Ö. G. Hudaýberenow, N. Nuryllaýew

TEHNIKI WE YKDYSADY MESELELERDE MATEMATIKI MODELIRLEME

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy.

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi.

Aşgabat – 2012

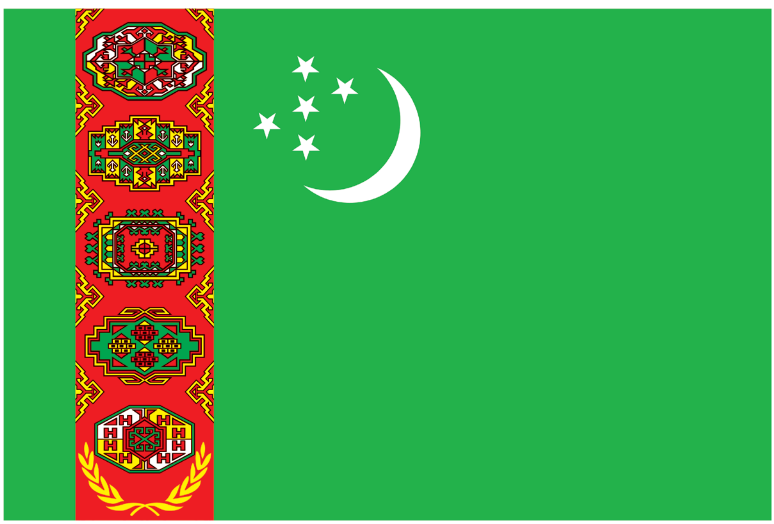
UDK
H

Hudaýberenow Ö. G., Nuryllaýew N.
H **Tehniki we ykdysady meselelerde matematiki modelirleme.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2012.

TDKP № 2012 KBK

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Türkmenistanyň Prezidenti
Gurbanguly Berdimuhamedow:

– Biz häzir Türkmenistanda milli bilim ulgamynda düýpli özgertmeler geçirmäge girişdik. Şol özgertmeleriň baş maksady – türkmen ýaşlaryna dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilim ulgamyny elýeterli etmekden ybaratdyr.

1. GIRIŞ

Hormatly Prezidentimiziň bilim, ylym ulgamyna degişli kabul eden kararlaryna laýyklykda, Türkmenistan ýurdumyzda milli bilim ulgamyny kämilleşdirmek boýunça düýpli özgertmeler geçirilýär.

Ýokary okuw mekdeplerinde dünýäniň iň ösen talaplaryna laýyk gelýän bilimli, kämil hünärmenleri taýýarlamak boýunça netijeli işler alnyp barylýar.

Geljekki inženerleriň hünär taýýarlygynda ýokary matematikanyň esasy düşünjeleriniň, aýratyn hem matematiki modelirlemä degişli düşünjeleriň ähmiýeti örän uludyr. Matematika, dörän gününden başlap, tebigaty öwrenmegiň hemmeler tarapyndan ykrar edilen guraly bolup hyzmat edýär. Onuň ulanylyş ýaýlalarynyň sany gitdigiçe artýar. Olara ykdysadyýet, ekologiýa, sosiologiýa, statistika we beýlekiler mysal bolup biler.

Häzirki zaman önümçiligi ýokary tehniki taýýarlygy talap edýär. Matematiki modelirleme durmuş meselelerini çözmekde pugta orun tutdy. Önümçilik işlerini dogry guramak, olary kämilleşdirmek, az çykdajylar bilen amatly çözüwleri tapmak, mümkin bolan heläkçilikleriň öňüni almak we beýleki köp sanly meseleler matemaliki modelirleme arkaly çözülip bilner.

Şu ýerde iki zady bellemek zerur. Birinjiden, islendik tejribe haýsy hem bolsa bir nazary konsepsiýa esaslanylyp geçirilende şowly bolýar. Ikinji tarapdan, islendik nazaryýet hemişe tejribelere esaslanýar. Mysal üçin, geliosentrik nazaryýetiň ýüze çykmagy Güne we planetalara göniden-göni gözegçilik etmek bilen baglanyşyklydyr. Eger öwrenilýän hadysa barada maglumat az bolsa, ol ýeterlik derejede öwrenilmedik bolsa, onda matematiki formalizasiýa barada hiç hili gürrüň edip bolmajak ýaly görünýär. Emma, göni tejribe arkaly öwrenilýän hadysa barada maglumat ýygnamagyň örän kyn, hat-da mümkin däl halatlarynda hem, matematiki modelirlemäniň diýseň ähmiýetli bolýan wagtlary bardyr. Otnositellik nazaryýetiniň döremegini we soňra onuň kanunlarynyň eksperimental tassyklanylmagyny, täze planetalaryň (Neptun, Pluton) barlygynyň nazary usul bilen aýdylmagyny we soňra olaryň gözlegler netijesinde tapylmagyny şeýle täsin ýagdaýlaryň mysallary hökmünde görkezmek bolar.

Model obýekti öwrenmegi ýeňilleşdirmek üçin, ol barada giňişleýin maglumat almak üçin, öbýektiň tebigy berlişinden üýtgeşigräk görnüşde gurnalýan bir guraldyr. Ol dürli niýetler bilen, mysal üçin:

1) tebigatda bolup geçýän hadysalara düşünmek üçin;
2) öwrenilýän obýekte uýgunlaşmak üçin;
3) çaklamalar düzmek üçin;
4) tejribe geçirmek üçin;
5) obýektiň giňişlik we wagt ölçeglerinde özüni alyp barşyny öwrenmek üçin;
6) ykdysadyýetde we beýleki ugurlarda amatly usullary we ýollary saýlap almak üçin

gurnalyp bilner. Modeller görnüşleri boýunça hem tapawutlanýarlar. Olar:

1) gurulýan desganyň üýtgedilen ululykdaky hereket edýän modeli (uçaryň modeli, zawodyň konweýeriniň modeli we ş.m.);
2) analog modeli (medisinada ulanylýan dürli gurallar we ş.m.);
3) abstrakt model

görnüşlerinde bolup bilýär.

Biz modelleriň soňky görnüşi barada giňişleýin gürrüň ederis. Modelirleme diýmek, modeliň kömegi bilen öwrenilýän obýekt barada täze düşünjeleri tapmak diýmekdir. Modelirlemäniň özüne ýeterlik kynçylyklary bardyr. Meselem, modeliň takyklygynyň pes bolmagy mümkin. Bu ýagdaýda, modeliň kömegi bilen alnan netijeleri tebigy tejribeleriň netijeleri bilen deňeşdirmek arkaly modeli öwrenip, ony kämilleşdirýärler.

Adamzat taryhynda, onuň ösüşi üçin ähmiýetli bolan dürli-dürli modellere gabat gelmek bolýar. Düzülen modelleriň nätakyk, ýa-da düýbünden nädogry bolup çykýan halatlary hem bolýar. Mysal üçin, alymlar Güne, Ýere, Aýa we planetalara gözegçilik etmek bilen olaryň hereketlerini öwrenipdirler. Şonuň esasynda, Günüň we planetalaryň Ýeriň daşyndan aýlanýandygy baradaky geosentrik model ýüze çykypdyr. Bu modeliň ýalňyşdygy diňe köp ýüz ýyllyklar geçenden soň, N.Kopernigiň geliosentrik modeliniň döremegi bilen, aýan bolýar. Ýene-de bir mysal. «Tebigatda bolup geçýän hereketleriň sebäbi nämede?» diýen örän möhüm sowal gadymy döwürde ýüze çykypdyr. Beýik grek alymy Aristotel onuň sebäbiniň güýç bolýanyny tassyklapdyr. Emma, bu dogry netije bilen bilelikde, ol: «jisime täsir edýän güýç, onuň tizligine proporsionaldyr» diýen ýalňyş modeli hem öňe sürüpdir. Bu model G.Galileý tarapyndan inkär edilýänçä, köp ýüzýyllyklaryň dowamynda dogry hasap edilipdir. Elbetde, beýle modelleriň adamzadyň ösüşini togtadýanlygy düşnükli, olaryň ägirt zyýan getirenligi hem düşnüklidir. Onuň tersine, dogry gurnalan modeliň ösüşe bolan položitel täsiriniň uludygyny Nýutonyň Bütindünýä dartylma kanunynyň mysalynda görkezmek bolar.

2. MODELIRLEMEDE ÝÜZE ÇYKÝAN MESELELER

Modelirleme örän jogapkärli mesele. Ýalňyş düzülen modeliň diňe bir adam üçin, ýa-da bolmasa diňe bir gural üçin däl, eýsem jemgyýet üçin getirjek zyýanynyň örän uly bolmagy mümkin. Şol sebäpli modelirleme meselesine, ylaýta-da ykdysadyýet, jemgyýet bilen bagly meselelere örän jogapkärli çemeleşmeli. Umuman, islendik modele hem şeýle çemeleşmeli, sebäbi ýalňyş düzülen model düzüjini, ulanýany gelşiksiz ýagdaýlara salmagy mümkin. Iň erbedi hem, adamlarda matematika ylmyna bolan ynamsyzlygy döretmegi mümkin. Elbetde, bu ýolberilmesiz ýagdaýlardyr.

Model düzmäge girişýänlere käbir umumy görkezmeleri teklip etmek bolar:

1. Model düzmeklige girişmezden ozal, obýekt düýpli öwrenilmelidir. Düzüji obýektiň haýsy kanunlara, prinsiplere laýyklykda öz işini dolandyrýandygyny anyklamalydyr. Ol kanunlary we prinsipleri doly öwrenmelidir we olary ulanyp bilmelidir.

2. Seredilýän obýekt barada ýeterlik maglumat ýygnap bolmaýanlygy ony kän çäklendirmeli däldir. Muňa Nýutonyň Bütindünýä dartylma kanunynyň açylmagy mysal bolup biler.

3. Düzüji öwrenilýän obýekte meňzeş obýektler üçin düzülen modeller bilen tanyş bolmalydyr. Olary düýpli öwrenmelidir.

4. Düzüji «haýsy model gowy?» diýen sowala jogap tapmalydyr.

5. Düzüji öwrenilýän obýekte degişli meseläni matematikanyň diline geçirmegi başarmalydyr, sebäbi modelleriň içinde iň arzany we iň ähmiýetlisi matematiki modeldir.

Mysala ýüzleneliň. Bir uly massiwi suwarmak üçin ulanylýan kanalyň başlanýan ýerinde, wagt birliginde Q m^3 suw goýberilýär diýeliň. Suwy massiwe paýlaýan gatlanyň ýanynda ölçelende, kanalyň kese kesiginden wagt birliginde Q_1 m^3 suw geçýär diýeliň. Onda, suwuň gatla gelýänçä, wagt birligindäki ýitgisi $(Q - Q_1)$ m^3 bolar. Şol mukdaryň «näçesi bugarma bilen, näçesi syzma bilen bagly» diýen sowala jogap bermeli bolsun. Bu ýerde model düzüji köp kanunlary öwrenmeli bolýar. Kanaldan suwuň syzma kanuny nähili? Syzma kanuny suwuň düzümine baglymy? Syzma kanuny kanaly gurşaýan topragyň düzümine baglymy? Bu baglylyklary nähili ölçemeli? Kanaldaky suw nähili kanuna laýyklykda bugarýar? Bugarma suwuň düzümine baglymy? Kanalyň ýerleşýän ýerine (geografik giňişligine) baglymy? Bugarma Günüň radiasiýasy bilen nähili baglanyşykda? Ine, şular ýaly sowallaryň onlarçasyna jogap tapmaly bolar.

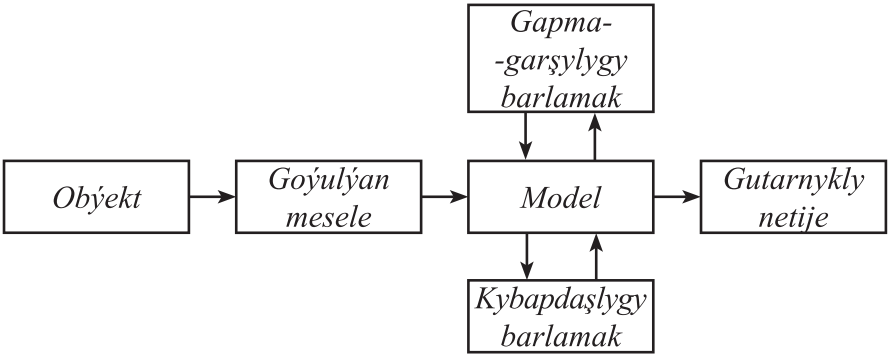
Model düzüldi diýip güman edeliň. Ilki bilen, «düzülen model gapma-garşylykly bolaýmasyn» diýen sowal ýüze çykýar, ýagny modeliň çözüwi ýok bolmagy mümkin. Eger şeýle bolsa, onda obýekt baradaky mesele ýalňyş goýlan bolmaly ýa-da model ýalňyş düzülendir. Diýmek, bu iki ýagdaý başda barlanylmaly.

Goý, model barlanyldy, onuň çözüwi bar diýeliň. Onda: «Modelden alnan netijeler goýlan meseläniň jogabymy ýa-da dälmi» diýen sowal gelip çykýar. Bu – modeliň goýlan mesele bilen deňgüýçliligi ýa-da, başgaça aýdylanda, olaryň kybapdaşlygy baradaky sowaldyr. Ol iň möhüm sowallaryň biridir we hökmany suratda barlanylmalydyr, sebäbi modelden alnan netijäniň hakykatdan daş bolmagy mümkin.

Goý, kybapdaşlyk barlanyldy, ýöne öwrenilýän obýektde geçirilen tejribeler esasynda alnan netijeler bilen modelden alnan netijeleriň gabat gelşi ýeterlik gowy däl diýeliň. Bu ýagdaý düzülen modeliň ýeterlik derejede dogry düzülmändigini aňladýar. Diýmek, modeli täzelemeli, ýagny, obýekti düýpli öwrenmek bilen modele täzelikler girizmeli.

Ondan soňra ýokardaky barlaglar täzeden başlanýar: modeliň gapma-garşylykly däldigi, onuň kybapdaşlygy barlanylýar, model täzelenilýär. Ahyrda kanagatlanarly model alynýança, bu barlaglar gaýtalanylýar.

Aýdylanlary kanaldan suw ýitgisi baradaky ýokarda getirilen meselede düşündireliň. Goý, suw ýitgisini anyklamak üçin düzülen model gapma-garşylykly boldy diýeliň. Kanaldan suw ýitgisiniň barlygy, onuň bir böleginiň syzma bilen, beýleki böleginiň bugarma bilen baglydygy dogry. Diýmek, goýlan mesele dogry. Onda bu ýerden modeliň ýalňyş düzülendigi gelip çykýar. Goý, modele düzedişler girizildi diýeliň. Modeli çözeliň we netijeler alalyň. Mysal üçin, «ýitgi diňe bugarma bagly» diýen netije gelip çykýan bolsun. Bu ýagdaý şübheli bolýar. Diýmek, kybapdaşlyk ýok bolýar. Goý, bu ýagdaý hem düzedildi diýeliň (modele ýene-de düzedişler girizilýär). Soňky düzedilen modelden alnan netijeleri, tejribe arkaly bugarma baradaky kesgitlenen netijeler bilen deňeşdirýärler. Eger gowy gabat gelse («gowy» gabat gelme meselesi modelirleýji tarapyndan çözülen bolmaly), onda model gowy diýse bolýar. Eger ýene-de gabat gelşi kanagatlanarly bolmasa, onda modeli täzelemeli bolýar we ýokarky barlaglary ýene-de geçirmeli bolýar. Aýdylanlary aşakdaky shema boýunça aňladýarlar:



3. MATEMATIKI MODEL

Model düzmäge nähili çemeleşmeli?

Model düzmek meseläni anyklamakdan başlanýar. Köp halatlarda, obýektiň gurşap alýan obýektler bilen çylşyrymly aragatnaşygy meseläni anyk beýan etmäge päsgel berýär. Şol sebäpli, meseläni anyk çäklendirmek köp wagt talap edýär we düzüjiniň köp zatlardan başynyň çykmagyny talap edýär. Olaryň iň ýönekeýleri öwrenilýän, ýa-da şoňa meňzeş obýekt bilen iş salyşýanlar bilen gürrüňdeş bolmakdan, obýekte degişli materiallary ýygnamakdan we öwrenmekden ybaratdyr. Ikinji bir mesele öwrenilýän obýektiň özboluşly aýratynlyklaryny kesgitlemekden, saýlap bilmekden, olary tertipleşdirmekden we olaryň esasylaryny hem-de esasy dällerini seljermekden, şeýle hem esasy häsiýetleriň özara baglanyşyklaryny anyklamakdan durýar. Ondan başga-da, gerek bolsa, käbir häsiýetleri ideallaşdyrmaly bolýar. Mysal üçin, ýapdan akýan suw bilen bagly meseleler öwrenilende köp halatda akymy laminar (bulanmaýan) akym hasap etse bolýar; jisimiň hereketi öwrenilende howanyň garşygyly ýok hasap etse bolýar; jisimiň üst boýunça hereketi öwrenilende üstüň sürtülmesi ýok hasap etse bolýar we ş.m.

Berlen obýekti doly kesgitleýän sebäpleriň esasylaryny matematiki düşünjeler bilen çalşyrmaklyga we olaryň arasyndaky baglanyşyklary tapmaklyga matematiki model düzmek diýilýär. Bu mesele köp wagty we örän takyk bolmagy talap edýär. Matematiki model köp görnüşlerde bolup biler. Fiziki ýagdaýlar öwrenilende model, esasan, differensial deňlemeler görnüşinde bolýar. Ykdysady meseleler öwrenilende model algebraik deňlemeler ýa-da deňsizlikler ulgamlary görnüşinde bolýar we ş.m. Nähili görnüşde bolsa-da, modeliň gapma-garşylyksyz bolmagy barlanylmalydyr. Ol bolsa, modeliň deňlemeler ulgamynyň çözüwiniň barlygyny we ýeke-täkligini anyklamaklyga syrygýar.

Kyn meseleleriň ýene-de biri – kybapdaşlygy barlamaklyk bolýar. Şol bir modeliň bir ýagdaýda öwrenilýän obýekte kybapdaş, beýleki ýagdaýda bolsa, kybapdaş däl bolmagy mümkindir. Mysal üçin, matematiki maýatnigiň modelinden alnan çözüw, wagtyň dowamynda öçmeýän yrgyldyny berýär diýeliň. Emma, tebigatda ol beýle däl. Wagtyň geçmegi bilen yrgyldy öçýär. Diýmek, şu model maýatnigiň uzak wagtyň dowamyndaky yrgyldysy öwrenilende kybapdaş bolmaýar. Eger-de, biz maýatnigiň az wagtyň dowamyndaky yrgyldysyny öwrenýän bolsak, onda bu model öwrenilýän herekete kybapdaş bolýar. Şol sebäpli, kybapdaşlyk meselesi öwrenilende, şertler doly kesgitlenilmelidir, ýagny, ýokardaky meselede giňişligiň haýsy böleginde, wagt okunyň haýsy böleginde kybapdaşlyk barlanylýandygy anyklanylmalydyr.

Ondan başga-da, model düzülende öňden belli gatnaşyklar, kanunlar we obýekt bilen bagly ululyklar (mysal üçin, maýatnigiň ýüpüniň uzynlygy, massasy we ş.m.) ulanylýar. Eger, şol gatnaşyklardyr ululyklaryň kesgitleniş takyklygy pes bolsa, elbetde, modeliň hem takyklygy uly bolup bilmez. Mysal üçin, ýokarda agzalan meselede maýatnigiň agramyny örän nätakyk kesgitläp, modeli çözüp alnan hereket kanunynyň örän takyk bolmagyny talap edip bolmaz.

Beýleki tarapdan, model düzülende köp halatlarda «çarhda sürtülme ýok», «ýüpüň agramy ýok», «süýnmeýän ýüp», «ideal gaz», «şepbeşiksiz suwuklyk» ýaly düşünjeler ulanylýar. Elbetde, tebigatda ideal gaz hem ýok, şepbeşiksiz suwuklyk hem ýok, süýnmeýän ýüp hem ýok. Şeýle-de bolsa, şu düşünjeleri ulanyp düzülen modelleriň amatly bolýan halatlary az däldir. Garaz, model düzmek aňsat iş däl. Ol, esasan, düzýäniň tejribesine bagly bolýar. Mysal üçin, düzülen modelde tükeniksiz kiçi ululyklar gabat gelýän bolsa, tejribeli model düzüji ýokary tertipli tükeniksiz kiçileri taşlap, köp ýagdaýlarda örän amatly modelleri düzýär, ýa-da obýekte degişli käbir sebäpleriň täsiriniň ujypsyzdygyny anyklap, olary göz öňünde tutman, meseläni we modeli has ýönekeýleşdirip bilýär we ş.m.

