+1)\pi}{2p} y \sin \frac{(2k+1)\pi}{2p} x.$$

IV BAP

ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETI WE MATEMATIKI STATISTIKA

IV.1. ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETINIŇ ESASLARY

§1. 1. Ähtimallyk giňişligi

1. Wakalaryň synplaşdyrylmasy. Ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň biri waka düşünjesidir. Wakanyň kesgitlemesi ýokdur. Şol sebäpli, wakalara matematiki usullary ulanmak maksady bilen elementar wakalar giňişligi diýlip atlandyrylýan erkin $\Omega=\{w\}$ köplüge garalýar we bu köplügiň islendik bölek köplügi waka diýlip atlandyrylýar. Ω köplügiň w elementlerine elementar wakalar diýilýär. Wakalary üç topara bölýärler:

1) Hökmany wakalar.
2) Mümkin däl wakalar.
3) Tötän wakalar.

Islendik wakanyň ýüze çykmagy üçin käbir şertler toplumynyň bolmagy zerurdyr. Bu şertler toplumy synag ýa-da tejribe diýlip atlandyrylýar. Käbir şertler toplumynda hökman ýüze çykýan wakalara hökmany wakalar, ýüze çykmajakdygy öňden belli bolan wakalara mümkin däl wakalar, ýüze çykmaklygy hem, çykmazlygy hem mümkin bolan wakalara tötän wakalar diýilýär. Hökmany wakalary Ω ýa-da U bilen, mümkin däl wakalary $\varnothing$ ýa-da V bilen, tötän wakalary bolsa latyn elipbiýiniň A, B, C, D,… baş harplary bilen belgileýärler. Mysal üçin, gapda 10 sany ak şar bar bolsun. Bu gapdan şowuna çykarylan şaryň ak bolmagy hökmany wakadyr. Bu şertde ol gapdan şowuna çykarylan şaryň ak däl bolmagy mümkin däl wakadyr. Eger gapdaky 10 şaryň birnäçesi ak, birnäçesi ak däl bolsa, onda bu gapdan şowuna çykarylan şaryň ak ýa-da ak däl bolmagy tötän wakadyr.

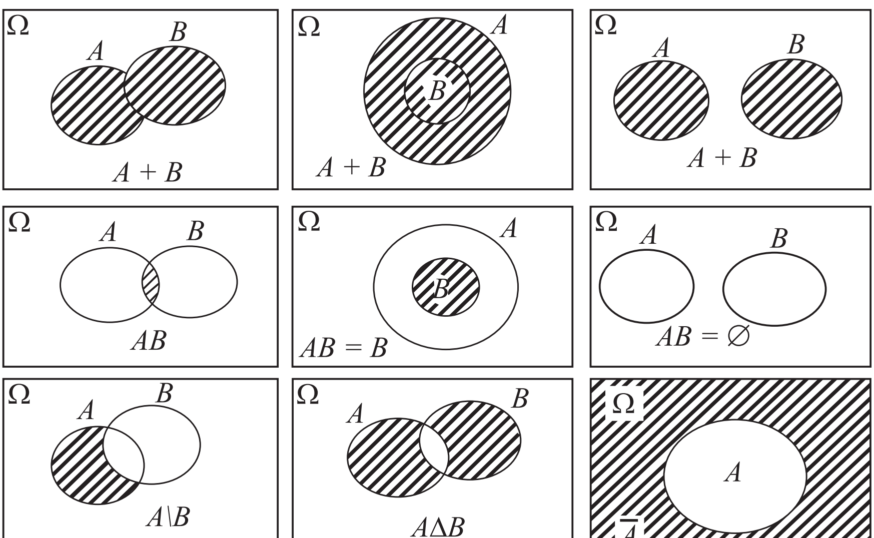
«A wakanyň ýüze çykmagy B wakanyň ýüze çykmagyna getirýär» diýlen tassyklama $A \subseteq B$ görnüşde ýazylýar. Eger şol bir wagtda $A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ bolsa, onda A we B wakalara deňgüýçli diýilýär we $A = B$ görnüşde belgilenýär.

Şol bir synagda bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmak mümkinçiligini ýok edýän bolsa, başgaça aýdylanda, şol bir synagda iki waka bilelikde ýüze çykyp bilmeýän bolsa,onda şeýle wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.

A wakanyň ýüze çykmaýan wagty we diňe şonda ýüze çykýan waka A wakanyň garşylykly wakasy diýilýär we $\overline{A}$ bilen belgilenýär (okalyşy: A däl).

2. Wakalar bilen geçirilýän amallar. A we B iki wakanyň jemi ýa-da birleşmesi diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar we $A + B$ ýa-da $A \cup B$ bilen belgilenýär.

A we B iki wakanyň köpeltmek hasyly ýa-da kesişmesi diýlip, bu wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar we AB ýa-da $A \cap B$ bilen belgilenýär.



1-nji surat

A we B wakalaryň tapawudy diýlip, A wakanyň ýüze çykyp, B wakanyň ýüze çykmazlygyna aýdylýar we $A \backslash B$ bilen belgilenýär.

$A \backslash B$ we $B \backslash A$ wakalaryň jemine A we B wakalaryň simmetrik tapawudy diýilýär we $A \Delta B$ bilen belgilenýär.

Wakalar bilen geçirilýän amallary Wýenniň diagrammalarynda görkezeliň (*1-nji surat*).

Sygyşmaýan A we B wakalar üçin $AB = \varnothing$ deňgüýçlülik dogrudyr. A we $\overline{A}$ garşylykly wakalar üçin şol bir wagtda $A + \overline{A} = \Omega$ we $A\overline{A} = \varnothing$ deňgüýçlülikler ýerine ýetýändir.

Mysal. Ýygnaga gelen talyplaryň arasyndan bir talyp şowuna saýlanyp alynýar. Goý, A waka «Saýlanan talyp matematik» bolsun, B waka bolsa «Saýlanan talyp tapawutly» bolsun. $A + B$, AB, $A \backslash B$, $A \Delta B$ we $\overline{A}$ wakalary ýazmaly.

$\lhd$ Wakalar bilen geçirilýän amallaryň kesgitlemelerinden peýdalanyp ýazyp bileris:

$A + B$ = {Saýlanan talyp ýa matematik, ýa tapawutly ýa-da tapawutly matematik.}

AB = {Saýlanan talyp tapawutly matematik.}

$A \backslash B$ = {Saýlanan talyp tapawutly däl matematik.}

$A \Delta B$ = {Saýlanan talyp ýa tapawutly däl matematik ýa-da tapawutly matematik däl.} $\rhd$

3. Wakalaryň algebrasy. Eger $\Omega = \{w\}$ elementar wakalar giňişliginiň bölek köplükleriniň käbir F sistemasy üçin

1) $\Omega \in F$;

2) $A \in F$ we $B \in F$ wakalar üçin $A + B \in F$, $AB \in F$;

3) $A \in F$ waka üçin $\overline{A} \in F$;

şertler ýerine ýetýän bolsa, onda F sistema wakalaryň algebrasy diýilýär.

Eger F algebra üçin $A_n \in F, n = 1, 2, \ldots$ degişliliklerden $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ we $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ degişlilikler gelip çykýan bolsa, onda F sistema wakalaryň sigma-algebrasy diýilýär.

4. Ähtimallyk. Ähtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň ýene biri ähtimallyk düşünjesidir.

Kesgitleme. Eger $P(A)$ san funksiýasy

1) Islendik $A \in F$ waka üçin $P(A) \geq 0$ (otrisatel dällik aksiomasy);

2) $P(\Omega) = 1$ (normirlenenlik aksiomasy);

3) Sygyşmaýan A we B wakalar üçin $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (tükenikli additiwlik aksiomasy);

4) $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots$ we $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ bolan wakalar yzygiderligi üçin $\lim\limits_{n \to \infty} P(B_n) = 0$ (üznüksizlik aksiomasy) şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa ähtimallyk diýilýär.

Bellik. Üznüksizlik aksiomasyny $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ we $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ bolan wakalar yzygiderligi üçin $\lim\limits_{n \to \infty} P(B_n) = 1$ görnüşde hem ýazmak bolar.

Ähtimallygyň bu kesgitlemesine deňgüýçli bolan ýene bir kesgitlemesini getireliň.

Kesgitleme. Eger $P(A)$ san funksiýasy

1) Islendik $A \in F$ waka üçin $P(A) \geq 0$ (otrisatel dällik aksiomasy);

2) $P(\Omega) = 1$ (normirlenenlik aksiomasy);

3) Sygyşmaýan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ wakalar üçin $P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (hasaply additiwlik aksiomasy) şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa ähtimallyk diýilýär.

Ähtimallygyň bu aksiomatik gurluşy görnükli rus matematigi A. N. Kolmogorow (Kolmogorow Andrey Nikolaýewiç, 25.04.1903–20.10.1987) tarapyndan hödürlenen.

Ähtimallyk aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(A \backslash B) = P(A) - P(B)$.

2) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(B) \leq P(A)$.

3) Garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir, ýagny $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

4) Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir, ýagny $P(\emptyset) = 0$.

5) Islendik A waka üçin $0 \leq P(A) \leq 1$ deňsizlikler dogrudyr.

Bu häsiýetleri subut edeliň.

$\lhd$ 1) Goý, $B \subseteq A$ bolsun. Onda $A = B + (A \backslash B)$ deňgüýçlülik dogrudyr. B we $A \backslash B$ sygyşmaýan wakalar bolandyklary sebäpli, ähtimallygyň tükenikli additiwlik aksiomasyndan peýdalanyp,

$$P(A) = P(B) + P(A \backslash B) \tag{1}$$

deňligi alarys. Bu ýerden taparys:

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(B). \rhd$$

$\lhd$ 2) Goý, $B \subseteq A$ bolsun. Onda (1) deňlik dodrudyr. Ähtimallygyň otrisatel däldigini göz öňünde tutup, ol ýerden $P(B) \leq P(A)$ deňsizligi alarys. $\rhd$

$\lhd$ 3) Belli bolşy ýaly, A we $\overline{A}$ garşylykly wakalar üçin $A + \overline{A} = \Omega$ we $A\overline{A} = \varnothing$ deňgüýçlülikler ýerine ýetýändir. Ikinji deňgüýçlüligi we ähtimallygyň normirlenenlik aksiomasyny göz öňünde tutup, birinji deňgüýçlülikden alarys:

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1. \rhd$$

$\lhd$ 4) $\varnothing$ we Ω sygyşmaýan wakalar bolandyklary sebäpli, $\varnothing + \Omega = \Omega$ deňgüýçlülikden $P(\varnothing) + P(\Omega) = P(\Omega)$ deňligi alarys. Bu ýerden $P(\varnothing) = 0$. $\rhd$

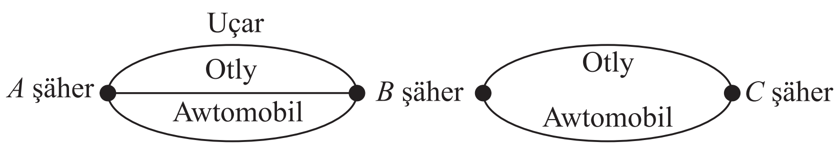
$\lhd$ 5) $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$ bolandygy sebäpli, ähtimallygyň 2-nji häsiýetini göz öňünde tutup, $P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ ýa-da $0 \leq P(A) \leq 1$ deňsizlikleri alarys. $\rhd$

(Ω, F, P) üçlüge ähtimallyk giňişligi diýilýär.

§ 1. 2. Kombinatorikanyň elementleri

1. Köpeltmek düzgüni. Kombinatorika diskret matematikanyň bölümleriniň biri bolup, ol ähtimallyklar nazaryýetinde, matematiki logikada, sanlar nazaryýetinde, hasaplaýyş tehnikasynda we kibernetikada giňden ulanylýandygy bilen möhüm ähmiýete eýedir. Amalyýetde köplenç käbir hereketi amala aşyrmagyň mümkin bolan ýagdaýlaryny hasaplamagyň usullarynyň sanyny anyklamak bilen baglanyşykly meseleler bilen iş salyşmaly bolýar. Şeýle meselelere kombinatoriki meseleler diýilýär. Kombinatoriki hasaplamalary geçirmek bilen ylmyň dürli pudaklarynyň wekilleri iş salyşmaly bolýarlar. Mysal üçin, himik molekulalardaky atomlaryň mümkin bolan baglanyşyklarynyň görnüşlerini anyklamaly bolanda, biolog belok birleşmelerindäki aminokislotalaryň mümkin bolan dürli gezekleşmeler yzygiderliklerini hasaplanda, agronom ekin meýdanlarynda ekişiň dürli usullaryny öwrenende, dispetçer ulaglaryň ugurlar boýunça hereketleriniň grafigini düzende, müdiriň okuw işleri boýunça orunbasary sapaklaryň tertibini düzende we şuňa meňzeş ýagdaýlarda kombinatoriki hasaplamalary geçirmeli bolýarlar.

Eger A hereketi n usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa we bu usullaryň her biri üçin B hereketi m usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa, onda görkezilen tertipde A we B hereketleri $n\times m$ usul bilen amala aşyrmak bolar. Kombinatorikanyň bu esasy düzgünine köpeltmek düzgüni diýilýär. Mysal üçin, A şäherden B şähere uçarda,otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa, B şäherden C şähere otluda we awtomobilde baryp bolýan bolsa,onda A şäherden C şähere $3\times 2=6$ usul bilen barmak bolar (*2-nji surat*).



2-nji surat

Indi köpeltmek düzgüniniň umumylaşdyrmasyny getireliň. Eger birinji hereketi n_1 usul bilen, ikinji hereketi n_2 usul bilen we ş.m. k-njy hereketi n_k usul bilen amala aşyryp bolýan bolsa, onda bu hereketleriň hemmesini bilelikde $n_1\times n_2\times\ldots\times n_k$ usul bilen amala aşyrmak bolar.

2. Çalşyrmalar.

Kesgitleme. 1-den n-e çenli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna n-faktorial diýilýär we $n!$ bilen belgilenýär.

Mysal üçin, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. Kesgitlemeden peýdalanyp, bu sany $5!=4!\cdot 5=3!\cdot 4\cdot 5=2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5=1!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ deňlikler görnüşinde hem ýazmak bolar. Şol sebäpli islendik natural n san üçin

$$n!=(n-1)!\cdot n$$

deňlik dogrudyr.

Bellik. $0!=1$ diýlip kabul edilýär.

Goý, a_1, a_2, ..., a_n elementler berlen bolsun. Bu elementleriň islendik tertipde ýazylan yzygiderligine çalşyrma diýilýär. Bu elementleriň islendik ikisinden, mysal üçin, a_1 we a_2 elementlerden a_1, a_2 we a_2, a_1 görnüşli $2!=1\cdot 2=2$ sany çalşyrma düzmek bolar. Şuňa meňzeşlikde, berlen elementleriň islendik üçüsinden, mysal üçin, a_1, a_2 we a_3 elementlerden a_1, a_2, a_3; a_1, a_3, a_2; a_2, a_1, a_3; a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2; a_3, a_2, a_1 görnüşli $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ sany çalşyrma düzmek bolar. Bu pikir ýöretmäni dowam edip, n elementden $n!$ sany çalşyrma düzmek boljakdygyna göz ýetirmek bolar. Hakykatdan hem, n elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sanyny P_n bilen belgiläliň. $P_n=n!$ deňligiň dogrudygyny görkezeliň. Çalşyrmada birinji orunda n elementiň islendik birini ýazmak bolar. Soňra ikinji orunda $(n-1)$ elementiň islendik birini ýazmak bolar we ş.m. Onda köpeltmek düzgüni boýunça hemme n orny $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!$ usul bilen doldurmak bolar.

3. Utgaşdyrmalar.

Kesgitleme. n elementli köplügiň k elementli erkin bölek köplügine n elementden k element boýunça utgaşdyrma diýilýär. Şeýle utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \tag{2}$$

ululyga deňdir.

◁ Berlen A köplügiň hemme bölek köplükleriniň köplügini $M(A)$ bilen, k elementli hemme bölek köplükleriniň köplügini bolsa $M_k(A)$ bilen belgiläliň. $M_k(A)$ köplügiň elementleriniň sanyny $N(M_k(A)) = C_n^k$ bilen belgiläliň. A köplügiň k elementli bölek köplügini almak üçin $(k-1)$ elementli bölek köplüge bu bölek köplüge girmeýän $n-k+1$ elementleriň birini girizmeli. $(k-1)$ elementli bölek köplükleriň sanynyň C_n^{k-1} ululyga deň bolandygy we olaryň her birini $n-k+1$ usul bilen k elementli bölek köplüge dolduryp bolýandygy sebäpli, k elementli bölek köplükleriň sany

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

ululyga deň bolar. Bu deňligi iterirläp alarys:

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1} =$$

$$= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)}{k\cdot(k-1)} \cdot C_n^{k-2} = \ldots = \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2} \cdot C_n^1 =$$

$$= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \rhd$$

Mysal üçin, 10 elementden 3 element boýunça utgaşdyrmalaryň sany

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120$$

bolar.

Teorema. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ deňlik dogrudyr.

$\lhd$ (2) formulany özgerdip alarys:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n-(n-1)!\cdot k+(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \rhd$$

Teorema. n elementli köplügiň hemme bölek köplükleriniň sany 2^n-e deňdir.

$\lhd$ Berlen n elementli köplügiň elementlerini nomerläliň we her bir bölek köplük üçin nollardan we birliklerden ybarat bolan n uzynlykly yzygiderligi şeýle düzeliň: eger k nomerli element bölek köplüge girýän bolsa,onda k-njy orunda 1 ýazalyň,eger girmeýän bolsa 0 ýazalyň. Şeýlelikde, her bir bölek köplüge nollardan we birliklerden ybarat bolan öz yzygiderligi degişlidir. Mysal üçin,boş köplüge diňe nollardan ybarat bolan n uzynlykly yzygiderlik degişlidir. Onda hemme şeýle yzygiderlikleriň sany köpeltmek düzgüni boýunça

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$$

bolar. Diýmek, n elementli köplügiň hemme bölek köplükleriniň sany 2^n-e deňdir.

Netije. n elementli köplügiň k elementli hemme bölek köplükleriniň sanynyň C_n^k ululyga deňdigi sebäpli, $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ jem berlen köplügiň hemme bölek köplükleriniň sanyna deňdir. Diýmek,

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

deňlik dogrudyr. Bu deňlige

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Nýutonyň (Nýuton Isaak, 04.01.1643–31.03.1727, iňlis matematigi, fizigi, mehanigi, astronomy) binomynyň $a = b = 1$ bolan hususy haly hökmünde hem garamak bolar.

Teorema. Goý, n elementli käbir A köplügi k_1 elementli B_1, k_2 elementli B_2 we ş.m. k_m elementli B_m köplükleriň jemi görnüşinde aňladyp bolýar diýeliň, şunlukda $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ bolsun. Onda şeýle aňlatma usullarynyň sany

$$C_n^{k_1 k_2 \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

ululyga deňdir. Bu sanlara polinomial koeffisiýentler diýilýär.

$\lhd$ n elementli A köplügiň k_1 elementli B_1 bölek köplügini alalyň. Ony $C_n^{k_1}$ usul bilen amala aşyrmak bolar. Soňra galan $n - k_1$ elementli köplükden k_2 elementli B_2 bölek köplügi alalyň. Ony $C_{n-k_1}^{k_2}$ usul bilen amala aşyrmak bolar we ş.m. Onda dürli $B_1, B_2, \ldots, B_m$ bölek köplükleri almaklygyň usullarynyň $C_n^{k_1 k_2 \ldots k_m}$ umumy sany köpeltmek düzgüni boýunça

$$C_n^{k_1 k_2 \ldots k_m} = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \times$$

$$\times \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m! \cdot (n-k_1-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

bolar. $\rhd$

4. Ýerleşdirmeler.

Kesgitleme. Her bir elementine 1-den n-e çenli käbir san (elementiň nomeri) degişli edilen n elementli köplüge tertipleşdirilen diýilýär.

Kesgitleme. n elementli köplügiň tertipleşdirilen k elementli bölek köplügine n elementden k element boýunça ýerleşdirme diýilýär.

Şeýle ýerleşdirmeleriň sany

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3}$$

ululyga deňdir.

$\triangleleft$ n elementli A köplügiň k elementli bölek köplükleriniň sany C_n^k ululyga deňdir. Her bir bölek köplügi $k!$ usul bilen tertipleşdirmek bolar. Diýmek, berlen n elementli köplügiň tertipleşdirilen hemme k elementli bölek köplükleriniň sany

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = k! \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

bolar. $\triangleright$

Mysal üçin, 10 elementden 3 element boýunça ýerleşdirmeleriň sany

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

bolar.

Bellik. Utgaşdyrmalarda elementleriň ýerleşiş tertibiniň ähmiýeti ýokdur, ýerleşdirmelerde bolsa ähmiýeti bardyr.

§ 1. 3. Ähtimallygyň klassyky, statistiki we geometrik kesgitlemeleri

1. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi. Hususy halda, Ω elementar wakalar giňişligi diskret bolanda we w elementar wakalar deňähtimallykly bolanlarynda islendik A wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{4}$$

gatnaşyk bilen hasaplanýar, bu ýerde n-synag geçirilende ýüze çykyp biljek ähli elementar wakalaryň sany, m bolsa A wakanyň ýüze çykmagyna getirýän elementar wakalaryň sany. (4) gatnaşyga ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi diýilýär. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini ulanmak üçin

1) synag geçirilende ähli ýüze çykyp biljek elementar wakalaryň sany tükenikli bolmaly;

2) wakalar elementar wakalara böleklenýän bolmaly;

3) elementar wakalar deňähtimallykly bolmaly.

Emma amalyýetde şeýle ýagdaýlar seýrek duş gelýär. Şol sebäpli ähtimallygyň beýleki kesgitlemelerine hem garaýarlar.

2. Ähtimallygyň statistiki kesgitlemesi. Goý, N synag geçirilýän bolsun we bu synaglaryň $N(A)$ sanysynda A waka ýüze çykýan bolsun.

$$W(A) = \frac{N(A)}{N} \tag{5}$$

gatnaşyga A wakanyň otnositel ýygylygy diýilýär. Bu otnositel ýygylyk hem ähtimallygyň statistiki kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär.

3. Ähtimallygyň geometrik kesgitlemesi. Giňişlikdäki G oblastyň ölçegini (uzynlygyny, meýdanyny, göwrümini) $mesG$ bilen we bu oblastda saklanýan g oblastyň ölçegini $mesg$ bilen belgiläliň. G oblasta şowuna oklanan nokadyň g oblasta düşmegini A waka diýip belgiläliň. Nokadyň g oblasta düşmeginiň ähtimallygy bu oblastyň ölçegine proporsional we onuň G oblastda ýerleşişine bagly däl diýip hasap edeliň. Onda A wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG} \tag{6}$$

gatnaşyk bilen kesgitlenýär.Bu formula ähtimallygyň geometrik kesgitlemesi diýilýär.

1-nji mesele. Gapda her birinde G, A, A, R, Ş, S, Y, Y, Z, L, K harplaryň biri ýazylan 11 tagtajyk bar. Bu tagtajyklar gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulýar. «GARAŞSYZLYK» sözüniň ýazylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka «GARAŞSYZLYK» sözüniň ýazylmagy bolsun. Tagtajyklaryň hemmesi gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylyp, çepden saga yzygider goýulsa, bolup biljek ähli elementar wakalaryň sany bu 11 harpdan düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sanyna deňdir, ýagny, $n=11!$. «GARAŞSYZLYK» sözünde iki sany A harpy we iki sany Y harpy bolanlygy sebäpli A wakanyň ýüze çykmagyna getirýän ähli elementar wakalarýn sany $m=2!\cdot 2!$ bolar. Şeýlelikde, «GARAŞSYZLYK» sözüniň ýazylmagynyň ähtimallygy

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{11!}$$

bolar. ▷

2-nji mesele. Tekjede dürli 20 kitap bar. Olaryň onusynyň her biriniň bahasy 60 manat, dördüsiniň her biriniň bahasy 50 manat, altysynyň her biriniň bahasy 40 manat. Şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A-şowuna alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagy bolsun. 20 kitapdan 2 kitaby

$$n=C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=\frac{19\cdot 20}{2}=190$$

usul boýunça saýlap almak bolar. Ikisiniň bahasy 100 manat bolan 2 kitaby

$$m=C_{10}^{1}\cdot C_{6}^{1}+C_{4}^{2}=\frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}=60+6=66$$

usul boýunça saýlap almak bolar. Onda

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{66}{190}=\frac{33}{95}.\ \triangleright$$

3-nji mesele. Eger 200 önümden ybarat toplumda zaýa önümleriň otnositel ýygylygy 0,33 bolsa, bu toplumdaky zaýa önümleriň sanyny tapmaly.

◁ Goý, A-zaýa önümler bolsun. $N=200$, $W(A)=0{,}33$ bolandygy sebäpli, zaýa önümleriň sany $N(A)=N\cdot W(A)=200\cdot 0{,}33=66$ bolar. ▷

4-nji mesele. R radiusly tegelegiň içinden a taraply kwadrat çyzylan. Tegelege şowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka tegelege şowuna oklanan nokadyň kwadrata düşmegi bolsun. Kwadratyň meýdany $S_{kw.} = a^2 = 2R^2$, tegelegiň meýdany $S_{teg.} = \pi R^2$. Onda ähtimallygyň geometrik kesgitlemesinden peýdalanyp, gözlenyän ähtimallygy taparys:

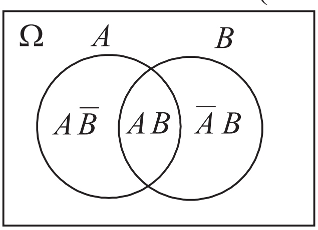
$$P(A) = \frac{S_{kw.}}{S_{teg.}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}. \ \triangleright$$

§ 1. 4. Ähtimallyklary goşmak we köpeltmek teoremalary. Iň bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy

1. Ähtimallyklary goşmak teoremasy.

Teorema. Sygyşýan A we B wakalar üçin

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{7}$$



3-nji surat

deňlik dogrudyr.