Indi matematiki modelirlemäniň giňden ulanylýan ugurlaryna seredeliň.

1. Matematiki model, köp ýagdaýda, hasaplama tejribelerini geçirip, ediljek hereketleriň täsirini öňünden aýtmak üçin ulanylýar. Bu hili modeller, umuman, obýektiň özünde tejribeleriň geçirip bolmajak, ýa-da olaryň örän gymmat düşýän hallarynda ulanylýar. Mysal hökmünde, her bir adamyň endamyndaky ganyň mukdary näçe diýen meseläni, ýa-da bolmasa, zawodlarda gurulýan konweýerleriň işleýşini barlamak baradaky meseläni görkezmek bolar.

2. Matematiki model täze sistemalaryň işini öwrenip, olary özgertmek, ýa-da gowulaşdyrmak maksasdy bilen hem ulanylýar. Bu ýagdaý, köplenç, ykdysadyýet bilen baglanyşykly meselelerde ýüze çykýar. Mysal üçin: «nähili edip goýberilýän desgalaryň hilini gowulandyrmaly»; «goýberilýän desgalaryň sanyny azaltmazdan we hilini peseltmezden zawodyň umumy çykdajysyny nähili edip azaldyp boljak».

3. Täze usulyň, täze ideýanyň, geljekde berjek artykmaçlyklaryny öňünden görkezmek üçin hem matematiki model ulanylýar. Bu hili mesele önümçilik edaralarynda, dolandyryş edaralarynda, ylmy institutlarda ýüze çykyp biler.

4. Matematiki model çaklamalar we taslamalar düzmek üçin iň amatly gurallaryň biridir.

Matematiki modelirleme arkaly çözülýän meseleleriň sany ýyl-ýyldan artýar. Bu – matematikanyň ösmegi bilen, onuň usullarynyň güýçlenmegi bilen we täze şahalarynyň döremegi bilen baglydyr. Matematika näme, ol durşuna hyýaly ylymmy, hakykata bolan gatnaşygy nähili diýen filosofiki soraglar hakykatda – «matematiki model näme», «onuň hakykat bilen baglanyşygy nähili» we «matematiki modeller nähili düzülýär» – diýen soraglara syrygýar.

EHM-iň döremegi matematiki modeliň ulanylýan ýaýlasyny has hem giňeltdi. Asla matematiki modelirleme ulanylmaýan ylym pudagy ýok diýmek bolar. Hiç bir pikiriňe gelmejek ýerlerde hem matematikanyň usullary ulanylýar. Oňa matematiki lingwistika, matematiki geografiýa, oýunlar nazaryýetiniň matematiki esasy we başgalar mysal bolup biler. Matematiki statistika, ykdysady meseleleri çözmäge gönükdirilen çyzykly we çyzykly däl programmirleme, ygtybarlyk nazaryýeti, matematiki fizika ýaly ugurlara bolsa matematikanyň şahalary hökmünde garamak hem bolar.

Adatça, matematiki modeliň düzülmeginiň başlangyjy – tejribeçiniň öňünden çykýan aýratyn bir ýagdaý bolýar. Mysal üçin, köpri gurýan inženeriň öňünde «guruljak köpri ol köprüden geçiriljek agyrlyklary göterermikä», «köprüniň ömri näçeräk boljak» we ş.m. meseleler durýar. Desgalary bejerýän edaranyň başlygynyň öňünde «bejeriljek desgalaryň nobatyny nähili edip azaltmaly» we ş.m. meseleler durýar.

Model düzmek kyn mesele. Bu barada öň hem aýdylypdy. Umuman, model birnäçe häsiýetlere eýe bolmaly:

1. Model ony ulanyja düşnükli bolmaly.
2. Gerekli we peýdalanyp boljak netijeleri bermeli.
3. Aňsat özgerdip, täzelikleri girizip bolýan bolmaly.
4. Gaty gymmat bolmaly däl.
5. Takyklygy ýeterlik derejede bolmaly.

Şu talaplara laýyklykda modeli düzmegiň we ulanmagyň ýoluny 1-nji blok-shemada görmek bolar.

Shemanyň ulanylyşyny bir mysalda görkezeliň.

Öwrenmeli obýekt – dükanda kassanyň öňünde alyjylaryň garaşma nobaty.

1. Obýekt bilen bagly çözmeli meseläniň kesgitlenilişi.

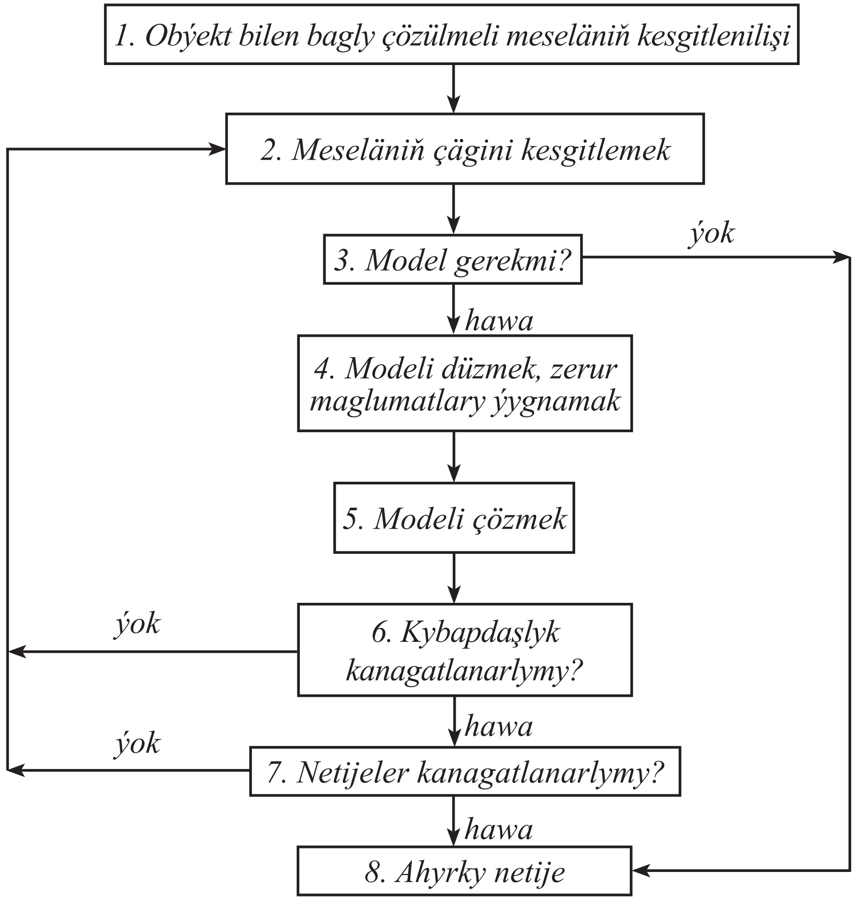
Gyzyklandyrýan mesele:

a) Alyjynyň nobatda garaşmaly wagtynyň we kassiriň oňa hyzmat edýän wagtynyň jemininiň ortaça bahasy;

b) Kassiriň boş durýan wagtynyň iş wagtyna bolan göterim gatnaşygy.

2. Meseläniň çägini kesgitlemek.

Berlen: alyjylaryň yzygiderli gelmeginiň wagty 1 we 10 minut arasynda deňölçegli paýlanan. Kassiriň alyja hyzmat edýän wagty 1 we 6 minut arasynda deňölçegli paýlanan.



1-nji blok-shema

3. Model düzmek gerekmi? – gerek.

4. Model düzmek. 10 sany tegek alyp olary 1-den 10-a çenli belgilemeli. Alty granynda 1-den 6-a çenli san ýazylan kubjagazy almaly. Birinji ädim. Tegekleri bir gaba salyp we gowy garyşdyryp içinden tötänden birini almaly. Tegegiň belgisi kassanyň ýanyna öňki alyjynyň gelen wagty bilen ondan soň gelen alyjynyň kassa baran wagtynyň tapawudyny görkezýär diýip kabul edeliň. Soňra kubjagazy oklalyň we onuň ýokarsyndaky sany belläliň. Ol sana kassa gelen soňky alyja kassiriň hyzmat edýän wagty hökmünde garalyň.

5. Modeli çözmek.

Bu tejribäni köp gezek gaýtalap wagtlar hatarlaryny alarys. Olaryň biri yzly-yzyna gelýän alyjylaryň arasyndaky wagt interwallaryny berse, ikinjisi – degişli alyja kassir tarapyndan hyzmat edilýän wagtlaryň hatary bolar.

6. Kybapdaşlygy barlamak. Alnan san hatarlaryny derňemek we tejribäniň netijesi bilen deňeşdirmek. Mysal üçin, 20 sany alyjy geldi diýeliň. Olaryň ortaça garaşan wagtyny we ortaça hyzmat ediliş wagtyny hasaplalyň (bu biziň obýekt bilen geçiren tejribämiz bolar). Soňra biz tegekleri gapdan 19 gezek çykaryp (her gezek öňki çykarylan tegek gaba gaýtarylýar we gapdakylar gowja garyşdyrylýar), alyjylaryň yzly-yzyna gelýän wagt aralyklarynyň hataryny, kubjagazy bolsa 20 gezek taşlap, olara kassir tarapyndan hyzmat ediliş wagtlarynyň hataryny alarys. Analiziň netijesinde, alyjynyň kassanyň ýanynda geçiren wagtynyň ortaça bahasy 3-4 minut, kassiriň biperwaý geçirýän wagtynyň göterimi 47% bolup çykýar. Bu – modelden alnan çözüw bolýar. Bu çözüw tejribede alnan çözüw bilen deňeşdirilip kybapdaşlyk barlanylýar.

Barlag birnäçe görnüşde geçirilýär.

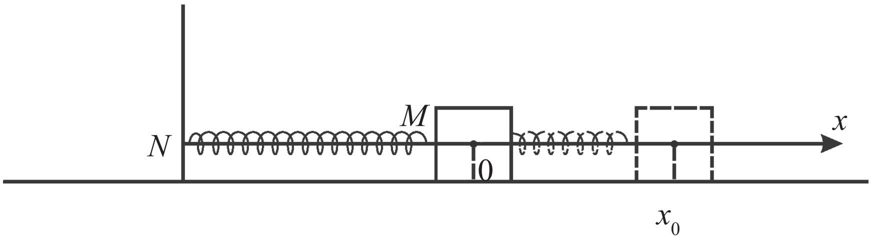
1. Modeliň birinji ýakynlaşmada dogrulygy barlanylýar. Adatça, modele girýän parametrleriň aňryçäk bahalary berlip, alnan netijäniň manysynyň barlygy barlanylýar. Biziň modelimizde bu – alyjylaryň sany örän az we örän köp diýen ýagdaýlar bolýar.

2. Kybapdaşlygy barlamagyň ikinji usuly – modeliň başdaky çäklendirmeleri kanagatlandyrýanlygyny barlamakdan durýar. Biziň mysalymyzda ol iki barlaga syrygýar. Birinjiden, – tegekleri gapdan yzygiderli çykarylyp alnan sanlar [1, 10] kesimde deňölçegli paýlanan tötän ululygyň bahalaryny çalşyryp bilermi? – diýen sowal. Ikinjiden, – sanly kubjagazy oklamak arkaly alnan sanlar [1, 6] kesimde deňölçegli paýlanan tötän ululygyň bahalaryny çalşyryp bilermi? – diýen sowal. Model düzüji bu sowallara jogap bermegi başarmaly.

Indi biz okyjyny öňden belli modeller bilen we olardan gelip çykýan täsin netijeler bilen tanyşdyrmakçy. Bu modeller mehanikanyň, fizikanyň, ähtimallyklar nazaryýetiniň we beýleki ylymlaryň belli bolan kanunlaryna we prinsiplerine esaslanýar. Olar barada aýratyn durup geçmän, olaryň model düzülende ulanylýanlary bilen gabat gelýän ýerinde tanyşdyrarys.

4. JISIMIŇ TEKIZ ÜSTDÄKI YRGYLDYSY BARADA MESELE

Tekiz üstde massasy m_0 bolan kub görnüşli jisim ýatyr. Onuň bir granynyň diagonallarynyň kesişme M nokadynda pružiniň bir ujy berkidilen. Pružiniň beýleki ujy şol tekizlikde dikilen sütüniň M nokat bilen deň beýiklikde bolan N nokadyna berkidilen (*1-nji surat*).



1-nji surat

Suratda x oky M we N nokatlaryň üstünden geçirilen.

Başlangyç ýagdaýda jisim hereketsiz dur we onuň agyrlyk merkezi $x = 0$ nokat bilen gabat gelýär diýeliň. $t = 0$ pursatda jisimiň agyrlyk merkezi x_0 nokat bilen gabat geler ýaly edip, ony x oky boýunça dartýarlar we goýberýärler. **Mesele** jisimiň yrgyldama kanunyny tapmakdan durýar. Bu meseläni çözmek üçin bize köp maglumatlar gerek bolar. Olar: jisimiň m_0 massasy, pružiniň F_1 maýyşgaklyk güýji, jisimi gurşap alýan howanyň onuň hereketine etjek F_2 täsiri, jisimiň tekiz üstdäki hereketi bilen bagly F_3 sürtülme güýji we jisimiň hereketi bilen bagly başga-da birnäçe ýagdaýlar (mysal üçin, howanyň temperaturasynyň täsiri, pružiniň maýyşgaklyk güýjüniň wagta baglylygy, ýeriň aýlanmasynyň täsiri we başgalar). Bu meseläni matematiki modelirleme usuly bilen çözjek bolalyň. Ilki bilen ýönekeýje modelden başlalyň. Çözmeli mesele ýokarda beýan edildi. Indi model düzmegiň kanuny boýunça meseläni çäklendirmeli:

Birinjiden, tekiz üst ýylmanak we şonuň esasynda jisimiň tekizlige bolan sürtülme güýji ýok hasap edilýär. Howanyň herekete täsiri ujypsyz diýip hasap edilýär we göz öňünde tutulmaýar. Pružiniň maýyşgaklyk güýji wagta bagly däl, howanyň temperaturasy üýtgemän durýar hasap edilýär.

Ikinjiden, jisimiň hereketine diňe onuň massasy we pružiniň maýyşgaklyk güýji täsir edýär hasap edilýär we beýleki ýagdaýlaryň täsiri göz öňünde tutulmaýar. Jisimiň $t = 0$ pursatdaky tizligi nola deň hasap edilýär. Jisim massasy agyrlyk merkezinde ýygnanan nokat hasap edilýär.

Biz meseläni çäklendirdik. Model düzmekde ulanyljak kanunlar:

1) Nýutonyň ikinji kanuny $ma = F$, bu ýerde m –jisimiň massasy, a –tizlenme, F –täsir edýän güýçleriň jemi;

2) Gukuň kanuny $F_1 = -kx$, bu ýerde F_1 – pružiniň maýyşgaklyk güýji, k – koeffisiýent, x – pružiniň uzalmasy.

Modeli düzeliň. Hereketiň diňe x oky boýunça boljakdygy äşgärdir. Onda $F = F_1$ bolýar. Bize gerek ululyk – jisimiň agyrlyk merkeziniň t pursatda tutýan orny. Goý, ol ululyk $x = x(t)$ formula bilen berildi diýeliň. Çäklendirmelere görä $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ bolmaly. Onda jisimiň tizliginiň $\upsilon = \dot{x}(t)$, tizlenmesiniň $a = \ddot{x}(t)$ boljakdygy düşnüklidir.

Indi biz modeli düzmäge taýýar. Ululyklaryň bahalaryny $ma = F_1$ deňlikde goýup, alarys:

$$m_0\ddot{x}(t) = -kx(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{3}$$

(1), (2), (3) matematiki meselä garalýan fiziki prosesiň goýlan çäklendirmelerdäki matematiki modeli diýilýär. (1), (2), (3) meseläni çözüp,

$$x(t) = x_0 \cos\omega t, \ \omega^2 = \frac{k}{m_0} \tag{4}$$

deňlemäni alarys. Bu formulanyň x_0 kiçi bolanda, t çäkli bolanda, tekiz üst ýeterlik ýylmanak bolanda hakykata golaý hereketi berýänligini tejribeler görkezýär. Mesele birinji ýakynlaşmada çözüldi. Şeýlelikde, birinji ýakynlaşmada jisimiň agyrlyk merkezi (4) kanuna laýyklykda hereket edýär we modeliň goýlan meselä kybapdaşlygy bar.

Biz wagtyň geçmegi bilen hereketiň gitdigiçe peselýändigini we ahyrda togtaýandygyny tejribelerden bilýäris. Diýmek, bu model, wagt ýeterlik dowamly bolanda, goýlan fiziki meselä kybapdaş bolmaýar. Şol sebäpli, model uzak wagtyň dowamynda hem kybapdaş bolar ýaly, oňa düzedişler girizmeli bolýar.

Model düzülende edilen çäklendirmeleriň biri tekiz üstüň absolýut ýylmanaklygydyr. Bu çäklendirme durmuşda hiç wagt dogry bolmaýar. Üsti näçe ýylmasaň-da, onda mikroçyzyjaklar galyp, sürtülme güýjüniň emele gelmegine sebäp bolýar. Şol sebäpli, bu çäklendirmäni, tejribelerden gelip çykyşy ýaly, «hereket edýän jisime hereketiň tersine ugrukdyrylan we onuň tizligine proporsional bolan $-F_2 = k_1 \upsilon$ sürtülme güýji täsir edýär» diýen çäklendirme bilen çalşyralyň. Howanyň herekete täsiri ýok diýen çäklendirmäni «howa jisime hereketiň tersine ugrukdyrylan we jisimiň tizligine proporsional bolan $-F_3 = k_2 \upsilon$ güýç bilen täsir edýär» diýen çäklendirme bilen çalşyralyň. Indi biziň täze modelimiz aşakdaky görnüşde bolar:

$$m_0 \ddot{x}(t) = -kx(t) - k_1 \dot{x}(t) - k_2 \dot{x}(t), \qquad (1a)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (2a)$$

$$\dot{x}(0) = 0\ . \qquad (3a)$$

$\frac{k}{m_0} = \omega^2, \quad \frac{k_1 + k_2}{m_0} = 2\alpha$ belgilemeleri girizip, soňky meseläni

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \qquad (1')$$

$$x(0) = x_0, \qquad (2')$$

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad (3')$$

görnüşe getireliň.

Eger üst ýeterlik derejede ýylmanak bolsa, onda, adatça, $\alpha^2 - \omega^2 = -s^2$ bolýar we (1′), (2′), (3′) meseläniň çözüwi

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(st - \varphi), \quad \cos\varphi = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}}, \quad A = \frac{x_0\sqrt{s^2 + \alpha^2}}{s}, \qquad (A)$$

görnüşde bolýar. Bu yrgyldy wagtyň geçmegi bilen öçýän yrgyldydyr. Ol $\alpha > 0$ san näçe uly bolsa, şonça-da basym öçýär we t-niň ýeterlik uly bahalarynda $x(t) \equiv 0$ bolýar, ýagny bu ýagdaýda yrgyldy togtady hasap etmek bolar.

Eger howanyň garşylygy we sürtülme güýji ýeterlik uly bolsa, onda adatça $\alpha^2 - \omega^2 = s^2$ bolýar we (1′), (2′), (3′) meseläniň çözüwi

$$x(t) = \frac{x_0}{2s}\left[(s + \alpha)e^{-(\alpha - s)t} + (s - \alpha)e^{-(\alpha + s)t}\right] \qquad (B)$$

görnüşde bolar. $\alpha - s > 0$, $\alpha + s > 0$ bolýandygy sebäpli bu hem wagtyň geçmegi bilen öçýän yrgyldydyr. Eger-de $\alpha^2 - \omega^2 = 0$ deňlik ýerine ýetse, onda (1′), (2′), (3′) meseläniň çözüwi

$$x(t) = x_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t} \tag{C}$$

görnüşde bolar. Bu ýagdaýa *rezonans* diýýärler. (A), (B), (C) hallaryň üçüsi hem bolup bilýän ýagdaýlar we biz uly ygtybarlyk bilen (1′), (2′), (3′) model seredilýän fiziki meselä kybapdaşdyr diýip bileris. Elbetde, biz soňky modele absolýut takyk diýip bilmeris we gerek bolsa girizilen çäklendirmeleri üýtgedip, täze model düzmeli bolarys.