◁ A we B wakalaryň jemini sygyşmaýan $A\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$ wakalaryň jemi görnüşinde äňladalyň (*3-nji surat*):

$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B.$$

Bu deňgüýçlüligi göz öňünde tutup,

$$P(A+B) = P(A\overline{B} + AB + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \tag{8}$$

deňligi ýazyp bileris. $A = A\overline{B} + AB$ bolandygy sebäpli, $P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)$ deňlik dogrudyr. Bu ýerden taparys:

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB). \tag{9}$$

Edil şuňa meňzeşlikde $B = \overline{A}B + AB$ deňgüýçlüligi ýazyp bileris. Onda $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$ deňlik dogrudyr. Bu ýerden

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) \tag{10}$$

deňligi alarys. (9) we (10) aňlatmalary (8) deňlikde ornuna goýup, (7) formulanyň dogrudygyna göz ýetirmek bolar. ▷

(7) formula ähtimallyklary goşmak teoremasy diýilýär. Hususy halda, sygyşmaýan A we B wakalar üçin $P(AB)=0$ bolandygy sebäpli, şeýle wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{11}$$

görnüşe geler.

Sygyşýan $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasynyň umumylaşdyrmasy

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+$$
$$+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n+1}P(A_1A_2...A_n) \tag{12}$$

görnüşdedir. Bu formulany (7) formuladan we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, subut etmek bolar. Hususy halda, sygyşmaýan $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) \tag{13}$$

görnüşe geler.

2. Şertli ähtimallyk. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasy.

Goý, $P(A)>0$ bolsun.

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{14}$$

gatnaşyga B wakanyň A waka ýüze çykan şertdäki şertli ähtimallygy diýilýär. (14) deňligi özgerdip,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$$

deňligi alarys. $P(B)>0$ bolan şertde şuňa meňzeşlikde ýazyp bileris:

$$P(BA)=P(B)\cdot P(A/B).$$

$AB=BA$ bolandygy sebäpli,

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \tag{15}$$

formulany alarys. (15) formula ähtimallyklary köpeltmek teoremasy diýilýär.

Bagly $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasynyň umumylaşdyrmasy

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}) \tag{16}$$

görnüşdedir. Bu formulany (15) formuladan we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, subut etmek bolar.

Eger A wakanyň B waka ýüze çykan şertdäki şertli ähtimallygy A wakanyň şertsiz ähtimallygyna deň bolsa, ýagny

$$P(A/B)=P(A) \tag{17}$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda A waka B waka bagly däl diýilýär. A wakanyň B waka bagly däldiginden B wakanyň hem A waka bagly däldigi gelip çykýar.

◁ Hakykatdan hem, goý, A waka B waka bagly däl bolsun. Onda (17) deňlik dogrudyr. Bu deňligi göz öňünde tutup, (15) deňlikden taparys:

$$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}=P(B). \triangleright$$

Bagly däl A we B wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \tag{18}$$

görnüşe geler. (18) deňlik iki wakanyň jübütleýin bagly dälliginiň kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär. Ondan başga-da,wakalaryň toplumlaýyn bagly dällik düşünjesi hem bardyr.

Kesgitleme. Eger A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň islendik kombinasiýasy bilen beýlekileriniň islendik kombinasiýasy bagly däl bolsa, onda A_1, A_2, ..., A_n wakalara toplumlaýyn bagly däl diýilýär.

Mysal üçin, A_1, A_2, A_3 wakalaryň toplumlaýyn bagly däl bolmaklygy üçin A_1 we A_2, A_1 we A_3, A_2 we A_3, A_1 we A_2A_3, A_2 we A_1A_3, A_3 we A_1A_2, wakalaryň bagly däl bolmagy zerurdyr. Toplumlaýyn bagly däl A_1, A_2, ..., A_n wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasynyň umumylaşdyrmasy

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n) \tag{19}$$

görnüşdedir.

Bellik. A_1, A_2, ..., A_n wakalaryň toplumlaýyn bagly däldiklerinden olaryň jübüt-jübütden bagly däldikleri we $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ wakalaryň hem toplumlaýyn bagly däldigi gelip çykýandyr.

3. Iň bolmanda bir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy.

Käbir synag geçirilende bagly däl n wakanyň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmak meselesine garalyň. Bagly däl $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyny A waka diýip belgiläliň. $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň hiç biriniň ýüze çykmazlygy $\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n$ köpeltmek hasyly görnüşinde ýazylýar. A we $\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n$ wakalaryň garşylyklydyklaryny göz öňünde tutup,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n)$$

deňligi ýazyp bileris. Bellikden we toplumlaýyn bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_n)$$

deňligi alarys. $q_i = P(\overline{A}_i)$, $i = \overline{1, n}$ belgilemeleri girizip,bu deňligi

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n \tag{20}$$

görnüşde ýazmak bolar. (20) deňlik synag geçirilende bagly däl $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmagyň formulasydyr. Hususy halda, eger $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalar şol bir p ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsalar, onda (20) formula

$$P(A) = 1 - q^n \tag{21}$$

görnüşe geler.

1-nji mesele. Kärhananyň öndürýän önümleriniň 98% -i standart önümler. Şunlukda standart önümleriň 85%-i ýokary hilli. Bu kärhanada öndürilen şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka şowuna alnan önümiň standart bolmagy bolsun, B waka bolsa şowuna alnan standart önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{98}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0,833. \triangleright$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjy üç gezek nyşana atýar. Nyşananyň üç gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka atyjynyň birinji gezekde, B waka ikinji gezekde, C waka üçünji gezekde nyşanany urmagy bolsun. A, B, C wakalar bagly däldir. Onda bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}512. \;\triangleright$$

3-nji mesele. Sistemanyň näsaz işleýändigi barada habar bermek üçin biri-birine bagly bolman işleýän iki duýduryjy goýlan. Sistemanyň näsaz işleýändigini birinji duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygy 0,99-a deň. Ikinji duýduryjy üçin bu ähtimallyk 0,98-e deň. Sistemanyň näsaz işleýändigini diňe bir duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Wakalary girizeliň:

A_1 – birinji duýduryjynyň habar bermegi,

A_2 – ikinji duýduryjynyň habar bermegi,

B_1 – diňe birinji duýduryjynyň habar bermegi,

B_2 – diňe ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

Sygyşmaýan wakalar üçin goşmak teoremasyndan we bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)=$$

$$=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=0{,}99\cdot 0{,}02+0{,}01\cdot 0{,}98=0{,}0296. \;\triangleright$$

§ 1. 5. Doly ähtimallygyň we Baýesiň formulalary

1. Doly ähtimallygyň formulasy. Eger $H_1, H_2, ..., H_n$ wakalaryň toplumy üçin $H_1+H_2+...+H_n=\Omega$ deňgüýçlülik ýerine ýetýän bolsa, onda olar wakalaryň doly toparyny emele getirýär diýilýär.

Teorema. Goý, A waka doly topary emele getirýän sygyşmaýan $H_1, H_2, ..., H_n$ wakalaryň biri we diňe biri bilen bilelikde ýüze çykyp bilýän bolsun. Onda doly ähtimallygyň formulasy diýlip atlandyrylýan

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k) \tag{22}$$

formula dogrudyr.

◁ Sygyşmaýan wakalaryň doly topary emele getirýändikleri sebäpli

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_n) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n$$

deňgüýçlülikler dogrudyr. AH_1, AH_2, ..., AH_n wakalar hem sygyşmaýan wakalardyr. Onda ilki sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasynyň umumylaşdyrmasyny, soňra bagly wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyny ulanyp alarys:

$$P(A) = P(AH_1 + ... + AH_n) = P(AH_1) + ... + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A/H_k). \ \triangleright$$

H_1, H_2, ..., H_n wakalara çaklamalar (gipotezalar) hem diýilýär.

Doly ähtimallygyň formulasy ulanylanda çaklamalaryň synaga çenli (apriori) ähtimallyklary hasaplanýar.

Teorema. Doly ähtimallyk baradaky teoremanyň şertlerinde Baýesiň (Tomas Baýes, 1702–07.04.1761, iňlis matematigi)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k)}, \quad i = \overline{1, n} \tag{23}$$

formulasy dogrudyr.

◁ Bagly wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasyndan peýdalanyp,

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i/A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

deňligi ýazmak bolar. Bu ýerden taparys:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

(22) formulany göz öňünde tutup, bu formulany

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot P(A/H_k)}, \quad i=\overline{1,n}$$

görnüşde ýazmak bolar. ▷

Baýesiň formulasy boýunça çaklamalaryň synagdan soňky (aposteriori) ähtimallyklary hasaplanýar.

1-nji mesele. Toplumda birinji zawodyň 28 önümi, ikinji zawodyň 22 önümi bar. Birinji zawodyň önüminiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,95-e deň, ikinji zawodyň önümi üçin bu ähtimallyk 0,9-a deň. Bu toplumdan şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Goý, A waka toplumdan şowuna alnan önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Çaklamalary girizeliň:

H_1 – şowuna alnan önümiň birinji zawoda degişli bolmagy;

H_2 – şowuna alnan önümiň ikinji zawoda degişli bolmagy;

Bu çaklamalaryň ähtimallyklaryny tapalyň:

$$P(H_1) = \frac{28}{50} = 0,56, \quad P(H_2) = \frac{22}{50} = 0,44.$$

Meseläniň şerti boýunça

$$P(A/H_1)=0,95, \quad P(A/H_2)=0,9.$$

Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$
$$=0,56\cdot 0,95+0,44\cdot 0,9=0,928. \text{ ▷}$$

2-nji mesele. Şol bir agramda çykyş edýän ştangaçylaryň ýedisi sport ussady, üçüsi bolsa at gazanan sport ussady. At gazanan sport ussadynyň bellenen agramdaky ştangany götermeginiň ähtimallygy 0,8-e deň, sport ussady üçin bolsa bu ähtimallyk 0,6-a deň. Şowuna çagyrylan türgen bellenen agramdaky ştangany göterdi. Onuň sport ussady bolmagy has ähtimalmy ýa-da at gazanan sport ussady?

◁ Goý, A waka şowuna çagyrylan türgeniň bellenen agramdaky ştangany götermegi bolsun. Çaklamalary girizeliň: B_1 – şowuna çagyrylan türgeniň sport ussady bolmagy, B_2 – şowuna çagyrylan türgeniň at gazanan sport ussady bolmagy. Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp taparys:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}66.$$

Baýesiň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallyklary taparys:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}66}\approx 0{,}64;$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}66}\approx 0{,}36.$$

Görnüşi ýaly, bellenen agramdaky ştangany götereniň sport ussady bolmagy has ähtimaldyr. Bu ýagdaýy sport ussatlarynyň sanynyň at gazanan sport ussatlarynyň sanyndan köpdügi bilen düşündirmek bolar. ▻

§ 1. 6. Bagly däl synaglar yzygiderligi

1. Ähtimallyklaryň paýlanyşynyň binomial kanuny.

Ähtimallyklar nazaryýetiniň amalyýetde ulanylyşynda köplenç şol bir synagyň birnäçe gezek gaýtalanmagy bilen baglanyşykly meseleler duş gelýär. Şunlukda, bu synaglar tapgyrynda käbir wakanyň ýüze çykmalarynyň sanyny anyklamak gerek bolýar. Goý, n synag geçirilýän bolsun. Eger bu synaglaryň her birinde ol ýa-da beýleki netijäniň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki synaglaryň netijelerine bagly bolmasa, onda şeýle synaglara bagly däl diýilýär. Goý, bagly däl n synagyň her birinde A waka şol bir hemişelik p $(0<p<1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun, $q=1-p$ ähtimallyk bilen bolsa ýüze çykmaýan bolsun. A wakanyň bu synaglarda k $(0\leq k\leq n)$ gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy boýunça $p^k q^{n-k}$ bolar. Bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmalarynyň sany C_n^k ululyga deňdir. Diýmek, bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k} \qquad (24)$$

formula boýunça hasaplanar.Garalan bagly däl synaglar yzygiderligine Bernulliniň (Ýakob Bernulli, 27.12.1654–16.08.1705, şweýsar matematigi) shemasy, (24) formula bolsa Bernulliniň formulasy diýilýär. $P_n(k)$ ähtimallyklar $(p+q)^n$ binomyň dagydylmasyndaky agzalar bolandyklary sebäpli, ähtimallyklaryň (24) formula bilen berlen paýlanyşyna binomial paýlanyş kanuny diýilýär.

2. Polinomial shema. Goý, bagly däl n synag geçirilýän bolsun we bu synaglarda doly topary emele getirýän sygyşmaýan $A_1, A_2, ..., A_n$ wakalaryň diňe biri ýüze çykýan bolsun. Bu synaglarda A_1 waka hemişelik p_1 ähtimallyk bilen k_1 gezek, A_2 waka hemişelik p_2 ähtimallyk bilen k_2 gezek we ş.m. A_m waka hemişelik p_m ähtimallyk bilen k_m gezek ýüze çykýan bolsun, şunlukda $k_1+k_2+...+k_m=n$. Bu wakanyň ähtimallygyny $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$ bilen belgiläliň. Onda Bernulliniň shemasyndaky pikir ýöretmeleri ulanyp,

$$P_n(k_1,k_2,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ...\cdot k_m!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot ...\cdot p_m^{k_m} \qquad (25)$$

formulany alarys. Garalan synaglar yzygiderligine polinomial shema, (25) formula bolsa polinomial formula diýilýär. Hususy halda, $m=2$ bolanda polinomial formuladan Bernulliniň formulasy alynýar.

3. Muawr-Laplasyň lokal we integral predel teoremalary. Bernulliniň shemasynda käbir predel teoremalary getireliň. Bagly däl synaglaryň sany uly bolmadyk ýagdaýynda haýsy hem bolsa bir A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygyny Bernulliniň formulasy boýunça hasaplamak amatlydyr. Emma synaglaryň sany artdygyça bu ähtimallygy tapmak üçin köp we kyn hasaplamalary geçirmeli bolýar. Şol sebäpli, synaglaryň sany tükeniksiz artanda $P_n(k)$ ähtimallygy hasaplamak üçin gerek bolan asimptotik formulany tapmaklyk zerurlygy ýüze çykýar. A wakanyň bagly däl n synagyň her birinde ýüze çykmagynyň p ähtimallygy 0,5-e deň bolan hususy hal üçin şeýle formulany 1730-njy ýylda iňlis matematigi Abraham de Muawr (26.05.1667–27.11.1754) hödürleýär. Muawryň bu formulasyny 1783-nji ýylda fransuz matematigi Pýer Simon Laplas (23.03.1749–05.03.1827) (0;1) interwala degişli islendik p ähtimallyk üçin umumylaşdyrýar.

Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasy. Bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik p $(0<p<1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy takmynan $\frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiýanyň $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ nokatdaky bahasyna deňdir, ýagny

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{26}$$

bu ýerde $q=1-p$. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ jübüt funksiýadyr we onuň bahalary tabulirlenendir (1-nji goşundy).

Muawr-Laplasyň integral predel teoremasy. Bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik p $(0<p<1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k_1-den az bolmadyk gezek, k_2-den bolsa köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k_1;\, k_2)$ ähtimallygy takmynan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

kesgitli integrala deňdir. Amalyýetde meseleleri çözmekde amatly bolar ýaly bu teorema

$$P_n(k_1;\, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{27}$$

görnüşde ýazylýar, bu ýerde

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q=1-p,$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – Laplasyň funksiýasy. Bu funksiýa täkdir we onuň bahalary tabulirlenendir (2-nji goşundy). x argumentiň 5-den kiçi bolmadyk bahalary üçin $\Phi(x)$ funksiýanyň bahasy 0,5-e deň diýlip kabul edilýär.

4. Ähtimallyklaryň paýlanyşynyň Puasson kanuny.

A wakanyň bagly däl n synagyň her birinde ýüze çykmagynyň p ähtimallygy nola ýa-da bire golaý boldugyça Muawr-Laplasyň (26) lokal formulasyny ulanyp, $P_n(k)$ ähtimallygy hasaplamak kynlaşýar. Şol sebäpli, synaglaryň sany artdygyça tükeniksiz kemelýän p ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň $P_n(k)$ ähtimallygyny hasaplamak üçin asimptotik formulany tapmak zerurlygy ýüze çykýar. Bu meseläniň çözgüdi hökmünde fransuz matematigi Puassonyň (Puasson Simeon Deni, 21.06.1781–25.04.1840) shemasyny we teoremasyny getireliň.

Elementar wakalaryň tapgyrlarynyň

$$\begin{array}{l} w_{11}, \\ w_{21},\ w_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{n1},\ w_{n2},\ w_{n3},\ \ldots,\ w_{nn}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

yzygiderligine garalyň. Şunlukda, her bir tapgyryň wakalary özara bagly däl we tapgyryň nomerine bagly p_n ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun. n-nji tapgyrda ýüze çykýan wakalaryň sanyny μ_n bilen belgiläliň. Bagly däl synaglaryň şeýle yzygiderligine Puassonyň shemasy diýilýär.

Puassonyň teoremasy. Eger $n \to \infty$ bolanda $p_n \to 0$ bolsa, onda $n \to \infty$ bolanda

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_n}\right] = 0 \qquad (28)$$

deňlik dogrudyr, bu ýerde $\lambda_n = n \cdot p_n$.

◁ Bernulliniň (24) formulasyny özgerdip alarys:

$$P(\mu_n = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p_n^k \cdot q_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \qquad (29)$$

Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin $A = A(\varepsilon)$ san bar bolup, ol ýeterlik uly saýlanyp alnanda $\lambda_n \geq A$ bolan n nomerler we fiksirlenen k san üçin

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizlik dogrudyr. $\lambda_n \geq A$ bolan n nomerler üçin

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

deňsizligi ýazmak bolar. $1 - x \leq e^{-x}$, $x \in [0;1]$, deňsizlikden peýdalanyp, $n \geq 2k$ nomerler üçin

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n(n-k)}{n}} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (30)$$

deňsizligi alarys. (30) we

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} < \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizliklerden

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (31)$$

deňsizligi alarys. $\lambda_n < A$ bolan n nomerlere garap,

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n - e^{-\lambda_n} \right] = 0 \quad \text{we} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k} = 1$$

deňlikleri alarys. Onda $n \geq n_0(\varepsilon)$ nomerler üçin

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \varepsilon \qquad (32)$$

deňsizlik dogrudyr. Diýmek, (31) we (32) deňsizliklere görä (28) deňlik dogrudyr. ⊳

Amaly maksatlar üçin (28) deňligi

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (33)$$

görnüşde ýazmak amatlydyr. (33) deňlige Puassonyň formulasy diýilýär. Ähtimallyklaryň bu formula bilen berlen paýlanyşyna Puassonyň paýlanyş kanuny diýilýär.

5. Bagly däl synaglarda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň hemişelik ähtimallykdan gyşarmasy.

Bagly däl n synagyň her birinde şol bir p $(0<p<1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň şol wakanyň her synagda ýüze çykmagynyň p ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň $\varepsilon>0$ sandan uly bolmazlygynyň ähtimallygy $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ bolanda ikeldilen Laplasyň funksiýasyna takmynan deňdir, ýagny

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (34)$$

$\triangleleft\ \left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon$ deňsizligi özgerdip ýazalyň:

$$-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon$$

Bu deňsizlikleriň üç bölegini hem položitel $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ sana köpeldip alarys:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}},\quad x'=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\ \text{ we }\ x''=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

belgilemeleri girizip we Muawr-Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanyp,

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

deňligi alarys. $\triangleright$

6. Bagly däl synaglarda wakanyň ýüze çykmalarynyň iň ähtimal sany. Eger bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik p ähtimallyk bilen ýüze çykýan wakanyň bu synaglarda k_0 gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy synagyň beýleki mümkin bolan netijeleriniň ähtimallyklaryndan kiçi bolmasa, onda k_0 sana bagly däl n synagda wakanyň ýüze çykmalarynyň iň ähtimal sany diýilýär. Iň ähtimal k_0 san

$$np-q \le k_0 \le np+p \qquad (35)$$

deňsizliklerden kesgitlenýär, şunlukda:

a) eger $np-q$ ululyk drob san bolsa, onda bir iň ähtimal k_0 san bar;

b) eger $np-q$ ululyk bitin san bolsa, onda k_0 we k_0+1 iki iň ähtimal san bar;

ç) eger np ululyk bitin san bolsa, onda iň ähtimal san $k_0=np$ bolar.

1-nji mesele. Lotereýa biletiniň utuşly bolmagynyň ähtimallygy 0,7-ä deň. Bäş lotereýa biletiniň üçüsiniň utuşly bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Meseläniň şertine görä $n=5$, $k=3$, $p=0{,}7$, $q=1-0{,}7=0{,}3$. Bernulliniň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P_5(3) = C_5^3 0{,}7^3 0{,}3^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}343\cdot 0{,}09 = 0{,}3087. \ \triangleright$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşananyň merkezine degmeginiň ähtimallygy 0,2-ä deň, nyşananyň beýleki ýerlerine degmeginiň ähtimallygy bolsa 0,5-e deň. Atyjy 10 gezek atanda 4 okuň nyşananyň merkezine, 4 okuň bolsa nyşananyň beýleki ýerlerine degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Meseläniň şertine görä okuň nyşanadan sowa geçmeginiň ähtimallygy 0,3-e deň. Onda (25) formuladan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P(4;4;2) = \frac{10!}{4!4!2!}0{,}2^4\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}3^2 \approx 0{,}028. \ \triangleright$$

3-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjynyň 100 gezek atanda nyşanany 85 gezek urmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ Meseläniň şertine görä $n=100, k=85, p=0{,}8$. Onda $q=1-0{,}8=0{,}2$ we

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{85-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{5}{4}=1{,}25.$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (1-nji goşundy) $\varphi(1{,}25)=0{,}1826$ bahany alarys. Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P_{100}(85)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi(1{,}25)=\frac{1}{4}\cdot 0{,}1826=0{,}04565.\ \triangleright$$

4-nji mesele. Bagly däl 100 synagyň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,75-e deň. Bu 100 synagda A wakanyň 70-den az bolmadyk we 80-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ $n=100, k_1=70, k_2=80, p=0{,}75$. Onda $q==0{,}25$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\approx\frac{-5}{4{,}33}\approx-1{,}15,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\approx\frac{5}{4{,}33}\approx 1{,}15.$$

$\Phi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (2-nji goşundy) $\Phi(1{,}15)=0{,}03749$ bahany taparys. $\Phi(x)$ funksiýanyň täkligini göz öňünde tutup we Muawr-Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P_{100}(70;80)\approx\Phi(1{,}15)-\Phi(-1{,}15)=2\Phi(1{,}15)=2\cdot 0{,}3749=0{,}7498.\ \triangleright$$

5-nji mesele. Kärhana bir günde 1000 önüm öndürýär. Önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Şowuna alnan 3 önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

$\triangleleft$ $n=1000, k=3, p=0{,}002$. Onda

$$\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2,\quad e^{-2}\approx 0{,}135.$$

Puassonyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys:

$$P_{1000}(3)\approx\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}\approx\frac{8}{6}\cdot 0{,}135=0{,}18.\ \triangleright$$

6-njy mesele. Käbir ösümligiň baldagynyň uzynlygynyň 80-90 sm. bolmagynyň ähtimallygy 0,6-a deň. Bu ösümligiň 300 sanysynyň arasynda baldagynyň uzynlygy 80-90 sm. bolanlarynyň otnositel ýygylygynyň şeýle ösümlikleriň ýüze çykmalarynyň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygy boýunça 0,05-den köp bolmazlygynyň ähtimallygyny tapmaly.

◁ Meseläniň şertine görä $n=300$, $\varepsilon=0{,}05$, $p=0{,}6$. Onda $q=0{,}4$. (34) formuladan we Laplasyň funksiýasynyň bahalarynyň tablisasyndan (2-nji goşundy) peýdalanyp taparys:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}6\right|\leq 0{,}05\right)\approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{300}{0{,}6\cdot 0{,}4}}\right)\approx$$

$$\approx 2\Phi(1{,}77)=2\cdot 0{,}4616=0{,}9232. \triangleright$$

7-nji mesele. Tehniki barlag bölümi 10 önümden ybarat toplumy barlaýar. Önümiň standart bolmagynyň ähtimallygy 0,75-e deň. Standart önümleriň iň ähtimal sanyny tapmaly.

◁ Meseläniň şertine görä $n=10$, $p=0{,}75$. Onda $q=0{,}25$. $np-q=$ $=10\cdot 0{,}75-0{,}25=7{,}25$ drob san bolandygy sebäpli bir iň ähtimal k_0 san bardyr. $np+q=10\cdot 0{,}75+0{,}75=8{,}25$. Onda (35) formula boýunça $7{,}25\leq k_0\leq 8{,}25$ deňsizligi ýazmak bolar. k_0 bitin san bolandygy sebäpli soňky deňsizliklerden $k_0=8$ iň ähtimal sany alarys. ▷

§ 1. 7. Tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary

1. Diskret tötän ululyk we onuň paýlanyş kanuny.

Kesgitleme. Ω elementar wakalar giňişligini R san okuna öwürýän hakyky $\xi(w)$ san funksiýasyna tötän ululyk diýilýär.

Başgaça aýdylanda, tötän ululyk bu tötän wakalara baglylykda ol ýa-da beýleki bahalary kabul edýän üýtgeýän ululykdyr. Tötän ululyklaryň diskret,üznüksiz we singulýar görnüşleri bardyr. Ähtimallyklar nazaryýetinde diskret we üznüksiz tötän ululyklar has giňişleýin öwrenilýär.

Eger tötän ululyk tükenikli ýa-da hasaply köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa diskret tötän ululyk diýilýär. Belli bir wagt aralygynda duralga gelýän awtobuslaryň sany, synagda talybyň bilim derejesine goýulýan bahanyň san ululygy, gözegçilik edilýän ýylda ekinden alynýan hasylyň mukdary, ýurdumyza gyşlamaga gelýän guşlaryň sany, hassahanadaky gany şol bir topara degişli bolan näsaglaryň sany, nyşanany urmaga sarp ediljek oklaryň sany we ş.m. diskret tötän ululygyň mysallarydyr.

Tötän ululyklary latyn elipbiýiniň baş harplary ýa-da grek elipbiýiniň harplary bilen, olaryň kabul edýän bahalaryny bolsa latyn elipbiýiniň setir harplary bilen belgilemegi şertleşeliň. Diskret tötän ululygyň kabul edýän $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary bilen bu bahalaryň degişli p_1, p_2, ..., p_n ähtimallyklarynyň sanawyna diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny diýilýär. Paýlanyş kanunynda ähtimallyklar $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ şerti kanagatlandyrýandyr. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny tablisa, grafik we formula arkaly bermek bolar. Tablisa arkaly ol

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

görnüşde berilýär.

Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny grafik görnüşde bermek üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Abssissalar okunda diskret tötän ululygyň kabul edýän x_1, x_2, ..., x_n bahalaryny, ordinatalar okunda bolsa bu bahalaryň degişli p_1, p_2, ..., p_n ähtimallyklaryny bellemeli. Soňra (x_i, p_i) $i = \overline{1, n}$ nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwük çyzyga paýlanyşyň köpburçlugy diýilýär.

Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň formula arkaly berlişine mysal hökmünde Bernulliniň (24) we Puassonyň (33) formulalaryny getirmek bolar.

2. Paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary. Diskret tötän ululyk kabul edýän bahalary we olaryň degişli ähtimallyklary bilen berilýär. Emma üznüksiz tötän ululyklar üçin şeýle berlişi amala aşyryp bolmaýar. Şol sebäpli, öz tebigaty boýunça köpdürli tötän ululyklaryň ähtimallyklaryny şol bir usul bilen bermek üçin tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy düşünjesi girizilýär.

$$F(x)=P(\xi<x) \tag{36}$$

funksiýa ξ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde x $(-\infty<x<\infty)$ üýtgeýän hakyky ululyk.Geometrik nukdaý nazardan ξ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy ol tötän ululygyň $(-\infty; x)$ aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygydyr.

Paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) Paýlanyş funksiýanyň bahalar oblasty [0:1] kesimdir, ýagny, $0\leq F(x)\leq 1$ deňsizlikler dogrudyr.

2) Paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny paýlanyş funksiýasynyň kesgitleniş oblastyna degişli we $x_1<x_2$ bolan islendik x_1 we x_2 argumentler üçin $F(x_1)\leq F(x_2)$ deňsizlik dogrudyr.

3) Paýlanyş funksiýasy çepden üznüksizdir, ýagny $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0)$ deňlik ýerine ýetýändir.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=F(-\infty)=0$ we $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)=1$ predel deňlikler ýerine ýetýändir.

Bu häsiýetleri subut edeliň.

1) Paýlanyş funksiýasynyň bu häsiýeti onuň kesgitlemesinden gelip çykýar, sebäbi $F(x)$ paýlanyş funksiýasy $(\xi<x)$ wakanyň ähtimallygydyr, ähtimallyk bolsa, [0;1] kesimden bahalary kabul edýändir.

2) Goý, x_1 we x_2 argumentler üçin $x_1<x_2$ bolsun. $(\xi<x_2)$ wakany sygyşmaýan $(\xi<x_1)$ we $(x_1\leq\xi<x_2)$ wakalaryň jemi görnüşinde aňladalyň:

$$(\xi<x_2)=(\xi<x_1)+(x_1\leq\xi<x_2).$$

Sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasyndan peýdalanyp,

$$P(\xi<x_2)=P(\xi<x_1)+P(x_1\leq\xi<x_2)$$

deňligi alarys. (36) belgilemäni göz öňünde tutup, bu deňligi

$$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1\leq\xi<x_2) \tag{37}$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu deňligiň sag böleginiň ähtimallyk bolandygy sebäpli $F(x_1)\leq F(x_2)$ deňsizlik dogrudyr.

3) Goý, $\{x_n\}$ artýan yzygiderlik x_0 nokada ýygnanýan bolsun. $A_n = \{\xi < x_n\}$ we $A = \{\xi < x_0\}$ wakalary girizeliň. $\{A_n\}$ wakalaryň yzygiderligi artýandyr we $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ deňgüýçlülik dogrudyr. Onda üznüksizlik aksiomasyna görä $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ ýa-da $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$ deňlik ýerine ýetýändir. $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli $\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$ deňlik dogrudyr.

4) Goý, $\{x_n\}$ monoton kemelýän, $\{y_n\}$ bolsa monoton artýan san yzygiderlikleri bolsun. $A_n = \{\xi < x_n\}$ we $B_n = \{\xi < y_n\}$ wakalary girizeliň. Goý, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ we $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ bolsun. Üznüksizlik aksiomasyndan peýdalanyp, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ we $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$ ýa-da $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$ we $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$ deňlikleri ýazmak bolar. Paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \quad \text{we} \quad \lim_{y\to+\infty} F(y) = F(+\infty) = 1$$

deňlikler dogrudyr.

Eger

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \tag{38}$$

aňlatma dogry bolsa, onda $F(x)$ paýlanyş funksiýasyna absolýut üznüksiz diýilýär. Şeýle paýlanyş funksiýaly tötän ululyga absolýut üznüksiz ýa-da üznüksiz diýilýär. (38) aňlatmadaky integral astyndaky funksiýa tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy diýilýär. Dykyzlyk funksiýasy paýlanyş funksiýasynyň birinji önümidir

$$f(x) = F'(x). \tag{39}$$

Dykyzlyk funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) $f(x) \geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Dykyzlyk funksiýasynyň 1-nji häsiýeti onuň kemelmeýän funksiýanyň birinji önümidiginden gelip çykýar. Dykyzlyk funksiýasynyň 2-nji häsiýetini (38) aňlatmadan we paýlanyş funksiýasynyň häsiýetinden peýdalanyp almak bolar:

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Paýlanyş funksiýasyna başgaça integral funksiýasy hem diýilýär. Dykyzlyk funksiýasyna differensial funksiýa ýa-da ähtimallygyň paýlanyşynyň dykyzlygy hem diýilýär.

Üznüksiz tötän ululygyň üzňe bir bahany almagynyň ähtimallygynyň nola deňdigi sebäpli şeýle tötän ululyk üçin

$$P(a \le \xi \le b) = P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a < \xi < b) \qquad (40)$$

deňlikleri ýazmak bolar.

Üznüksiz ξ tötän ululygyň (a, b) interwaldan bahalary kabul etmeginiň $P(a<\xi<b)$ ähtimallygy

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (41)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde $f(x)$ funksiýa ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy. Hakykatdan hem, (37) deňlikde x_1-e derek a, x_2-ä derek b ululyklary goýup we Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp alarys:

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(40) deňlikleri göz öňünde tutup, (41) formulanyň dogrudygyna göz ýetirmek bolar.

Indi käbir wajyp paýlanyş funksiýalaryny getireliň.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n \end{cases}$$

paýlanyş funksiýaly tötän ululyga binomial (Bernulli) kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sum\limits_{k<x}\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, & x>0,\ 0<\lambda<\infty\end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga λ parametrli Puassonyň kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy,\quad -\infty<a<\infty,\quad 0<\sigma<\infty$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga a we σ^2 parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan diýilýär. Hususy halda, $a=0$, $\sigma^2=1$, bolanda standart normal kanunyň

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

paýlanyş funksiýasyny alarys.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & 0<x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga $[a;\ b]$ kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\nu x}, & x>0,\ \nu>0\end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga v parametrli görkezijili kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+y^2}dy$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga Koşiniň (Koşi Ogýusten Lui, 21.08.1789–23.05.1857, fransuz matematigi) kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

Hususy halda, normal kanun boýunça paýlanan X tötän ululygyň $(\alpha;\ \beta)$ interwaldan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygy

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)\qquad(42)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde a we σ ululyklar normal kanunyň parametrleri.

3. Köpölçegli tötän ululyklar.

Biz şu wagta çenli kabul edýän bahalary bir san bilen kesgitlenýän tötän ululyklara, ýagny birölçegli tötän ululyklara garadyk. Emma kabul edýän bahalary birden köp sanlar bilen kesgitlenýän tötän ululyklar hem bardyr. Şeýle tötän ululyklara köpölçegli diýilýär. Mysal üçin, $\xi=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ tötän ululyga n-ölçegli tötän ululyk ýa-da n-ölçegli wektor diýilýär. Şeýle tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x_1, x_2, ..., x_n)=P(\xi_1<x_1, \xi_2<x_2, ..., \xi_n<x_n)$$

görnüşde kesgitlenýär we n-ölçegli paýlanyş funksiýasy ýa-da n tötän ululyklar sistemasynyň paýlanyş funksiýasy diýlip atlandyrylýar. Hususy halda, ikiölçegli tötän ululyga garalyň.

Kesgitleme. Eger bir tötän ululygyň paýlanyş kanuny beýleki tötän ululygyň kabul edýän bahalaryna bagly bolmasa, onda şeýle tötän ululyklara bagly däl diýilýär.

Teorema. ξ we n tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin (ξ; n) sistemanyň paýlanyş funksiýasynyň düzüjileriň paýlanyş funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny

$$F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y) \tag{43}$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir, bu ýerde $F(x, y)$ funksiýa (ξ; n) sistemanyň paýlanyş funksiýasy, $F_1(x)$ we $F_2(x)$ funksiýalar bolsa degişlilikde ξ we η düzüjileriň paýlanyş funksiýalary.

◁ **Zerurlygy.** Goý, ξ we η bagly däl tötän ululyklar bolsun. Onda $\xi<x$ we $\eta<y$ wakalar hem bagly däldir. Bagly däl wakalar üçin köpeltmek teoremasy boýunça

$$P(\xi<x, \eta<y)=P(\xi<x)\cdot P(\eta<y)$$

ýa-da

$$F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

bolar. ▷

◁ **Ýeterligi.** Goý, (43) deňlik ýerine ýetýan bolsun. Onda

$$P(\xi<x, \eta<y)=P(\xi<x)\cdot P(\eta<y)$$

bolar. Bu bolsa, $\xi<x$ we $\eta<y$ wakalar bagly däl diýildigidir. Onda ξ we η tötän ululyklar hem bagly däldir. ▷

Netije. ξ we η tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin (ξ; η) sistemanyň dykyzlyk funksiýasynyň düzüjileriň dykyzlyk funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{44}$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bellik. (43) we (44) deňlikleriň zerur we ýeterlik tassyklamalar bolandyklary sebäpli, olary tötän ululyklaryň özara bagly dälliginiň kesgitlemeleri hökmünde kabul etmek bolar.

1-nji mesele. Oýnalýan kub iki gezek oklanýar. Üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

◁ Goý, A waka üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmagy bolsun. Oýnalýan kub iki gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sany diskret tötän ululykdyr. Ony ξ bilen belgiläliň. ξ tötän ululyk $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ bahalary kabul edýär. Oýnalýan kub bir gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň (A wakanyň) ýüze çykmagynyň ähtimallygy klassyky kesgitleme boýunça

$$P=P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

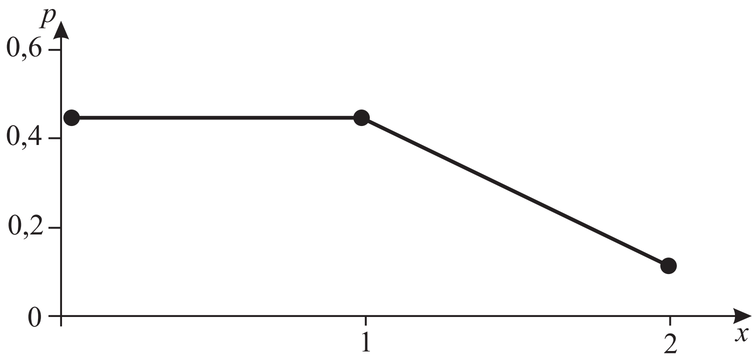
bolar. Onda $q=1-p=\frac{2}{3}$. Indi Bernulliniň formulasyndan peýdalanyp, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ bahalaryň degişli ähtimallyklaryny tapalyň:

$$\left.\begin{array}{l} P_1=P(\xi=x_1=0)=P_2(0)=C_2^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9} \\ P_1=P(\xi=x_2=1)=P_2(1)=C_2^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{2}{9}=\frac{4}{9} \\ P_1=P(\xi=x_3=2)=P_2(2)=C_2^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2!}{2!\cdot 0!}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9} \end{array}\right\}.$$

Bu deňlikler diskret ξ tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň formula görnüşinde (analitiki) berlişidir. Bu paýlanyş kanunyny tablisa görnüşde ýazalyň:

ξ	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

ξ tötän ululygyň bu paýlanyş kanunyny grafik görnüşinde hem bermek bolar:



2-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	–2	–1	0	1
p	0,1	0,2	0,5	0,2

paýlanyş kanun bilen berlen bolsun. Bu tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

◁ Goý, $x \le -2$ bolsun. Onda $(\xi < -2)$ mümkin däl wakadyr. Şonuň üçin $P(\xi < -2) = 0$ bolar. Diýmek, $x \le -2$ üçin

$$F(x) = P(\xi < x) = 0.$$

Goý, $-2 < x \le -1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) = 0{,}1.$$

Goý, $-1 < x \le 0$ bolsun. Onda, sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmak teoremasy boýunça

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

bolar. Goý, $0 < x \le 1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

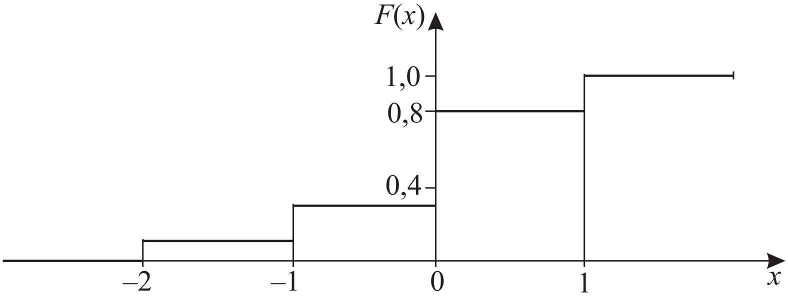
Goý, $x > 1$ bolsun. Onda

$$F(x)=P(\xi<x)=P(\xi=-2)+P(\xi=-1)+P(\xi=0)+P(\xi=1)=$$
$$=0{,}1+0{,}2+0{,}5+0{,}2=1.$$

Şeýlelikde,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -2,\\ 0,1, & -2<x\leq -1,\\ 0,3, & -1<x\leq 0,\\ 0,8, & 0<x\leq 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Bu $F(x)$ paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň:



Görnüşi ýaly, diskret tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr. ▷

3-nji mesele. ξ tötän ululyk

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\leq 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny we ξ tötän ululygyň (–1; 1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

◁ $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny $f(x)=F'(x)$ deňlikden peýdalanyp tapalyň:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq -2,\\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & -2<x\leq 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

ξ tötän ululygyň (–1; 1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny

$$P(a<\xi<b)=F(b)-F(a)$$

formuladan peýdalanyp tapalyň. (–1; 1) aralyk (–2; 2) aralyga degişli. Meseläniň şerti boýunça (–2; 2) aralykda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\frac{x}{2}.$$

Onda

$$P(-1 < \xi < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\frac{1}{2} -$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \rhd$$

4-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}, \\ C\sin 3x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy bilen berlen. C parametriň bahasyny we ξ tötän ululygyň $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

$\lhd$ C parametriň bahasyny dykyzlyk funksiýasynyň

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

häsiýetinden peýdalanyp tapalyň:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} 0dx =$$

$$= C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx = -\frac{C}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{C}{3} = 1.$$

Bu ýerden $C=3$. Indi $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

formuladan peýdalanyp tapalyň. Goý, $x\leq\pi/6$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{x} 0dy=0.$$

Goý, $\frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy+\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3ydy=-\cos 3y\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\cos 3x.$$

Goý, $x>\frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3ydy+\int_{\frac{\pi}{3}}^{x} 0dy=-\cos 3y\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=1.$$

Şeýlelikde,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq\frac{\pi}{6},\\ -\cos 3x, & x<\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3},\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases} \triangleright$$

§1. 8. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri

1. Matematiki garaşma. Belli bolşy ýaly, tötän ululygyň berilmegi üçin onuň paýlanyş funksiýasynyň berilmegi ýeterlikdir. Emma köp meselelerde tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaklyk kyn bolýar ya-da ony tapmaklyga zerurlyk hem bolmaýar. Mysal üçin, birinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sany ikinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sanyndan uly bolsa, onda bu birinji atyjynyň ikinji atyja görä mergenlik derejesiniň ýokarydygy barada netije çykarmak üçin ýeterlikdir. Başgaça aýdylanda, tötän ululyklaryň umumy mukdar häsiýetlendirijileri bolan hemişelik ululyklary bilmek ýeterlik bolýar. Bu hemişelik ululyklara tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri diýilýär. Şeýle san häsiýetlendirijileriň biri hem matematiki garaşmadyr.

Kesgitleme. Diskret ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip, ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{45}$$

Bu ýerde x_k, $k=\overline{1, n}$, ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalary, $p_k=p(\xi=x_k)$, $k=\overline{1, n}$, ol bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Kesgitleme. Üznüksiz ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasy diýlip,

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{46}$$

integrala aýdylýar, bu ýerde $f(x)$ funksiýa ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy.

Matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysyny anyklalyň. Goý, N synag geçirilýän bolsun we bu synaglarda ξ tötän ululyk x_1 bahany N_1 gezek, x_2 bahany N_2 gezek we şuňa meňzeşler, x_k bahany N_k gezek kabul edýän bolsun. ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň orta arifmetiki bahasyny tapalyň:

$$\overline{x_a} = \frac{N_1x_1 + N_2x_2 + ... + N_kx_k}{N} = x_1 \cdot \frac{N_1}{N} + x_2 \cdot \frac{N_2}{N} + ... + x_k \cdot \frac{N_k}{N},$$

bu ýerde $\frac{N_i}{N}$, $i=\overline{1, k}$, gatnaşyk x_i bahanyň W_i otnositel ýygylygy. Şol sebäpli, bu deňligi $\overline{x}_a=x_1 \cdot W_1+x_2 \cdot W_2+...+x_k \cdot W_k$ görnüşde ýazmak bolar. Synaglaryň sany ýeterlik uly bolanda wakanyň otnositel ýygylygy şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyna takmynan deňdir.

Şol sebäpli, soňky deňlikde W_i, $i=\overline{1, k}$, otnositel ýygylyklary degişli p_i ähtimallyklar bilen çalşyryp alarys:

$$\overline{x}_a \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k = M\xi.$$

Diýmek, $M\xi \approx \overline{x}_a$, ýagny tötän ululygyň matematiki garaşmasy ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň takmynan orta arifmetiki bahasyna deňdir. Bu matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysydyr.

Indi matematiki garaşmanyň häsiýetlerine garalyň.

Teorema. Hemişelik ululygyň matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir, ýagny

$$MC = C,$$

bu ýerde C hemişelik ululyk.

◁ (45) formuladan peýdalanyp taparys:

$$MC = \sum_{k=1}^{n} C \cdot p_k = C \sum_{k=1}^{n} p_k = C \cdot 1 = C. \triangleright$$

Teorema. Hemişelik köpeldijini matematiki garaşma belgisiniň daşyna çykarmak bolar, ýagny

$$M(C\xi) = C \cdot M\xi.$$

◁ Ýazyp bileris:

$$M(C\xi) = \sum_{k=1}^{n} Cx_k \cdot p_k = C \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = C \cdot M\xi. \triangleright$$

Teorema. Iki tötän ululygyň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2. \tag{47}$$

◁ Goý, ξ_1 tötän ululyk x_1, x_2, ..., x_n bahalary degişlilikde p_1, p_2, ..., p_n ähtimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa y_1, y_2, ..., y_m bahalary degişlilikde q_1, q_2, ..., q_m ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsun. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa y_m bahany kabul etmeginiň ähtimallygyny P_{nm} bilen belgiläliň. Onda

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right).$$

Doly ähtimallygyň formulasy boýunça

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j.$$

Onda

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\xi_1 + M\xi_2. \rhd$$

Netije. Tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$M(\xi_1+\xi_2+....+\xi_n)=M\xi_1+M\xi_2+...+M\xi_n.$$

Bu deňligiň dogrudygyna (47) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp göz ýetirmek bolar.

Teorema. Bagly däl iki tötän ululygyň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(\xi_1\xi_2)=M\xi_1 \cdot M\xi_2. \tag{48}$$

$\lhd$ Goý, ξ tötän ululyk x_1, x_2, ..., x_n bahalary degişlilikde p_1, p_2, ..., p_n ähtimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa y_1, y_2, ..., y_m bahalary degişlilikde q_1, q_2, ..., q_m ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsun. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa y_m bahany kabul etmeginiň ähtimallygy bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmek teoremasy boýunça $p_n \cdot q_m$ bolar. Onda

$$M(\xi_1\xi_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right) = M\xi_1 M\xi_2. \rhd$$

Netije. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir, ýagny

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot .... \cdot \xi_n)=M\xi_1 \cdot M\xi_2 \cdot ... \cdot M\xi_n.$$

Bu deňligiň dogrudygyna (48) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp göz ýetirmek bolar. Matematiki garaşmanyň diskret tötän ululyklar üçin subut edilen bu häsiýetleri üznüksiz tötän ululyklar üçin hem dogrudyr.

2. Dispersiýa. Dürli tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bolup biler. Mysal üçin,

ξ	–1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

we

η	–10	0	10
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

paýlanyş kanunlary bilen berlen diskret ξ we η tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bardyr. Hakykatdan hem,

$$M\xi = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \text{we}$$

$$M\eta = -10 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Şeýle ýagdaýda tötän ululyklary biri-birinden tapawutlandyrmak maksady bilen dispersiýa diýlip atlandyrylýan ýene bir san häsiýetlendiriji girizilýär.

Kesgitleme. ξ tötän ululygyň dispersiýasy diýlip, ol tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{49}$$

Diskret tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M\xi)^2 p_k \tag{50}$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde x_k, $k = \overline{1, n}$, ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalary, $p_k = p(\xi = x_k)$, $k = \overline{1, n}$, bolsa bu bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Üznüksiz tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f(x)dx \tag{51}$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde $f(x)$ funksiýa ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasydyr.

Bellik. Tükenikli matematiki garaşmasy bolan islendik ξ tötän ululyk üçin

$$M(\xi - M\xi) = M(\xi + (-1)M\xi) + M\xi + M[(-1)M\xi] =$$
$$= M\xi + (-1)M\xi = M\xi - M\xi = 0$$

bolandygy sebäpli, dispersiýa hökmünde ξ tötän ululygyň $(\xi - M\xi)$ gyşarmasynyň matematiki garaşmasyny almaklygyň manysy ýokdur.

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerinden peýdalanyp, (49) formulany oňa deňgüýçli we amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \tag{52}$$

görnüşde ýazmak bolar. Hakykatdan hem,

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Dispersiýany diskret tötän ululyklar üçin

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k\right)^2, \tag{53}$$

formuladan, üznüksiz tötän ululyklar üçin bolsa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx\right)^2 \tag{54}$$

formuladan peýdalanyp hem hasaplamak bolar.

Dispersiýa tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň ol tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirýär. Bu onuň ähtimallyk manysydyr.

Indi dispersiýanyň hasiýetlerine garalyň.

Teorema. Hemişelik ululygyň dispersiýasy nola deňdir, ýagny

$$DC = 0,$$

bu ýerde C – hemişelik ululyk.

◁ Dispersiýanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys:

$$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = M(0)^2 = 0. \ \triangleright$$

Teorema. Hemişelik köpeldijini dispersiýa belgisiniň daşyna kwadrata göterip çykarmak bolar, ýagny

$$D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi.$$

◁ Ýazyp bileris:

$$D(C\xi)=M(C\xi-M(C\xi))^2=M(C\xi-CM\xi)^2=C^2\cdot M(\xi-M\xi)^2=C^2\cdot D\xi. \rhd$$

Teorema. Bagly däl iki tötän ululygyň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir,ýagny

$$D(\xi_1+\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2. \qquad (55)$$

$\lhd$ Eger ξ_1 we ξ_2 tötän ululyklar bagly däl bolsa, onda $(\xi_1-M\xi_1)$ we $(\xi_2-M\xi_2)$ tötän ululyklar hem bagly däldir. Onda

$$D(\xi_1+\xi_2)=M[(\xi_1+\xi_2)-M\,(\xi_1+\xi_2)]^2=M[(\xi_1-M\xi_1)+(\xi_2-M\xi_2)]^2=$$

$$=M(\xi_1-M\xi_1)^2+2M(\xi_1-M\xi_1)\cdot M(\xi_2-M\xi_2)+M(\xi_2-M\xi_2)^2=D\xi_1+D\xi_2.$$

Netije. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$D(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)=D\xi_1+D\xi_2+...+D\xi_n.$$

Bu deňligi (55) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp subut etmek bolar.

1-nji netije. Bagly däl iki tötän ululygyň tapawudynyň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$D(\xi_1-\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2.$$

Hakykatdan hem,

$$D(\xi_1-\xi_2)=D(\xi_1+(-1)\xi_2)=D\xi_1+D[(-1)\xi_2]=D\xi_1+(-1)^2\cdot D\xi_2=$$

$$=D\xi_1+D\xi_2.$$

2-nji netije. Tötän ululyk bilen hemişelik ululygyň jeminiň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasyna deňdir, ýagny

$$D(\xi+C)=D\xi.$$

Hakykatdan hem, ξ tötän ululyk bilen C hemişelik ululyga biri-biri bilen bagly däl ululyklar hökmünde garap we $DC=0$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$D(\xi+C)=D\xi+DC=D\xi$$

deňligi alarys.

3. Orta kwadratik gyşarma. Tötän ululygyň dispersiýasynyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly, tötän ululygyň ölçegi bilen onuň dispersiýasynyň ölçegi gabat gelmeýär. Mysal üçin, tötän ululyk metrde ölçenýän bolsa, onuň dispersiýasynyň ölçegi metr kwadrat bolar. Bu «kemçiligi» aradan aýyrmak maksady bilen orta kwadratik gyşarma diýlip atlandyrylýan ýene-de bir häsiýetlendirijini girizýärler.

Kesgitleme. Dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke orta kwadratik gyşarma diýilýär:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}\,. \tag{56}$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň orta kwadratik gyşarmalarynyň jeminden alnan kwadrat köke deňdir:

$$\sigma_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \ldots + \sigma_{\xi_n}^2}\,.$$

$\triangleleft$ Goý, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ toplumlaýyn bagly däl tötän ululyklar bolsun.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

belgilemäni girizeliň. Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanalyň:

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n.$$

Bu ýerden

$$\sqrt{D\xi} = \sqrt{D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n}$$

(56) deňligi göz öňünde tutup alarys:

$$\sigma_\xi = \sigma_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \ldots + \sigma_{\xi_n}^2}\,. \triangleright$$

Goý, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar bolsun. Onda olaryň birmeňzeş san häsiýetlendirijileri bardyr: $M(\xi_i) = a$, $D(\xi_i) = D$, $\sigma_{\xi_i} = \sigma$ $(i = \overline{1, n})$. Bu tötän ululyklaryň

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

orta arifmetiki bahasy bilen baglanyşykly käbir tassyklamalary getireliň.

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklaryň $\bar{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň matematiki garaşmasy bu tötän ululyklaryň matematiki garaşmalaryna deňdir, ýagny

$$M\bar{\xi} = a,$$

bu ýerde, $a = M\xi_i$, $i = \overline{1, n}$.

◁ Matematiki garaşmanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys:

$$M\overline{\xi} = M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}\right) = \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a. \triangleright$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň dispersiýasy bu tötän ululyklarýn her biriniň dispersiýasyndan n esse kiçidir:

$$D\overline{\xi} = \frac{\sigma^2}{n},$$

bu ýerde $\sigma^2 = D\xi_i$, $i = \overline{1, n}$.