Umuman, matematiki modeliň öwrenilýän obýekt barada netijeler çykarmak üçin we şonuň esasynda hereket etmek üçin düzülýändigini biz öň aýdypdyk. Gurulan (1′), (2′), (3′) modeli hem-de onuň (A), (B), (C) çözüwlerini öwrenip, biz garalýan yrgyldy barada, jisimiň islendik wagtdaky tizligi, tizlenmesi we başga elementleri barada maglumat alyp bileris we netijeler çykaryp bileris. Mysal üçin, yrgyldy nähili tizlik bilen öçýär, haýsy wagtdan başlap yrgyldy öçdi diýmek bolar we beýleki sowallara jogap berip bileris.

5. KÄBIR ZERUR DÜŞÜNJELER

Biz aşakda mehaniki we fiziki ulgamlarda gabat gelýän hadysalaryň matematiki modelleri düzülende gerek bolýan käbir düşünjeler barada gürrüň ederis. Elbetde, okyjy Nýutonyň mehaniki hereketleriň düýbünde duran üç kanuny bilen tanyş hasap edilýär. Ýokardaky bölümde material nokadyň yrgyldysy baradaky mesele çözülende Nýutonyň ikinji kanuny esasy daýanjymyz bolupdy. Ondan başga-da, kiçi yrgyldylarda pružiniň maýyşgaklyk güýjüniň onuň uzalmasyna proporsional bolýandygy baradaky Gukuň kanunyny we tekiz üstde ýüze çykýan garşylyk güýjüniň we howanyň herekete bolan garşylygynyň jisimiň tizligine bagly bolýandygy baradaky düzgüni ulanypdyk. Indi, gerek boljak düşünjeleriň üstünde durup geçeliň.

Goý, R^3 giňişligiň D ýaýlasynda $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ funksiýalar kesgitlenen diýeliň. Ol funksiýalar D ýaýlanyň her bir nokadynda $\vec{V} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ wektory kesgitleýärler. Şeýle ýagdaýda D ýaýlada $\vec{V}$ *wektor meýdany kesgitlenen* diýýärler.

Eger D ýaýlada kesgitlenen $U(x, y, z)$ funksiýa tapylyp, D ýaýlanyň islendik nokadynda $\frac{\partial U}{\partial x} \equiv P(x,y,z)$, $\frac{\partial U}{\partial y} \equiv Q(x,y,z)$, $\frac{\partial U}{\partial z} \equiv R(x,y,z)$ deňlikler ýerine ýetse, onda $\vec{V}$ meýdana *potensial wektor meýdany*, U funksiýa bolsa *potensial funksiýa* diýýärler.

$$div\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

formula bilen kesgitlenýän $div\vec{V}$ ululyga $\vec{V}$ wektor meýdanynyň *diwergensiýasy* diýýärler. $\vec{V}$ wektor meýdany potensial meýdan bolanda

$$div\vec{V} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

boljakdygy düşnüklidir. Adatça, Gamiltonyň operatory diýlip atlandyrylýan

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

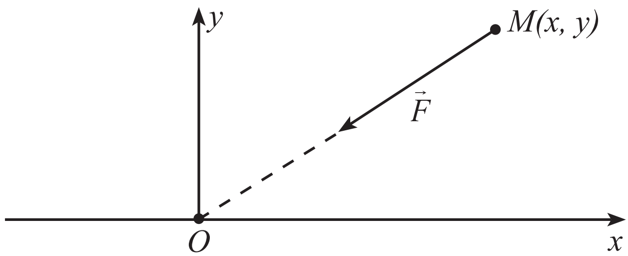
(bu ýerde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ degişlilikde x, y, z oklarynyň ortlary) belgilemäni we Laplasyň operatory diýlip atlandyrylýan

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

belgilemäni girizip, $\vec{V}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy üçin ýokarda getirilen aňlatmalary $div\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$ we $div\vec{V} = \Delta U$ görnüşde hem ýazýarlar.

Mysallara ýüzleneliň.

1-nji mysal. Goý, tekizlikde $O(0,0)$ koordinatalar başlangyjynda e^+ položitel zarýad, $M(x, y)$ nokatda e^- otrisatel zarýad ýerleşen bolsun. Kulonyň kanunyna görä, položitel zarýad otrisatel zarýady ululygy $\frac{k}{x^2 + y^2}$ bolan, ugry $\overrightarrow{MO}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýän $\vec{F}$ güýç bilen özüne çekýär.



2-nji surat

$\sqrt{x^2 + y^2} = r$ belgileme girizip, Kulonyň kanuny ady bilen belli bolan $\vec{F} = -\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} \cdot \frac{k}{r^2}$ formulany ýazyp bileris. $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ deňlikleri ulanyp,

$$\vec{F} = -\vec{r} \cdot \frac{k}{r^3}$$

ýa-da

$$\vec{F} = -(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) \cdot \frac{k}{r^3} = -\frac{xk}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cdot \vec{i} - \frac{yk}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cdot \vec{j}$$

alarys. Soňky formula tekizligiň O nokatdan özge hemme nokatlarynda $\vec{F}$ wektor meýdanyny kesgitleýär. Oňa *elektrik zarýadynyň meýdany* hem diýýärler. Eger indi $U = \frac{k}{r}$ funksiýa girizsek, onda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{xk}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{yk}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}$$

bolar. Diýmek, elektrik zarýadynyň meýdany potensial wektor meýdanydyr, $U = \frac{k}{r}$ funksiýa bolsa onuň potensial funksiýasydyr.

2-nji mysal. Goý, $O(0,0,0)$ koordinatalar başlangyjynda massasy m_1 bolan, $M(x, y, z)$ nokatda bolsa massasy m_2 bolan material nokatlar ýerleşen bolsun. Belli bolşy ýaly, birinji material nokat ikinji material nokady ululygy $\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{x^2 + y^2 + z^2}$ bolan, koordinatalar başlangyjyna ugrukdyrylan $\vec{F}$ güýç bilen özüne çekýär, bu ýerde γ – san koeffisiýenti. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ deňlikleri ulanyp,

$$\vec{F}=-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$$

formulany ýazyp bileris. Bu formula *Nýutonyň bütindünýä dartylma kanuny* ady bilen bellidir. $|\vec{r}\,|=r$ bolýandygyny göz öňünde tutup we $\gamma\cdot m_1\cdot m_2=k$ belgileme girizip, alarys:

$$\vec{F}=-\frac{k\vec{r}}{r^3}.$$

Bu deňlik koordinatalar görnüşinde

$$\vec{F}=\left\{-\frac{kx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3};-\frac{ky}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3};-\frac{kz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\right\}$$

bolar. $\vec{F}$ wektor R^3 giňişligiň O nokatdan özge hemme nokatlarynda wektor meýdanyny kesgitleýär. Oňa O nokadyň dartyş meýdany ýa-da *grawitasiýa meýdany* diýýärler.

Eger indi $U=\frac{k}{r}$ funksiýa girizsek, onda

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{kx}{r^3},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{ky}{r^3},\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{kz}{r^3}$$

boljakdygy düşnüklidir. Diýmek, grawitasiýa meýdany potensial wektor meýdanydyr, $U=\frac{k}{r}$ funksiýa bolsa onuň potensial funksiýasydyr.

Goý, $D\subset R^3$ ýaýlada $U(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. Onda D ýaýlada $U(x, y, z)$ *skalýar wektor meýdany* kesgitlenen diýýärler,

$$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

wektora bolsa g*radiýent wektory* diýýärler. Şeýlelikde, islendik $\vec{F}=\{P,Q,R\}$ wektoryň D ýaýlada potensial wektor meýdanyny emele getirmegi üçin $U(x, y, z)$ potensial funksiýa tapylyp, D ýaýlanyň islendik nokadynda

$$\vec{F} = \nabla U$$

deňligiň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. Ýokarda garalan mysallardaky elektrik zarýadynyň meýdanyny $\vec{F} = \nabla \frac{k}{r}$, material nokadyň dartyş meýdanyny bolsa $\vec{F} = \nabla \frac{k}{r}$ görnüşde ýazyp bileris.

Wektor meýdany bilen bagly ýene bir düşünje girizeliň. Eger $D \subset R^3$ ýaýlada $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ wektor meýdany berlen bolsa we şol ýaýlada P, Q, R funksiýalaryň birinji tertipli önümleri bar bolsa, onda

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

wektora $\vec{V}$ wektor meýdanynyň *towlama wektory* diýýärler we ony $rot\vec{V}$ bilen belgileýärler. Diýmek, kesgitlemä görä,

$$rot\vec{V} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}.$$

Mysal üçin, zarýadyň elektrik meýdanynyň we material nokadyň dartyş meýdanynyň towlama wektorlaryny tapalyň. Başda has umumy ýagdaýa seredeliň. Goý, $\vec{V} = \{P, Q, R\}$ potensial wektor meýdany bolsun, $U(x, y, z)$ – birinji we ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolan potensial funksiýa bolsun. Alarys:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x},\ Q = \frac{\partial U}{\partial y},\ R = \frac{\partial U}{\partial z},\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \equiv 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Diýmek, potensial funksiýasy ýokardaky şertleri kanagatlandyrýan islendik potensial meýdanyň towlama wektory $\vec{0}$ wektor bolýar. Şuňa esaslanyp, elektrik zarýadynyň meýdanynyň hem, material nokadyň dartyş meýdanynyň hem towlama wektorlarynyň $\vec{0}$ wektor boljakdygyny tassyklap bileris.

Üçünji tertipli kesgitleýjileriň hasaplanyş usulyndan, şeýle hem wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň tapylyş usulyndan peýdalanyp, $rot\vec{V}$ wektory

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

we

$$rot\vec{V} = [\nabla \times \vec{V}].$$

görnüşlerde hem aňlatmak bolar.

6. MATERIAL NOKADY HEREKETE GETIRÝÄN GÜÝJÜŇ BITIRÝÄN IŞI

Goý, Z egrini öz içinde saklaýan $D \subset R^3$ ýaýlada $\vec{F} = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ wektor meýdany kesgitlenen bolsun. $M(u,v,w)$ nokatlary Z egriniň nokatlary hasap edip, Z egriniň nokatlarynda kesgitlenen $\vec{F_Z} = \{P(u,v,w),\ Q(u,v,w),\ R(u,v,w)\}$ wektory alarys. Bu wektory güýç hasap edeliň. Material nokat $\vec{F_Z}$ güýjüň täsiri astynda Z egri boýunça hereket edip, egriniň A nokadyndan başlap, B nokadyna ýetdi diýeliň. $\vec{F_Z}$ güýjüň şu geçişdäki bitiren işini Q_* bilen belgiläliň. Bu işe $\vec{F}$ wektor meýdanynyň şu geçişdäki bitiren işi diýýärler. **Şeýlelik bilen, mesele islendik $\vec{F_Z}$ güýjüň täsiri astynda bolan geçişde, ol güýjüň bitiren Q_* işini tapmakdan durýar.**

Biz bu meseläniň matematiki modelini düzmeli we onuň goýlan meselä kybapdaşlygyny derňemeli. Meseläni çäklendireliň.

Birinjiden, Z egriniň uzynlygynyň çäkli bolmagyny we bölekleýin endigan egri bolmagyny talap edeliň.

Ikinjiden, Z egrini (A, B nokatlar bilen bilelikde) öz içinde saklaýan bir açyk ýaýlada $\vec{F}$ güýjüň koordinatalarynyň üznüksiz bolmagyny talap edeliň.

Bu iki talabyň köp halatlarda ýerine ýetýändigini tejribeler görkezýär. Şonuň üçin, bu çäklendirmeleri ýerlikli hasap etmek bolar.

Z egrini $M_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$ ($k = \overline{0,n},\ M_0 = A,\ M_n = B$) nokatlar bilen bölejiklere böleliň. Depeleri M_k nokatlarda bolan döwük çyzygy

Z_n bilen belgiläliň. $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ duganyň uzynlygyny h_k bilen belgiläliň. Goý, $h = \max\limits_k h_k$ bolsun.

Üçünjiden, h ýeterlik kiçi bolanda, $\vec{F}_Z$ güýjüň $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ duga boýunça bitiren işini onuň $M_{k-1}M_k$ horda boýunça bitirýän işi bilen çalşyrjakdyrys.

Bu çäklendirme-de ýerliklidir. Sebäbi, Z döwük çyzyk bolsa, onda onuň $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ bölejigi $M_{k-1}M_k$ horda bilen gabat gelýär. Eger Z endigan bolsa, onda h-yň ýeterlik kiçi bahalarynda $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ duga bilen $M_{k-1}M_k$ hordanyň örän jebis boljakdygy aýdyňdyr.

Şeýlelikde, modeliň çäklendirmeleri düzüldi we olaryň ýerlikli bolýandyklary aýdyňlaşdyryldy hasap etmek bolar. Indi model düzmäge geçýäris.

Üçünji çäklendirmä laýyklykda material nokadyň $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ duga boýunça M_{k-1} nokatdan M_k nokada geçendäki $\vec{F}_Z$ güýjüň bitiren A_k işini güýjüň şol nokat M_{k-1} nokatdan M_k nokada $M_{k-1}M_k$ horda boýunça geçendäki bitiren $\tilde{A}_k$ işi bilen çalşyralyň. Eger $\vec{F}_Z$ güýjüň material nokady A nokatdan B nokada geçirmekdäki bitiren işi Q_* bolsa, onda $Q_* = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ bolar. $A_k \approx \tilde{A}_k$ bolýandygy sebäpli,

$$Q_* \approx \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k \qquad (1)$$

aňlatmany alarys. (1) biziň takmyn modelimizdir. Onuň h näçe kiçi bolsa, şonça-da takyk boljakdygy düşnüklidir. Modeli anyklaşdyralyň. $M_{k-1}\overset{\cup}{}M_k$ duganyň üstünde $N_k(u_k,\ v_k,\ w_k)$ nokat alalyň we $\tilde{A}_k$ işi $\vec{F}_k = \{P(u_k, v_k, w_k),\ Q(u_k, v_k w_k), R(u_k, v_k, w_k)\}$ hemişelik güýjüň $M_{k-1}M_k$ horda boýunça bitiren işi bilen çalşyralyň. Belli bolşy ýaly, $\vec{F}_k$ hemişelik güýjüň $M_{k-1}M_k$ kesim boýunça bitiren $\tilde{A}_k$ işi

$$\tilde{A}_k = (\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F}_k)$$

formula arkaly kesgitlenýär. Diýmek,

$$Q_* \approx \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F}_k) \qquad (2)$$

formulany alarys. Eger Z – göni çyzygyň kesimi bolsa, $\vec{F} = \vec{F_0}$ hemişelik bolsa, onda $\vec{F_k} = \vec{F_0}$, $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \overrightarrow{M_0M_n}$ bolar we

$$Q_* = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F_k}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F_0} \right) = (\overrightarrow{M_0M_n} \cdot \vec{F_0})$$

takyk formulany alarys. Şol sebäpli, birinji ýakynlaşmada biziň modelimiz goýlan meselä kybapdaş diýip bileris. (2) modeli anyklaşdyralyň. $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$, $k = \overline{1,n}$ belgilemeleri girizip,

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \{\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k\}$$

we

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \vec{F_k} = P(u_k, v_k, w_k)\Delta x_k + Q(u_k, v_k, w_k)\Delta y_k + R(u_k, v_k, w_k)\Delta z_k$$

bahalary (2) formulada ýerine goýup, alarys:

$$Q_* \approx \sum_{k=1}^{n} (P(u_k, v_k, w_k)\Delta x_k + Q(u_k, v_k, w_k)\Delta y_k + R(u_k, v_k, w_k)\Delta z_k).$$

h nola ymtylanda bu deňligiň gitdigiçe takyklaşýandygyny hem-de soňky deňligiň sag böleginiň Z egri boýunça 2-nji görnüşli integral jem bolýandygyny göz öňünde tutup, biziň ýokarda agzan çäklendirmelerimizde takyk bolan

$$Q_* = \int_Z Pdx + Qdy + Rdz \tag{3}$$

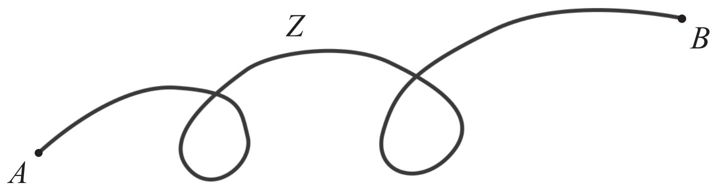
formulany alarys. Bu formula garalýan meseläniň matematiki modelidir. Onuň birinji ýakynlaşmada goýlan meselä kybapdaşlygy barada ýokarda aýdylypdy. Indi biz (3) model goýlan meselä doly kybapdaş diýip bileris. $\vec{V} = \{P; Q; R\}$, $\vec{ds} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ belgilemeleri ulanyp, (3) formulany

$$Q_* = \int_Z (\vec{V} \cdot \vec{ds}) \tag{4}$$

görnüşde hem ýazmak bolar. Indi bir hususy ýagdaýa seredeliň. Goý, $\vec{V} = \nabla U(x, y, z)$ bolsun, ýagny $\vec{V}$ potensial wektor meýdany bolsun. Onda, alarys:

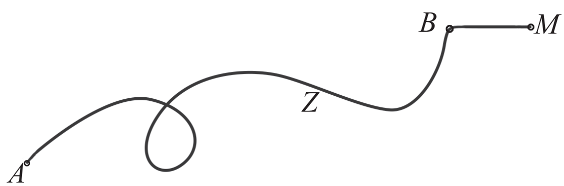
$$Q_* = \int_Z (\vec{V} \cdot \vec{ds}) = \int_A^B (\vec{V} \cdot \vec{ds}) = \int_A^B (\nabla U \cdot \vec{ds}) =$$

$$= \int_A^B \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \int_A^B dU = U(B) - U(A).$$



3-nji surat

Görşümiz ýaly, potensial wektor meýdanynyň material nokady A nokatdan B nokada geçirmekdäki bitiren işi, ol nokadyň A nokatdan B nokada haýsy ýol bilen hereket edendigine bagly bolman, diňe potensial funksiýanyň ahyrky B nokatdaky bahasyndan onuň başlangyç A nokatdaky bahasynyň aýrylmagyna deň bolýar eken. Bu häsiýet potensial wektor meýdanynyň düýp häsiýetidir. Ýagny, eger-de $\vec{V}$ wektor meýdanynyň D ýaýladaky islendik egri boýunça bitiren işi diňe ol egriniň başlangyç we ahyrky nokatlary bilen kesgitlenýän bolsa, onda ol D ýaýlada potensial wektor meýdany bolar. Bu tassyklamanyň subudyny getireliň. $\vec{V} = \{P;Q;R\}$ $D \subset R^3$ ýaýlada kesgitlenen islendik wektor meýdany bolsun. $P,Q,R \in C(\overline{D})$ hasap edeliň. $A(x_0,y_0,z_0) \in D$ bellenen nokat, $B(x,y,z) \in D$ erkin nokat, Δx ýeterlik kiçi bolanda $M(x+\Delta x,y,z) \in D$.



4-nji surat

Şerte görä,

$$\int_Z Pdx + Qdy + Rdx = F(x,y,z),$$

$$\int_{Z \cup BM} Pdx + Qdy + Rdz = F(x+\Delta x,y,z),$$

$$\Delta_x F = F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z) = \int_B^M Pdx + Qdy + Rdz.$$

BM çyzygyň üstünde $dy = 0$, $dz = 0$ bolýandygy sebäpli, $\Delta_x F = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y, z)dx$ bolar. Orta baha baradaky teoremany ulanyp, alarys:

$$\Delta_x F = P(x_c, y, z)\Delta x, \quad x_c \in (x, x+\Delta x),$$

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x_c, y, z),\ F_x'(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x_c, y, z) = P(x, y, z).$$

Edil şuňa meňzeşlikde alarys: $F_y' = Q$, $F_z' = R$, ýagny F funksiýa $\vec{V}$ wektor meýdany üçin potensial funksiýa bolýar we

$$\vec{V} = \nabla F(x, y, z)$$

deňlik ýerlikli bolýar. Şuny hem görkezmek gerekdi.

Wektor meýdanynyň potensial wektor meýdany bolmaklygynyň başga-da ýeterlik şertleri bar. Biz olar barada geljekki bölümlerde gürrüň ederis. Şu ýerde $U(x, y, z)$ potensial funksiýaly meýdanda $U(A) - U(B)$ tapawuda material nokadyň potensial energiýasy diýilýändigini hem ýatlap geçeliň. Adatça, B-niň ýerine $M(x, y, z)$ nokady, A-nyň ýerine $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokady goýup, potensial energiýany Π harpy bilen belgileýärler, ýagny $\Pi = U(M_0) - U(M)$.

$\frac{m\upsilon^2}{2} = K$ ululyga material nokadyň kinetik energiýasy diýilýär. Kinetik we potensial energiýalaryň jemini E bilen belgileýärler we oňa nokadyň doly energiýasy diýýärler, ýagny $E = K + \Pi$. Potensial meýdanda hereket edýän nokadyň doly energiýasy

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + U(M_0) - U(M)$$

formula arkaly tapylýar. Adatça, M_0 nokady $U(M_0) = 0$ bolar ýaly saýlap alýarlar we doly energiýa üçin

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} - U(M)$$

formulany ulanýarlar. Mysal üçin, O nokatda ýerleşen material nokadyň dartyş meýdanynyň $U(x,y,z)=\frac{k}{r}$, $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, potensial funksiýaly meýdan bolany sebäpli, şol meýdanda hereket edýän M material nokadyň potensial energiýasy $\Pi=\frac{k}{r_0}-\frac{k}{r}$ bolar. $r_0=\infty$ hasap edip, $\Pi=-\frac{k}{r}$ deňligi we E üçin

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{k}{r}$$

deňligi alarys.

Ikinji mysal hökmünde jisimiň tekiz üstdäki (4-nji bölümde seredilen) yrgyldy hereketiniň doly energiýasyny tapalyň. Ýönekeýlik üçin jisime diňe onuň agramy bilen pružiniň $F=-kx$ maýyşgaklyk güýji täsir edýär diýeliň. F güýç – potensial güýç. Onuň potensial funksiýasy $U=-\frac{kx^2}{2}$. Şol sebäpli, jisimiň potensial energiýasy $\Pi=\frac{kx^2}{2}$, kinetik energiýasy $K=\frac{m\upsilon^2}{2}$, doly energiýasy $E=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$ bolar. Jisimiň hereketiniň matematiki modeliniň $m\ddot{x}(t)=-kx$ bolýandygyny biz öň görüpdik. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $\dot{x}$ köpeldeliň we özgerdeliň:

$$\dot{x}m\ddot{x}=-kx\dot{x},$$

$$\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)'=-\left(\frac{kx^2}{2}\right)',$$

ýa-da integrirläp,

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}=-\frac{kx^2}{2}+C_0$$

deňlige geleris. Indi $\dot{x}=\upsilon$ bolýandygyny göz öňünde tutup, soňky deňligi

$$\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=C_0$$

ýa-da

$$E=C_0$$

görnüşde ýazyp bileris. Görşümiz ýaly, garalýan hereketde jisimiň doly energiýasy hemişelik san bolýar – ol üýtgemeýär. Potensial funksiýalary bolan güýçlere gysgalyk üçin *potensial güýçler* diýýärler. Soňky häsiýet potensial güýçleriň täsiri astynda hereket edýän material nokatlaryň islendik ulgamy üçin hem dogrudyr.

7. MEHANIKANYŇ WE FIZIKANYŇ BELLI PRINSIPLERINE ESASLANÝAN MODELLER

Baryp XVII asyrda açylan, fransuz alymy Fermanyň adyny göterýän ýönekeý bir prinsipe esaslanýan meselä garalyň.

Goý, ýagtylyk haýsy hem bolsa bir gurşawda A nokatdan B nokada Z çyzyk boýunça ýaýraýan bolsun. Özi hem gurşawyň birjynsly däl bolmagy, hatda onuň n döwülme koeffisiýentiniň nokatdan nokada üýtgeýän bolmagy hem mümkin diýeliň. Goý, Z_1 çyzyk A we B nokatlary birleşdirýän başga bir ýol bolsun.

Fermanyň prinsipi: **Islendik Z_1 üçin**

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds$$

tapawut noldan kiçi däldir.

Bu tapawudy başgaça ýazalyň. Goý, $s = s(t)$ – ýagtylygyň t wagtda Z çyzyk boýunça geçen aralygy bolsun, $s = s_1(t)$ bolsa Z_1 çyzyk boýunça geçip biljek aralygy bolsun. Onda ýagtylygyň tizligi Z çyzyk boýunça $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$, Z_1 çyzyk boýunça $\upsilon_1 = \dfrac{ds_1}{dt}$ bolar. Bu ýerden tapylan $ds = \upsilon dt$, $ds_1 = \upsilon_1 dt$ bahalary ýokardaky aňlatmada ýerine goýup, alarys:

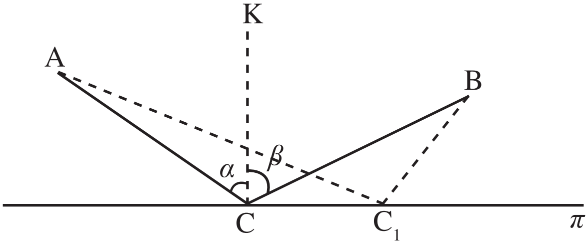
$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds = \int_{Z_1} n\upsilon_1 dt - \int_{Z} n\upsilon dt.$$

Indi $n\upsilon = n\upsilon_1 = c$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds = \int_0^{T_1} n\upsilon_1 dt - \int_0^{T} n\upsilon dt = c(T_1 - T).$$

Bu ýerde T_1 ýagtylygyň Z_1 egri boýunça ýaýrap biljek wagty, T ýagtylygyň Z egri boýunça ýaýran wagty. Diýmek, Fermanyň prinsipine başgaça *tygşytlylyk prinsipi* diýse hem bolardy. Sebäbi, **ýagtylyk A nokatdan B nokada iň gysga wagtda geçip bolýan ýol boýunça ýaýraýar**, ýagny tebigat öz energiýasyny örän tygşytly harç edýär diýmek bolar.

Fermanyň prinsipini ulanyp, optika degişli bir meseläni çözeliň. Şöhle A nokatdan çykyp π gorizontal gönüden C nokatda serpigip, B nokada düşdi diýeliň (*5.1-nji surat*).



5.1-nji surat

C nokatdan π gönä CK perpendikulýar geçireliň, emele gelen burçlary α we β bilen belgiläliň: $\angle ACK = \alpha$, $\angle KCB = \beta$. α burça *şöhläniň düşme burçy*, β burça *şöhläniň serpikme burçy* diýýärler. Mesele α we β burçlaryň arasyndaky baglanyşygy tapmakdan durýar. Matematiki modeli düzmek üçin meseläni çäklendireliň. Çäklendirme ýekeje bolar – şöhle şol bir hemişelik n_0 döwülme koeffisiýentli gurşawda ýaýraýar hasap ederis.

Indi modeli düzeliň. π göni çyzygyň üstünde C nokatdan tapawutly C_1 nokat alalyň we ACB ýoly Z bilen, AC_1B ýoly Z_1 bilen belgiläliň. Onda Fermanyň prinsipine görä,

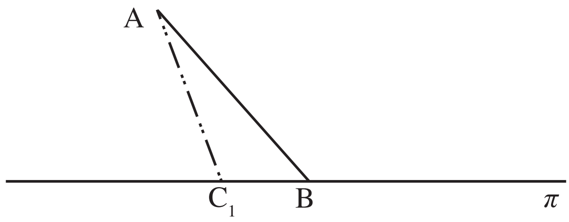
$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds \geq 0 \tag{1}$$

bolmaly bolar. n hemişelik bolany üçin, soňky deňsizligi $n\left(\int_{Z_1} ds - \int_{Z} ds\right) \geq 0$ ýa-da

$$AC_1 + C_1B \geq AC + CB$$

görnüşde ýazyp bileris. Diýmek, islendik C_1 nokat üçin ACB döwük çyzygyň uzynlygy AC_1B döwük çyzygyň uzynlygyndan uly däldir. Şeýlelikde, matematiki modele gelýäris: ***π* göni çyzygyň üstünde, *AC* + *CB* iň kiçi bolar ýaly *C* nokady tapmaly.**

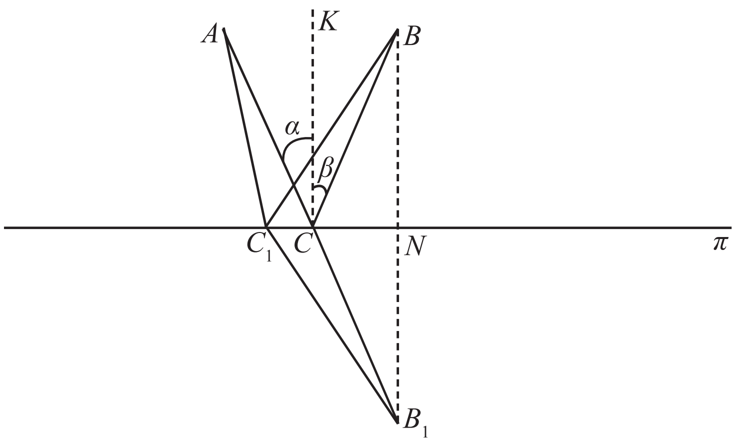
Eger B nokat π göni çyzygyň üstünde ýatýan bolsa, onda A nokatdan çykan şöhle göni B nokada düşýär we Z ýol AB kesim bilen gabat gelýär (*5.2-nji surat*).



5.2-nji surat

Indi π göni çyzygyň üstünde B nokatdan tapawutly islendik C_1 nokat alsak, $AC_1 + C_1B \geq AB$ boljakdygy ABC_1 üçburçlugyň häsiýetinden gelip çykýar, onda matematiki model birinji ýakynlaşmada fiziki meselä kybapdaş diýmek bolar.

Matematiki modeli umumy halda, ýagny B nokadyň π göni çyzygyň üstünde ýatmaýan ýagdaýynda çözeliň (*5.3-nji surat*).



5.3-nji surat

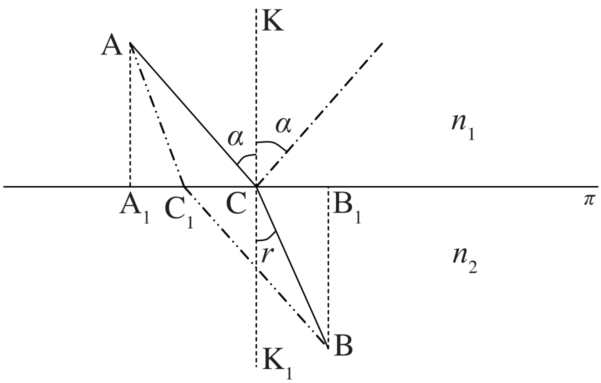
π gönä görä B nokada simmetrik B_1 nokady guralyň. A we B_1 nokatlary AC_1B_1 döwük çyzyk bilen birikdireliň. Suratdan görnüşi ýaly, $AC_1 + C_1B = AC_1 + C_1B_1$. Indi A we B_1 nokatlary AB_1 kesim bilen birikdireliň. Ol kesim π göni çyzygy C nokatda keser. Onda $AC + CB = AC + CB_1 = AB_1$, şeýle hem $AC_1 + C_1B = = AC_1 + C_1B_1 > AB_1 = AC + CB$ bolýandygy äşgärdir. Diýmek, ***C* nokat gözlenýän nokat** bolýar.

Matematiki model çözüldi. Indi ondan netije çykaralyň.

$\angle ACK = \alpha$ düşme burçy, $\angle KCB = \beta$ serpikme burçy, ΔCBB_1 deňýanly ($CB = CB_1$). Şol sebäpli $\angle BCN = \angle NCB_1$. Ondan başga-da, $\angle ACC_1 = \angle NCB_1$. Bu ýerden

$\angle BCN = \angle ACC_1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \angle ACC_1 = 90^\circ - \angle BCN = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$. Diýmek, $\alpha = \beta$, ýagny ***α* düşme burç *β* serpikme burça deňdir**. Bu optikanyň iň wajyp kanunlarynyň biridir.

Ýene-de bir mesele. π göni çyzyk döwülme koeffisiýentleri n_1 we n_2 bolan iki gurşawyň çägi bolsun. Goý, birinji gurşawdaky A nokatdan çykan şöhle π göni çyzygyň C nokadyna düşsün. Ol şöhläniň bir bölegi, ýokarda getirilen kanun boýunça, C nokatdan yzyna serpiger, ikinji bölegi bolsa C nokatda döwülip, ikinji gurşawdaky B nokada düşer (*6-njy surat*). $\angle K_1CB = r$ burça *döwülme burçy* diýýärler. α we r burçlaryň arasyndaky baglanyşygy tapmaly.



6-njy surat

Meseläniň çäklendirmeleri meseläniň şertinde getirildi. Matematiki modeli düzeliň. π göni çyzygyň üstünde C nokatdan tapawutly C_1 nokat alalyň. ACB döwük çyzygy Z bilen, AC_1B döwük çyzygy Z_1 bilen belgiläliň. Fermanyň prinsipine görä

$$\int_{Z_1} nds - \int_{Z} nds \geq 0$$

bolmaly. Integrallary özgerdip,

$$\int_{A}^{C_1} n_1 ds + \int_{C_1}^{B} n_2 ds - \int_{A}^{C} n_1 ds - \int_{C}^{B} n_2 ds \geq 0$$

ýa-da

$$n_1AC_1 + n_2C_1B \geq n_1AC + n_2CB \qquad (2)$$

alarys. Diýmek, matematiki model – islendik C_1 üçin (2) deňsizlik dogry bolar ýaly edip, π göni çyzygyň üstünde C nokady tapmakdan durýar. Başgaça aýdylanda, $f = n_1AC_1 + n_2C_1B$ funksiýanyň C_1 üýtgeýän nokada görä minimum nokadyny tapmaly. Şerti kanagatlandyrýan C nokat bar hasap edip, matematiki modeli çözeliň. π göni çyzyga A nokatdan AA_1 we B nokatdan BB_1 perpendikulýarlary geçireliň. 6-njy suratdan alarys:

$$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = \sqrt{AA_1^2 + (A_1C - C_1C)^2},$$

$$C_1B = \sqrt{BB_1^2 + C_1B_1^2} = \sqrt{BB_1^2 + (B_1C + C_1C)^2}.$$

C_1C üýtgeýän ululygy x bilen belgiläp, f funksiýanyň bahasyny tapalyň:

$$f = n_1\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2} + n_2\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}.$$

Indi bir üýtgeýänli $f(x)$ funksiýanyň minimum nokadyny tapmak galdy. Ony tapmak üçin $f(x)$ funksiýanyň önümini tapyp, nola deňläliň:

$$f'(x) = \frac{-(A_1C - x)n_1}{\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2}} + \frac{(B_1C + x)n_2}{\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}} = 0$$

ýa-da

$$\frac{(A_1C - x)n_1}{\sqrt{AA_1^2 + (A_1C - x)^2}} = \frac{(B_1C + x)n_2}{\sqrt{BB_1^2 + (B_1C + x)^2}}.$$

Fermanyň prinsipine görä $x = 0$ çözüw bolýar, ýagny

$$\frac{A_1C \cdot n_1}{\sqrt{AA_1^2 + A_1C^2}} = \frac{B_1C \cdot n_2}{\sqrt{BB_1^2 + B_1C^2}}$$

ýa-da

$$\sin\alpha \cdot n_1 = \sin r \cdot n_2,$$

ýa-da

$$\frac{\sin\alpha}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Bu bolsa optikada belli bolan *ýagtylygyň döwülme kanunydyr*. Mesele çözüldi.

8. GAMILTONYŇ PRINSIPI WE ONUŇ BILEN BAGLY MESELELER

Material nokatlaryň ulgamy potensial güýçler meýdanynda hereket edýän bolsun. Goý, $[t_1; t_2]$ wagt aralygynda ulgamyň i-nji nokady A_i nokatdan B_i nokada çenli Z_i egri boýunça hereket eden bolsun. K – ulgamyň kinetik energiýasy, Π – onuň potensial energiýasy. $K - \Pi = L$ tapawuda *Lagranžyň funksiýasy* diýýärler, $\int_{t_1}^{t} Ldt$ integrala *täsir* diýýärler.

Gamiltonyň prinsipi. Z_i egrileri, degişlilikde, A_i we B_i nokatlary birikdirýän islendik endigan Z_i^* egriler bilen çalşyrylyp alnan $\int_{t_1}^{t} Ldt$ integralyň wariasiýasy nola deňdir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0.$$

Käbir gerek düşünjeleri girizeliň. Goý, ulgam $M(x_k, y_k, z_k)$, $k = \overline{1,N}$, nokatlardan dursun we ulgama

$$g_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N) = 0, \quad i = \overline{1,K}, \qquad (1)$$

görnüşdäki baglylyk goýlan bolsun. Onda nokatlaryň $3N$ koordinatalarynyň K sanysyny (1) deňlemelerden beýleki $3N - K$ sanysynyň üsti bilen aňladyp bileris (elbetde, (1) ulgamy çözüp bolýan halda). Diýmek, koordinatalaryň $3N - K$ sanysy azat koordinatalar, K sanysy bagly koordinatalar bolarlar. Köp halda, $3N - K$ azat koordinatalaryň deregine

$$q_i = q_i(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N), \quad i = \overline{1, 3N-K}, \qquad (2)$$

görnüşdäki, ulgamyň ýagdaýyny doly kesgitleýän, täze parametrler girizýärler. Olara, adatça, *umumylaşdyrylan koordinatalar* diýýärler. Goý, wagt t_1-den t_2-ä çenli üýtgände umumylaşdyrylan koordinatalarda Z_i egrileriň deňlemeleri

$$q_s = q_s(t), \quad s = \overline{1, 3N-K},$$

görnüşde bolsun. Goý, $\delta_s(t)$, $s = \overline{1, 3N-K}$, funksiýalar $[t_1; t_2]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsun we $\delta_s(t_1) = \delta_s(t_2) = 0$ bolsun, onda

$$q_s = q_s(t) + \alpha_s \delta_s(t)$$

deňlemeler A_i we B_i nokatlary birikdirýän Z_i^* egrileriň deňlemeleri bolar. Bu sözleme şeýle düşünmeli. K sany baglylyklar deňlemeleri we $3N-K$ sany (2) deňlemeler bilelikde çözülip, x_i, y_i, z_i, $i = \overline{1, N}$, koordinatalar q_i, $i = \overline{1, 3N-K}$, umumylaşdyrylan koordinatalaryň üsti bilen aňladylýar, ýagny

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\,(q_1, q_2, ..., q_{3N\text{-}K}), \\ y_i &= y_i\,(q_1, q_2, ..., q_{3N\text{-}K}), \\ z_i &= z_i\,(q_1, q_2, ..., q_{3N\text{-}K}), \\ i &= \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{3}$$

Eger-de şu ýerde $q_s = q_s(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, $s = \overline{1, 3N-K}$, goýsak Z_i egriniň deňlemesini, $q_i = q_i(t) + \alpha_i\,\delta_i$ goýsak bolsa, Z_i^* egriniň deňlemesini alarys. $I = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$ täsir integralyndaky L funksiýa q_1, q_2, ..., $q_{3N\text{-}K}$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, ..., $\dot{q}_{3N\text{-}K}$ ululyklaryň funksiýasy bolýar, ýagny $L = L\,(q_1, q_2, ..., q_{3N\text{-}K}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{3N\text{-}K})$. Şol sebäpli,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 + \alpha_1\delta_1, q_2 + \alpha_2\delta_2, ..., q_{3N-K} + \alpha_{3N-K}\delta_{3N-K})dt$$

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{3N\text{-}K}$ parametrleriň funksiýasy bolýar.

$$\sum_{s=1}^{3N-K} \frac{\partial I}{\partial \alpha_s}$$

ululyga $I = \int_{t_1}^{t} Ldt$ täsir integralynyň wariýasiýasy diýýärler we ony $\delta \int_{t_1}^{t} Ldt$ bilen belgileýärler. Eger L funksiýanyň öz argumentlerine görä üznüksiz önümleri bar bolsa, onda

$$\delta\int_{t_1}^{t} Ldt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{\delta}_s\right)dt$$

deňligi alarys. Indi biz Gamiltonyň prinsipini ýönekeý görnüşde beýan edip bileris.