◁ Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys:

$$D\overline{\xi} = D\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}\right) = \frac{D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n}{n} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \triangleright$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň her biriniň orta kwadratik gyşarmasyndan $\sqrt{n}$ esse kiçidir, ýagny

$$\sigma_{\overline{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

bu ýerde $\sigma = \sqrt{D\xi_i}$, $i = \overline{1, n}$.

◁ Orta kwadratik gyşarmanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys:

$$\sigma_{\overline{\xi}} = \sqrt{D\overline{\xi}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \triangleright$$

4. Momentler.

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k \tag{57}$$

ululyga ξ tötän ululygyň k-njy tertipli momenti diýilýär. Hususy halda, $a = 0$ bolanda, bu ýerden alarys:

$$\nu_k(0) = \nu_k = M\xi^k. \tag{58}$$

Bu ululyga ξ tötän ululygyň k-njy tertipli başlangyç momenti diýilýär. Eger $a = M\xi$ bolsa, onda k-njy tertipli moment

$$\nu_k(M\xi) = \mu_k = M(\xi - M\xi)^k \tag{59}$$

görnüşe geler. Bu ululyga ξ tötän ululygyň k-njy tertipli merkezi momenti diýilýär.

(58) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli ($k=1$ bolanda) başlangyç moment matematiki garaşmadyr. (59) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli ($k=2$ bolanda) merkezi moment dispersiýadyr.

Merkezi momentler bilen başlangyç momentleriň arasynda ýönekeý baglanyşyklar bar. Bu baglanyşyklary matematiki statistikada giňden ulanylýan başky dört moment üçin ýazalyň:

$$\mu_0=1,$$

$$\mu_1=0,$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4.$$

(57), (58), (59) aňlatmalarda ýaýlary absolýut ululygynyň belgisi bilen çalşyryp, degişli absolýut momentleri alarys.

1-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

◁ (45) formuladan peýdalanyp, matematiki garaşmany tapalyň:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 = 1,9.$$

Indi $M\xi^2$ başlangyç ikinji momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k = 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,2 = 4,1.$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany tapalyň:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 4,1 - (1,9)^2 = 0,49.$$

Orta kwadratik gyşarmany tapalyň:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0,49} = 0,7. \triangleright$$

2-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

◁ Ilki ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasyny tapalyň:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Indi (46) formula boýunça matematiki garaşmany tapalyň:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = 2\int_0^1 x \cdot xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$M\xi^2$ ululygy tapalyň:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_0^1 x^2 \cdot xdx = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Indi orta kwadratik gyşarmany tapalyň:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,24. \ \triangleright$$

3-nji mesele. Binomial kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

◁ Binomial kanun boýunça paýlanan tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	…	$P_n(k)$	…	$P_n(n)$

görnüşdedir, bu ýerde

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k=\overline{0, n}, \quad p+q=1.$$

(45) formuladan peýdalanyp taparys:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{(n-1)! \cdot n}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}.$$

$n-k=(n-1)-(k-1)$ deňligi we Nýutonyň binomy boýunça

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k} = (p+q)^{n-1} = 1$$

bolýandygyny göz öňünde tutup alarys:

$$M\xi = np. \tag{60}$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

k^2 ululygy $k^2=k(k-1)+k$ görnüşde aňladalyň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} [k \cdot (k-1) + k] \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(k-2)! \cdot (k-1) \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Ikinji goşulujy (60) deňlik boýunça np ululyga deň. Onda

$$M\xi^2 = n \cdot (n-1) \cdot p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} +$$

$$+ n \cdot p = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p.$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = n \cdot (n-1)p^2 + n \cdot p - (n \cdot p)^2 =$$

$$= -n \cdot p^2 + n \cdot p = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q,$$

ýagny

$$D\xi = n \cdot p \cdot q. \triangleright \tag{61}$$

4-nji mesele. Puassonyň kanuny boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ Puassonyň kanuny boýunça paýlanan tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	0	1	…	k	…
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	…	$P_n(k)$	…

görnüşdedir, bu ýerde

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k=0, 1\ 2, ..., \quad 0<\lambda<\infty.$$

(45) formuladan peýdalanyp taparys:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)! \cdot k} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda,$$

ýagny

$$M\xi = \lambda. \tag{62}$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Ikinji goşulyjy (62) deňlige görä λ parametre deň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{(k-2)!(k-1)\cdot k}\cdot e^{-\lambda}+\lambda=$$

$$=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys:

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda,$$

ýagny

$$D\xi=\lambda. \rhd \qquad (63)$$

5-nji mesele. a we σ^2 parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\lhd$ Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

görnüşdedir. (46) formuladan peýdalanyp ýazyp bileris:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma}=y$ belgilemäni girizeliň. Bu ýerden taparys: $x=a+\sigma y$, $dx=\sigma\cdot dy.$

Onda

$$M\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(a+\sigma\cdot y)\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi} \quad \text{we} \quad \int_{-\infty}^{\infty}y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy=0$$

bolandygy sebäpli

$$M\xi = a \tag{64}$$

bolar.

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys: $x = a + \sigma y$, $dx = \sigma \cdot dy$.

$$M\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma \cdot y)^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy +$$

$$+\frac{2a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = a^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Ikinji goşulyjydaky integraly bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp hasaplalyň:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = -y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

$$\left(y = u, \quad dy = du, \quad e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right) = dv, \quad v = -e^{-\frac{y^2}{2}}\right).$$

Onda

$$M\xi^2 = a^2 + \sigma^2.$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = a^2 + \sigma^2 - a^2 = \sigma^2,$$

ýagny

$$D\xi = \sigma^2. \triangleright \tag{65}$$

6-njy mesele. $[a; b]$ kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ $[a; b]$ kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

görnüşdedir. (46) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

ýagny

$$M\xi = \frac{a+b}{2}. \tag{66}$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

ýagny

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \triangleright \tag{67}$$

7-nji mesele. Görkezijili kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

$\triangleleft$ Görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \nu \cdot e^{-\nu x}, & x > 0, \quad \nu > 0 \end{cases}$$

görnüşdedir. (46) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \nu\int_0^{\infty} xe^{-\nu \cdot x}dx = \nu \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{\nu} \cdot e^{-\nu \cdot x}\right)\Big|_0^{\infty} +$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-\nu\cdot x}dx = -\frac{1}{\nu}e^{-\nu\cdot x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\nu},$$

$$\left(x = u, \quad dx = du, \quad e^{-\nu\cdot x}dx = d\nu, \quad \nu = -\frac{1}{\nu}e^{-\nu\cdot x}\right),$$

ýagny

$$M\xi = \frac{1}{\nu}. \tag{68}$$

Indi $M\xi^2$ ikinji başlangyç momenti tapalyň:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx = \nu\int_0^{\infty} x^2e^{-\nu\cdot x}dx = \nu\cdot x^2\cdot\left(-\frac{1}{\nu}\cdot e^{-\nu\cdot x}\right)\Big|_0^{\infty} +$$

$$+2\int_0^{\infty} xe^{-\nu\cdot x}dx = 2x\left(-\frac{1}{\nu}e^{-\nu\cdot x}\right)\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\nu}\int_0^{\infty} e^{-\nu\cdot x}dx = \frac{2}{\nu^2},$$

$$\left(x^2 = u, \quad 2xdx = du, \quad e^{-\nu\cdot x}dx = d\nu, \quad \nu = -\frac{1}{\nu}e^{-\nu\cdot x}\right).$$

(52) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2},$$

ýagny

$$D\xi = \frac{1}{\nu^2}. \triangleright \tag{69}$$

§1. 9. Uly sanlar kanuny

1. Markowyň deňsizligi. Çebyşewiň deňsizligi we teoremasy. Goý, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun. Bu ululyklaryň n sanysyndan käbir $\zeta_n = g_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ funksiýa garalyň. Eger $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ hemişelik ululyklar we $\forall\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - a_n| < \varepsilon\} = 1 \tag{70}$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanuny ýerine ýetýär diýilýär.

(70) deňlige derek

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\zeta_n - a_n| \geq \varepsilon\} = 0 \tag{71}$$

deňligi hem ulanyp bolýandygyny belläliň.

Markowyň deňsizligi. Diňe otrisatel däl bahalary kabul edýän we tükenikli matematiki garaşmasy bar bolan $\forall\xi$ tötän ululyk we $\forall\varepsilon>0$ san üçin

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon} \tag{72}$$

deňsizlik dogrudyr. (72) deňsizlige Markowyň (Markow Andreý Andreýewiç, 14.06.1856–20.07.1922, rus matematigi) deňsizligi diýilýär. $\{\xi\geq\varepsilon\}$ we $\{\xi<\varepsilon\}$ wakalaryň garşylyklydygyny göz öňünde tutup, Markowyň deňsizligini

$$P\{\xi < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M\xi}{\varepsilon} \tag{73}$$

görnüşde hem ýazmak bolar.

Çebyşewiň deňsizligi. Tükenikli dispersiýa eýe bolan $\forall\xi$ tötän ululyk we $\forall\varepsilon>0$ san üçin

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \tag{74}$$

deňsizlik dogrudyr. Bu deňsizlige Çebyşewiň (Çebyşew Pafnutiý Lwowiç, 16.05.1821–08.12.1894, rus matematigi we mehanigi) deňsizligi diýilýär.

$\lhd$ Ýazyp bileris:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int\limits_{|x-M\xi|\geq\varepsilon} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x-M\xi|\geq\varepsilon} (x - M\xi)^2 dF(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \rhd$$

$\{|\xi-M\xi|\geq\varepsilon\}$ we $\{|\xi-M\xi|<\varepsilon\}$ wakalaryň garşylyklydygyny göz öňünde tutup, Çebyşewiň deňsizligini

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \tag{75}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Teorema (Çebyşew). Goý, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ şol bir hemişelik ululyk bilen çäklenen tükenikli dispersiýalary bolan jübüt-jübütden bagly däl tötän ululyklaryň yzygiderligi bolsun. Onda $\forall\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{76}$$

deňlik dogrudyr.

⊲ (75) deňsizlikden peýdalanyp alarys:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{nc}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Bu deňsizlikde $n\to\infty$ bolanda predele geçip we ähtimallygyň 1-den uly bolup bilmeýändigini göz öňünde tutup, (76) deňligiň dogrudygyna göz ýetirmek bolar. ⊳

Indi Çebyşewiň teoremasynyň hususy hallaryna garalyň.

Teorema (Bernulli). Goý, μ käbir A wakanyň bagly däl n synagda ýüze çykmalarynyň sany, p bolsa ol wakanyň synaglaryň her birinde ýüze çykmagynyň ähtimallygy bolsun. Onda

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{77}$$

deňlik dogrudyr.

⊲ A wakanyň k-njy synagda ýüze çykmalarynyň sanyny μ_k bilen belgiläliň. Onda

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n; \quad M\mu_k = 0\cdot q + 1\cdot p = p;$$

$$M\mu_k^2 = 0\cdot q + 1\cdot p = p; \quad D\mu_k = p\cdot q \leq \frac{1}{4}.$$

Görnüşi ýaly, Bernulliniň teoremasy Çebyşewiň teoremasynyň hususy halydyr. Diýmek, (77) deňlik dogrudyr. ⊳

Teorema (Puasson). Goý, μ käbir A wakanyň bagly däl n synagda ýüze çykmalarynyň sany, p_k bolsa k-njy synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy bolsun. Onda $\forall\varepsilon > 0$ üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{78}$$

deňlik dogrudyr.

◁ Ýazyp bileris:

$$\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n; \quad M\mu_k = 0 \cdot q + 1 \cdot p_k = p_k;$$

$$M\mu_k^2 = 0 \cdot q_k + 1 \cdot p_k = p_k; \quad D\mu_k = p_k \cdot q_k \le \frac{1}{4}.$$

Bu ýerde μ_k ululyk A wakanyň k-njy synagda ýüze çykmalarynyň sany. Görnüşi ýaly, Puassonyň teoremasy Çebyşewiň teoremasynyň hususy halydyr. Onda (78) deňlik dogrudyr. ▷

1-nji mesele. Kommutatora 1 sagadyň dowamynda gelýän jaňlaryň sanynyň matematiki garaşmasy 27,5-e deň. Kommutatora 1 sagadyň dowamynda geljek jaňlaryň sanynyň 55-den az bolmagynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

◁ Meseläniň şerti boýunça $M\xi = 27{,}5$, $\varepsilon = 55$. Onda Markowyň (73) deňsizliginden peýdalanyp taparys:

$$P(\xi < 55) \ge 1 - \frac{27,5}{55} = 0,5. \ ▷$$

2-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

paýlanyş kanuny bilen berlen. ξ tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 2-den az bolmagynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

◁ Ilki ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\xi = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 3.$$

Indi ξ tötän ululygyň ikinji başlangyç momentini tapalyň:

$$M\xi^2 = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}4 + 16 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}1 = 10{,}2.$$

Onda

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 10{,}2 - 9 = 1{,}2.$$

Çebyşewiň deňsizliginden peýdalanyp ýazyp bileris:

$$P(|\xi - 3| < 2) \geq 1 - \frac{1,2}{4} = 0,7. \triangleright$$

3-nji mesele. Wakanyň her bir synagda ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,85-e deň. Çebyşewiň deňsizliginden peýdalanyp, 200 synag geçirilende wakanyň ýüze çykmalarynyň sanynyň (160; 180) interwala düşmeginiň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

$\triangleleft$ A wakanyň ýüze çykmalarynyň sanynyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapalyň:

$$M\xi = np = 200 \cdot 0{,}85 = 170; \quad D\xi = npq = 200 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 25{,}5.$$

A wakanyň ýüze çykmalarynyň sany bilen matematiki garaşmanyň arasyndaky iň uly tapawut $\varepsilon = 180 - 170 = 10$ bolar. Onda Çebyşewiň deňsizliginden peýdalanyp taparys:

$$P(|\xi - 170| < 10) \geq 1 - \frac{25,5}{100} = 0,745. \triangleright$$

4-nji mesele. Goý, toplumlaýyn bagly däl ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun, şunlukda

ξ_n	$-2n$	0	$2n$
P	$\frac{1}{3n^2}$	$1-\frac{2}{3n^2}$	$\frac{1}{3n^2}$

Berlen tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanunynyň ýerine ýetýändigini anyklamaly.

$\triangleleft$ Tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanunynyň ýerine ýetmegi üçin:

1) tötän ululyklar jübüt-jübütden bagly däl bolmaly;

2) tötän ululyklaryň tükenikli matematiki garaşmalary bolmaly;

3) tötän ululyklaryň şol bir hemişelik bilen çäklenen tükenikli dispersiýalary bolmaly.

Bu şertleriň ýerine ýetýändiklerini anyklalyň.

1) Meseläniň şerti boýunça berlen tötän ululyklar toplumlaýyn bagly däl. Diýmek, olar jübüt-jübütden hem bagly däldirler.

2) ξ_n tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\xi_n = -\,2n \cdot \frac{1}{3n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{3n^2}\right) + 2n \cdot \frac{1}{3n^2} = 0.$$

3) Taparys:

$$M\xi_n^2 = 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{3n^2}\right) + 4n^2 \cdot \frac{2}{3n^2} = \frac{8}{3}.$$

Onda:

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 = \frac{8}{3}.$$

Görnüşi ýaly, üç şert hem ýerine ýetýär. Diýmek, berlen ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanuny ýerine ýetýändir. ▷

§ 1. 10. Merkezi predel teorema barada düşünje

Goý, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun we bu tötän ululyklaryň tükenikli matematiki garaşmalary we dispersiýalary bar bolsun.

$$a_k = M\xi_k, \quad b_k^2 = D\xi_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum D\xi_k$$

belgilemeleri girizeliň. ξ_k tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny $F_k(x)$ bilen belgiläliň. «ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... tötän ululyklara nähili şertler goýlanda

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k)$$

jemiň paýlanyş funksiýasy normal kanunyň paýlanyş funksiýasyna ýygnanýar?» – diýlen sowal ýüze çykýar. Bu sowalyň jogabynyň ýeterlik şerti Lindebergiň (Lindeberg Ýare Waldemar, 1876–1932, fin matematigi.) merkezi predel teorema diýlip atlandyrylýan teoremasynda getirilýär. Bu teoremanyň diňe formulirlenişini getirmek bilen çäkleneliň.

Teorema (Merkezi predel teorema). Eger tükenikli matematiki garaşmalary we dispersiýalary bolan bagly däl ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ... tötän ululyklar yzygiderligi $\forall \tau > 0$ san üçin Lindebergiň

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|\geq\tau B_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0$$

şertini kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a_k)<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

deňlik x üýtgeýäne görä deňölçegli ýerine ýetýändir. Hususy halda, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar bagly däl we birmeňzeş paýlanan hem-de tükenikli matematiki garaşmalary we dispersiýalary bolan ýagdaýynda, görnükli rus matematigi we mehanigi A. M. Lýapunowyň (Lýapunow Aleksandr Mihaýlowiç, 06.06.1857–03.11.1918) teoremasy dogrudyr.

Teorema (Lýapunow). Eger $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tükenikli a matematiki garaşmalary we σ^2 dispersiýalary bolan birmeňzeş paýlanan bagly däl tötän ululyklaryň yzygiderligi bolsa, onda $\xi=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ jemiň paýlanyş kanuny n ululygyň çäksiz artmagy bilen normal kanuna çäksiz golaýlaşýandyr.

Netije. Eger $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tötän ululyklar bu teoremanyň şertlerini kanagatlandyrýan bolsalar, onda olaryň orta arifmetiki bahasy n-iň çäksiz artmagy bilen normal kanuna çäksiz golaýlaşýandyr. Hakykatdan hem,

$$\bar{\xi}=\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}=\frac{\xi_1}{n}+\frac{\xi_2}{n}+...+\frac{\xi_n}{n}$$

goşulyjylaryň her biriniň $\frac{a}{n}$ matematiki garaşmasy we $\frac{\sigma^2}{n}$ dispersiýasy bardyr we $\frac{\xi_i}{n}$, $i=1, 2, ..., n$ ululyklar Lýapunowyň teoremasynyň şertlerini kanagatlandyrýarlar.

Gönükmeler

1. Dagyň depesine 7 ýoda eltýär.

a) Näçe usul bilen ýoda boýunça dagyň depesine çykyp we ondan düşüp bolar?

b) Bu meseläni çykan ýoluň boýunça düşüp bolmaýan ýagdaý üçin çözmeli.

2. Näçe usul bilen 6 adam kassa nobata durup biler?

3. Iki sifri hem
a) dürli bolan;
b) jübüt bolan;
ç) täk bolan, näçe sany ikibelgili san bar?

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar?

5. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany 3-e bölünýän üçbelgili san düzmek bolar?

6. 1, 2, 3, 4, 5 sanlaryň hersini bir gezek ulanyp, olardan näçe sany üçbelgili san düzmek bolar?

7. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany dörtbelgili san düzmek bolar?

8. 5-e bölünýän näçe sany bäşbelgili san bar?

9. Hemme sifrleri täk bolan näçe sany bäşbelgili san bar?

10. Çepden saga we sagdan çepe birmeňzeş okalýan näçe sany bäşbelgili san bar?

11. Synpda 10 ders öwrenilýär. Duşenbede 6 sany dürli sapak okalýar. Näçe usul bilen duşenbede okaljak sapaklaryň tertibini düzmek bolar?

12. Näçe usul bilen 25 talypdan 3 talyby saýlap almak bolar?

13. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sifrlerden dürli 3 sifri näçe usul bilen ýerleşdirmek bolar?

14. Hiç bir üçüsi bir gönüde ýatmaýan n nokat berlen. Nokatlary jübüt-jübütden birikdirip, näçe göni geçirmek bolar?

15. Oýnalýan kub iki gezek oklanýar. Jemde 10 oçkonyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

16. Oýnalýan kub iki gezek oklanýar. Köpeltmek hasyly 5-e deň bolan oçkolaryň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

17. Oýnalýan kub iki gezek oklanýar. Düşen oçkolaryň tapawudynyň absolýut ululygynyň 2-ä deň bolmagynyň ähtimallygy näçä deň?

18. Şowuna alnan telefon belgisi bäş sifrden ybarat. Bu sifrleriň hemmesiniň

a) dürli bolmagynyň;

b) täk bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

19. Oýnalýan kub 3 gezek oklanýar. Jemi 5-e bölünýän sany emele getirýän oçkolaryň ýüze çykmaklygynyň ähtimallygyny tapmaly.

20. Gapda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sanlar bilen belgilenen birmeňzeş 6 şar bar. Bu şarlar gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylýar. Şarlaryň belgileriniň kemelýän tertipde çykarylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

21. Gapda her birine M, M, A, A, A, T, T, E, I, K harplaryň biri ýazylan 10 tagtajyk bar. Bu tagtajyklar gapdan şowuna ýeke-ýekeden çykarylýar we çepden saga yzygider goýulýar. «MATEMATIKA» sözüniň ýazylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

22. Talyplar toparynda 20 talyp bar. Olaryň 12-si tapawutly okaýan talyplar. Şowuna 9 talyp alynýar. Alnan talyplaryň 5-isiniň tapawutly talyp bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

23. Şowuna alnan ýylyň ýanwar aýynda dört dynç gününiň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

24. 10 adamyň arasynda iki dogan bar. Bu 10 adam oturgyçda şowuna oturýar. Iki doganyň ýanaşyk oturmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

25. Abonent telefon belgisini alanda soňky üç sifri ýadyna düşenok. Ol sifrleriň dürlüdiklerini bilip, şowuna üç sifri alýar. Gerekli telefon belgisiniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

26. *R* radiusly uly tegelegiň içinden *r* radiusly kiçi tegelek çyzylan. Uly tegelege şowuna oklanan nokadyň kiçi tegelege düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

27. R radiusly tegelegiň içinden dogry üçburçluk çyzylan. Tegelege şowuna oklanan nokadyň bu üçburçluga düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

28. Iki adam sagat 12.00 bilen 13.00 aralygynda belleşilen ýerde duşuşmagy şertleşýär. Birinji gelen adam beýlekä α ($\alpha<60$) minudyň dowamynda garaşmaly we eger ikinji adam gelmese gaýtmaly. Eger olaryň belleşilen wagt aralygynda belleşilen ýere gelmekleri tötän we bagly däl bolsa, ol iki adamyň duşuşmaklygynyň ähtimallygyny tapmaly.

29. Dükana getirilen sport geýimleriniň 50%-i ak, 20%-i gyzyl, 20%-i ýaşyl we 10%-i gök reňkli. Şowuna alnan sport geýiminiň ýaşyl ýa-da gök reňkli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

30. Atyjynyň bir gezek nyşana atanda 10 oçko almagynyň ähtimallygy 0,4-e deň, 9 oçko almagynyň ähtimallygy 0,3-e deň, 8 we ondan az oçko almagynyň ähtimallygy 0,3-e deň. Atyjynyň bir gezek atanda 9-dan az bolmadyk oçko almagynyň ähtimallygyny tapmaly.

31. Talyp gerekli formulany üç kitapdan gözleýär. Formulanyň birinji, ikinji, üçünji kitapda bolmagynyň ähtimallyklary degişlilikde 0,6-a, 0,7-ä, 0,8-e deň. Gözlenýän formulanyň

a) diňe bir kitapda;

b) diňe iki kitapda;

ç) üç kitapda hem bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

32. Käbir ýerde iýul aýynda ortaça alty gün ygally howa bolýar. Iýul aýynyň başky iki gününde açyk howanyň bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

33. Abonent telefon belgisiniň iň soňky sifrini ýadyndan çykarypdyr. Ol şowuna bir sifri alýar. Abonentiň ikiden köp bolmadyk gezek şowsuz synanyşyk etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

34. Talyp maksatnamanyň 25 soragynyň 20-sini bilýär. Talybyň synagçy tarapyndan şowuna berlen 3 soragyň 2-den az däl sanysyna jogap bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

35. Dükana getirilen joraplaryň 60%-i birinji fabrigiň, 25%-i ikinji fabrigiň, 15%-i üçünji fabrigiň önümleri. Şowuna alnan jorabyň birinji ýa-da üçünji fabrigiň öndüren önümi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

36. Hünär tejribeligini geçmeli 30 talybyň 15-si şäheriň 48-nji mekdebine, 8-si 51-nji mekdebine, 7-si bolsa 52-nji mekdebine ugradyldy.Kesgitli iki talybyň şol bir mekdebe düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

37. 1000 lotereýa biletiniň 24-si pul utuşly we 10-sy haryt utuşly. Şowuna alnan 2 biletiň

a) iň bolmanda biriniň utuşly bolmagynyň;

b) birinji biletiň pul utuşly, ikinji biletiň bolsa haryt utuşly bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

38. Bir günüň dowamynda işleýän abzal bu wagtyň dowamynda biri-birine bagly bolman hatardan çykyp bilýän 3 bölekden ybarat. Iň bolmanda bir bölegiň hatardan çykmagy tutuş abzalyň hatardan çykmagyna getirýär. Bir günüň dowamynda birinji bölegiň döwülmän işlemekliginiň ähtimallygy 0,9-a deň. Ikinji we üçünji bölekler üçin bu ähtimallyklar degişlilikde 0,95-e we 0,85-e deň. Günüň dowamynda abzalyň hatardan çykman işlemeginiň ähtimallygyny tapmaly.

39. Toplumda 3 zawodyň önümi bar. Birinji zawodyň önümleriniň 0,3%-i zaýa. Ikinji we üçünji zawodlar üçin bu görkezijiler degişlilikde, 0,2%-e we 0,4%-e deň. Eger toplumda birinji zawodyň 1000 önümi, ikinji zawodyň 2000 önümi, üçünji zawodyň 2500 önümi bar bolsa, bu topluma zaýa önümiň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

40. Işçi bir kysymly önümler işlenip taýýarlanýan 3 abzala hyzmat edýär. Birinji abzalyň zaýa önüm öndürmeginiň ähtimallygy 0,02-ä deň. Ikinji we üçünji abzallar üçin bu ähtimallyklar degişlilikde, 0,03-e we 0,04-e deň. Işläp taýýarlanylan önümler bir gaba salynýarlar. Birinji abzalyň öndürijiligi ikinji abzalyňkydan üç esse köp, üçünji abzalyň öndürijiligi bolsa, ikinji abzalyňkydan iki esse az. Şowuna alnan önümiň zaýa bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

41. Içinde n sany şar bolan gaba 1 ak şar salynýar. Soňra bu gapdan şowuna 1 şar çykarylýar. Eger gapdaky şarlaryň başky düzüminiň reňki baradaky aýdylýan ähli mümkin bolan güman etmeler deňmümkinçilikli bolsalar, onda bu gapdan şowuna çykarylan şaryň ak bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

42. Önümleriň toplumynda 3 fabrigiň önümi bar. Olaryň 20%-i birinji fabrigiň, 46%-i ikinji fabrigiň, 34%-i bolsa üçünji fabrigiň önümleri. Birinji fabrigiň önümleriniň ortaça 3%-i zaýa, ikinji fabrigiň önümleriniň 2%-i zaýa, üçünji fabrigiň önümleriniň 1%-i zaýa. Eger şowuna alnan önüm zaýa bolsa, onuň birinji fabrige degişli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

43. 10 gabyň dokuzysynda 2 ak we 2 gara şar bar, birinde bolsa 5 ak we 1 gara şar bar. Şowuna alnan gapdan şowuna alnan şaryň akdygy belli bolsa, onuň 5 ak şarly gapdan alnan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

44. Iki awçy nyşana bir wagtda atýar. Birinji atyjynyň nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,2-ä deň. Ikinji atyjy üçin bu ähtimallyk 0,6-a deň. Birinji bilelikde atyşdan soň bir atyjynyň nyşanany urandygy belli boldy. Birinji atyjynyň nyşanany urandygynyň ähtimallygy näçä deň?

45. Tokaýda azaşan adam açyk meýdana çykdy. Ol ýerden gaýdýan 5 ýol tokaýdan çykarýar. Ol ýollar bilen ýörelende 1 sagatda tokaýdan çykmaklygyň ähtimallygy degişlilikde 0,6-a, 0,3-e, 0,2-ä, 0,1-e, 0,1-e deň. Eger azaşan adam tokaýdan çykan bolsa, onuň birinji ýol bilen gaýdandygynyň ähtimallygy näçä deň?

46. Talyplaryň gurluşyk toparynda birinji ýyl talyplarynyň 2 topary, ikinji ýyl talyplarynyň 1 topary bar. Birinji ýyl talyplarynyň her toparynda 5 oglan we 3 gyz bar, ikinji ýyl talyplarynyň her toparynda 4 oglan we 4 gyz bar. Şähere ugratmak üçin şowuna alnan topardan şowuna alnan talybyň oglandygy belli bolsa, onuň birinji ýyl talyby bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

47. Synaga gelen 20 talybyň 8-si tapawutly, 6-sy ýagşy, 4-si kanagatlanarly, 2-si kanagatlanarsyz taýýarlanan. Synag sowalnamalarynda 40 sowal bar. Tapawutly taýýarlanan talyp hemme sowallary, ýagşy taýýarlanan 35 sowaly, kanagatlanarly taýýarlanan 25 sowaly, kanagatlanarsyz taýýarlanan 10 sowaly bilýär. Şowuna alnan talyp synagçy tarapyndan hödürlenen 3 sowala jogap berdi. Onuň

a) ýagşy taýýarlanan;

b) kanagatlanarsyz taýýarlanan talyp bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

48. Iki gabyň birinjisinde 3 ak we 4 gara şar bar, ikinjisinde bolsa, 2 ak we 3 gara şar bar. Birinji gapdan ikinji gaba şowuna 2 şar geçirilýär. Soňra ikinji gapdan şowuna 1 şar alynýar. Eger bu şaryň akdygy belli bolsa, birinji gapdan ikinji gaba geçirilen 2 şaryň reňk boýunça haýsy düzümde bolmagy has ähtimal?

49. Eger 1 gezek atanda atyjynyň nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,6-a deň bolsa, 5 gezek atanda atyjynyň nyşanany:

a) 2 gezek;

b) 2-den az gezek;

ç) 2-den az bolmadyk gezek;

d) iň bolmanda 1 gezek urmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

50. Oýnalýan kub 4 gezek oklanýar. 3-e bölünýän oçkonyň 3-den az bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

51. Nyşana kesişmeýän üç zolakdan ybarat. Atyjynyň bir gezek atanda birinji zolaga degmeginiň ähtimallygy 0,5-e deň. Ikinji we üçünji zolaklar üçin bu ähtimallyklar degişlilikde 0,3-e we 0,2-ä deň. Atyjy nyşana 10 gezek atanda 2 okuň birinji, 3 okuň ikinji, 5 okuň üçünji zolaga degmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

52. Oýnalýan kub 6 gezek oklanýar. 3 gezek täk oçkonyň, 2 gezek 6-lyk oçkonyň, 1gezek 2-lik ýa-da 4-lik oçkonyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

53. Alyja 42-nji razmerli köwşüň gerek bolmagynyň ähtimallygy 0,2-ä deň. 100 alyjynyň 25-isine 42-nji razmerli köwşüň gerek bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

54. Eger oglanyň dogulmagynyň ähtimallygy 0,51-e deň bolsa, onda täze doglan 200 çaganyň 100-isiniň oglan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

55. Tohumyň gögermeginiň ähtimallygy 0,80-e deň. Mellege sepilen 500 tohumyň 420-den 450-ä çenlisiniň gögermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

56. Bagly däl 25 synagyň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. *A* wakanyň synaglaryň köpüsinde ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

57. Kitabyň sahypasynda ýalňyşlygyň goýberilen bolmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. 500 sahypaly kitapda ýalňyşly sahypalaryň sanynyň:

a) 3;

b) 3-den az;

ç) 3-den az däl;

d) iň bolmanda 1 bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

58. Kinoteatra 730 tomaşaçy geldi. Bu tomaşaçylaryň:

a) 4-isiniň;

b) 4-den az sanysynyň;

ç) 4-den köp sanysynyň doglan günleriniň gabat gelmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

59. Oýnalýan kub 500 gezek oklanýar. 4-lik oçkonyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň bu wakanyň bir synagdaky ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,01-den kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

60. Wakanyň bagly däl synaglaryň her birinde ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,2-ä deň. Wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyndan gyşarmasynyň absolýut ululygynyň 0,04-den uly bolmazlygynyň ähtimallygynyň 0,9544-e deň bolmagy üçin näçe synag geçirmeli bolar?

61. Mellekdäki gawunlaryň 15%-ni mör-möjek zaýalapdyr. Şowuna alnan 20 gawunyň arasynda zaýalananlarynyň iň ähtimal sanyny tapmaly.

62. Bagly däl n synagyň her birinde käbir wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,7-ä deň. Bu wakanyň ýüze çykmalarynyň iň ähtimal sanynyň 20-ä deň bolmagy üçin näçe synag geçirmeli?

63. Teňňe 2 gezek oklanýar.

a) Sifriň ýüze çykmalarynyň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly;

b) Bu tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

64. Oýnalýan kub 3 gezek oklanýar.

a) 3-e bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly;

b) Bu tötän ululygyň $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

65. Synagçy talyba goşmaça soraglar berýär. Talybyň berlen islendik soraga jogap bermeginiň ähtimallygy 0,7-ä deň. Eger talyp berlen soraga jogap berip bilmese, synagçy oňa sorag bermegini bes edýär. Talyba berlip bilinjek soraglaryň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

66. Atyjynyň 1 gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyja tä atan oky nyşanadan sowa geçýänçä ok berilýär. Atyja berlip bilinjek oklaryň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

67. X tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{1 + x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

görnüşde berlen. X tötän ululygyň $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny tapmaly.

68. Üznüksiz X tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x - 2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen.

a) X tötän ululugyň $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny tapmaly;

b) X tötän ululygyň [2,24; 2,5) çepi ýapyk interwaldan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

69. Üznüksiz X tötän ululyk

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3+Cx, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen.

a) C parametriň bahasyny tapmaly;

b) $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny tapmaly;

ç) X tötän ululygyň $\left(\frac{1}{2};2\right)$ interwaldan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

70. Üznüksiz X tötän ululyk

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{\pi}{4},\\ 2\sin 2x, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy bilen berlen. Bu tötän ululygyň $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

71. R radiusly tegelegiň içine nokat oklanýar. Nokadyň düşen ýerinden tegelegiň merkezine çenli aralygyň $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny we $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny tapmaly.

72. X tötän ululyk

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Bagly däl 3 synagda X tötän ululygyň (0,30; 0,80) interwaldan 2 gezek baha kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

73. Goý, X diskret tötän ululyk $x_1=1$ bahany $p_1=0{,}5$ ähtimallyk bilen, $x_2=3$ bahany $p_2=0{,}4$ ähtimallyk bilen, x_3 bahany bolsa p_3 ähtimallyk bilen kabul edýän bolsun. Eger $MX=2{,}2$ bolsa, x_3 bahany we onuň degişli p_3 ähtimallygyny tapmaly.

74. Goý, diskret X tötän ululyk $x_1=0{,}2$, $x_2=0{,}4$, $x_3=0{,}5$ bahalary degişlilikde p_1, p_2, p_3 ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsun. Eger $MX=0{,}36$ we $MX^2=0{,}142$ bolsa, p_1, p_2, p_3 ähtimallyklary tapmaly.

75. Diskret X tötän ululyk

X	–1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

paýlanyş kanuny bilen berlen bolsun. X we $Y=3X^2-1$ tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

76. 5 açaryň diňe biri gulpy açýar. Bu açarlaryň her biri diňe bir gezek synanylýar diýip hasap edip, gulpy açmak üçin edilip bilinjek synanyşyklaryň sanynyň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

77. Standart önümiň taýýarlanmagynyň ähtimallygy 0,96-a deň. Barlag üçin şowuna 100 önüm alynýar. Bu alnan önümleriň arasyndaky standart däl önümleriň sanynyň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

78. Üznüksiz X tötän ululygyň

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ C\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy berlen.

a) C parametriň bahasyny tapmaly;

b) X tötän ululygyň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

79. Üznüksiz X tötän ululygyň

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ae^{-ax}, & x\ge 0,\ a>0\end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy berlen. X we $Y=2X^2+3$ tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

80. Käbir önüm sistematik ýalňyşlyk goýberilmän çekilýär. Çekmegiň X tötän ýalňyşlyklary $\sigma=25$ orta kwadratik gyşarmaly normal kanun boýunça paýlanan. Absolýut ululygy boýunça 5 g-dan uly bolmadyk ýalňyşlyk bilen çekmegiň ähtimallygyny tapmaly.

81. Eger toprakdaky döküniň mukdary [1,6; 3,8] kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan X tötän ululyk bolsa, onuň

a) $F(x)$ paýlanyş funksiýasyny tapmaly;

b) $f(x)$ dykyzlyk funksiýasyny tapmaly;

ç) san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

82. X tötän ululygyň

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \dfrac{(x-1)^2(4-x)}{4}, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy berlen. Bu tötän ululygyň san häsiýetlendirijilerini tapmaly.

83. Önümiň ortaça agramy 50 *g*. Şowuna alnan önümiň agramynyň 90 *g*-dan az bolmagynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

84. Ýer üstüniň käbir ýerinde ýeliň ortaça tizligi 20 *m/sek*. Bu ýerde bir gezek gözegçilik edilende ýeliň tizliginiň 80 *m/sek*-dan az bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

85. Käbir ýerde bir ýyldaky açyk howaly günleriň sany matematiki garaşmasy 75 güne deň bolan tötän ululyk bolsa, indiki ýylda bu ýerde açyk howaly günleriň sanynyň 150-den az bolmagynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

86. Gyş döwründe otagyň ortaça temperaturasy 20ºC, orta kwadratik gyşarmasy bolsa 2ºC-*a* deň. Otagdaky temperaturanyň orta bahadan absolýut ululygy boýunça 4ºC-dan az gyşarmasynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

87. Sehde taýýarlanylýan tagtajyklaryň uzynlygy matematiki garaşmasy 90 *sm*, dispersiýasy bolsa 0,0225 *sm* bolan tötän ululykdyr.

a) Taýýarlanan tagtajygyň uzynlygynyň onuň orta bahasyndan gyşarmasynyň absolýut ululygy boýunça 0,4 *sm*-den az bolmagynyň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

b) Tagtajygyň uzynlygynyň (89,7 *sm*; 90,3 *sm*) interwala düşmeginiň ähtimallygyny bahalandyrmaly.

88. Goý, toplumlaýyn bagly däl $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun. Eger

a)

ξ_n	$-n^2$	0	n^2
P	2^{-n}	$1-2^{1-n}$	2^{-n}

b) $\alpha > 1$ üçin

ξ_n	$-n^\alpha$	0	n^α
P	α^{-n}	$1-2\alpha^{-n}$	α^{-n}

bolsa, berlen tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanunynyň ýerine ýetýändigini anyklamaly.

89. Goý, toplumlaýyn bagly däl $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tötän ululyklar yzygiderligi berlen bolsun. Eger

ξ_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$1/n$	$1-2/n$	$1/n$

bolsa, berlen tötän ululyklar yzygiderligi üçin uly sanlar kanuny ýerine ýetýärmi?

Jogaplar

1. a) 49; b) 42. **2.** 720. **3.** a) 81; b) 20; ç) 25. **4.** 180. **5.** 60. **6.** 60. **7.** 1080. **8.** 18000. **9.** 5^5. **10.** 900. **11.** 151200. **12.** 2300. **13.** 720. **14.** $n\cdot(n-1)/2$. **15.** 1/12. **16.** 0,0556. **17.** 0,2222. **18.** a) 0,3024; b) 0,03125. **19.** 43/216. **20.** 1/720. **21.** 1/151200. **22.** 0,33. **23.** $\frac{4}{7}$. **24.** 0,2. **25.** $\frac{1}{720}$. **26.** $\frac{r^2}{R^2}$. **27.** $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **28.** $\frac{60^2-(60-\alpha)^2}{60^2}$. **29.** 0,3. **30.** 0,7. **31.** a) 0,188; b) 0,452; ç) 0,336; **32.** $\frac{20}{31}$. **33.** 0,3. **34.** $\frac{209}{345}$. **35.** 0,75. **36.** 0,331. **37.** a) 0,064; b) 0,00024. **38.** 0,727. **39.** 0,0031. **40.** 0,024. **41.** $\frac{n+2}{2(n+1)}$. **42.** 0,322. **43.** 0,156. **44.** $\frac{6}{7}$. **45.** $\frac{6}{13}$. **46.** $\frac{5}{7}$. **47.** a) 0,307; b) 0,002. **48.** Bir ak, bir gara.

49. a) 0,2304; b) 0,08704; ç) 0,91296; d) 0,98976. **50.** 1/9. **51.** 0,0054432. **52.** 5/72. **53.** 0,04565. **54.** 0,0542574. **55.** 0,0125. **56.** 0,9935. **57.** a) 0,06; b) 0,919; ç) 0,081; d) 0,6324. **58.** a) 0,09; b) 0,8560; ç) 0,054. **59.** 0,4514.

60. 400. **61.** 3. **62.** $28 \le n \le 29$. **63.** a)

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1/4, & 0 < x \le 1, \\ 3/4, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

64. a)

X	0	1	2	3
P	8/27	4/9	2/9	1/27

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 8/27, & 0 < x \le 1, \\ 20/27, & 1 < x \le 2, \\ 26/27, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

65.

X	1	2	3	...	k	...
P	0,3	$0,7 \cdot 0,3$	$0,7^2 \cdot 0,3$	...	$0,7^{k-1} \cdot 0,3$	...

66.

X	1	2	3	...	k	...
P	0,2	$0,8 \cdot 0,2$	$0,8^2 \cdot 0,2$	...	$0,8^{k-1} \cdot 0,2$	...

67. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, & x > 0. \end{cases}$

68. a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 2(x-2), & 2 < x \le 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases}$ b) $P(2{,}24 < X < 2{,}5) = 0{,}1924$.

69. a) $C=0$; b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2, & x < x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$ ç) $P(1/2 < X < 2) = F(2) - F(1/2) =$ $= 0{,}4772 - 0{,}1915 = 0{,}2857$. **70.** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/4, \\ -\cos 2x, & \pi/4 < x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

71. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/R^2, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \ge 0, \\ 2x/R^2, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$

72. $\begin{cases} p = P(0,30 < X < 0,80) = 0,55. \\ P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,55^2 \cdot 0,45 \approx 0,41. \end{cases}$ **73.** $p_3 = 0{,}1$; $x_3 = 5$. **74.** $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}2$. **75.** $MX = 1$; $DX = 1{,}2$; $\sigma_X \approx 1{,}095$; $MY = 5{,}6$; $DY = 62{,}64$; $\sigma_Y \approx 7{,}91$. **76.** $MX = 3$; $DX = 2$; $\sigma_X \approx 1{,}4$. **77.** $MX = 4$; $DX = 3{,}84$; $\sigma_X \approx 1{,}96$. **78.** a) $C = 0{,}5$; b) $MX = \pi/2$; $DX = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$; $\sigma_X = \dfrac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$. **79.** $MX = \dfrac{1}{a}$;

$DX = \frac{1}{a^2}$; $\sigma_X = \frac{1}{a}$; $MY = \frac{3a^2+4}{a^2}$; $DY = \frac{80}{a^4}$; $\sigma_Y \approx \frac{8,94}{a^2}$. **80.** $P(|X|\leq 5)\approx$ $\approx 0,16$. **81.** a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1,6, \\ \frac{x-1,6}{2,2}, & 1,6 < x \leq 3,8, \\ 1, & x > 3,8; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1,6, \\ \frac{1}{2,2}, & 1,6 < x \leq 3,8, \\ 0, & x > 3,8; \end{cases}$ ç) $MX=2,7$; $DX\approx 0,4$; $\sigma_X\approx 0,63$.

82. $MX=2$; $DX\approx 0,2$; $\sigma_X\approx 0,45$. **83.** $P(\xi < 90) \geq \frac{4}{9}$. **84.** $P(\xi<80)\geq 0,75$.

85. $P(\xi<150)\geq 0,5$. **86.** $P(|\xi-20|<4)\geq 0,75$. **87.** a) $P(|\xi-90|<0,4)\geq 0,85$; b) $P(89,7<\xi<90,3)\geq 0,75$. **88.** a) Ýerine ýetýär; b) Ýerine ýetýär. **89.** Hawa.

IV. 2. MATEMATIKI STATISTIKANYŇ ELEMENTLERI

§ 2. 1. Tötän saýlama we onuň paýlanyş kanuny

1. Baş we saýlama toplumlar. Matematiki statistika XVII asyryň başynda döreýär we ähtimallyklar nazaryýeti bilen bilelikde giň gerim bilen ösýär. Statistika adalgasy latyn «status» (ýagdaý) sözünden gelip çykýar.

Matematiki statistikada esasan iki meselä garalýar:

1) Gözegçilikler netijesinde statistiki maglumatlary toplamak we olary toparlamaklygyň usullaryny görkezmek.

2) Ylmy we amaly netijeleri almak üçin toplanan statistiki maglumatlary maksadalaýyk derňemekligiň usullaryny işläp düzmek.

Matematiki statistikanyň başlangyç düşünjeleri hökmünde baş we saýlama toplumlar düşünjelerine garalýar. Birjynsly elementleriň köplügi baş toplum diýlip atlandyrylýar. Bu toplum haýsy hem bolsa bir hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenilýär. Baş toplumyň hemme elementlerini ýeke-ýekeden öwrenmeklik wagtyň we serişdeleriň köp sarp edilmegi bilen baglanyşyklydyr. Şol sebäpli, baş toplumdan elementleriň bölek köplügini şowuna saýlap alýarlar we gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenýärler. Bu bölek köplüge saýlama diýilýär.

Toplumyň elementleriniň sanyna toplumyň göwrümi diýilýär.

Saýlama geçirilende dürli saýlap alyş usullary ulanylýar.

1) Mehaniki saýlap alyş usuly. Bu usulda baş toplum birnäçe bölek toplumlara mehaniki bölünýär we her bölek toplumdan bir element şowuna saýlanyp alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, öndürilen N önümiň 20%-ni saýlap almaly bolsa, onda önümleriň hemmesiniň köplügini $\frac{N}{5}$ bölege bölmeli we her bölekden bir elementi şowuna alyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenmeli.

2) Kysmy saýlap alyş usuly. Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden şowuna bir element alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, köwüş fabriginiň öndürýän köwüşlerini pasyllaýyn görnüşleri we ölçegleri boýunça birnäçe kysmy böleklere bölýärler we her bölekden şowuna bir jübüt köwüş alyp, hil ya-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

3) Tapgyrlaýyn saýlap alyş usuly. Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden elementleriň tapgyry şowuna alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, çörek öndürýän kärhananyň her tamdyrynda bişirilýän çörekleri görnüşleri we ölçegleri boýunça kysmy böleklere bölýärler we her bölekden çörekleriň tapgyryny şowuna saýlap alyp, hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

Amalyýetde bu usullary utgaşdyryp ulanýarlar.

Eger baş toplumdan alnan element gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilip, ýene-de baş topluma gaýtarylsa, onda şeýle saýlama gaýtalanýan diýilýär. Eger element baş topluma gaýtarylmasa, onda şeýle saýlama gaýtalanmaýan diýilýär.

Haýsy saýlap alyş usulynyň ulanylýandygyna garamazdan, öwrenilýän nyşan barada dogry netijeleri çykarmaklyga mümkinçilik bermegi üçin, saýlamanyň wekilçilikli (reprezentatiw) bolmagy gerekdir.

2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy. Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşan tötän ululykdyr, sebäbi şol bir göwrümli dürli saýlamalarda ol öňden belli bolmadyk dürli bahalary kabul edýär.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilen bolsun we bu saýlamada x_1 baha n_1 gezek, x_2 baha n_2 gezek, we ş.m. x_k baha n_k gezek duş gelýän bolsun. Nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, ..., x_k$ bahalaryna wariantalar diýilýär. Wariantalaryň artýan tertipde ýazylan yzygiderligine wariasiýa hatary diýilýar. Wariantalaryň gözegçilik edilýän $n_1, n_2, ..., n_k$ sanlaryna bu wariantalaryň degişli ýygylyklary diýilýär. Hemme ýygylyklaryň jemi saýlamanyň göwrümine deňdir, ýagny $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Wariantalar bilen olaryň degişli ýygylyklarynyň sanawyna ýygylygyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy tablisa we grafik görnüşde berilýär. Tablisa görnüşde ol

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

ýaly berilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny grafiki bermeklik üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Abssissalar okunda $x_1, x_2, ..., x_k$ wariantalary, ordinatalar okunda bolsa $n_1, n_2, ..., n_k$ ýygylyklary bellemeli. Soňra (x_i, n_i), $i=\overline{1, k}$, nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli. Emele gelen döwük çyzyk ýygylygyň statistiki paýlanyşynyň grafiki berlişidir. Bu döwük çyzyga ýygylygyň poligony diýilýär. «Poligonos» grek sözi bolup, köpburçluk diýlen manyny berýär.

$$W_i = \frac{n_i}{n} \tag{1}$$

gatnaşyga x_i wariantanyň otnositel ýygylygy diýilýär, bu ýerde n_i ululyk x_i wariantanyň ýygylygy, n-saýlamanyň göwrümi. Wariantalar bilen degişli otnositel ýygylyklaryň sanawyna otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşy diýilýär. Bu paýlanyş tablisa we grafik görnüşinde berilýär. Ýygylygyň we otnositel ýygylygyň paýlanyşyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy diýilýär.

Eger baş toplum üznüksiz nyşana görä öwrenilýän bolsa, onda bu nyşanyň kabul edýän bahalarynyň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir h uzynlykly bölek interwallara bölýärler. Her bir bölek interwalyň ýygylygy hökmünde bu bölek interwala düşen wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alýarlar we gistogramma diýlip atlandyrylýan figurany gurýarlar.

Kesgitleme. Ýygylygyň (otnositel ýygylygyň) gistogrammasy diýlip, esaslary bölek interwallaryň h uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, $\frac{n_i}{h}$ $\left(\frac{W_i}{h}\right)$, $i=\overline{1,\ n}$, gatnaşyklara deň bolan gönüburçluklardan ybarat basgançakly figura aýdylýar.

Ýygylygyň (otnositel ýygylygyň) gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny gurmaly. Abssissalar okunda h uzynlykly bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa $\frac{n_i}{h}$ $\left(\frac{W_i}{h}\right)$ ululyklary bellemeli we esaslary h ululyga deň, beýiklikleri bolsa $\frac{n_i}{h}$ $\left(\frac{W_i}{h}\right)$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary gurmaly.

3. Empirik paýlanyş funksiýasy.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \tag{2}$$

funksiýa empirik paýlanyş funksiýasy diýilýär, bu ýerde n_x $(0 \leq n_x \leq n)$ üýtgeýän hakyky x $(-\infty < x < \infty)$ ululykdan kiçi wariantalaryň sany, n-saýlamanyň göwrümi. Empirik paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) Empirik paýlanyş funksiýasynyň bahalar oblasty $[0;\ 1]$ kesimdir, ýagny, $0 \leq F^*(x) \leq 1$ deňsizlikler dogrudyr.

2) Empirik paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny bu funksiýanyň kesgitleniş oblastyna degişli we $x_1 < x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik x_1 we x_2 bahalar üçin $F^*(x_1) \leq F^*(x_2)$ deňsizlik dogrudyr.

3) Eger x_1 iň kiçi warianta bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň $x \leq x_1$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x) = 0$ bo-

lar. Eger x_k iň uly warianta bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň $x > x_k$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x) = 1$ bolar.

1-nji mesele. Baş toplumdan $n = 20$ göwrümli saýlama geçirilýär:

2, 8, 5, 3, 3, 5, 2, 3, 8, 5, 3, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 5, 2, 3.

a) Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny tablisa görnüşinde ýazmaly.

b) Ýygylygyň poligonyny gurmaly.

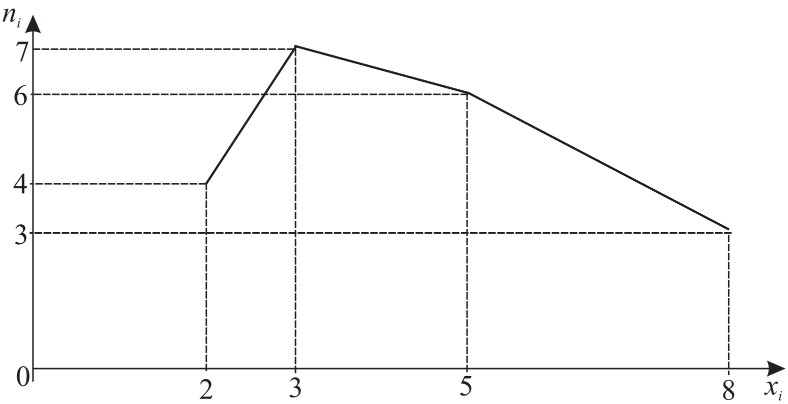
ç) Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.

d) Otnositel ýygylygyň poligonyny gurmaly.