Gamiltonyň prinsipi. Eger L öz argumentlerine görä differensirlenýän funksiýa bolsa, $\delta_s(t)$, $s=\overline{1,3N-K}$, funksiýalar $[t_1;\ t_2]$ kesimde üznüksiz differensirlenýän bolsalar we $q_s(t_1) = q_s(t_2) = 0$, $s=\overline{1,3N-K}$, bolsa, onda hökmany halda

$$\delta\int_{t_1}^{t} Ldt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\delta}_s\right)dt = 0 \qquad (4)$$

bolar.

Indi bu prinsipi ulanyp, käbir meseleleri çözmäge çemeleşeliň.

8.1. Lagranžyň deňlemesiniň çykarylyşy

Massalary m_i bolan $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,N}$, nokatlar ulgamy potensial güýçler meýdanynda $[t_1;\ t_2]$ wagt aralygynda hereket etdi diýeliň. Z_i, Z_i^*, $\delta_i(t)$ belgilemeler ýokarda getirilen manyda bolsunlar. Bu halda (4) deňlik – Gamiltonyň prinsipi dogry bolar. Onda

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_S + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\delta}_s\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s dt + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}d\delta_s(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta_s dt + \sum_{s=1}^{3N-K}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta_s(t)\,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\right)\delta_S(t)dt$$

ýa-da $q_s(t_1) = q_s(t_2) = 0$, $s=\overline{1,3N-K}$, bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{s=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]\delta_s(t)dt = 0.$$

Indi $\delta_s(t)$ funksiýalaryň erkindigini ýatlap, *Lagranžyň deňlemeleri* ady bilen belli bolan

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0, \quad s=\overline{1,3N-K}, \qquad (5)$$

deňlemeleri alarys. Olar mehanikanyň esasy deňlemeleriniň biridir. Ol deňlemeleri başgaça hem ýazyp bolýar.

Düşnüklilik üçin, (1) baglylyklar ýok hasap edeliň. Onda $M(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,N}$, nokatlaryň koordinatalary baglanyşyksyz ululyklar bolarlar we biz

$$x_i = q_{3i-2}, \quad y_i = q_{3i-1}, \quad z_i = q_{3i}, \quad i = \overline{1,N},$$

belgilemeleri girizmäge haklydyrys. Şu belgilemelerde (5) deňlemeler aşakdaky görnüşe geler:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Eger $U(x, y, z)$ funksiýa potensial güýçler meýdanynyň potensial funksiýasy bolsa,

$$\vec{F} = \nabla U, \qquad \Pi = -\sum_{i=1}^{N} U(x_i, y_i, z_i), \qquad K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i (\dot{x}_i)^2}{2},$$

$$L = K - \Pi = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m_i (\dot{x}_i)^2}{2} + U(x_i, y_i, z_i)\right]$$

bolýandygyny göz öňünde tutup, (6) deňlemeleri özgerdip,

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{x}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{y}_i) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial U(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i} - m_i \frac{d}{dt}(\dot{z}_i) = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

ýazyp bileris. $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nokadyň $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ radius wektoryny girizip hem-de (7) deňlemeleri, degişlilikde, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik wektorlara köpeldip, soňra olary goşup, alarys:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\vec{k}-m_i\frac{d}{dt}(\dot{x}_i\vec{i}+\dot{y}_i\vec{j}+\dot{z}_i\vec{k})=0,\quad i=\overline{1,N},$$

ýa-da

$$m_i\ddot{r}_i=\nabla U(x_i,y_i,z_i)=\vec{F}(x_i,y_i,z_i).$$

Bu ýerde i indeksi taşlap, ulgamyň islendik nokady üçin dogry bolan

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}(x,y,z) \tag{8}$$

formulany alarys. Bu bolsa material nokat üçin Nýutonyň ikinji kanunynyň ýazgysydyr.

8.2. Energiýanyň saklanma kanuny

Goý, $K=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{q}_i^2}{2}$ ulgamyň kinetik energiýasy, $\Pi=\Pi(q_1, q_2, ..., q_N)$ onuň potensial energiýasy bolsun. Onda $E = K + \Pi$ onuň doly energiýasy bolar. Ulgam potensial güýçler meýdanynda hereket edýär hasap edilýär. Doly energiýanyň wagta görä önümini tapalyň:

$$(E)'=\frac{dK}{dt}+\frac{d\Pi}{dt}=\frac{d(\Pi-K)}{dt}+2\frac{dK}{dt}=-\frac{dL}{dt}+2\frac{dK}{dt}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)+2\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i\right).$$

Lagranžyň deňlemesinden taparys:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right).$$

Bu bahany ýokardaky aňlatmada ýerine goýup,

$$\frac{dE}{dt}=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i-2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i\right)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\cdot\dot{q}_i\right)-2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i\right)=-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d(m_i\dot{q}_i\cdot\dot{q}_i)}{dt}-2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} (2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i - 2m_i\dot{q}_i\ddot{q}_i) \equiv 0,$$

ýagny $\dfrac{dE}{dt} \equiv 0$ ýa-da

$$E = K + \Pi = const$$

aňlatmany alarys.

9. IKI MATERIAL NOKADYŇ ÖZARA TÄSIRI ASTYNDAKY HEREKETLERINIŇ MATEMATIKI MODELI

Biz iki nokatdan durýan ulgama diňe içki güýçler täsir edýär diýip hasap etjekdiris.

Bize gerek boljak düşünjeler:

1) Energiýanyň saklanma kanuny;

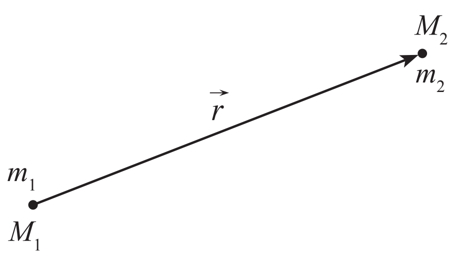
2) Günüň daşyndan aýlanýan planetalar barada Kepleriň kanuny;

3) Nýutonyň bütindünýä dartylma kanuny.

Garalýan iki nokatdan durýan ulgam konserwatiw bolany sebäpli, energiýanyň saklanma kanuny $K + \Pi = E_0$ görnüşde ýazylar. Bu ýerde K – kinetik, Π – potensial energiýa, E_0 – hemişelik ululyk. Goý, M_1 nokadyň massasy m_1, M_2 nokadyň massasy bolsa m_2 bolsun. υ_1 we υ_2, degişlilikde, M_1 we M_2 nokatlaryň tizlikleriniň absolýut ululyklary bolsun. Nýutonyň bütindünýä dartylma kanunyna laýyklykda, nokatlar

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad r = |\vec{r}\,|,$$

güýç bilen biri-birini dartýarlar; bu ýerde $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$.



7-nji surat

Ulgamyň kinetik energiýasy

$$K = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2},$$

potensial energiýasy bolsa

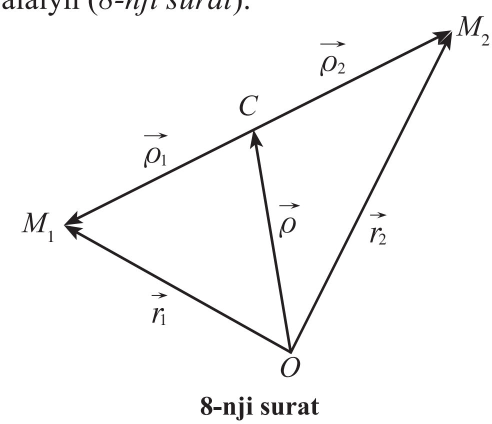
$$\Pi = \int_{M_2}^{M_0} \vec{F}\, d\vec{r}$$

bolar, bu ýerde M_0 anyk bellenen nokat. K-nyň we Π-niň bahalaryny $K + \Pi = E_0$ deňlikde ýerine goýup, alarys:

$$\frac{m_1 \vec{\upsilon}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \vec{\upsilon}_2^{\,2}}{2} + \int_{M_2}^{M_0} \vec{F}\, d\vec{r} = E_0. \qquad (1)$$

Bu formula garalýan hereketiň matematiki modelidir. Onuň öwrenilýän herekete kybapdaş bolýandygy belli kanunlaryň esasynda düzülendiginden gelip çykýar. (1) modeli ulanmak üçin amatly görnüşe getireliň.

Garalýan nokatlaryň agyrlyk merkezini C bilen belgiläliň we käbir O nokat alalyň (*8-nji surat*).



8-nji surat

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1, \quad \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{\rho}, \quad \overrightarrow{CM_1} = \vec{\rho}_1, \quad \overrightarrow{CM_2} = \vec{\rho}_2$$

belgilemeleri girizip, alarys:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \vec{r}_1 = \vec{\rho} + \vec{\rho}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{\rho} + \vec{\rho}_2.$$

$\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\upsilon}_1, \quad \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{\upsilon}_2$ belgilemeleri ulanyp, (1) deňligi täzeden ýazalyň:

$$\frac{m_1 \vec{\upsilon}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \vec{\upsilon}_2^{\,2}}{2} - \gamma \int_{M_2}^{M_0} \frac{m_1 m_2}{\vec{r}^{\,2}} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} d\vec{r} = E_0,$$

$$\frac{m_1 \left(\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} + \dfrac{d\vec{\rho}_1}{dt} \right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} + \dfrac{d\vec{\rho}_2}{dt} \right)}{2} - \gamma m_1 m_2 \int_{M_2}^{M_0} \frac{dr^2}{2r^3} = E_0,$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt} \right)^2 + m_1 \frac{d\vec{\rho}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\rho}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\rho}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\rho}_2}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = E_0. \qquad (2)$$

C nokat agyrlyk merkezi bolany sebäpli,

$$m_1 \vec{\rho}_1 + m_2 \vec{\rho}_2 = 0, \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{C}_0 - \text{hemişelik}, \qquad (3)$$

bolmaly bolar. Bu deňlikleriň birinjisi agyrlyk merkeziniň M_1M_2 kesimi massalara ters proporsional bölmeginden gelip çykýar. Agyrlyk merkeziniň hereketi baradaky teorema görä, bu ulgama daşyndan güýç täsir etmeýänligi sebäpli,

$$\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = 0$$

bolar. Bu ýerden ýokardaky deňlikleriň ikinjisi gelip çykýar.
(3) deňlikleriň birinjisinden

$$m_1 \frac{d\vec{\rho}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\rho}_2}{dt} = 0$$

deňlik we onuň esasynda

$$m_1 \frac{d\vec{\rho}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\rho}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\rho}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\rho}_2}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \left(m_1 \frac{d\vec{\rho}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\rho}_2}{dt} \right) = 0$$

deňlik gelip çykýar we (2) deňlik

$$\frac{1}{2}m_1\left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt}\right)^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^{\,2} \qquad (4)$$

görnüşe geler. Indi $\vec{r}=\vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1$ bolýandygyny ýatlap,

ulgamdan
$$\begin{cases} m_1\vec{\rho}_1+m_2\vec{\rho}_2=0, \\ \vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1=\vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{\rho}_1=-\frac{m_2\vec{r}}{m_1+m_2}, \qquad \vec{\rho}_2=\frac{m_1\vec{r}}{m_1+m_2}$$

taparys. Soňky deňlikleri ulanyp, (4) deňligi täzeden ýazalyň:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}+\frac{m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right]\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^{\,2}$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}=E_0-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^{\,2}. \qquad (5)$$

Indi M_1 nokat üýtgemeýär hasap edip, M_2 nokadyň hereketiniň deňlemesini

$$m_2\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (6)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu deňligiň iki tarapyny hem $\vec{r}$ wektora wektor köpeldip, alarys:

$$m_2\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=-\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}[\vec{r}\times\vec{r}].$$

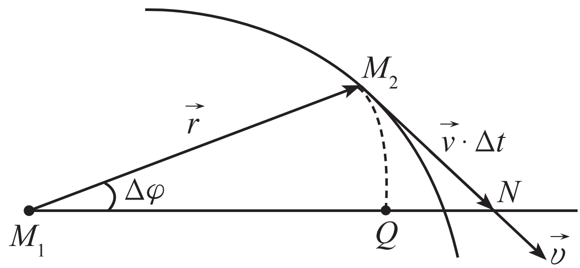
Emma $[\vec{r}\times\vec{r}]=0$ bolany sebäpli,

$$\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=0$$

bolar. Beýleki tarapdan,

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\times\vec{\upsilon}]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\upsilon}\right]+\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=[\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}]+\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]=0,$$

ýagny $[\vec{r}\times\vec{\upsilon}]=\vec{C_1}$ – hemişelik wektor bolar. Bu bolsa $\vec{r}$ we $\vec{\upsilon}$ wektorlar islendik wagtda bir tekizlikde ýatýar diýmekdir, ýagny hereket bir tekizlikde geçýär. Surata ýüzleneliň (*9-njy surat*).



9-njy surat

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r},\quad \angle NM_1M_2=\Delta\varphi,\quad \overrightarrow{M_2N}=\vec{\upsilon}\Delta t.$$

Bu ýerden M_1M_2Q sektoryň $S_{M_1M_2Q}$ meýdany üçin

$$S_{M_1M_2Q}=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi\cong\frac{1}{2}|[\vec{r}\times\vec{\upsilon}\Delta t]|$$

takmyn formulany alarys. Δt nola ymtylanda

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2}|[\vec{r}\times\vec{\upsilon}]|$$

takyk formulany alarys. Ýokarda görkezilene görä $|[\vec{r}\times\vec{\upsilon}]|=|\vec{C_1}|$ hemişelik san bolýar we biz **Kepleriň kanuny** ady bilen belli bolan

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=M,\quad M=|\vec{C_1}|, \tag{7}$$

formulany alarys. Bu kanun: «M_2 nokadyň M_1 nokada görä radius wektorynyň wagt birliginde çyzýan sektorynyň meýdany şol bir M hemişelik sana deňdir» – diýlip okalýar. Şeýlelik bilen, biziň matematiki modelimizden alan birinji netijämiz Kepleriň kanuny boldy. Onuň dogrulygy biziň modelimiziň başda goýan meselämize kybapdaşlygyndan gelip çykýar.

Indi modeli ýönekeýleşdirmegi dowam etdireliň. Ýokardaky suratdan görnüşi ýaly,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \vec{\upsilon}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

(6) we (7) deňlikleri ulanyp, (5) deňligi göçürip ýazalyň:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = T_0, \quad T_0 = E_0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\vec{C}_0^2$$

ýa-da

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = T_0,$$

ýa-da Kepleriň kanunyny ulanyp,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{M}{r^2}\right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = T_0$$

ýazyp bileris. Soňky deňlemede

$$\frac{2\gamma(m_1+m_2)}{M^2} = \alpha, \qquad \frac{2T_0(m_1+m_2)}{M^2 m_1 m_2} = \beta, \qquad r = \frac{1}{\rho}$$

belgilemeleri girizip, ony

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \alpha\rho + \beta - \rho^2$$

ýa-da

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = w^2 - \left(\rho - \frac{\alpha}{2}\right)^2, \quad w^2 = \beta + \frac{\alpha^2}{4},$$

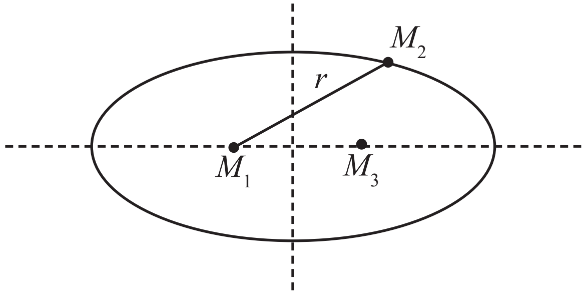
görnüşde ýazyp bolar. Ony özgerdip,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}, \quad \frac{d\rho}{\sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}} = d\varphi$$

aňlatmamy alarys. Soňky deňlemäni integrirläliň:

$$\int\frac{dp}{\sqrt{w^2 - (\rho - 0{,}5\alpha)^2}} = \varphi + \varphi_0 + 270^\circ, \; arc\sin\frac{\rho - 0{,}5\alpha}{w} = \varphi + \varphi_0 + 270^\circ,$$

$$\rho - 0{,}5\alpha = w\cdot\sin(\varphi + \varphi_0 + 270^\circ), \quad \rho = 0{,}5\alpha - w\cos(\varphi + \varphi_0).$$



10-njy surat

$r = \dfrac{1}{\rho}$ formulany ulanyp, alarys:

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{2} - w\cos(\varphi + \varphi_0)} = \frac{\frac{2}{\alpha}}{1 - \frac{2w}{\alpha}\cos(\varphi + \varphi_0)}.$$

$\dfrac{2w}{\alpha} = \varepsilon, \ \ \dfrac{2}{\alpha} = p$ belgilemeleri girizip,

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi + \varphi_0)}$$

ellipsiň deňlemesini alarys. Onuň bir fokusy M_1 nokatda bolar (*10-njy surat*). Diýmek, M_1 Gün, M_2 planeta hasap etsek, onda planetalar Günüň daşyndan, bir fokusy Gün bolan ellipsler boýunça hereket ederler.

10. ÝERIŇ TÖWEREGINDE HEREKET EDÝÄN MATERIAL NOKATLAR BARADA MESELE

Planetalaryň hereketi bilen birmeňzeş ýene bir meselä seredeliň.

Mesele örän daşdan ($r \approx \infty$) Ýeriň üstüne uçup gelen material nokadyň tizligini anyklamakdan duryar. Indi M_1 nokady Ýeriň merkezi, M_2 nokady uçup gelýän material nokat hasap edip, M_2 nokadyň hereketiniň deňlemesini ýazalyň. Ol ýokarda getirilen (6) deňleme bilen gabat geler. Ony ýene bir gezek ýazalyň:

$$m_2 \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad r = |\vec{r}\,|,$$

bu ýerde m_1 – Ýeriň, m_2 – material nokadyň massasy, $\vec{r} = \overline{M_1M_2}$, $-\gamma\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$ –Ýeriň dartyş güýji. r Ýeriň radiusyna deň ($r = R$) bolanda $\gamma\frac{m_1m_2}{R^2} = m_2g$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $\gamma m_1 = gR^2$ deňligi alarys we ýokardaky deňlemäni

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\frac{gR^2}{r^3}\vec{r}$$

görnüşde ýazyp bileris. Soňky deňligiň iki tarapyny hem $\frac{d\vec{r}}{dt}$ köpeldip, alarys:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{gR^2}{r^3}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}.$$

Bu ýerden,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{gR^2}{r^3}\cdot\frac{dr^2}{dt},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{gR^2}{r}\right),$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = \frac{gR^2}{r} + C.$$

Goý, material nokat tükeniksizlikden (başlangyç tizligi $\upsilon_0 = 0$) M_1 nokada gelipdir diýeliň. Onda $\frac{1}{2}\upsilon^2 = \frac{gR^2}{r} + C$ deňlikde $r = \infty$, $\upsilon = 0$ goýup, $C = 0$ alarys we deňleme

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = \frac{gR^2}{r}$$

görnüşe geler. Soňky deňlemede $r = R$ goýup, material nokadyň Ýeriň üstüne düşendäki tizligini taparys:

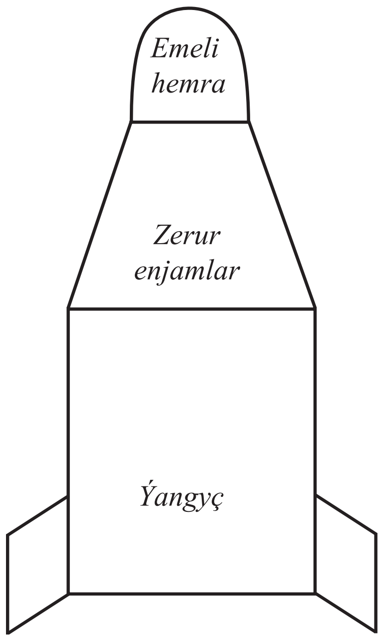
$$\upsilon^2 = 2gR, \quad \upsilon = \sqrt{2gR}.$$

Bu ýerde g = 9,8m/sek^2, $R = 6370km$ goýup, taparys:

$$\upsilon^2 = 9{,}8\cdot 6370.000\frac{m^2}{sek^2}, \quad \upsilon = 11{,}3\frac{km}{sek}.$$

Tersine, Ýeriň üstündäki material nokady örän daş ýerlere ugratmak üçin, oňa çen bilen $\upsilon_0 = 11,3\frac{km}{sek}$ tizlik bermeli bolýar. Bu tizlige üçünji kosmiki tizlik diýýärler.