◁ a) Saýlamadan görnüşi ýaly, 2-lik warianta 4 gezek, 3-lik warianta 7 gezek, 5-lik warianta 6 gezek, 8-lik warianta 3 gezek duş gelýär. Onda

x_i	2	3	5	8
n_i	4	7	6	3

b) Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny guralyň. Abssissalar okunda 2, 3, 5, 8 wariantalary, ordinatalar okunda bolsa 4, 7, 6, 3 ýygylyklary belläliň. Soňra (2; 4), (3; 7), (5; 6), (8;3) nokatlary guralyň we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdireliň (*1-nji surat*).



1-nji surat. Ýygylygyň poligony

ç) $n_1 = 4$, $n_2 = 7$, $n_3 = 6$, $n_4 = 3$ we $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 20$ bolandygy sebäpli

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{20} - 0,2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{7}{20} - 0,35,$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{20} - 0,3, \quad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} - 0,15.$$

Onda

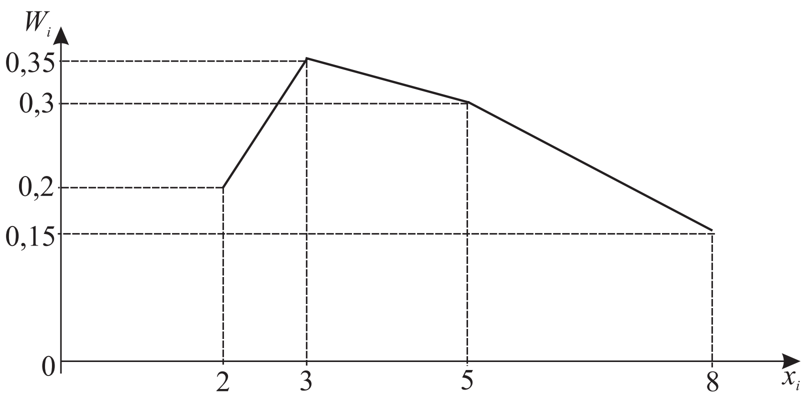
x_i	2	3	5	8
W_i	0,2	0,35	0,3	0,15

▷

Bellik. $\sum\limits_{i=1}^{k} W_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = \frac{n}{n} = 1$

deňlikden peýdalanyp, otnositel ýygylyklaryň bahalarynyň dogry tapylandygyna göz ýetirmek bolar.

d) b) punktdaka meňzeş gurluşlary ulanyp alarys (*2-nji surat*).



2-nji surat. Otnositel ýygylygyň poligony

2-nji mesele. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy berlen:

x_i	1	6	7
n_i	5	3	2

Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

◁ Bütin san okuny 1; 6; 7 nokatlar bilen, kesişmeýän dört bölege böleliň we x üýtgeýän ululygyň her bölekdäki bahalaryna aýry-aýrylykda garalyň.

Goý, $-\infty < x \leq 1$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi warianta ýokdur. Şol sebäpli $n_x = 0$ bolar. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{10} = 0.$$

Goý, $1 < x \leq 6$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik warianta bar we ol 5 gezek duş gelýär, ýagny $n_x = 5$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Goý, $6 < x \leq 7$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik we 6-lyk wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5 we 3 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 8$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

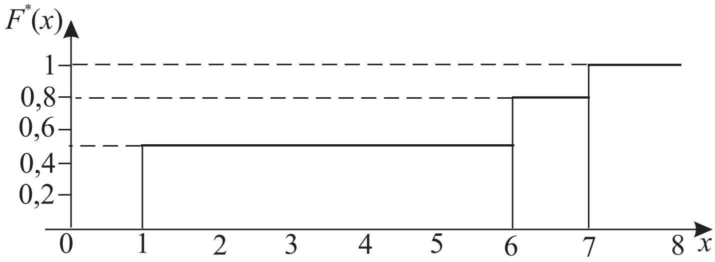
Goý, $7 < x < \infty$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik, 6-lyk we 7-lik wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5, 3 we 2 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 10$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{10}{10} = 1.$$

Şeýlelikde,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0{,}5, & 1 < x \leq 6, \\ 0{,}8, & 6 < x \leq 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

$F^*(x)$ empirik paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň (*3-nji surat*).



3-nji surat.

Suratdan görnüşi ýaly, empirik paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr. ▷

3-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen

Interwalyň belgisi i	**Bölek interwal $x_i - x_{i+1}$**	**Bölek interwalyň ýygylygy n_i**	**Ýygylygyň dykyzlygy $\frac{n_i}{h}$**
1	2-4	6	3
2	4-6	12	6
3	6-8	3	1,5
4	8-10	9	4,5

a) Ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.

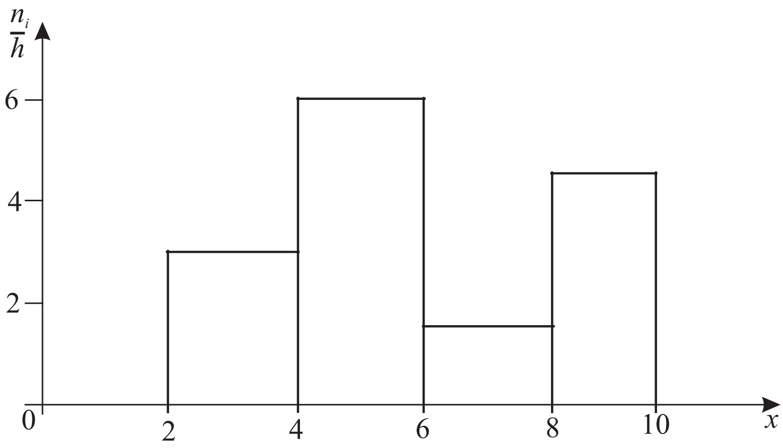
b) Otnositel ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.

◁ a) Tablisadan görnüşi ýaly, saýlamanyň göwrümi $n=6+12+$ $+3+9=30$. Bölek interwallaryň uzynlyklary $h=2$. Ýygylygyň gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly koordinatalar sistemasyny guralyň. Abssissalar okunda (2; 4), (4; 6), (6; 8), (8; 10) bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa 3; 6; 1,5; 4,5 ululyklary belläliň. Soňra esaslary bölek interwallaryň $h=2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, 3; 6; 1,5; 4,5 ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň (*4-nji surat*).

b) Ilki $W_i = \frac{n_i}{n}$ formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{30} = 0,2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{12}{30} = 0,4,$$

$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{3}{30} = 0,1, \quad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{9}{30} = 0,3.$$

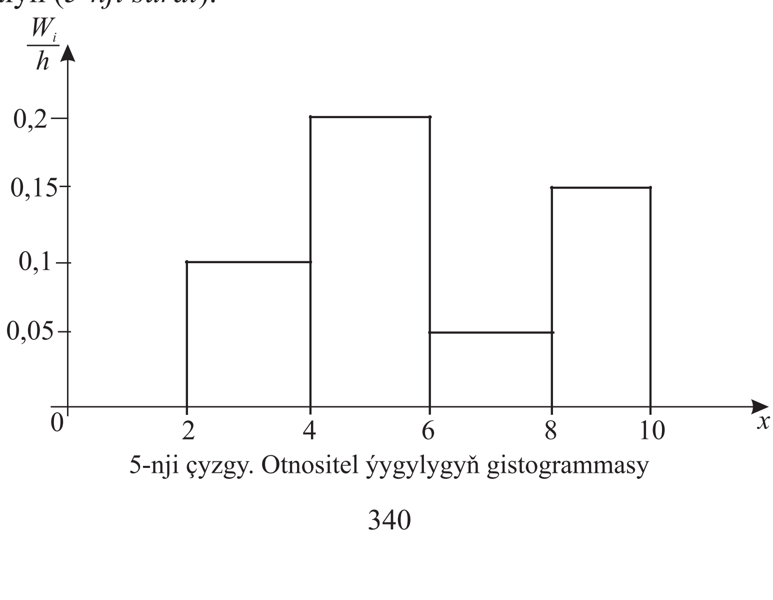


4-nji surat. Ýygylygyň gistogrammasy

Indi otnositel ýygylygyň $\frac{W_1}{h}$ dykyzlygyny tapalyň:

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0,2}{2} = 0,1, \qquad \frac{W_2}{h} = \frac{0,4}{2} = 0,2,$$
$$\frac{W_3}{h} = \frac{0,1}{2} = 0,05, \qquad \frac{W_4}{h} = \frac{0,3}{2} = 0,15.$$

Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny alyp, esaslary bölek interwallaryň $h=2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, 0,1; 0,2; 0,05; 0,15 ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň (*5-nji surat*).



5-nji çyzgy. Otnositel ýygylygyň gistogrammasy

§2. 2. Paýlanyşyň näbelli parametrleriniň statistiki bahalary

1. Statistiki bahalar. Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanyň paýlanyş funksiýasyny kesgitleýän parametrleri bahalandyrmak meselesi ýüze çykýar. Adatça derňeýjide öwrenilýän nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, ..., x_n$ bahalary bolýar. Bu bahalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, ..., X_n$ tötän ululyklar hökmünde garaýarlar we bahalandyrylýan θ nazary parametriň statistiki bahasy hökmünde bu tötän ululyklardan käbir $\theta^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ funksiýany kabul edýärler. Argumentleri tötän ululyklar bolany sebäpli $\theta^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ funksiýa hem tötän ululykdyr. Islendik göwrümli saýlama geçirilende hem bahalandyrylýan parametriň diňe ýakynlaşan bahasyny tapmak bolar. Şol sebäpli gerekli ýakynlaşmany almak maksady bilen statistiki bahalara käbir talaplary bildirýärler. Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň statistiki bahasy bolsun.

Kesgitleme. Matematiki garaşmasy bahalandyrylýan θ parametre deň bolan, ýagny $M\theta^*=\theta$ deňligi kanagatlandyrýan θ^* statistiki baha süýşmedik baha diýilýär.

Süýşmedik baha artygy ýa-da kemi bilen alnan şol bir ýalňyşlyklaryň gaýtalanyp durmazlygyny üpjün edýän hem bolsa, ol mydama gerekli ýakynlaşmany berýär diýlen netijäni çykarmak nädogrudyr. Hakykatdan hem, goý, n göwrümli saýlama k gezek geçirilip, degişlilikde $\theta_1^*, \ \theta_2^*, \ ..., \ \theta_k^*$ statistiki bahalar tapylan bolsun. Bu statistiki bahalara θ^* tötän ululygyň kabul edýän bahalary hökmünde garalyň. Eger bahalandyrylýan θ parametriň statistiki bahasy hökmünde $M\theta^*$ ululykdan ýeterlik daşlaşan haýsy hem bolsa bir statistiki baha kabul edilse, onda gerekli ýakynlaşmanyň alynmazlygy mümkin. Şol sebäpli, θ^* tötän ululygyň bahalarynyň $M\theta^*$ matematiki garaşmanyň töweregindäki ýaýrawynyň kiçi bolmagy talap edilýär. θ^* tötän ululygyň ýaýraw ölçegi hökmünde $M(\theta^*-\theta)^2$ ululyk kabul edilýär. Hususy halda, θ^* süýşmedik baha bolanda, onuň ýaýraw ölçegi dispersiýadyr, ýagny

$$M(\theta^*-\theta)^2=D\theta^*.$$

Kesgitleme. $\inf\limits_{\theta^*} M(\theta^* - \theta)^2$ ululyga eýe bolan θ^* statistiki baha effektiw diýilýär.

Kesgitleme. Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\theta_n^* - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

deňligi kanagatlandyrýan θ_n^* statistiki baha esasly diýilýär.

2. Wariasiýa hatarynyň häsiýetlendirijileri. Baş toplumyň öwrenilýän nyşanynyň belli paýlanyşynyň näbelli parametrlerini bahalandyrmakda gözegçilik edilýän wariantalaryň orta bahalarynyň möhüm ähmiýeti bardyr.

Goý, baş toplum käbir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan alnan n göwrümli saýlamada x_1, x_2, ..., x_k wariantalar degişlilikde n_1, n_2, ..., n_k ýygylyklar bilen duş gelýän bolsun.

$$\overline{x_s} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} \tag{3}$$

ululyga saýlama orta arifmetiki baha diýilýär. Baş orta baha hem edil şuňa meňzeşlikde kesgitlenýär.

Mukdar nyşanyň bahalarynyň saýlama orta bahanyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirmek üçin saýlama dispersiýa düşünjesi girizilýär. Goý, n göwrümli saýlamada x_1, x_2, ..., x_k wariantlar degişlilikde n_1, n_2, ..., n_k ýygylyklar bilen düş gelýän bolsun. Saýlama dispersiýa diýlip, mukdar nyşanyň gözegçilik edilýän x_i, $i=\overline{1, k}$ bahalarynyň $\overline{x}_s$ saýlama orta bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň orta arifmetiki bahasyna aýdylýar we D_s bilen belgilenýär

$$D_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_s})^2}{n}. \tag{4}$$

Saýlama dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke saýlama orta kwadratik gyşarma diýilýär we σ_s bilen belgilenýär

$$\sigma_s = \sqrt{D_s}. \tag{5}$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_s})^2}{n-1} \tag{6}$$

ululyga düzedilen dispersiýa diýilýär.

Dispersiýanyň formulasyny amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \tag{7}$$

görnüşde ýazmak bolar. Hakykatdan hem,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_s})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} +$$

$$+ (\overline{x})^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2,$$

bu ýerde

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}.$$

Kesgitleme. Iň uly ýygylyga eýe bolan warianta moda diýilýär we M_0 bilen belgilenýär.

Bellik. Eger baş toplumyň öwrenilýän nyşany üznüksiz bolsa, onda dykyzlyk funsiýasynyň maksimuma eýe bolan nokadyna moda diýilýär.

Kesgitleme. Wariasiýa hataryny wariantalaryň sany boýunça deň iki bölege bölýän warianta mediana diýilýär we M_e bilen belgilenýär.

Eger wariantalaryň sany täk bolsa, ýagny $n = 2k + 1$ bolsa, onda

$$M_e = x_{k+1}. \tag{8}$$

Eger wariantalaryň sany jübüt bolsa, ýagny $n = 2k$ bolsa, onda

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}. \tag{9}$$

Bellik. Erkin nyşan üçin

$$F(x) = \frac{1}{2} \tag{10}$$

deňlemäniň çözüwine mediana diýilýär, bu ýerde $F(x)$ funksiýa öwrenilýän nyşanyň paýlanyş funksiýasy.

Kesgitleme. Iň uly warianta bilen iň kiçi wariantanyň tapawudyna wariasiýanyň gerimi diýilýär we R bilen belgilenýär, ýagny

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{11}$$

Kesgitleme. Wariantalaryň saýlama orta bahadan absolýut gyşarmalarynyň orta arifmetiki bahasyna orta absolýut gyşarma diýilýär we θ bilen belgilenýär, ýagny

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \overline{x}_s|}{n}. \tag{12}$$

Kesgitleme. Orta kwadratik gyşarmanyň saýlama orta baha göterimde aňladylan gatnaşygyna wariasiýa koeffisiýenti diýilýär we V bilen belgilenýär, ýagny

$$V = \frac{\sigma_s}{\overline{x}_s} \cdot 100\%. \tag{13}$$

Teorema. $\overline{x}_s$ saýlama orta baha $\overline{x}_b$ baş orta bahanyň süýşmedik bahasydyr, ýagny

$$M\overline{X}_s = \overline{x}_b \tag{14}$$

deňlik dogrudyr.

$$\triangleleft\ \overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n}$$

aňlatmada $\overline{x}_s$ ululyga $\overline{X}_s$ tötän ululyk, $x_1, x_2, ..., x_n$ wariantalara bolsa, biri-biri bilen bagly däl we baş toplumyň öwrenilýän X nyşany bilen birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, ..., X_n$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Goý, $MX_i = a$, $i = \overline{1, k}$, bolsun. Onda $MX = \overline{x}_b = a$ bolar. $\overline{X}_s$ ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň:

$$M\overline{X}_s = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot MX_i}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a = \overline{x}_b. \triangleright$$

Teorema. S^2 düzedilen dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşmedik bahasydyr, ýagny

$$MS^2 = D_b \tag{15}$$

deňlik dogrudyr.

$\triangleleft$ D_s saýlama dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşen bahasydyr, ýagny

$$MD_s = \frac{n-1}{n} \cdot D_b.$$

Bu deňligi göz öňünde tutup,

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} \cdot D_s\right) = \frac{n}{n-1} \cdot MD_s = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot D_b = D_b$$

deňligi alarys. $\triangleright$

3. Ynam interwallary. Saýlamanyň kömegi bilen nazary paýlanyşyň näbelli parametriniň bir statistiki bahasyny tapmaklyga nokatlaýyn bahalandyrma diýilýär. Uly bolmadyk göwrümli saýlamada nokatlaýyn bahalandyrmanyň gerekli ýakynlaşmany bermezligi mümkin. Şol sebäpli interwallaýyn bahalandyrmalary ulanýarlar.

Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň saýlama netijesinde tapylan statistiki bahasy bolsun. Islendik $\delta > 0$ san üçin

$$|\theta - \theta^*| < \delta \tag{16}$$

deňsizlikde δ ululyk näçe kiçi boldygyça bahanyň takyklygy şonçada uludyr. Şol sebäpli δ ululyga bahanyň takyklygy diýilýär. Islendik θ^* statistiki baha üçin (16) deňsizlik dogrudyr diýmeklik elbetde nädogrudyr. Şonuň üçin (16) deňsizligiň haýsy ähtimallyk bilen ýerine ýetýändigine garaýarlar.

$$\gamma = P\{|\theta - \theta^*| < \delta\}$$

ähtimallyga bahalandyrmanyň ygtybarlygy diýilýär. (16) deňsizligi $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$ görnüşde ýazalyň.

$$(\theta^* - \delta; \quad \theta^* + \delta) \tag{17}$$

interwala bahalandyrylýan θ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwaly diýilýär.

Indi belli paýlanyşyň näbelli parametrlerini bahalandyrmak üçin ulanylýan ynam interwallaryny getireliň.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir X mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşan $a = MX$ we $\sigma = \sqrt{DX}$ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan diýeliň. Goý, a parametr näbelli, σ parametr bolsa belli bolsun. Näbelli a parametriň θ^* statistiki bahasy hökmünde $\overline{x}_s$ saýlama orta bahany kabul edip, a parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlama geçireliň. Bu wariantalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, ..., X_n$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasyny $\overline{X}$ bilen belgiläliň:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Belli bolşy ýaly,

$$M\overline{X} = a, \quad D\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Laplasyň funksiýasyndan we Nýuton-leýbnisiň (Leýbnis Gotfrid Wilgelm, 01.07.1646–14.11.1716, nemes matematigi, fizigi we filosofy) formulasyndan peýdalanyp, ýazyp bileris:

$$\gamma = P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = \{a - \delta < \overline{X} < a + \delta\} = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t \tag{18}$$

belgilemäni girizip,

$$2\Phi(t) = \gamma \tag{19}$$

deňligi alarys.

δ takyklygyň bu bahasyny göz öňünde tutup, ýazyp bileris:

$$\gamma = P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = P\left\{|\overline{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= P\left\{\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

$\overline{X}$ tötän ululygy $\overline{x}_s$ ululyk bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan X nyşanyň näbelli a parametrini σ belli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\overline{x}_s - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \overline{x}_s + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{20}$$

ynam interwalyny alarys.

Bellik. (20) ynam interwalyndaky t üýtgeýän ululygy (19) deňlikden we $\Phi(x)$ Laplasyň funksiýasynyň tablisasyndan (2-nji goşundy) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi a we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan X mukdar nyşanyň näbelli a parametrini σ näbelli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Önuň üçin baş toplumdan n göwrümli $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlama geçireliň we ýokarda getirilen pikir ýöretmeleri ulanyp,

$$T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

tötän ululygy alalyň, bu ýerde n – saýlamanyň göwrümi, s – düzedilen orta kwadratik gyşarma, $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ – saýlama orta baha.

T tötän ululyk $k = n - 1$ erkinlik derejeli we

$$S(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

dykyzlyk funksiýaly Stýudentiň (Goset Uilýam Sit, 13.06.1876–16.10.1937, iňlis matematigi) kanuny boýunça paýlanandyr, bu ýerde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} y^{z-1} \cdot e^{-y} dy$$

gamma funksiýa. T tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny

$$\gamma = P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt \qquad (21)$$

görnüşde ýazmak bolar. (21) deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip ýazalyň:

$$\gamma = P\left(\overline{X} - t_y \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_y \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$\overline{X}$ we S tötän ululyklary degişlilikde $\overline{x}_s$ saýlama orta baha we s düzedilen orta kwadratik gyşarma bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan X nyşanyň näbelli a parametrini σ näbelli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\overline{x}_s - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x}_s + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \qquad (22)$$

ynam interwalyny alarys. t_γ ululygy berlen n we γ boýunça tablisadan (3-nji goşundy) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi a we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan X mukdar nyşanyň näbelli σ parametrini γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Onuň üçin baş toplumdan n göwrümli $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlama geçirip, s düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapalyň. Bu düzedilen orta kwadratik gyşarmany näbelli σ parametriň statistiki bahasy hökmünde kabul edip,

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

deňlige garalyň. Bu deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip $s - \delta < \sigma < s + \delta$ görnüşde ýazalyň. Bu ýerden alarys:

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$\frac{\delta}{s} = q$ belgilemäni girizip, $q < 1$ bolanda, näbelli σ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$(s(1-q); \quad s(1+q)) \tag{23}$$

ynam interwalyny alarys. Eger $q \geq 1$ bolsa, onda

$$(0; \quad s(1+q)) \tag{24}$$

ynam interwaly ulanylýar. q ululygy berlen n we γ boýunça tablisadan (4-nji goşundy) peýdalanyp tapmak bolar.

1-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	1	3	5	8
n_i	3	2	4	1

a) Saýlama orta bahany;

b) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany;

ç) Düzedilen dispersiýany we düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapmaly.

$\lhd$ a) $$\overline{x_s} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8}{10} = \frac{37}{10} = 3,7.$$

b) $$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_s})^2}{n} =$$

$$= \frac{3 \cdot (1-3,7)^2 + 2 \cdot (3-3,7)^2 + 4 \cdot (5-3,7)^2 + 1 \cdot (8-3,7)^2}{10} = 4,81.$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{4,81} \approx 2,19.$$

ç) $$s^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{10}{9} \cdot 4,81 \approx 5,34.$$

Onda $s = \sqrt{5,34} \approx 2,31.$ $\rhd$

2-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	5	4	3	1

a) Modany;

b) Medianany;

ç) Wariasiýanyň gerimini;

d) Baş orta bahanyň süýşmedik bahasyny;

e) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany;

ä) Baş dispersiýanyň süýşmedik bahasyny;

f) Orta absolýut gyşarmany;

g) Wariasiýa koeffisiýentini tapmaly.

◁ a) Saýlamanyň paýlanyşyndan görnüşi ýaly, iň uly ýygylyga $(n_1=7)$ $x_1=2$ warianta eýedir. Diýmek, $M_0=2$.

b) Berlen saýlamada wariantalaryň sany täk, ýagny, $2k+1=5$. Bu ýerden $k=2$. Onda $M_e=x_{k+1}=x_3=5$.

ç) Wariantalaryň iň ulusy $x_5=9$, iň kiçisi bolsa, $x_1=2$. Onda

$$R=x_{\max}-x_{\min}=9-2=7.$$

d) Belli bolşy ýaly, baş orta bahanyň süýşmedik bahasy $\overline{x_s}$ saýlama orta bahadyr:

$$\overline{x_s}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}=\frac{7\cdot 2+5\cdot 4+4\cdot 5+3\cdot 6+1\cdot 9}{20}=\frac{81}{20}=4,05.$$

e) $$D_s=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\overline{x_s})^2}{n}=$$

$$=\frac{7\cdot(-2,05)^2+5\cdot(-0,05)^2+4\cdot(0,95)^2+3\cdot 1,95^2+1\cdot 4,95^2}{20}=$$

$=3,4475.$

Onda $\sigma_s=\sqrt{D_s}=\sqrt{3,4475}\approx 1,86.$

ä) Belli bolşy ýaly, baş dispersiýanyň süýşmedik bahasy s^2 düzedilen dispersiýadyr:

$$s^2=\frac{n}{n-1}D_s=\frac{20}{19}\cdot 3,4475\approx 3,63.$$

f) $$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i|x_i-\overline{x_s}|}{n}=$$

$$=\frac{7\cdot 2,05+5\cdot 0,05+4\cdot 0,95+3\cdot 1,95+1\cdot 4,95}{20}=1,46.$$

g) $V = \frac{\sigma_s}{\overline{x}_s} \cdot 100\% = \frac{1,86}{4,05} \cdot 100\% \approx 45,93\%.$ ▷

3-nji mesele. Goý, baş toplum normal kanun boýunça paýlanan X nyşana görä öwrenilýän bolsun. Eger baş toplumdan $n=100$ göwrümli saýlama geçirilip, onuň netijesinde $\overline{x}_s=6{,}62$ saýlama orta baha we $\sigma_s=2{,}89$ orta kwadratik gyşarma tapylan bolsa, X nyşanyň näbelli $a=MX$ matematiki garaşmasyny $\gamma=0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

◁ (20) ynam interwalyndan peýdalanalyň. $2\Phi(t)=\gamma$ deňlemeden $\Phi(t)=0{,}475$ deňligi alarys. Laplasyň funksiýasynyň bahalarynyň tablisasyndan (3-nji goşundy) peýdalanyp, t argumentiň $\Phi(t)=0{,}475$ baha degişli $t=1{,}96$ bahasyny taparys. Onda

$$6,62 - 1,96 \cdot \frac{2,89}{\sqrt{100}} < a < 6,62 + 1,96 \cdot \frac{2,89}{\sqrt{100}}$$

ýa-da

$$6{,}05<a<7{,}19.$$ ▷

4-nji mesele. Käbir jisimi bagly däl 36 gezek ölçemeleriň netijesinde ölçegleriň $\overline{x}_s=21{,}3$ saýlama orta bahasy we $s=0{,}98$ düzedilen orta kwadratik gyşarmasy tapylan bolsun. Ölçenýän jisimiň hakyky a ulylygyny $\gamma=0{,}99$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

◁ (22) ynam interwalyndan peýdalanalyň. $n=36$ we $\gamma=0{,}99$ boýunça tablisadan (3-nji goşundy) $t_\gamma=2{,}7$ bahany taparys. Onda

$$21,3 - 2,7 \cdot \frac{0,98}{\sqrt{36}} < a < 21,3 + 2,7 \cdot \frac{0,98}{\sqrt{36}}$$

ýa-da

$$20{,}86<a<21{,}74.$$ ▷

5-nji mesele. Baş toplumdan $n=10$ göwrümli saýlama geçirilip, $s=5$ düzedilen orta kwadratik gyşarma tapylan bolsun. Baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanan X nyşanynyň näbelli σ orta kwadratik gyşarmasyny $\gamma=0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

◁ Berlen $n=10$ we $\gamma=0{,}95$ boýunça tablisadan (4-nji goşundy) $q=0{,}65$ ululygy taparys. $q<1$ bolandygy sebäpli (23) ynam interwalyndan peýdalanyp alarys:

$$5\cdot(1-0{,}65)<\sigma<5\cdot(1+0{,}65) \quad \text{ýa-da} \quad 1{,}75<\sigma<8{,}25. \ \triangleright$$

§ 2. 3. Empirik paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasynyň bahalandyrylyşy

1. Empirik momentler. Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip, $x_1, x_2, ..., x_r$ wariantalar degişlilikde $n_1, n_2, ..., n_r$ $(n=n_1+n_2+...+n_r)$ ýygylyklar bilen alnan bolsun. Eger wariasiýa hatarynda islendik iki ýanaşyk wariantanyň tapawudynyň absolýut ululygy şol bir h sana deň bolsa, onda wariantalara deňdaşlaşan, h sana bolsa ädim diýilýär. Wariantalar uly sanlar bolan ýagdaýynda, hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

şertli wariantalardan peýdalanylýar, bu ýerde C-islendik x_i, $i=\overline{1,\, r}$ warianta (ýalan nol). Ýalan nol hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen warianta alynsa, hasaplamalar has-da ýeňilleşýär.