Indi kosmiki raketalaryň uçuşlarynyň matematiki modelini düzeliň. Adatça, raketalar köpbasgançakly bolýarlar. Ýönekeý dil bilen aýdanyňda, birnäçe raketany üsti-üstüne goýup, bir raketa ýasaýarlar we oňa köpbasgançakly raketa diýýärler. Geliň, «näme üçin raketa hökmany halda köpbasgançakly bolmaly?», «Bir ulurak raketa ýasap, emeli hemrany orbitasyna çykaryp bolanokmy?» diýen sowallara jogap berjek bolalyň. Birbasgançakly, ýagny bir kosmiki raketanyň gurluşy 11-nji suratda shematiki görkezilen.



11-nji surat

m_0 – raketanyň başlangyç massasy;
m(t) – raketanyň *t* pursatdaky massasy,

$$m(t) = m_1+m_2+m_3(t),$$

m_1 – raketanyň uçmagy üçin zerur enjamlaryň massasy (üýtgemeýär);
m_2 – emeli hemranyň massasy (üýtgemeýär);
$m_3(t)$ – ýangyjyň t pursatdaky massasy;
$\upsilon(t)$ – raketanyň t pursatdaky tizligi;
u_0 – raketadan ýanyp çykýan gazlaryň tizligi; adatça, $u_0 \leq 3\frac{km}{sek}$;
F – raketa täsir edýän daşky güýç, biziň ýagdaýymyzda $F = mg$;
$m_1 \geq 0{,}1m_0$ – häzirki zaman tehnikasynyň mümkinçiligi;
T – raketanyň uçuş wagty.

Şeýlelik bilen, model düzmek üçin çäklendirmeler kesgitlendi.

Şerte görä, $m_3(T) = 0$, ýagny uçuş wagtynyň ahyrynda ýangyç doly ýanyp gutarýar. $Q(t)$ bilen raketanyň t pursatdaky hereket mukdaryny belgiläliň. Kesgitlemä görä, $Q(t) = m(t)\upsilon(t)$. Mehanikanyň kanunyna görä, hereket mukdarynyň t pursatdaky artdyrmasy raketa täsir edýän güýçleriň impulsyna deň, ýagny

$$\Delta Q(t) = F\Delta t.$$

Δt wagtdan soň raketanyň massasy $m+\Delta m$ bolar, tizligi $\upsilon(t+\Delta t)$ bolar. Massanyň Δm bölegi $\upsilon(t) - u_0$ tizlik alar. Bu bölegiň hereket mukdary

$$\Delta m[\upsilon(t+\Delta t) - u_0]$$

bolar. Alarys:

$$\Delta Q(t) = (m(t) + \Delta m)\upsilon(t + \Delta t) - m(t)\upsilon(t) - \Delta m[\upsilon(t + \Delta t) - u_0]$$

ýa-da

$$m(t)\Delta\upsilon + u_0\Delta m = F\Delta t,$$

ýa-da

$$m(t)\frac{d\upsilon}{dt} + u_0\frac{dm}{dt} = F. \qquad (1)$$

(1) formula raketanyň hereketiniň matematiki modelidir. Onuň raketanyň hakyky hereketine kybapdaşlygy ulanylan kanunlaryň dogrulygyndan gelip çykýar. Indi modeliň derňewine geçeliň we ondan netijeler çykaralyň. Biziň başda goýan soraglarymyza jogap bermek üçin, (1) deňlemäni çözüp, $\upsilon(t)$ tizligi tapmak ýeterlik; emma meselä başgaça çemeleşmek hem mümkin.

$F = -mg$ bolany üçin, bu güýjüň täsiri diňe tizligi kiçeltmäge ugrukdyrylan bolýar. Eger deňlemede $F = 0$ goýsak, onda ýokardaky bellemä görä, täze deňlemeden tapylan $\tilde{\upsilon}(t)$ raketanyň hakyky tizliginden islendik pursatda uly bolar. $\tilde{\upsilon}(t)$ üçin deňleme ýazalyň:

$$m(t)\frac{d\tilde{\upsilon}}{dt} = -u_0\frac{dm}{dt}$$

ýa-da

$$\frac{d\tilde{\upsilon}}{dt} = -u_0\frac{\frac{dm}{dt}}{m(t)}.$$

Bu deňligiň iki tarapyndan hem 0-dan T çenli integral alalyň:

$$\tilde{\upsilon}(T) - \tilde{\upsilon}(0) = -u_0[\ln m(T) - \ln m_0].$$

$\tilde{\upsilon}(0) = 0$ bolýandygy sebäpli,

$$\tilde{\upsilon}(T) = u_0 \ln\frac{m_0}{m(T)} = u_0 \ln\frac{m_0}{m_1 + m_2}$$

deňlige geleris. Bu ýerden $m_2 > 0$ ululygy taşlap,

$$\tilde{\upsilon}(T) < u_0 \ln\frac{m_0}{m_1}$$

deňsizlige geleris. Berlenlere görä, $\frac{m_1}{m_0} \geq 0,1$, $u_0 \leq 3\frac{km}{sek}$. Onda $m_1 = 0,1m_0$ goýup,

$$\tilde{\upsilon}(T) < 3\ln\frac{m_0}{0,1m_0} = 3\ln 10$$

alarys. $\ln 10 < 2,3$ bolany üçin,

$$\upsilon(T) \leq \tilde{\upsilon}(T) < 3 \cdot 2,3\frac{km}{sek} = 6,9\frac{km}{sek}.$$

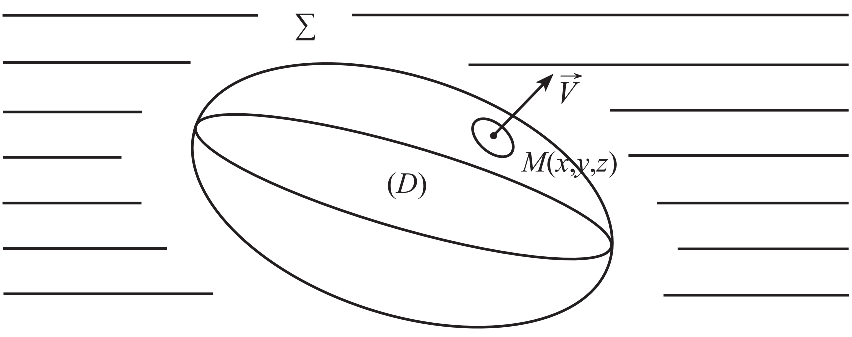
Bu tizlik birinji kosmiki tizlikden has kiçi bolany üçin, emeli hemra Ýeriň üstüne gaçar. Diýmek, emeli hemra üçin niýetlenen jisimiň hakykatdan-da emeli hemra bolmagy üçin, raketa azyndan iki basgançakly bolmaly bolýar.

11. IDEAL SUWUKLYK AKYMY BILEN BAGLANYŞYKLY MATEMATIKI MODEL

Islendik suwuklyk akymy öwrenilende esasy gyzyklandyrýan ululyklar suwuklyk bölejikleriniň tizlikleri, suwuklygyň islendik nokadyndaky basyş we suwuklygyň dykyzlygy bolýar.

Eger seredilýän ululyklaryň bahalaryny az sanly nokatlarda tapmak gerek bolsa, onda olary tejribäniň üsti bilen tapsa hem bolar. Emma nokatlaryň sany tükeniksiz köp, gyzyklandyrýan wagt aralygy uly bolan ýagdaýlarda tejribeleriň üsti bilen ululyklary tapmagyň köp kynçylyklara getirmegi mümkin. Ondan başga-da, ululyklaryň käbir nokatlardaky we käbir wagt pursatlaryndaky bahalary suwuklygyň akymy barada umumy netijelere gelmegi kynlaşdyrýar. Şol sebäpli, suwuklygyň akymynyň matematiki modeline ýüzlenmeli bolýar.

Belgilemeler girizeliň. $p\,(x, y, z, t)$ – suwuklygyň $M\,(x, y, z)$ nokadyndaky t wagtdaky basyş, $\rho\,(x, y, z, t)$ – $M\,(x, y, z)$ nokatdaky t wagtdaky dykyzlyk, $u\,(x, y, z, t)$, $\upsilon\,(x, y, z, t)$, $\omega\,(x, y, z, t)$ – $\vec{V}$ tizligiň M nokatdaky t wagtdaky koordinatalary, γ – suwuklygyň şepbeşikligi (nola deň hasap edilýär), $\vec{F}\,(x, y, z, t)$ – daşky güýçleriň massa birligine täsir edýän dykyzlygy. Suwuklygyň akymynyň içinde ýerleşýän, göz öňüne getirilýän $\sum$ üst bilen çäklenen, D ýaýlany doldurýan suwuklyk bölegine täsir edýän güýçleri tapalyň (*12-nji surat*).



12-nji surat

$p\ (x, y, z, t)$ basyşyň täsiriniň jemleýji güýji

$$\vec{R}_1 = -\iint_{\Sigma} p\vec{n}\,d\sigma = -\iiint_{D} grad\ p\,dx\,dy\,dz$$

integrala deňdir. Bu ýerde $p = p\ (x, y, z, t)$, $\vec{n}$ – Σ üste geçirilen daşky normal. $\vec{\sigma}_n = -p(x, y, z, t)\cdot\vec{n}$ ululyga $M\ (x, y, z)$ nokatdaky *normal dartgynlyk* diýýärler.

Görşümiz ýaly, normal dartgynlygyň ululygy Σ üstüň $M\ (x, y, z)$ nokatdaky normal wektorynyň ugruna bagly däldir, ýagny $|\vec{\sigma}_n| = |p(x, y, z, t)|$. Daşky güýçleriň D ýaýladaky suwuklyk bölegine täsiriniň jemleýjisi

$$\vec{R}_2 = \iiint_{D} \rho\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

integrala deňdir. Seredilýän suwuklyk bölegine täsir edýän başga güýç ýok. Şonuň üçin, onuň hereket deňlemesi, Nýutonuň kanunyna laýyklykda,

$$\iiint_{D} \rho\frac{d\vec{V}}{dt}dx\,dy\,dz = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = -\iiint_{D} grad\ p\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D} \rho\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

ýa-da

$$\iiint_{D}\left[\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + grad\ p - \rho\vec{F}\right]dx\,dy\,dz = 0$$

görnüşde bolar. D ýaýlanyň islendik möçberde bolup bilýänligi sebäpli, bu ýerden suwuklygyň L.Eýleriň adyny göterýän hereket deňlemesini alarys:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} + grad\ p - \rho\vec{F} = 0.$$

Deňlemä girýän $\frac{d\vec{V}}{dt}$-niň bahasy – $\vec{V}$-den t boýunça doly önüm şeýle hasaplanýar:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{pmatrix} u'_x\cdot u + u'_y\,\upsilon + u'_z\,\omega + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \upsilon'_x\,u + \upsilon'_y\,\upsilon + \upsilon'_z\,\omega + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} \\ \omega'_x\,u + \omega'_y\,\upsilon + \omega'_z\,\omega + \dfrac{\partial \omega}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Bu deňligi göz öňünde tutup, hereket deňlemesini aşakdaky ýaly ýaýbaň görnüşde ýazyp bolar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} u + \dfrac{\partial u}{\partial y} \upsilon + \dfrac{\partial u}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} - F_x = 0, \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} u + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} \upsilon + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial y} - F_y = 0, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega}{\partial x} u + \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \upsilon + \dfrac{\partial \omega}{\partial z} \omega + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial z} - F_z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Bu ýerde $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ belgileme ulanyldy. Alnan hereket deňlemesi üç deňlemeden durýar, emma deňleme bäş sany $u, \upsilon, \omega, p, \rho$ näbelli funksiýany saklaýar. Şol sebäpli, hereketiň deňlemesiniň ýanyna ýene iki deňleme goşýarlar. Olaryň birinjisi *üznüksizlik deňlemesi* diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0$$

deňlemedir. Ikinjisi bolsa, *ýagdaý deňlemesi* diýlip atlandyrylýan, dykyzlyk bilen basyşy baglanyşdyrýan $\rho = f(p)$ görnüşli deňlemedir. Şeýlelik bilen,

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + grad\ p - \rho \vec{F} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0, \\ \rho = f(p) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy seredilýän suwukluk akymy baradaky gidromehanika degişli meseläniň matematiki modeli bolýar. Bu modeli çözüp, $u, \upsilon, \omega, p, \rho$ funksiýalary tapmak bilen suwuklyk akymy baradaky mesele takmyn çözülýär. Sebäbi, modeliň özi takmyndyr. Elbetde, akyma täsir edýän beýleki hadysalary göz öňünde tutup, modeli takyklaşdyrmak bolar.

Üznüksizlik deňlemesiniň örän ýönekeý manysy bar. Akýan suwuklygyň içinde, göz öňüne getirilýän Σ üst bilen çäklenen Q göwrümi alalyň. Ol göwrümiň içindäki suwuklygyň t wagtdaky massasy

$$m(t) = \iiint_Q \rho(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz$$

deň bolar. $m(t + dt) - m(t)$ tapawut Q göwrümdäki suwuklygyň dt wagtyň dowamyndaky artdyrmasy bolar. Bu artdyrmany başgaça hem hasaplap bolýar. Eger $\vec{n}$ wektor Σ üstüň nokatlarynda gurlan daşky normal wektor bolsa, onda

$$\iint_\Sigma \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds \cdot dt$$

ululyk dt wagtda Σ üstden geçen suwuklygyň mukdaryny berer. $\vec{n}$ daşky normal bolany sebäpli,

$$m(t + dt) - m(t) = -\iint_\Sigma \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds \cdot dt$$

ýa-da

$$\frac{dm}{dt} = -\iint_\Sigma \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds \qquad (2)$$

deňligi alarys. Kesgitlemä görä,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_Q \rho dxdydz = \iiint_Q \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz,$$

Stoksuň formulasyna görä,

$$\iint_\Sigma \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_Q div(\vec{V}\rho) dxdydz.$$

Alnan bahalary (2) deňlikde goýup, alarys:

$$\iiint_Q \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = \iiint_Q div(\vec{V}\rho) dxdydz$$

ýa-da

$$\iiint_Q \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{V}\rho) \right) dxdydz = 0.$$

Q göwrümiň erkin bolany sebäpli, bu ýerden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{V}\rho) = 0$$

deňligi alarys. Diýmek, bu deňlik massanyň saklanma kanunynyň matematiki ýazgysydyr.

(1) deňlemeler ulgamyny ýönekeýleşdireliň. *Basyş funksiýasy* diýlip atlandyrylýan

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

funksiýany girizip,

$$\left\{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}, \ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}, \ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right\} = grad\ P(p)$$

ýazyp bileris. Ýönekeýlik üçin, $\vec{F}$ güýji potensial güýç diýip hasap edeliň, ýagny $\vec{F} = gradU$ deňligi kanagatlandyrýan U (x, y, z, t) funksiýa bar bolsun. Indi (1) ulgamy özgerdip ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \omega\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) - \upsilon\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right) = -\dfrac{\partial P(p)}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - \omega\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right) = -\dfrac{\partial P(p)}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \upsilon\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y} - \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}\right) - u\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\vec{V}^2}{2}\right) = -\dfrac{\partial P(p)}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial z}. \end{cases} \qquad (3)$$

Soňra $rot\vec{V}$ towlanma wektorynyň

$$rot\vec{V} = \left\{\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial z}, \ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \ \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

formula bilen kesgitlenýändigini ýatlap, (3) ulgamy

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V} \times rot\vec{V}] = -\ grad\ B$$

wektor görnüşinde ýazyp bileris. Bu ýerde

$$B = \frac{\vec{V}^2}{2} + P(p) - U$$

– Bernulliniň üçagzalygy atly funksiýa. Eger akymyň towlanma wektory $rot\vec{V} \equiv 0$ bolsa, onda deňleme has ýönekeý

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\ grad\ B \tag{4}$$

görnüşe geler. Matematiki analizden belli bolşy ýaly, $rot\vec{V} \equiv 0$ halda $\vec{V}$ wektor meýdany potensial wektor meýdany bolýar. Bu bolsa,

$$\vec{V} = grad\ \varphi$$

deňligi kanagatlandyrýan $\varphi\ (x, y, z, t)$ funksiýa tapylar diýmekdir. Bu halda (4) deňlemäni

$$\frac{\partial}{\partial t}(grad\ \varphi) = -\ grad\ B$$

ýa-da

$$grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B\right) = 0$$

görnüşde ýazyp bolar. Soňky deňlikden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B = \Phi(t)$$

deňlemä geleris, bu ýerde $\Phi(t)$ diňe t bagly erkin funksiýa. $B = \frac{\vec{V}^2}{2} + P(p) - U$ we $\vec{V} = grad\ \varphi$ bolýandygyny göz öňünde tutup, soňky deňlemäni *Koşi-Lagranžyň integraly* diýlip atlandyrylýan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|grad\ \varphi|^2 + P(p) - U = \Phi(t) \tag{5}$$

görnüşde ýazyp bileris.

Eger $\varphi\ (x, y, z, t)$ potensial funksiýa wagta bagly bolmasa, ýagny $\vec{V}$ wektor meýdany stasionar meýdan bolsa, onda $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0$ bolar we deňleme

$$\frac{1}{2}|grad\ \varphi|^2 + P(p) - U = C \qquad (C - \text{hemişelik}) \tag{6}$$

görnüşi alar. Bu deňlige *Bernulliniň integraly* diýýärler. Ol $\varphi\ (x, y, z, t)$ we U belli bolan halda suwuklygyň islendik nokadyndaky basyşyny tapmak üçin giňden ulanylýar. $|grad\ \varphi|^2 = |\vec{V}|^2 = V^2$ bolany sebäpli, Bernulliniň integralyny

$$\frac{1}{2}V^2 + P(p) - U = C \tag{7}$$

görnüşde hem ýazyp bolar.

12. SUWUKLYGYŇ TEKIZ AKYMYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Biz geçen bölümde suwuklygyň akymynyň deňlemesi barada gürrüň etdik. Bu bölümde meseläni has hem ýeňilleşdireliň, ýagny suwuklyk bölejikleriniň belli bir α tekizlige parallel tekizlikde hereket edýän ýagdaýyna seredeliň. Köp hallarda α tekizligine parallel tekizlikleriň hemmesinde hereket birmeňzeş bolýar we suwuklygyň hereketini öwrenmek üçin diňe bir tekizlikdäki hereketi öwrenmek ýeterlik bolýar. Aşakda edil şeýle hereket barada gürrüň edilýär.

Bu halda, xOy koordinatalar ulgamyny α tekizlikde ýerleşdirsek we z oky oňa perpendikulýar geçirsek,

$$\vec{V} = \{u(x, y, 0, t), \upsilon(x, y, 0, t)\}, \qquad rot\vec{V} = \left\{0,\ 0,\ \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \tag{8}$$

boljakdygy we suwuklygyň hereket deňlemesiniň

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \upsilon\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial B}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

görnüşe geljekdigi düşnüklidir.