Saýlamanyň umumy häsiýetlendirijilerini hasaplamak üçin empirik momentlerden peýdalanmak amatlydyr.

$$M_k' = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - C)^k}{n} \tag{25}$$

ululyga k-njy tertipli adaty empirik moment diýilýär, bu ýerde x_i, $i=\overline{1,\, r}$ – wariantalar, n_i, $i=\overline{1,\, r}$ – wariantalaryň degişli ýygylyklary, C – ýalan nol, n – saýlamanyň göwrümi. Hususy halda, $C=0$ bolanda, (25) gatnaşykdan k-njy tertipli

$$M_k' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i x_i^k}{n} \tag{26}$$

başlangyç empirik momenti alarys. (26) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli ($k=1$) başlangyç empirik moment saýlama orta bahadyr:

$$M_1' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} = \overline{x}_s.$$

Hususy halda, $C=\overline{x}_s$ bolanda, (25) gatnaşykdan k-njy tertipli

$$m_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i (x_i - \overline{x}_s)^k}{n} \tag{27}$$

merkezi empirik momenti alarys. (27) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli ($k=2$) merkezi moment saýlama dispersiýadyr:

$$m_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i (x_i - \overline{x}_s)^k}{n} = D_s.$$

Merkezi we adaty momentleriň arasynda

$$m_2 = M_2' - (M_1')^2 = D_s, \tag{28}$$

$$m_3 = M_3' - 3M_1' \cdot M_2' + 2(M_1')^2, \tag{29}$$

$$m_4 = M_4' - 4M_1' \cdot M_3' + 6(M_1')^2 \cdot M_2' + 3(M_1')^4 \tag{30}$$

görnüşli baglanyşyklar bardyr.

Hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen şertli empirik momentlerden peýdalanylýar.

$$M_k^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i \left(\dfrac{x_i - C}{h}\right)^k}{n} \tag{31}$$

ululyga k-njy tertipli şertli empirik moment diýilýär. Hususy halda, $k=1$ bolanda (31) aňlatmadan birinji tertipli şertli empirik momenti alarys:

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i\left(\frac{x_i - C}{h}\right)}{n} = \frac{1}{h}\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} - C \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i}{n}\right) = \frac{1}{h}(\overline{x_s} - C).$$

Bu ýerden

$$\overline{x_s} = M_1^* \cdot h + C. \tag{32}$$

(31) aňlatmadan taparys:

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{1}{h^k} \cdot M_k'.$$

Bu ýerden

$$M_k' = M_k^* \cdot h^k. \tag{33}$$

(33) deňlikden peýdalanyp, (28), (29) we (30) deňlikleri şertli empirik momentler arkaly

$$m_2 = \lfloor M_2^* - (M_1^*)^2 \rfloor \cdot h^2 = D_s, \tag{34}$$

$$m_3 = \lfloor M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2(M_1^*)^3 \rfloor \cdot h^3, \tag{35}$$

$$m_4 = \lfloor M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6(M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3(M_1^*)^4 \rfloor \cdot h^4 \tag{36}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Amalyýetde köplenç deňdaşlaşmadyk wariantalar bilen iş salyşmaly bolýar. Bu ýagdaýda berlen wariantalary deňdaşlaşan wariantalara getirmeklik zerurlygy ýüze çykýar. Onuň üçin berlen wariantalaryň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir uzynlykly bölek interwallara bölmeli we bölek interwallaryň ortalaryny täze wariantalar hökmünde kabul etmeli. Şeýlelikde, täze deňdaşlaşan wariantalar alynýar. Täze wariantalaryň ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen köne wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini almaly.

Bellik. Berlen deňdaşlaşmadyk wariantalardan täze deňdaşlaşan wariantalara geçilip, saýlamanyň häsiýetlendirijileri hasaplananda ýalňyşlygyň uly bolmazlygy üçin her bölek interwala berlen wariantalaryň 8-10-dan az bolmadyk sanysynyň düşmegini gazanmalydyr.

2. Empirik we nazary ýygylyklar. Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan X mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilende X nyşan x_1 bahany n_1 gezek, x_2 bahany n_2 gezek, ..., x_k bahany n_k gezek kabul edipdir diýeliň. x_i, $i=\overline{1, k}$, wariantalaryň gözegçilik edilýän n_i, $i=\overline{1, k}$, sanlaryna empirik ýygylyklar diýilýär. Eger X nyşanyň haýsy hem bolsa bir kesgitli kanun boýunça paýlanandygy barada güman etmeklige esas bar bolsa, onda onuň gözegçilik maglumatlary bilen ylalaşygyny barlamak üçin nazary ýygylyklary hasaplamaly bolýar. Nazary hasaplanyp tapylan $n_i' = n \cdot P_i$ ululyklara düzleýji ýygylyklar diýilýär, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, P_i-belli paýlanyşly X nyşanyň x_i bahany kabul etmeginiň ähtimallygy.

Eger X üznüksiz nyşan bolsa, onda onuň kabul edýän hemme bahalarynyň düşen interwaly kesişmeýän k bölek interwallara bölünýär we X nyşanyň bu bölek interwallara düşmeginiň P_i, $i=\overline{1, k}$, ähtimallyklary tapylýar. Soňra diskret paýlanyşdaky ýaly $n_i' = n \cdot P_i$ formuladan peýdalanyp, düzleýji ýygylyklar tapylýar. Hususy halda, eger X üznüksiz nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlip güman etmäge esas bar bolsa, onda n_i' düzleýji ýygylyklar

$$n_i' = \frac{n \cdot h}{\sigma_s} \cdot \varphi(u_i)$$

formuladan peýdalanyp tapylýar, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, h-bölek interwallaryň uzynlyklary, σ_s-saýlama orta kwadratik gyşarma, $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}$, x_i–i-nji interwalyň ortasy,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Indi saýlamanyň maglumatlaryndan peýdalanyp, normal egriniň gurluşyny teswirläliň.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip,

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

statistiki paýlanyş alnan bolsun. Normal egrini gurmak üçin:

1) $\overline{x}_s$ saýlama orta bahany we σ_s saýlama orta kwadratik gyşarmany tapmaly;

2) $y_i = \dfrac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_i)$ formuladan peýdalanyp, nazary paýlanyşyň y_i ordinatalaryny (düzleýji ýygylyklary) tapmaly, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, h-ädim (islendik goňşy iki wariantanyň arasyndaky uzaklyk),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}, \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda (x_i; y_i) nokatlary gurmaly we olary endigan egri bilen birikdirmeli.

Normal egriniň gurluşyny mysal arkaly görkezeliň.

Mysal. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	40	45	50	55	60	65	70	75	80
n_i	5	6	10	14	30	16	10	4	5

Normal egrini gurmaly.

1) $\overline{x}_s$ saýlama orta bahany tapalyň:

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{5 \cdot 40 + 4 \cdot 45 + 10 \cdot 50 + 14 \cdot 55}{100} +$$

$$+\frac{30 \cdot 60 + 16 \cdot 65 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 80}{100} = 59{,}8.$$

D_s saýlama dispersiýany tapalyň:

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} =$$

$$= \frac{5 \cdot (40 - 59{,}8)^2 + 6 \cdot (45 - 59{,}8)^2 + 10 \cdot (50 - 59{,}8)^2}{100} +$$

$$+\frac{14 \cdot (55 - 59{,}8)^2 + 30 \cdot (60 - 59{,}8)^2 + 16 \cdot (65 - 59{,}8)^2}{100} +$$

$$+\frac{10 \cdot (70 - 59{,}8)^2 + 4 \cdot (75 - 59{,}8)^2 + 5 \cdot (80 - 59{,}8)^2}{100} = 89{,}96.$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{89{,}96} \approx 9{,}84.$$

2) $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s}$ wariantalary tapalyň:

$$u_1 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{40 - 59,8}{9,84} = \frac{-19,8}{9,84} = -2,09;$$

$$u_2 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{45 - 59,8}{9,48} = \frac{-14,8}{9,48} = -1,56;$$

$$u_3 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{50 - 59,8}{9,48} = \frac{-9,8}{9,48} = -1,03;$$

$$u_4 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{55 - 59,8}{9,48} = \frac{-4,8}{9,48} = -0,51;$$

$$u_5 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{60 - 59,8}{9,48} = \frac{0,2}{9,48} = 0,02;$$

$$u_6 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{65 - 59,8}{9,48} = \frac{5,2}{9,48} = 0,55;$$

$$u_7 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{70 - 59,8}{9,48} = \frac{10,2}{9,48} = 1,08;$$

$$u_8 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{75 - 59,8}{9,48} = \frac{15,2}{9,48} = 1,60;$$

$$u_9 = \frac{x_i - \overline{x_s}}{\sigma_s} = \frac{80 - 59,8}{9,48} = \frac{20,2}{9,48} = 2,13.$$

$\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (1-nji goşundy) peýdalanyp taparys:

$$\varphi(u_1) = \varphi(-2,09) = \varphi(2,09) = 0,0449;$$

$$\varphi(u_2) = \varphi(-1,56) = \varphi(1,56) = 0,1182;$$

$$\varphi(u_3)=\varphi(-1{,}03)=\varphi(1{,}03)=0{,}2347;$$

$$\varphi(u_4)=\varphi(-0{,}51)=\varphi(0{,}51)=0{,}3503;$$

$$\varphi(u_5)=\varphi(0{,}02)=0{,}3989;$$

$$\varphi(u_6)=\varphi(0{,}55)=0{,}3429;$$

$$\varphi(u_7)=\varphi(1{,}08)=0{,}2227;$$

$$\varphi(u_8)=\varphi(1{,}60)=0{,}1109;$$

$$\varphi(u_9)=\varphi(2{,}13)=0{,}0413;$$

$y_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_i)$ formuladan peýdalanyp, nazary egriniň y_i ordinatalaryny tapalyň:

$$y_1 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_1) = \frac{100 \cdot 5}{9{,}48} \cdot 0{,}0449 = 52{,}74 \cdot 0{,}0449 \approx 2;$$

$$y_2 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_2) = 52{,}74 \cdot 0{,}1182 \approx 6;$$

$$y_3 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_3) = 52{,}74 \cdot 0{,}2347 \approx 12;$$

$$y_4 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_4) = 52{,}74 \cdot 0{,}3503 \approx 19;$$

$$y_5 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_5) = 52{,}74 \cdot 0{,}3989 \approx 21;$$

$$y_6 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_6) = 52{,}74 \cdot 0{,}3429 \approx 18;$$

$$y_7 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_7) = 52{,}74 \cdot 0{,}2227 \approx 12;$$

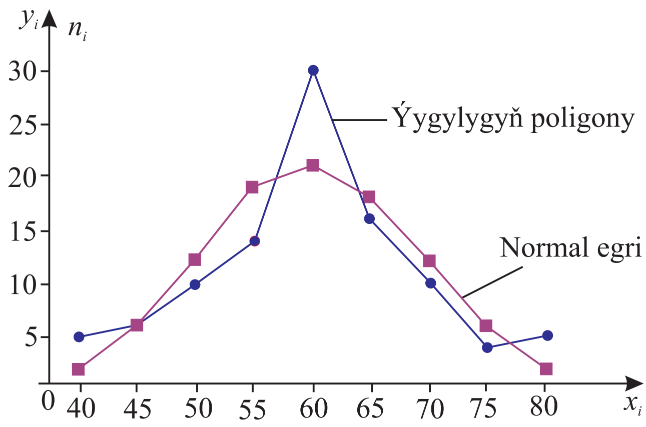
$$y_8 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_8) = 52{,}74 \cdot 0{,}1109 \approx 6;$$

$$y_9 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_9) = 52{,}74 \cdot 0{,}0413 \approx 2.$$

Berlen we tapylan maglumatlary tablisada ýazalyň:

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}_s$	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}$	$\varphi(u_i)$	$y_9 = \dfrac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_9) = 52{,}74 \cdot \varphi(u_i)$
40	5	–19,8	–2,09	0,0449	2
45	6	–14,8	–1,56	0,1182	6
50	10	–9,8	–1,03	0,2347	12
55	14	–4,8	–0,51	0,3503	19
60	30	0,2	0,02	0,3989	21
65	16	5,2	0,55	0,3429	18
70	10	10,2	1,08	0,2227	12
75	4	15,2	1,60	0,1109	6
80	5	20,2	2,13	0,0413	2
	$n=100$				

3) Gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda $(x_i; y_i)$ nokatlary guralyň we olary endigan egri bilen birikdireliň.



6-njy surat

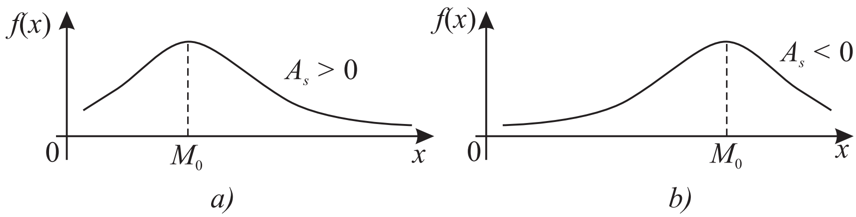
Bu koordinatalar sistemasynda ýygylygyň poligonyny hem gurup we grafikleri deňeşdirip, nazary egriniň gözegçiligiň netijeleri bilen kanagatlanarly ylalaşýandygyny görmek bolar (*6-njy surat*).

3. Asimmetriýa we eksses. Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasyny bahalandyrmakda asimmetriýa we eksses diýlip atlandyrylýan san häsiýetlendirijilerden peýdalanylýar.

Kesgitleme. Üçünji tertipli m_3 empirik (ýa-da μ_3 nazary) merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň üçünji derejesine bolan gatnaşygyna asimmetriýa diýilýär we A_s bilen belgilenýär:

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3}, \qquad (37)$$

bu ýerde m_3 empirik merkezi üçünji moment.Asimmetriýanyň alamaty empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň moda görä ýerleşişi boýunça kesgitlenýär. Eger empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň «uzyn bölegi» modadan sagda bolsa, onda $A_s>0$ (*7-nji a surat*), eger modadan çepde bolsa, onda $A_s<0$ (*7-nji b surat*)



7-nji surat

Normal paýlanyş üçin $A_s=0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^3 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys:

$$\mu_3 = \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0,$$

sebäbi $y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ funksiýa täk, integrirleme çäkleri bolsa simmetrik. Onda

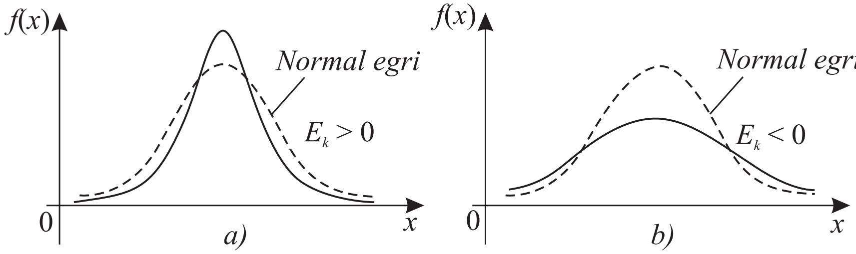
$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0.$$

Şol sebäpli, eger asimmetriýa nola golaý bolsa, baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanandygy barada netije çykarmak bolar.

Kesgitleme. Dördünji tertipli m_4 empirik (ýa-da μ_4 nazary) merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň dördünji derejesine bolan gatnaşygy bilen üçüň tapawudyna eksses diýilýär we E_k bilen belgilenýär:

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3. \qquad (38)$$

Eksses empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigine (normal egrä) görä «kertlik» derejesini häsiýetlendirýär. Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal egrä görä $E_k>0$ bolsa, süýri (*8-nji a surat*), $E_k<0$ bolsa, tekiz (*8-nji b surat*) depesi bardyr.



8-nji surat

Normal paýlanyş üçin $E_k=0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^4 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^4 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys:

$$\mu_4 = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^4 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}d\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp taparys:

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Ýene-de bölekler boýunça integrirleme usulyny ulanyp alarys:

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 3\sigma^4.$$

Onda

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Şol sebäpli, eger eksses nola golaý bolsa, baş toplumyň normal paýlanyşa eýedigini tassyklamak bolar.

Bellik. Eger

$$|A_s| \leq 3\sigma_A \quad \text{we} \quad |E_k| \leq 3\sigma_E$$

deňsizlikler dogry bolsa, onda empirik paýlanyşyň normal paýlanyşa golaýdygy barada netije çykarmak bolar, bu ýerde

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad \sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}},$$

degişlilikde asimmetriýanyň we ekssesiň standartlary hökmünde kabul edilen ululyklar, n-saýlamanyň göwrümi.

1-nji mesele. Saýlamanýň paýlanyşy berlen:

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	4	5	20	10	6	5

Şertli momentlerden peýdalanyp,

a) saýlama orta bahany;

b) saýlama dispersiýany;

ç) asimmetriýany;

d) ekssesi tapmaly.

◁ Hasaplamalary ýeňilleşdirmek üçin, berlen x_i wariantalardan u_i şertli wariantalara geçeliň. C ýalan nol hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen we iň uly ýygylyga ($n_3 = 20$) eýe bolan $x_3 = 50$ wariantany kabul edeliň. $h = 5$ bolandygy sebäpli, taparys:

$$u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{40 - 50}{5} = -2; \quad u_2 = \frac{x_2 - C}{h} = \frac{45 - 50}{5} = -1;$$

$$u_3 = \frac{x_3 - C}{h} = \frac{50 - 50}{5} = 0; \quad u_4 = \frac{x_4 - C}{h} = \frac{55 - 50}{5} = 1;$$

$$u_5 = \frac{x_5 - C}{h} = \frac{60 - 50}{5} = 2; \quad u_6 = \frac{x_6 - C}{h} = \frac{45 - 50}{5} = 3.$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň:

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{4 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{50} = 0,48;$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 9}{50} = 2;$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{4 \cdot (-8) + 5 \cdot (-1) + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 27}{50} = 3,12;$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{4 \cdot 16 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 16 + 5 \cdot 81}{50} = 11,6.$$

a) $\overline{x_s}$ saýlama orta bahany tapalyň:

$$\overline{x_s} = M_1^* \cdot h + C = 0,48 \cdot 5 + 50 = 52,4.$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň:

$$D_s = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [2 - (0,48)^2] \cdot 25 = 44,24.$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{44,24} \approx 6,65.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň:

$$m_3 = [M_3^* - 3 \cdot M_1^* \cdot M_2^* + 2 \cdot (M_1^*)^3] \cdot h^3 =$$

$$= [3,12 - 3 \cdot 0,48 \cdot 2 + 2 \cdot (0,48)^3] \cdot 125 \approx 57,65.$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{57,65}{294,08} \approx 0,196.$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň:

$$m_4 = \lfloor M_4^* - 4 \cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6 \cdot (M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3 \cdot (M_1^*)^4 \rfloor \cdot h^4 =$$

$$= \lfloor 11,6 - 4 \cdot 0,48 \cdot 3,12 + 6 \cdot (0,48)^2 \cdot 2 - 3 \cdot (0,48)^4 \rfloor \cdot 5^4 \approx 5134,47.$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{5134,47}{(6,65)^4} - 3 \approx - 0,37. \triangleright$$

2-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	5	8	10	11	13	14	15	16	18	20	22	24	25
n_i	7	3	10	8	7	15	10	5	8	12	6	5	4

Şertli momentlerden peýdalanyp,

a) saýlama orta bahany;

b) saýlama dispersiýany;

ç) asimmetriýany;

d) ekssesi tapmaly.

$\triangleleft$ Saýlamadan görnüşi ýaly, wariantalar deňdaşlaşan däldirler. Olary deňdaşlaşan ýagdaýa getireliň. Onuň üçin wariantalaryň hemmesiniň düşen (5; 25) interwalyny şol bir $h=4$ uzynlyklary bolan (5; 9), (9; 13), (13; 17), (17; 21), (21; 25) bölek interwallara böleliň. Bu bölek interwallaryň ortalaryny y_i wariantalar hökmünde kabul edip, deňdaşlaşan

$$y_1=7; \quad y_2=11; \quad y_3=15; \quad y_4=19; \quad y_5=23$$

wariantalary alarys. Täze y_i wariantalaryň n_i ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen x_i wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alalyň:

$$n_1=7+3=10; \quad n_2=10+8+7=25; \quad n_3=15+10+5=30;$$

$$n_4=8+12=20; \quad n_5=6+5+4=10.$$

Şeýlelikde, deňdaşlaşan wariantalary bolan

y_i	7	11	15	19	23
n_i	10	25	30	20	15

paýlanyşy alarys. C ýalan nol hökmünde $y_3 = 15$ wariantany kabul edip, u_i şertli wariantalary tapalyň:

$$u_1 = \frac{y_1 - C}{h} = \frac{17 - 15}{4} = -2; \quad u_2 = \frac{y_2 - C}{h} = \frac{11 - 15}{4} = -1;$$

$$u_3 = \frac{y_3 - C}{h} = \frac{15 - 15}{4} = 0; \quad u_4 = \frac{y_4 - C}{h} = \frac{19 - 15}{4} = 1;$$

$$u_5 = \frac{y_5 - C}{h} = \frac{23 - 15}{4} = 2.$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň:

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{10 \cdot (-2) + 25 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 2}{100} = 0,05;$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{10 \cdot 4 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 4}{100} = 1,45;$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{10 \cdot (-8) + 25 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 8}{100} = 0,35;$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{10 \cdot 16 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 16}{100} = 4,45.$$

a) $\overline{y_s}$ saýlama orta bahany tapalyň:

$$\overline{y_s} = M_1^* \cdot h + C = 0,05 \cdot 4 + 15 = 15,2.$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň:

$$D_s = \lfloor M_2^* - (M_1^*)^2 \rfloor \cdot h = [1,45 - (0,05)^2] \cdot 16 = 23,16.$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{23,14} \approx 4,8.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň:

$$m_3 = \lfloor M_3^* - 3 \cdot M_1^* \cdot M_2^* + (M_1^*)^3 \rfloor \cdot h^3 =$$

$$= \lfloor 0,35 - 3 \cdot 0,05 \cdot 1,45 + 2 \cdot (0,05)^3 \rfloor \cdot 4^3 \approx 8,496.$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{8,496}{(4,8)^3} \approx 0,08.$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň:

$$m_4 = \lfloor M_4^* - 4 \cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6 \cdot (M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3 \cdot (M_1^*)^4 \rfloor \cdot h^4 =$$

$$= \lfloor 4,45 - 4 \cdot 0,05 \cdot 0,35 + 6 \cdot (0,05)^2 \cdot 1,45 - 3 \cdot (0,05)^4 \rfloor \cdot 4^4 \approx 1126,84.$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{1126,84}{(4,8)^4} - 3 \approx -0,88. \triangleright$$

§2. 4. Korrelýasiýa nazaryýetiniň esasy düşünjeleri

1. Funksional we statistiki baglylyklar. Belli bolşy ýaly, tötän ululyklar bagly däl ýa-da bagly bolup bilýärler. Eger X tötän ululygyň kabul edýän her bir bahasyna Y tötän ululygyň kabul edýän kesgitli bir bahasy degişli bolsa, onda X we Y tötän ululyklaryň arasynda funksional baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, tegelegiň S meýdany bilen r radiusynyň arasynda $S = \pi r^2$ görnüşli funksional baglylyk bardyr, ýöne tötän ululyklar tötän täsirleriň astynda bolandyklary sebäpli, olaryň arasynda funksional baglylyk seýrek duş gelýär.

Eger bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň paýlanyşynyň üýtgemegine getirýän bolsa, onda olaryň arasynda statistiki baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, şol bir göwrümleri bolan suwly iki howuza şol bir mukdardaky balyk işbilleri goýberilse, bu howuzlardan dürli mukdardaky balyk alnar. Işbilleriň we balyklaryň mukdarlarynyň arasynda baglylygyň bardygy aýdyňdyr. Emma bu funksional baglylyk däl-de statistiki baglylykdyr.

Goý, X tötän ululygyň her bir bahasyna Y tötän ululygyň birnäçe bahasy degişli bolsun. X tötän ululygyň x bahasyna degişli bolan, Y tötän ululygyň bahalarynyň $\overline{y}_x$ orta arifmetiki bahasyna şertli orta baha diýilýär. Eger bu şertli orta baha x üýtgeýäne bagly

$$\overline{y}_x = f(x) \tag{39}$$

funksiýa bolsa, onda Y we X tötän ululyklaryň arasynda korrelýasiýa baglylygy bar diýilýär. Başgaça aýdylanda, korrelýasiýa baglylygynda bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň orta bahasynyň üýtgemegine getirýär. (39) deňlemä Y tötän ululygyň X tötän ululyga regressiýa deňlemesi, $f(x)$ funksiýa regressiýa funksiýasy, bu funksiýanyň grafigine bolsa regressiýa çyzygy diýilýär. X tötän ululygyň Y tötän ululyga $x_y = \varphi(y)$ regressiýasy hem edil şuňa meňzeş kesgitlenýär. Eger $f(x)$ we $\varphi(y)$ regressiýa funksiýalarynyň ikisi hem çyzykly bolsa, onda korrelýasiýa çyzykly diýilýär.

Tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygynyň güýjüni tötän ululyklaryň bahalarynyň şertli orta bahalaryň töweregindäki ýaýraw ölçegi bilen kesgitleýärler. Ýaýraw ölçegi uly boldugyça, tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygy gowşaýar.