Indi akymy towlanmasyz, stasionar we suwuklygy gysylmaýan hasap etsek, onda

$$rot\vec{V} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

towlanmasyzlyk şerti we

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \equiv 0$$

gysylmazlyk şerti ýerine ýetmeli bolar. Basyş funksiýasyny $P(p) = \dfrac{p}{\rho}$ hasap etsek, Bernulliniň integraly

$$\frac{u^2+\upsilon^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U=C \qquad (C - \text{hemişelik})$$

görnüşe geler. Soňky üç deňleme bilelikde suwuklygyň akymyny kesgitleýän

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=0, \\ \dfrac{u^2+\upsilon^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}-U=C \end{cases} \tag{10}$$

deňlemeler ulgamyny berýärler. Olardan $u,\ \upsilon,\ p$ näbelli funksiýalary tapýarlar. Anyklyk üçin, tükeniksizlikde $\vec{V}$ tizlik we p basyş hemişelik hasap edilýär, ýagny $\vec{V}\,|_{r=\infty}=\vec{V}_\infty$ – hemişelik wektor, $p\,|_{r=\infty}=p_\infty$ – hemişelik san bolýar, $\vec{F}$ – massalar güýji nola deň hasap edilýär. Bulardan başga-da, şol akymyň içinde ýerleşen L ýapyk žordan egrisi bar bolup, $\vec{n}=\{n_x, n_y\}$ L egriniň $M(x, y)$ nokadyndaky normal wektory bolsa, onda L egriniň nokatlarynda

$$un_x+\upsilon n_y=0$$

şert ýerine ýetýär hasap edilýär. Soňky şerte suwuklygyň L egriden *syzmazlyk şerti* diýýärler. Netijede, ýokardaky bellemelerden soň, suwuklyk akymynyň matematiki modeli şeýle görnüşe geler:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}=0, \\ \dfrac{u^2+\upsilon^2}{2}+\dfrac{p}{\rho}=\dfrac{p_\infty}{\rho_\infty}+\dfrac{u_\infty^2+\upsilon_\infty^2}{2}, \\ un_x+\upsilon n_y=0 \quad (\,L\ egride). \end{cases} \tag{11}$$

L egriniň çözmeli meselä görä saýlanyp alynýandygyny belläliň. Üç deňlemeden we bir gyra şertinden durýan (11) ulgama gyra meselesi diýýärler. Elbetde, birinji gyzyklandyrýan mesele (11) gyra meselesiniň çözüwi barmy, ýeke-täkmi ýa-da köpmi diýen sowallar bolmaly. Belli bolşy ýaly, (11) ulgamyň birinji deňlemesi $\vec{V}=\{u,\upsilon\}$

wektor meýdanynyň potensial meýdan bolýandygyny aňladýar. Beýle diýmek, $\varphi(x, y)$ potensial funksiýa tapylyp, $u \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \upsilon \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ deňlikler ýerine ýetýär diýmekdir. u we υ funksiýalaryň tapylan bahalaryny (11) ulgamyň ikinji deňlemesinde ýerine goýsak,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

deňlemä geleris. Bu deňlemä Laplasyň deňlemesi diýýärler, ony kanagatlandyrýan islendik funksiýa *garmoniki funksiýa* diýýärler. Diýmek, $\varphi(x, y)$ – garmoniki funksiýadyr. Goý, $\psi(x, y)$ funksiýa $\varphi(x, y)$ bilen çatyrymly islendik garmoniki funksiýa bolsun. Ol $\varphi(x, y)$ funksiýanyň üsti bilen hemişelik goşulyja çenli takyklykda tapylýar. Çatyrymly diýmek

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{12}$$

toždestwolar ýerine ýetýär diýmekdir.

Kompleks üýtgeýänli funksiýalar nazaryýetinden belli bolşy ýaly, soňky deňlikler

$$f(z) \equiv \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) \tag{13}$$

funksiýa $z = x + iy$ kompleks argumentiň önümi bar funksiýasy bolýar diýmekdir. Biz $\varphi(x, y)$ funksiýa potensial funksiýa diýipdik. Gidrodinamikada $f(z) \equiv \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ funksiýa *kompleks potensial* diýýärler. Ýokarda kesgitlenişine görä, $\varphi(x, y)$ we $\psi(x, y)$ özara çatyrymly garmoniki funksiýalar. Şol sebäpli, $\varphi(x, y)$ funksiýa hem $\psi(x, y)$ funksiýanyň üsti bilen hemişelik goşulyja çenli takyklykda kesgitlener. (11) ulgamyň dördünji şertini,

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \upsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

deňlikleri ulanyp,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial\psi}{\partial x} n_y = 0$$

görnüşde ýazalyň. Şeýlelikde, (11) gyra meselesi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} n_x - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} n_y = 0 \end{cases} \tag{14}$$

gyra meselesine syrygýar. Sebäbi, (11) ulgamyň üçünji deňlemesi u we υ belli ýagdaýynda p basyşy tapmak üçin ulanylýar.

Hususy önümli deňlemeler nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (14) gyra meselesiniň çözüwi bar, özi hem hemişelik goşulyja çenli takyklykda kesgitlenýär.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \upsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

bolany sebäpli, u we υ funksiýalar anyk kesgitlenilýär.

Goý, $\psi(x, y)$ (14) meseläniň çözüwi bolsun. (12) deňliklere göra,

$$0 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \vec{V} \cdot grad\ \psi$$

bolýandygy üçin, *grad* ψ wektor $\vec{V}$ wektora perpendikulýar bolar. Şerte görä, $\vec{V} = \{u, \upsilon\}$ – stasionar wektor meýdany. Eger l egriniň islendik nokadyndaky wektor meýdanyna degişli wektor şol nokatda l egrä galtaşýan bilen gabat gelse, onda l egrä ugur çyzygy diýýärler.

$$\psi(x, y) = C \qquad (C \text{ – hemişelik})$$

egrilere seredeliň. Olara $\psi(x, y)$ funksiýanyň dereje çyzyklary diýýärler.

Goý, $\psi(x, y) = C$ egriniň parametrik deňlemesi $x = x(t)$, $y = y(t)$ bolsun. Onda $\psi(x(t), y(t)) \equiv C$ deňlik ýerine ýeter. Soňky deňligiň iki tarapyndan differensial alsak,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'(t) \equiv 0$$

deňlige geleris. $\vec{\tau} = \{x'(t), y'(t)\}$ wektoryň $\psi(x, y) = C$ egrä galtaşýan wektor bolýandygyny we onuň $\vec{V}$ wektor meýdanynyň şol nokatdaky agzasy bilen kollinear bolýandygyny ýatlasak, onda $\psi(x, y) = C$ egriniň nokatlarynda

$$grad\ \psi \cdot \vec{V} = \frac{\partial \psi}{\partial x} u + \frac{\partial \psi}{\partial y} \upsilon = 0$$

deňligiň ýerine ýetýändigini göreris. Diýmek, islendik $\psi(x, y) = C$ dereje çyzygy $\vec{V}$ wektor meýdanynyň (suwuklyk akymynyň) ugur çyzygy bolýar eken. Şoňa görä-de, $\psi(x, y)$ funksiýa *ugur funksiýasy* diýilýär.

Şeýlelik bilen, (14) meseläniň çözüwi bolan $\psi(x, y)$ funksiýa,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \upsilon$$

deňliklere görä, $\vec{V}$ wektor meýdanyny kesgitleýär. Ondan başga-da, $\psi(x, y) = C$ dereje çyzyklary $\vec{V}$ wektor meýdanynyň ugur çyzyklaryny, ýa-da başgaça aýdylanda, suwuklyk bölejikleriniň traýektoriýalaryny kesgitleýärler. Diýmek, $\psi(x, y)$ funksiýa ýa-da onuň üsti bilen kesgitlenýän

$$f(z) \equiv \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$$

kompleks potensial suwuklyk akymyny doly kesgitleýär. Belli bolşy ýaly, $f'(z)$ bardyr we

$$f'(z) = \varphi'_x + i \cdot \psi'_x = u - i\upsilon$$

deňlik ýerliklidir. Gidrodinamikada $u+i\upsilon$ ululyga kompleks tizlik, $f'(z) = u - i\upsilon$ ululyga bolsa çatyrymly tizlik diýmek kabul edilen. Görnüşi ýaly, kompleks tizligi bilmek ýa-da çatyrymly tizligi bilmek $\vec{V}$ wektor meýdanyny doly kesgitleýär. Şeýlelik bilen, suwuklyk akymyny $f(z)$ we $f'(z)$ funksiýalar doly kesgitleýärler. Ýönekeý suwuklyk akymlarynyň üçüsine seredeliň.

12.1. Birjynsly tekiz akym

Bu akym

$$f(z) = z_0 \cdot z$$

kompleks potensial bilen kesgitlenýär.

$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z = x + iy$ bolýandygyna görä,

$$f(z) = (x_0 + iy_0)(x + iy) = x_0x - y_0y + i(x_0y+y_0x)$$

alarys. Görşümiz ýaly, $\varphi(x, y) = x_0x - y_0y$ akymyň potensial funksiýasy, $\psi(x, y) = x_0y - y_0x$ akymyň ugur funksiýasy bolar.

$f'(z) = z_0$, diýmek, $u = x_0$, $\upsilon = -y_0$ ýa-da $\vec{V} = \{x_0, -y_0\}$ tizlikler meýdanyny berer. $x_0y + y_0x = C$ gönüler bolsa akymyň ugur çyzyklary bolarlar. Şeýlelikde, birjynsly tekiz akym hemişelik tizlik bilen göni çyzyklar boýunça hereket edýän bölejikleriň akymydyr. z_0 sany $z_0 = V_\infty e^{-i\theta_\infty}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda akymyň kompleks potensialyny

$$f(z) = V_\infty e^{-i\theta_\infty} \cdot z$$

görnüşde ýazyp bolar.

12.2. Gözbaşly akym

Gözbaş koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelýär diýip hasap edeliň. Bu ýerde iki hili akyma seredeliň. Birinji akymda suwuklyk bölejikleri radius boýunça gözbaşdan daşlaşýarlar (göni akym). Ikinji akymda suwuklyk bölejikleri radius boýunça gözbaşa golaýlaşýarlar (ters akym). Bu akymlaryň kompleks potensial funksiýasyny

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z$$

görnüşde almak bolar. Bu ýerde Q – hakyky san. z üýtgeýäni $z = re^{i\theta}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda kompleks potensial

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln r + i\frac{Q}{2\pi}\theta$$

ýa-da

$$f(z) = \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2 + y^2) + i\frac{Q}{2\pi}arctg\frac{y}{x}$$

görnüşe geler. Diýmek,

$$\varphi(x, y) = \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2 + y^2), \quad \psi(x, y) = \frac{Q}{2\pi}arctg\frac{y}{x}.$$

Akymyň ugur çyzyklary

$$\psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi} arctg \frac{y}{x} = C_1$$

ýa-da

$$\frac{y}{x} = C$$

göni çyzyklar bolar. $\vec{V}$ tizlik bolsa

$$\vec{V} = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2} \right\} = \frac{Q}{2\pi r^2} \vec{r}$$

görnüşde bolar (bu ýerde $\vec{r} = \{x, y\}$). Onda, $Q > 0$ halda göni akymy, $Q < 0$ halda bolsa ters akymy alarys.

12.3. Nokatdaky towlanma akymy

Onuň kompleks potensial funksiýasyny

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i} \ln z, \ A \text{ – hakyky san,}$$

görnüşde alýarlar. Onuň çatyrymly tizligi

$$u - i\upsilon = f'(z) = \frac{A}{2\pi i z}$$

görnüşde bolar. z üýtgeýäni $z = re^{i\theta}$ trigonometrik görnüşde ýazsak, onda kompleks potensial

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i}(\ln r + i\theta)$$

ýa-da

$$f(z) = \frac{A}{2\pi} arctg \frac{y}{x} - i \frac{A}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

görnüşe geler. Bu ýerden alarys:

$$\varphi(x,y) = \frac{A}{2\pi} arctg \frac{y}{x} \text{ – potensial funksiýa,}$$

$$\psi(x,y) = -\frac{A}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \text{ – ugur funksiýasy.}$$

Akymyň ugur çyzyklary

$$\psi(x,y) = -\frac{A}{4\pi}\ln(x^2 + y^2) = C$$

ýa-da

$$x^2 + y^2 = C$$

töwerekler bolar. Suwuklyk bölejikleri $x^2 + y^2 = C$ töwerekler boýunça hereket ederler, olaryň çatyrymly tizligi bolsa

$$u - i\upsilon = f'(z) = -\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{A}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2 + y^2}i$$

ýa-da

$$u - i\upsilon = -\frac{A}{2\pi(x^2 + y^2)}(y + ix)$$

deňlikden tapylar.

$f(z) = \frac{A}{2\pi i}\ln z$ formuladaky A sany anyklalyň. xOy tekizlikde islendik l ýapyk žordan egrisini alalyň we

$$\int_l (u - i\upsilon)dz = \int_l f'(z)dz$$

integraly hasaplalyň:

$$\int_l (u - i\upsilon)dz = \int_l (u - i\upsilon)(dx + idy) = \int_l udx + \upsilon dy + i\int_l udy - \upsilon dx.$$

Indi

$$\int_l udx + \upsilon dy = \Gamma, \qquad \int_l udy - \upsilon dx = Q$$

belgilemeleri girizip,

$$\int_l (u - i\upsilon)dz = \Gamma + iQ$$

deňligi alarys. Γ integrala $\vec{V} = \{u, \upsilon\}$ wektor meýdanynyň l egri boýunça aýlanmasy diýýärler. Q integral bolsa, şol wektor meýdanynyň kesgitleýän suwuklyk akymynyň wagt birliginde l egriden geçýän mukdary bolýar. Beýleki tarapdan,

$$\int_l (u - i\upsilon)dz = \int_l f'(z)dz = \int_l \frac{A}{2\pi iz}dz.$$

Belli bolşy ýaly, koordinatalar başlangyjjyny l egri bilen çäklenen ýaýlanyň içinde hasap etsek, $\int\limits_l \frac{1}{z}dz = 2\pi i$ bolar. Şoňa görä, alarys:

$$\int\limits_l (u - i\upsilon)dz = A,$$

$$\Gamma + iQ = A,$$

$$A = \Gamma, \quad Q = 0.$$

Bu ýerden nokatdaky towlanma akymynyň kompleks potensial funksiýasy üçin

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

formulany alarys.

Şu ýerde geljek üçin ähmiýetli bir bellik etmek zerur. Biz gözbaşly akymlary kesgitlänimizde gözbaş koordinatalar başlangyjynda diýip hasap etdik, nokatdaky towlanmanyň akymyny kesgitlänimizde towlanma nokady koordinatalar başlangyjynda diýip hasap etdik. Emma, akymyň gözbaşy hem, towlanma nokady hem islendik z_0 nokatda bolup biler. Olary kesgitlemek üçin öňki tapylan kompleks potensiallarda z-iň ýerine $z - z_0$ goýmak ýeterlikdir. Elbetde, täze alnan potensiallar dürli akymlary kesgitleýärler. Ondan başga-da, dürli akymlaryň kompleks potensial funksiýalaryny goşsak, öňkülere görä çylşyrymly, ýene-de bir akymyň kompleks potensial funksiýasyny alarys. Ine, şu pikire mysal hökmünde, ýene-de bir akyma seredeliň.

Goý, $f_1(z) = \frac{A}{2\pi}\ln(z + a)$ ($A>0$) funksiýa gözbaşy $z_0 = -a$ nokatda bolan göni akymyň kompleks potensial funksiýasy, $f_2(z) = -\frac{A}{2\pi}\ln(z - a)$ funksiýa bolsa gözbaşy $z_0 = a$ nokatda bolan ters akymyň kompleks potensial funksiýasy bolsun. Kompleks potensial funksiýasy

$$f_a(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

bolan akyma seredeliň.

$f(z)$ funksiýany anyklamak üçin $f_a(z)$ funksiýany özgerdeliň:

$$f_a(z) = \frac{A}{2\pi}[\ln(z+a) - \ln(z-a)] = \frac{A}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a}.$$

a we A sanlaryň islendik bahalarynda bu funksiýa haýsy-da bolsa bir akymyň kompleks funksiýasy bolýar. $A = \frac{m}{2a}$ (m – anyk bellenen san) belgileme girizeliň we $f_a(z) = \frac{m}{4a\pi}\ln\frac{z+a}{z-a}$ funksiýanyň a nola ymtylandaky predelini tapalyň:

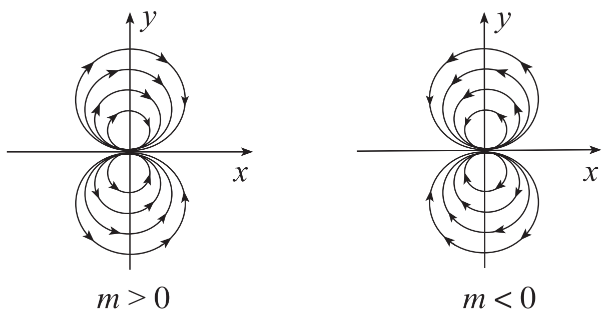
$$f(z) = \lim_{a\to 0} f_a(z) = \lim_{a\to 0}\frac{m}{4a\pi}\ln\left(1+\frac{2a}{z-a}\right) = \frac{m}{2\pi z}.$$

Kompleks potensial funksiýasy

$$f(z) = \frac{m}{2\pi z}$$

bolan akyma *goşa gözbaşly akym* diýýärler. Bu akym üçin

$$\varphi(x,y) = \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \psi(x,y) = -\frac{m}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$



13-nji surat

boljakdygy düşnüklidir. Onuň ugur çyzyklarynyň deňlemeleri

$$\psi(x,y) = C_0$$

ýa-da

$$-\frac{m}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = C_0$$

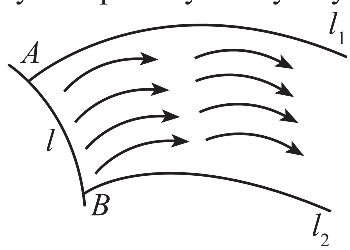
görnüşde ýazylýar. Eger $-\frac{2\pi C_0}{m} = \frac{1}{2\alpha}$ belgileme girizsek, soňky deňleme

$$x^2+(y-\alpha)^2 = \alpha^2$$

görnüşe geler. Bu bolsa merkezi $(0, \alpha)$ nokatda bolan $|\alpha|$ radiusly töwerekleriň maşgalasydyr (*13-nji surat*).

Suratdan görnüşi ýaly, $m > 0$ bolanda suwuklyk bölejikleri töwerek boýunça hereket edip, y okundan sagda gözbaşa ýygnanýarlar, çepde bolsa ondan daşlaşýarlar, $m < 0$ bolsa – hereket tersine bolýar.

Goý, l_1 we l_2 iki sany ugur çyzygy bolsun (*14-nji surat*). l olaryň ikisini hem suratdaky ýaly kesip geçýän egri. l egriniň A we B nokatlarynyň arasyndan geçýän suwuklyk bölejikleriniň hemişe l_1 we l_2 egrileriň arasynda hereket etjekdigi düşnüklidir, ýagny l_1 we l_2 çyzyklar ýabyň kenary wezipesini ýerine ýetirýärler.



14-nji surat

Indi l egriniň AB dugasyndan wagt birliginde geçýän suwuklyk mukdaryny kesgitläliň. Goý, $\vec{n} = \{n_x, n_y\}$ wektor AB duganyň nokatlaryndaky normal wektor bolsun. Onda AB dugadan wagt birliginde geçen suwuklygyň Q göwrümi

$$Q = \int_A^B \vec{V}\cdot\vec{n}\,ds = \int_A^B (un_x + \upsilon n_y)ds = \int_A^B udy - \upsilon dx$$

deňlikden tapylar. $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\upsilon = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

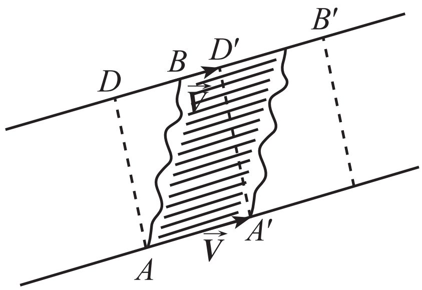
$$Q = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = \psi(B) - \psi(A)$$

formulany alarys. Görşümiz ýaly, l_1 we l_2 ugur çyzyklaryny birikdirýän AB dugadan wagt birliginde geçýän suwuklygyň göwrümi AB duga bagly däl we $\psi(B) - \psi(A)$ tapawut bilen kesgitlenýär.

Mysala ýüzleneliň. Suwuklyk akymynyň $\vec{V} = \{a, b\}$ tizligi islendik nokatda hemişelik bolsun. Bu ýagdaýda onuň ugur funksiýasynyň $\psi = ay - bx$ boljakdygy düşnüklidir. Bu funksiýanyň kömegi bilen

$$\begin{aligned} l_1: &\quad ay - bx = c_1, \\ l_2: &\quad ay - bx = c_2 \end{aligned}$$

iki sany ugur çyzygyny alalyň. Olar parallel göni çyzyklardyr (*15-nji surat*). Olary AB egri bilen birikdireliň ($A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$). Kesgitlemä görä, $\vec{V}$ wektor l_1 we l_2 gönülere paralleldir. $\vec{V}$ tizlik hemişelik



15-nji surat

bolany sebäpli, $A'B'$ egri AB egrini $\vec{V}$ wektoryň ugruna $|\vec{V}| = AA'$ aralyga parallel göçürme bilen alynýar. Şol sebäpli, AB egriden wagt birliginde geçýän suwuklygyň mukdary $ABB'A'$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyna deň bolar. Şu ýerde, suwuklygyň dykyzlygynyň 1-e deň hasaplanýandygyny we egriden geçýän suwuklygyň mukdary hökmünde, ugrukdyryjysy AB egri bolan, emele getirijileri AB egriniň ýatýan tekizligine perpendikulýar birlik kesimler bolan silindrik üstden geçýän şol tizlikli suwuklygyň mukdaryna düşünilýändigini bellemek gerek. Suratdan görnüşi ýaly, $ABB'A'$ egriçyzykly trapesiýanyň meýdany $ADD'A'$ gönüburçlugyň meýdanyna deňdir, ýagny $AD \cdot AA' = AD \cdot |\vec{V}|$ bolar. Diýmek, AB egriden wagt birliginde geçýän suwuklygyň möçberi AB egrä bagly däl bolýar. Aşakda akym bilen baglanyşykly ýene bir meselä garalýar.