2. Regressiýa gönüsiniň deňlemesi. Goý, baş toplum X we Y mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy bar diýeliň. Y nyşanyň X nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini tapmaklyk maksady bilen baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip, sanlaryň $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ n jübüti alnan bolsun, bu ýerde x_i, $i=\overline{1,n}$, X nyşanyň, y_i, $i=\overline{1,n}$, Y nyşanyň kabul edýän bahalary. Goý, bu jübütleriň her birine bir gezek gözegçilik edilýän bolsun. Onda $\overline{y}_x$ şertli orta bahany ulanmaklygyň zerurlygy ýokdur. Şol sebäpli $\overline{y}_x = \rho x + b$ deňlemä derek

$$Y = \rho x + b \tag{40}$$

deňlemä garaýarlar, bu ýerde ρ ululyk regressiýanyň saýlama koeffisiýenti. Anyk (40) regressiýa deňlemesini ýazmaklyk üçin ρ we b ululyklary tapmak ýeterlikdir. Bu ululyklary $Y_i - y_i$, $i=\overline{1,n}$, gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi minimal bolar ýaly saýlap alalyň, bu ýerde Y_i gözegçilik edilýän x_i warianta degişli, (40) deňlemeden tapylan ordinata, y_i bolsa x_i warianta degişli ordinata. Gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi ρ we b ululyklardan

$$G(\rho;b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2$$

funksiýadyr. Bu funksiýanyň minimumyny tapalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{d\rho} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)\cdot x_i = 0, \\ \dfrac{dG}{db} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases} \qquad (41)$$

Bu deňlemeler sistemasyny çözüp taparys:

$$\rho = \frac{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad (42)$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i}{n\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \qquad (43)$$

ρ we b ululyklaryň bu bahalaryny (40) deňlemede ornuna goýup, Y nyşanyň X nyşana regressiýa gönüsiniň anyk deňlemesini alarys.

Goý, indi X we Y nyşanlaryň $(x; y)$ bahalar jübütleriniň arasynda birden köp gezek gözegçilik edilýänleri hem bar bolsun. Bu ýagdaýda Y nyşanyň X nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini

$$\overline{y}_x = \rho x + b \qquad (44)$$

görnüşde gözläliň. (41) deňlemeler sistemasyny özgerdip ýazalyň:

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\cdot\rho + n\overline{x}b = \sum n_{xy}\cdot x\cdot y \\ \overline{x}\cdot\rho + b = \overline{y}, \end{cases} \qquad (45)$$

bu ýerde n_{xy} ululyk $(x; y)$ jübütiň gözegçilik edilen sany. Bu sistemanyň ikinji deňlemesinden taparys:

$$b = \overline{y} - \overline{x}\cdot\rho.$$

b ululygyň bu bahasyny (44) deňlikde ornuna goýup, regressiýa gönüsiniň

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho(x - \overline{x}) \tag{46}$$

deňlemesini alarys. (45) sistemadan ρ ululygy tapalyň:

$$\rho = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{n[\overline{x^2} - (\overline{x})^2]} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_X^2}.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem $\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ gatnaşyga köpeldeliň:

$$\rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y}. \tag{47}$$

$$r_s = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{48}$$

belgilemäni girizip taparys:

$$\rho = r_s \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

r_s ululyga saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti diýilýär. ρ ululygyň tapylan bahasyny (46) deňlemede ornuna goýup, Y nyşanyň X nyşana regressiýa gönüsiniň korrelýasiýa koeffisiýentli

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_s \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \tag{49}$$

deňlemesini alarys.

Goý, D_y Y nyşanyň kabul edýän y bahalarynyň $\overline{y}$ orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy, D_y^* bolsa, degişli $\overline{y}_x$ şertli orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy bolsun. Onda

$$D_y^* = D_y \cdot (1 - r_s^2) \tag{50}$$

deňlik dogrudyr.

Indi korrelýasiýa koeffisiýentiniň häsiýetlerine garalyň.

1) Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy birden uly däldir, ýagny $|r_s| \leq 1$. Hakykatdan hem, dispersiýanyň otrisatel däldigi sebäpli $D_y^* = D_y \cdot (1 - r_s^2) \geq 0$ bolar. Bu ýerden $(1 - r_s^2) \geq 0$ ýa-da $|r_s| \leq 1$.

2) Eger korrelýasiýa koeffisiýenti nola deň we regressiýa çyzyklary gönüler bolsa, onda nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygynda däldir. Hakykatdan hem, eger $r_s = 0$ bolsa, (49) deňlemeden $\overline{y}_x = \overline{y}$ deňligi alarys. Görnüşi ýaly, $\overline{y}$ şertli orta bahalar x argumentiň islendik bahasynda şol bir hemişelik baha eýedir. Bu bolsa, nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň ýokdugyny aňladýar. Bu ýagdaýda regressiýa gönüleri degişli koordinatalar oklaryna paralleldir.

3) Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygynyň artmagy bilen çyzykly korrelýasiýa baglylygy has güýjeýär we $|r_s| = 1$ bolanda funksional baglylyga geçýär. Hakykatdan hem, (50) deňlikden görnüşi ýaly, korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy artdygyça D_y^* dispersiýa kemelýär. Bu bolsa nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň güýjüniň artýandygyny aňladýar. $|r_s| = 1$ bolanda, (50) deňlikden alarys:

$$D_y^* = D_y \cdot (1 - r_s^2) = 0.$$

Bu ýerden, X we Y nyşanlaryň bahalarynyň islendik $(x; y)$ jübütiniň

$$\overline{y_x} - \overline{y} = r_s \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x})$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Bu bolsa, X we Y nyşanlaryň bahalarynyň arasynda çyzykly funksional baglylygyň bardygyny aňladýar.

Garalan bu häsiýetlerden görnüşi ýaly, saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nyşanlaryň arasyndaky çyzykly baglylygyň güýjüni häsiýetlendirýär: korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy bire golaý boldugyça baglylyk güýjeýär, nola golaý boldugyça gowşaýar.

Bellik. Saýlamada nyşanlaryň bahalarynyň çyzykly funksional baglylykda bolmagy, baş toplumda-da şeýle baglylygyň bolmagyny üpjün etmeýär. Onuň üçin saýlamanyň göwrüminiň uly bolmagy ($n \geq 50$) we saýlamanyň wekilçilikli bolmagy gerekdir.

Bellik. Eger saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nola deň bolsa, onda nyşanlar çyzykly däl korrelýasiýa ýa-da funksional baglylygynda bolup bilerler.

§ 2. 5. Statistiki çaklamalar we kriteriler

1. Statistiki çaklamalar. Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanyň näbelli paýlanyşy ýa-da belli paýlanyşynyň näbelli parametrleri barada aýdylan güman etmelere statistiki çaklamalar diýilýär. Näbelli θ parametriň kesgitli bir θ_0 baha eýedigi barada aýdylan güman etmä ýönekeý çaklama diýilýär. Eger θ parametr käbir köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa çylşyrymly çaklama diýilýär. Mysal üçin, eger

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

normal kanunyň dykyzlyk funksiýasy bolsa, onda «$a=0$, $\sigma=1$» diýlen çaklama ýönekeýdir, «$a=a_0$» diýlen çaklama bolsa çylşyrymlydyr, sebäbi soňky çaklamada σ parametr islendik otrisatel däl bahany kabul edip biler.

Statistiki çaklamalary barlamak meselesi şeýle goýulýar. Goý, $f(x; \theta)$ dykyzlyk funksiýaly baş toplumdan bagly däl

$$x=(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{51}$$

saýlama geçirilen bolsun. θ parametr barada $H_0: \theta \in A$ (A-käbir köplük) çaklama aýdylýar. Bu çaklama esasy (nolunjy ýa-da barlanylýan) çaklama diýilýär. H_0 esasy çaklama bilen bir hatarda $H_1: \theta \overline{\in A}$ bäsdeş ýa-da alternatiw çaklama hem garaýarlar. Mysal üçin, eger H_0 esasy çaklama «Puasson kanunynyň λ matematiki garaşmasy 5-e deň» diýlen güman etmeden ybarat bolsa, onda H_1 bäsdeş çaklama «$\lambda \neq 5$» diýlen güman etme bolar.

H_0 esasy çaklama bilen (51) saýlamanyň ylalaşygyny anyklamak möhüm meseleleriň biri bolup durýar. Esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde paýlanyşy belli bolan tötän ululykdan peýdalanýarlar. Kesgitli bir kriteri saýlanyp alnandan soň, onuň bahalar köplügini kesişmeýän iki bölege bölýärler. Bu bölekleriň birinde esasy çaklama kabul edilýär, beýlekisinde bolsa inkär edilýär. Esasy çaklamanyň inkär edilýän bölegine kritiki köplük diýilýär. Çaklamanyň kabul edilýän we kritiki köplüklerini bölýän nokatlara kritiki nokatlar diýilýär we k_{kr} bilen belgilenýär.

Eger kriteri hökmünde saýlanyp alnan tötän ululygyň paýlanyş kanuny gyzyklandyrmaýan bolsa, onda ony K bilen belgilemegi şertleşeliň.

$K<k_{kr}$, $(k_{kr}<0)$, $K>k_{kr}$, $(k_{kr}>0)$, $K<k_{kr.1}$ we $K>k_{kr.2}$, $(k_{kr.1}<k_{kr.2})$

deňsizlikler bilen kesgitlenýän köplüklere degişlilikde çeptaraplaýyn, sagtaraplaýyn we ikitaraplaýyn kritiki köplükler diýilýär. (51) saýlamanyň S kritiki köplüge düşmeginiň ähtimallygyny

$$P(x \in S) = P_{\theta}(S) = \int_S f(x;\theta)dx \tag{52}$$

bilen belgiläliň. Kritiki köplügi (52) ähtimallyk iň kiçi bolar ýaly edip saýlaýarlar.

2. Kriteriniň ähmiýetlilik derejesi we kuwwatlylygy. S kritiki köplügiň kömegi bilen gurulýan kriterä S-kriteri diýilýar. Her bir S-kriteri bilen ýalňyşlygyň iki jynsyny baglanyşdyrýarlar. Birinji jynsly ýalňyşlyk dogry H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmegidir. Ikinji jynsly ýalňyşlyk nädogry H_0 esasy çaklamanyň kabul edilmegidir. Bu ýalňyşlyklaryň haýsysynyň nähili netijelere getirjekdigi goýulýan meselä baglydyr.

$$P_i(A) = \int_A f(x;\theta_i)dx, \quad i=0;\,1 \tag{53}$$

belgilemäni girizeliň, bu ýerde A-käbir köplük. Onda S-kriteriniň birinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy

$$\alpha=P_0(S), \tag{54}$$

ikinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy bolsa

$$\beta=P_1(\overline{S}) \tag{55}$$

bolar, bu ýerde $\overline{S}=X\backslash S$ (X-baş toplum).Birinji jynsly ýalňyşlygyň α ähtimallygyna S-kriteriniň ähmiýetlilik derejesi diýilýär.

$$W(S;\theta) = \int_S f(x;\theta)dx \tag{56}$$

funksiýa S-kriteriniň kuwwatlylyk funksiýasy diýilýär. Bu funksiýa parametriň hakyky bahasy θ bolanda, H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmeginiň ähtimallygydyr. (54)-(56) aňlatmalardan görnüşi ýaly, birinji we ikinji jynsly ýalňyşlyklaryň ähtimallyklaryny kuwwatlylyk funksiýasy arkaly

$$\alpha = W(S;\, \theta), \qquad 1-\beta = W(S;\, \theta)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

Şeýlelikde, H_1 bäsdeş çaklamada H_0 esasy çaklamany barlamaklyk meselesi şeýle goýulýar: ilki α ähmiýetlilik derejesi berilýär we şeýle ähmiýetlilik derejeleri bolan hemme S-kriterileriň F_α köplügine garalýar. Soňra bu kriterileriň arasyndan $\theta=\theta_1$ bolanda iň uly kuwwatlylygy bolan S^*-kriteri saýlanyp alynýar, ýagny

$$W(S^*;\, \theta_1)=\alpha, \qquad W(S^*;\theta_1) = \max_{S\in F_\alpha} W(S;\theta).$$

Bu S^*-kriterä has kuwwatly ýa-da optimal kriteri diýilýär.

3. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetliligi baradaky çaklamanyň barlanyşy. Goý, normal kanun boýunça paýlanan baş toplum X we Y mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip tapylan r_s saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti noldan tapawutly bolsun. Bu ýerden r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti hem noldan tapawutlydyr diýlen netije gelip çykmaýar. Şol sebäpli, berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1: r_b \neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nola deňdigi baradaky $H_0: r_b = 0$ esasy çaklamany barlamaklyk zerurlygy ýüze çykýar. Eger H_0 esasy çaklama kabul edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti nola deňdir. Diýmek, X we Y nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy ýokdur. Eger H_0 esasy çaklama inkär edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti noldan tapawutlydyr. Bu ýagdaýda X we Y nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygyndadyr.

H_0 esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde $k=n-2$ erkinlik derejeleri bolan Stýudentiň kanuny boýunça paýlanan

$$T = \frac{r_s \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

tötän ululyk kabul edilýär. Bäsdeş çaklama $H_1: r_b \neq 0$ bolandygy sebäpli, kritiki köplük ikitaraplaýyndyr. Ikitaraplaýyn kritiki köplük gurlanda T kriteriniň bu köplüge düşmeginiň ähtimallygynyň berlen α ähmiýetlilik derejesine deň bolmagyndan ugur alynýar. Bu ýagdaýda iň uly kuwwatlylyk

$$P(T < t_{kr.1}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{we} \quad P(T > t_{kr.2}) = \frac{\alpha}{2}, \quad (t_{kr.1} < t_{kr.2})$$

deňlikler ýerine ýetende alynýar. Stýudentiň paýlanyşynyň nola görä simmetrikdigi sebäpli, $t_{kr.}(\alpha; k)$ sag we $-t_{kr.}(\alpha; k)$ çep ($t_{kr.} < 0$) kritiki nokatlary tapmak ýeterlikdir. Bu ýagdaýda ikitaraplaýyn kritiki köplük $|T| < t_{kr.}(\alpha; k)$ deňsizligiň kömegi bilen gurulýar. H_0 esasy çaklamanyň kabul edilýän köplügi bolsa $[-t_{kr.}(\alpha; k); t_{kr.}(\alpha; k)]$ kesimdir.

Saýlamanyň maglumatlary boýunça kriteriniň gözegçilik edilen bahasyny $T_{gözeg.}$ bilen belgiläliň. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1: r_b \neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nola deňdigi baradaky $H_0: r_b = 0$ esasy çaklamany barlamak üçin ilki T kriteriniň gözegçilik edilen

$$T_{gözeg.} = \frac{r_s \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_s^2}}$$

bahasy tapylýar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, $k = n - 2$ erkinlik derejeleriniň sany we Stýudentiň paýlanyşynyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça (4-nji goşundy) ikitaraplaýyn kritiki köplük üçin $t_{kr.}(\alpha; k)$ kritiki nokat tapylýar. Eger $|T| < t_{kr.}(\alpha; k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdur. Eger $|T| > t_{kr.}(\alpha; k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklama inkär edilýär.

4. Pirsonyň kriterisi. Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu näbelli paýlanyşyň güman edilýän kanundygy baradaky çaklamany barlamak üçin ulanylýan kriterä ylalaşyk kriterisi diýilýär. Şeýle kriterileriň biri hem iňlis matematigi K. Pirsonyň (Karl Pirson, 27.03.1857–27.04.1936) χ^2 (hi-kwadrat) kriterisidir. Bu kriteriniň hususy halda, X nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlen güman etmede ulanylyşyna garalyň.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip,

x_i	x_1	x_2	...	x_m
n_i	n_1	n_2	...	n_m

statistiki paýlanyş alnan we n_i' nazary ýygylyklar hasaplanan bolsun. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde X nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \tag{57}$$

tötän ululykdan peýdalanylýar. Saýlamanyň göwrümi artdygyça bu tötän ululygyň paýlanyşy baş toplumyň haýsy kanun boýunça paýlanandygyna garamazdan k erkinlik derejesi bolan we

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0 \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýaly χ^2 paýlanyş kanunyna ýygnanýar, bu ýerde

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} \cdot e^{-y} dy$$

gamma funksiýa. Şol sebäpli (57) tötän ululyga χ^2 ylalaşyk kriterisi diýilýär. Erkinlik derejeleriniň sany $k = m - 1 - r$ deňlikden peýdalanyp tapylýar, bu ýerde m-dürli wariantalaryň (ýa-da bölek interwallaryň) sany, r-güman edilýän paýlanyş kanunynyň bahalandyrylýan parametrleriniň sany. Normal kanun üçin r=2 (matematiki garaşma we orta kwadratik gyşarma). Garalýan ýagdaýda, H_0 esasy çaklama dogry bolanda we berlen α ähmiýetlilik derejesinde

$$P(\chi^2 > \chi_{kr.}(\alpha; k)) = \alpha$$

deňlik ýerine ýeter ýaly edip sagtaraplaýyn kritiki köplük gurulýar. χ^2 ylalaşyk kriterisiniň saýlamanyň maglumatlary boýunça gözegçilik edilip tapylan bahasyny $\chi^2_{gözeg.}$ bilen belgiläliň. Şeýlelikde, X nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin ilki n_i' nazary ýygylyklary, soňra χ^2 kriteriniň gözegçilik edilýän

$$\chi^2_{g\ddot{o}zeg.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

bahasy tapylýar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, $k=m-3$ erkinlik derejesiniň sany we χ^2 paýlanyşyň kritiki nokatlarynyň tablisasy (4-nji goşundy) boýunça $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ kritiki nokat tapylýar. Eger $\chi^2_{g\ddot{o}zeg.} < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdur. Eger $\chi^2_{g\ddot{o}zeg.} > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklama inkär edilýär.

Bellik. (57) formulany

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{n_i'} - n$$

görnüşde hem ýazmak bolar.

Gönükmeler

1. Toparda 25 talyp bar. Ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistika dersinden geçirilen synagda bu toparyň talyplary 4; 3; 5; 2; 4; 4; 3; 2; 5; 3; 4; 4; 5; 5; 3; 5; 5; 4; 4; 3; 4; 5; 4; 4; 5 bahalara mynasyp boldular.

a) Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly;

b) Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.

2. Köwüşleriň baş toplumyndan saýlama geçirilip, 40; 41; 42; 41; 42; 41; 42; 40; 41; 42; 40; 42; 42; 40; 43; 42; 41; 41; 40; 41; 42; 40; 42; 42; 41; 44; 43; 42; 42; 41; 42; 42; 41; 44; 42; 42; 43; 42; 45; 42 razmerli köwüşler şowuna saýlanyp alyndy.

a) Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly;

b) Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.

3. Baş toplumdan saýlama geçirilip, 1; 5; 3; 5; 1; 3; 7; 5; 3; 5 ululyklar alynýar. Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

4. $n = 50$ göwrümli saýlama geçirilip, otnositel ýygylygyň

x_i	2	3	5	6
w_i	0,2	0,3	0,1	0,4

statistiki paýlanyşy alynýar.

a) Ýygylygyň paýlanyşyny ýazmaly;

b) Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

5. Baş toplumdan $n = 50$ göwrümli saýlama geçirilýär: 10; 5; 3; 4; 5; 9; 10; 6; 8; 8; 5; 10; 3; 7; 10; 2; 5; 6; 10; 8; 9; 5; 9; 10; 7; 5; 10; 9; 4; 3; 2; 3; 4; 5; 9; 10; 8; 7; 3; 6; 3; 5; 6; 7; 8; 8; 6; 5; 4; 5.

a) Ýygylygyň poligonyny gurmaly;

b) Ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.

6. Bir ululyk bagly däl 50 gezek ölçenip, 2,7; 3,4; 5,3; 2,2; 4,5; 4,3; 3,5; 5,8; 5,1; 3,4; 4,4; 4,7; 2,3; 4,8; 2,1; 3,6; 3,5; 5,7; 4,2; 3,7; 4,3; 3,4; 4,2; 3,4; 4,3; 5,3; 4,1; 5,1; 4,8; 2,4; 5,6; 4,3; 3,7; 4,5; 3,6; 3,4; 3,2; 4,6; 4,2; 4,1; 4,8; 4,6; 5,5; 4,3; 4,5; 3,9; 4,8; 5,9; 3,8; 5,1 ululyklar alyndy.

a) Ýygylygyň poligonyny gurmaly;

b) Ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.

7. Ýaryşa gatnaşan 20 türgene oýunda görkezen netijeleri boýunça 3; 4; 5; 2; 4; 3; 5; 4; 4; 5; 5; 3; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4 bahalar goýuldy.

a) Saýlama orta bahany;

b) Saýlama orta kwadratik gyşarmany;

ç) Düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapmaly.

8. Baş toplumdan saýlama geçirilip 5; 1; 7; 5; 1; 3; 5; 1; 7; 5 ululyklar alyndy.

a) Modany;

b) Medianany;

ç) Wariasiýanyň gerimini;

d) Baş orta bahanyň süýşmedik bahasyny;

e) Baş dispersiýanyň süýşen bahasyny;

ä) Orta kwadratik gyşarmany;

f) Orta absolýut gyşarmany;
g) Wariasiýa koeffisiýentini tapmaly.

9. Eger n=25; $\overline{x}_s = 10$; $\sigma = 2$ bolsa, onda normal kanun boýunça paýlanan X nyşanyň näbelli $a = MX$ matematiki garaşmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

10. Käbir burçy bagly däl 22 gezek ölçäp, 2,9; 3,0; 3,1; 3,3; 3,1; 3,2; 2,8; 3,1; 2,7; 3,2; 2,9; 3,0; 2,9; 3,1; 2,8; 2,9; 3,2; 3,3; 2,9; 3,1; 3,2; 3,0 netijeler alyndy. Ölçegleriň netijeleri normal kanun boýunça paýlanan hasap edip, ölçenýän burçuň matematiki garaşmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

11. Normal paýlanan baş toplumdan n= 10 göwrümli saýlama geçirilip, otnositel ýygylygyň paýlanyşy alynýar:

x_i	–2	1	2	3	4	5
w_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Näbelli matematiki garaşmany $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

12. Normal paýlanan nyşanyň baş toplumyndan $n = 50$ göwrümli saýlama alnyp, $s = 16$ düzedilen orta kwadratik gyşarma tapylýar. σ baş orta kwadratik gyşarmany $\gamma = 0{,}99$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

13. Käbir fiziki ululyk şol bir abzal bilen 10 gezek ölçenip, 1,82; 1,81; 1,83; 1,82; 1,80; 1,82; 1,83; 1,81; 1,84; 1,82 ululyklar alyndy. $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen abzalyň takyklygyny tapmaly.

Jogaplar

1. a)

x_i	2	3	4	5
n_i	2	5	10	8

b)

x_i	2	3	4	5
w_i	0,08	0,2	0,4	0,32

2. a)

x_i	40	41	42	43	44	45
n_i	6	10	18	3	2	1

b)

x_i	40	41	42	43	44	45
w_i	0,15	0,25	0,45	0,075	0,05	0,025

3. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 3, \\ 0,5, & 3 < x \le 5, \\ 0,9, & 5 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$ **4.** a)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

b) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0,2, & 2 < x \le 3, \\ 0,5, & 3 < x \le 5, \\ 0,6, & 5 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$ **7.** a) $\bar{x}_s=3{,}9$; b) $\sigma_s=0{,}94$; ç) $s=0{,}97$.

8. a) $M_0=5$; b) $M_e=4$; ç) $R=6$; d) $\bar{x}_s=4$; e) $D_s=5$; ä) $\sigma_s=2{,}24$; f) $\theta=2$; g) $V=50\%$. **9.** (9,216; 10,784). **10.** (2,987; 3,013). **11.** (0,28; 3,72). **12.** (11,2; 20,8). **13.** (0,0039; 0,0182).

1-nji goşundy

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	0	1	2	3	4
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

x	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736

x	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,3	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

2-nji goşundy

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**	*x*	**Φ(*x*)**
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98755
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07968	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99583
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,90067	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45140	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99958
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,99990
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74985	2,40	0,98360	4,30	0,99998
1,20	0,76986	2,45	0,98521	4,40	0,99999

3-nji goşundy
$t_\gamma = t(\gamma, n)$ bahalaryň tablisasy

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,754
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	39,2
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4-nji goşundy
$q = q(\gamma, n)$ bahalaryň tablisasy

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	120	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Eserler ýygyndysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumy milli «Galkynyş» Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary *V* gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

6. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

7. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

9. *Aşyrow O., Töräýew A.* Matematiki analiz. I t., Aşgabat, Magaryf, 1990.

10. *Aşyrow O.* Matematiki seljermäniň esaslary. I.Aşgabat, TDNG, 2006.

11. *Aşyrow O.* Matematiki seljermäniň esaslary.II.Aşgabat, TDNG, 2006.

12. *Gurbanmämmedow N., Aşyrow O., Aşyrow A., Geldiýew B.* Ýokary matematika. I. Aşgabat, TDNG, 2010.

13. *Баврин И. И.* Высшая математика. Москва, Просвещение, 1980.

14. *Гусак А. А.* Высшая математика. Т. 1, 2. Минск. Изд-во БГУ, 1983.

15. *Гусак А. А.* Задачи и упражнения по высшей математике. ч. 1,2. Минск. Вышэйшая школа, 1972.

16. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. Москва, Наука, 1971.

17. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. Москва, Наука, 1986.

18. *Шипачев В. С.* Высшая математика. Москва, Высшая школа, 1990.

19. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. Москва, Наука, 1965.

20. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, Высшая школа, 1972.

21. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва, Высшая школа, 1970.

22. *Лихолетов И. И., Мацкевич И. П.* Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск. Вышэйшая школа, 1976.

23. *Лозинский С. Н.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва. Статистика, 1975.

MAZMUNY

III bap. Differensial deňlemeler

IV bap. Ähtimallyklar nazaryýeti we matematiki statistika

Orazmuhammet Aşyrow, Nurmuhammet Gurbanmämmedow,
Hajymämmet Soltanow, Myrat Almazow

ÝOKARY MATEMATIKA

II kitap

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*E. Berdiýewa*
Teh. redaktory	*O. Nurýagdyýewa*
Neşir üçin jogapkär	*A. Garajaýew*

Çap etmäge rugsat edildi 14.11.2012.
Ölçegi $60x90^{1}/_{16}$. Ofset kagyzy. Edebi garniturasy.
Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 24,5.
Şertli-reňkli ottiski 31,75. Hasap-neşir listi 22,56.
Çap listi 24,5. Sargyt 1186. Sany 2000.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.