13. UÇARYŇ UÇMAGYNA GETIRÝÄN GÖTERIJI GÜÝÇLERIŇ DÖREÝŞI BARADA MESELE

Goý, bize akym berlen bolsun. Akymyň öz ugrunda ýerleşdirilen jisime bolan täsirini öwreneliň. Elbetde, akym çylşyrymly bolsa, ýerleşdirilen jisimiň görnüşi çylşyrymly bolsa, bu meseläni çözmek örän kyn. Şonuň üçin, ulanylyşda ähmiýeti uly bolan akyma we ýönekeý görnüşli jisime seredeliň. Aşakda beýik rus alymy N.Ý.Žukowskiniň öwrenen akymy barada gürrüň edilýär.

Goý, akym 3 sany dürli akymyň – x okunyň položitel ugry tarapa akýan birjynsly akymyň, koordinatalar başlangyjynda ýerleşen towlanma akymynyň we goşa gözbaşly akymyň birleşmesinden ybarat bolsun. Ýokarda görkezilişi ýaly, şeýle akymyň kompleks potensialy

$$f(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \frac{m}{2\pi z}$$

görnüşde, onuň çatyrymly tizligi bolsa

$$\overline{w}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{m}{2\pi z^2}$$

görnüşde bolar. Bu akymyň $\psi(x, y)$ ugur funksiýasyny we $\psi(x, y) = C$ deňlik arkaly kesgitlenýän ugur çyzyklaryny öwreneliň. Ugur çyzyklarynyň akymyň bölejikleriniň hereket traýektoriýalary bolýandygyny okyja ýatladalyň.

Başda ýönekeýlik üçin $\boldsymbol{\Gamma = 0}$ **ýagdaýa seredeliň**. Bu halda

$$f(z) = V_\infty z + \frac{m}{2\pi z} = V_\infty (x + iy) + \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{x - iy}{x^2 + y^2} =$$

$$= V_\infty x + \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(V_\infty y - \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

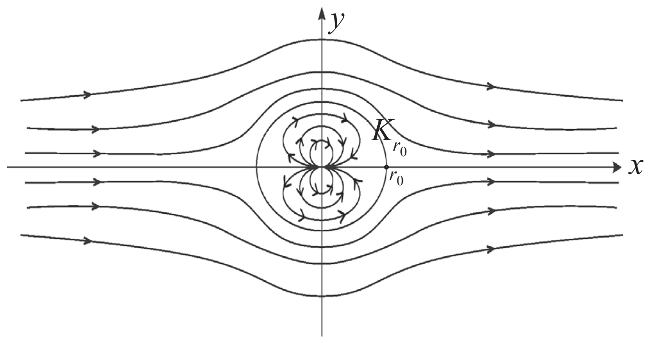
bolýandygy sebäpli, ugur funksiýasy

$$\psi(x,y) = V_\infty y - \frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

deňlik arkaly kesgitlener, ugur çyzyklary bolsa,

$$y\left(V_\infty - \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)}\right) = C$$

deňliklerden tapylar. Ugur çyzyklarynyň maşgalasy x we y oklaryna görä simmetrik bolýar. Sebäbi, x ululyk $-x$ bilen çalşyrylanda ýokardaky deňleme üýtgemeýär; y ululyk $-y$ bilen we şol wagtda C san $-C$ san bilen çalşyrylanda hem bu deňleme üýtgemeýär. Ugur çyzyklarynyň maşgalasynyň ýerleşişi 16-njy suratda görkezilendir.



16-njy surat

$K_{r_0}: x^2 + y^2 = r_0^2, r_0^2 = \dfrac{m}{2\pi V_\infty}$ töwerek bu maşgalanyň agzasydyr. Ol $C = 0$ baha degişlidir. Goý, $\vec{V} = \{u(x,y),\ \upsilon(x,y)\}$ tekiz akym berlen bolsun. L şol tekizlikde ýatan egri, $\vec{n} = \{n_x(x,y), n_y(x,y)\}$ şol egrä onuň $M(x, y)$ nokadynda geçirilen normal wektor bolsun. Eger-de L egriniň nokatlarynda

$$u(x, y) \cdot n_x(x, y) + \upsilon(x, y) \cdot n_y(x, y) = 0 \qquad (10)$$

deňlik ýerine ýetse, onda L egriniň üstünde (10) syzmazlyk şerti ýerine ýeter.

$x_2 + y_2 = r_0^2$ töweregiň üstünde (10) syzmazlyk şertiniň ýerine ýetýändigi aýdyňdyr (sebäbi, ol ugur çyzyklarynyň maşgalasynyň biri bolany üçin, $\vec{v}$ tizlik wektory ol töweregiň nokatlarynda galtaşýan wektor bolýar).

Indi akym tekiz parallel diýeliň. Şeýle diýmek, xOy tekizligine parallel islendik tekizlikde akym edil xOy tekizligindäki ýaly diýmekdir. $Oxyz$ koordinatalar ulgamyna seredeliň. Akymyň ugrunda ugrykdyryjysy K_{r_0} töwerek bolan, emele getirijileri z okuna parallel silindr görnüşdäki gaty jisim ýerleşdirilen bolsun (akymyň tizligi nola deň ýagdaýda jisim goýlan ýerinde deňagramlylykda durýar hasap edilýär). Onda, silindriň daşynda islendik gorizontal tekizlikde akym öz durkuny saklar. Elbetde, akym jisime täsir eder we ony herekete getirmäge çalşar. Akym silindre görä simmetrik bolany üçin, täsir ediji güýjüň y okuna bolan proýeksiýasy nola deň bolar.

Indi bolsa **$\Gamma \neq 0$ ýagdaýa seredeliň.**

$$f(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \frac{m}{2\pi z}; \quad z = re^{i\varphi}, \quad z = x + iy$$

bahalary ulanyp, alarys:

$$f(z) = V_\infty (x + iy) + \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\varphi) + \frac{m(x - iy)}{2\pi(x^2 + y^2)} =$$

$$= V_\infty x + \frac{\Gamma\varphi}{2\pi} + \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(V_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2 + y^2}\right);$$

$$\overline{w}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{m}{2\pi z^2} = V_\infty + \frac{\Gamma(x - iy)}{2\pi i(x^2 + y^2)} - \frac{m(x^2 - y^2 - 2xyi)}{2\pi(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= V_\infty - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)} - \frac{m(x^2 - y^2)}{2\pi(x^2 + y^2)^2} + i\left[\frac{mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2} - \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)}\right].$$

Bu ýerden, ugur funksiýasy üçin

$$\psi(x, y) = V_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

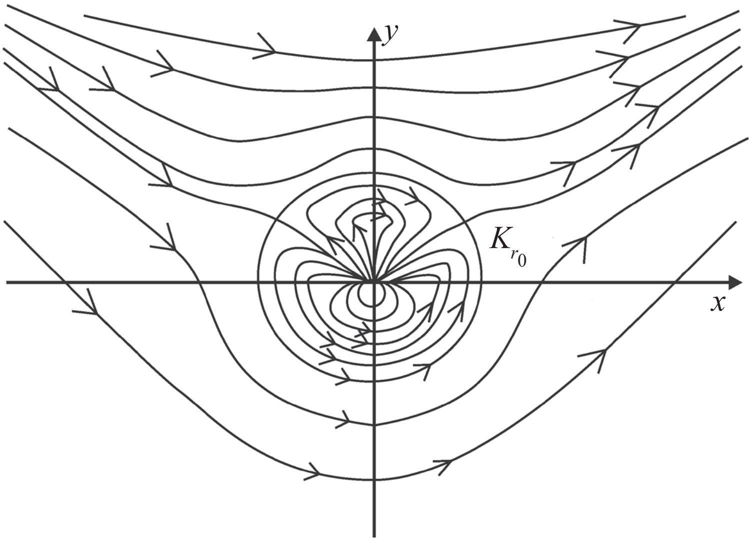
deňligi, tizlik üçin bolsa

$$\vec{V} = \left\{V_\infty - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)} - \frac{m(x^2 - y^2)}{2\pi(x^2 + y^2)^2}; \quad -\frac{mxy}{\pi(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)}\right\}$$

formulany alarys. Ugur çyzyklarynyň

$$\psi(x, y) = C$$

maşgalasynyň ýerleşişini öwreneliň. x ululyk $-x$ ululyga çalşyrylanda $\psi(x, y)$ funksiýanyň üýtgemeýänligi sebäpli, ugur çyzyklarynyň her biri y oka görä simmetrik ýerleşer. Emma, indi olar x oka görä simmetrik däldirler. $\psi(x, y) = C$ deňlikde $C = \frac{-\Gamma}{2\pi}\ln r_0$ goýsak, onda K_{r_0} töweregiň ýene-de ugur çyzygy bolýandygyny we öňki sebäplere görä, syzdyrmaýan egri boljakdygyny göreris. Bu akymyň ugur çyzyklarynyň ýerleşişi 17-nji suratda görkezilendir.



17-nji surat

Ýene-de, edil ýokardaky ýaly, emele getirijileri z okuna parallel silindr görnüşdäki gaty jisimi akymda ýerleşdireliň. Onda silindriň daşynda akymyň özüni alyp baryşy 16-njy suratda görkezilen K_{r_0} töweregiň daşyndaky ýaly bolar. Elbetde, indi akymyň jisime täsir edýän güýçleriniň jemi x oky boýunça ugrykdyrylan bolmaz.

Ol güýç nähili täsir edýärkä? Ol $\vec{F}$ güýji $\vec{i}$ we $\vec{j}$ ortlar boýunça dargadalyň:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} .$$

Akymyň y oka görä simmetrik bolýandygy sebäpli, $F_x = 0$ boljakdygy äşgärdir. Diýmek, $\vec{F}$ güýç y oky boýunça, F_y-iň alamatyna baglylykda, diňe ýokarlygyna ýa-da diňe aşaklygyna täsir eder. Ol güýje göteriji güýç diýýärler. Ony hasaplajak bolalyň.

Goý, $p = p(x, y)$ akymdaky basyş bolsun. Onda silindre täsir edýän jemleýji güýç

$$\vec{F} = \oint p \vec{n} ds$$

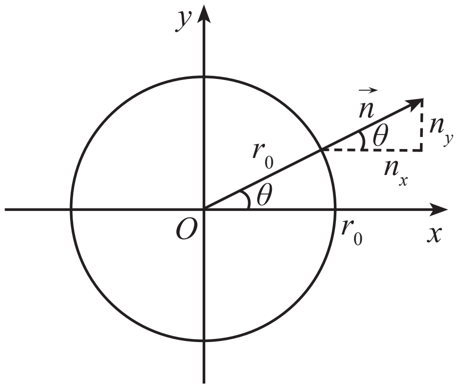
integrala deň bolar. Bu ýerde $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ K_{r_0} töwerege geçirilen daşky normal, integral bolsa K_{r_0} boýunça alynýar. Onda

$$\vec{F} = -\vec{i} \cdot \oint pn_x ds - \vec{j} \cdot \oint pn_y ds.$$

alarys. Ýokarda aýdylana görä, $\oint pn_x ds = 0$. Şoňa görä-de,

$$\vec{F} = -\oint pn_y ds \cdot \vec{j}$$

bolar. Integraly ýönekeýleşdireliň.



18-nji surat

18-nji suratdan görnüşi ýaly, $n_y = \sin\theta$; $ds = r_0 d\theta$ bolýar we $\vec{F}$ üçin aşakdaky deňligi alarys:

$$\vec{F} = -r_0 \int_0^{2\pi} p\sin\theta d\theta \cdot \vec{j}.$$

Indi biziň akymymyzy kesgitleýän $\vec{V} = \{u, \upsilon\}$ tizligiň potensial funksiýasynyň bardygyny we onuň wagta bagly däldigini ýatlalyň. Şol sebäpli, biziň akymymyz üçin Bernulliniň

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} - U = C$$

integraly ýerliklidir. Beýleki tarapdan, K_{r_0} töweregiň nokatlarynda $z = r_0 e^{i\theta}$ bolany üçin

$$\overline{w} = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi iz} - \frac{m}{2\pi z^2}$$

çatyrymly tizligi

$$\overline{w} = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i r_0} e^{-i\theta} - \frac{m}{2\pi r_0^2} e^{-2i\theta}$$

görnüşde we $\frac{m}{2\pi r_0^2} = V_\infty$ bolýandygyny ýatlap,

$$\overline{w} = V_\infty (1 - e^{-2i\theta}) - \frac{\Gamma}{2\pi r_0} i e^{-i\theta} = i e^{-i\theta}\left(\frac{V_\infty}{i} \cdot \frac{1 - e^{-2i\theta}}{e^{-i\theta}} - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right) =$$

$$= i e^{-i\theta}\left(2V_\infty \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right) = i e^{-i\theta}\left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)$$

görnüşde ýazyp bolar. Bu ýerden

$$|\overline{w}|^2 = V^2 = \left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2$$

deňligi alarys. Bernulliniň integralynda $x = -\infty$ goýup, beýleki güýçlere görä ujypsyz bolany üçin $U = 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = C.$$

C-niň tapylan bahasyny integralda ýerine goýup,

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V_\infty^2 - \frac{p_\infty}{\rho} = 0$$

deňlige geleris. Soňky deňlikde V^2-yň ýerine onuň tapylan bahasyny goýup, alarys:

$$\frac{1}{2}\left(2V_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)^2 + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V_\infty^2 - \frac{p_\infty}{\rho} = 0.$$

Bu deňlikden p basyşy tapýarys:

$$p = -\frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2 + p_\infty + \frac{1}{2} V_\infty^2 \rho.$$

Basyşyň tapylan bahasyny

$$\vec{F} = -r_0 \int_0^{2\pi} p \sin\theta d\theta \cdot \vec{j}$$

formulada ýerine goýup, alarys:

$$F_y = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{1}{2} V_\infty^2 \rho - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} \right)^2 \right] \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{r_0}{2} \rho V_\infty^2 \int_0^{2\pi} \left[4\sin^2\theta - 2\sin\theta \cdot \frac{\Gamma}{\pi r_0 V_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} \right)^2 \right] \sin\theta d\theta =$$

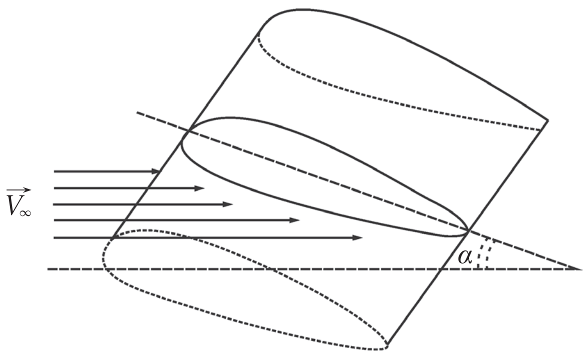
$$= -\frac{r_0}{2} \rho V_\infty^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2\theta \cdot \frac{\Gamma}{\pi r_0 V_\infty} d\theta = -r_0 \rho V_\infty \frac{\Gamma}{\pi r_0} \cdot \pi = -\rho V_\infty \Gamma.$$

Şeýlelikde, F_y üçin

$$F_y = -\rho V_\infty \Gamma$$

formulany alarys.

Goý, indi akymda kese kesigi töwerek däl-de, uçaryň ganatynyň kese kesigine meňzeş bolan (*19-njy surat*) silindrik jisim ýerleşdirilen bolsun.



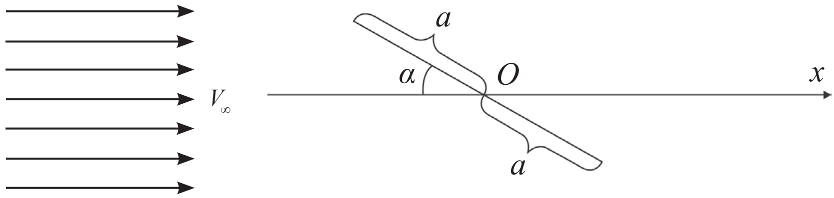
19-njy surat

N.Ý.Žukowskiniň teoremasyna laýyklykda, şeýle silindre hem edil ýokardaky ýaly göteriji güýç täsir edýär. Mysal üçin, ganat S meýdanly dörtburç plastina bolsa we ol plastina akymyň tükeniksizlikdäki ugruna α burç bilen ýapgytlanan bolsa, onda uçaryň tutuş ganatyna täsir edýän göteriji güýç üçin

$$F = \pi \rho S V_\infty^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

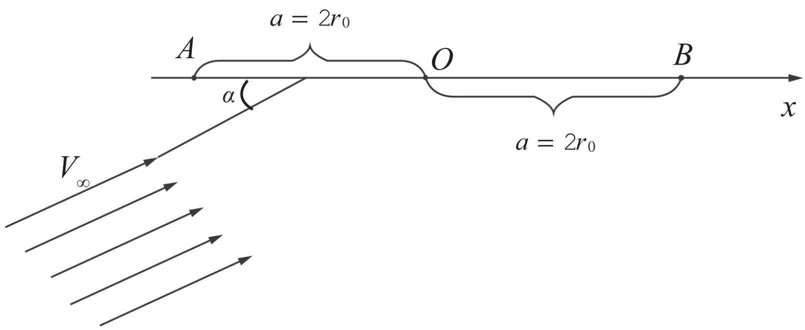
formula dogry bolýar.

Hakykatdan-da, $f(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + \frac{m}{z}; \quad m = 2\pi V_\infty r_0^2,$ kompleks potensial funksiýa bilen kesgitlenýän akymyň ugrunda silindr däl-de, uzynlygy l, ini $2a = 4r_0$ bolan gönüburçluk görnüşli tekiz plastina ýerleşdirilen diýeliň (*20-nji surat*).



20-nji surat

Akymyň plastina täsirinden döreýän F göteriji güýji tapalyň. Ýokarda aýdylanlara görä, oňa $F = -\rho V_\infty \Gamma$ göteriji güýç täsir edýär, bu ýerde ρ – howanyň dykyzlygy, V_∞ – akymyň tükeniksizlikdäki tizligi. Akym tükeniksizlikde x okuna parallel hasap edilýär. 20-nji suratdaky plastinany O nokadyň töwereginde α burça aýlap, plastinanyň kese kesigini x oky bilen gabat getireliň (*21-nji surat*).



21-nji surat

Indi şu akymyň potensial funksiýasyny tapalyň. Eger xOy tekizliginde (akymyň öwrenilýän tekizligi) N.Ý. Žukoskiniň adyny göterýän $\xi = z + \frac{r_0^2}{z}$ özgertme girizsek, onda $|z| = r_0$ töwerek AB kesime geçer. Özi hem, A nokat $z = -r_0$, B nokat $z = r_0$ bolanda alnar. z örän uly bolanda, $\xi = z + \frac{r_0^2}{z} \approx z$ bolýandygy sebäpli, örän daşda akym üýtgemez, ýagny 21-nji suratdaky ýaly bolar. Diýmek, 21-nji suratdaky akymyň $f_1(\xi)$ kompleks potensial funksiýasyny almak üçin, ilki bilen z tekizliginde $z_1e^{i\alpha} = z$ özgertme geçirmeli, ýagny 20-nji suratdaky plastinany sagat diliniň hereketiniň tersine α burça öwürmeli. Bu özgertmede $|z| = r_0$ töwerek öz-özüne şekillenýär. Soňra $\xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}$ özgertme geçirip, töweregi AB kesime geçirmeli bolarys. Şeýlelikde, $f_1(\xi)$ kompleks potensial almak üçin, $f(z)$ kompleks potensialda yzly-yzyna $z = z_1e^{-i\alpha}$ we $\xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}$ özgertmeleri geçirip, aşakdaky deňligi alarys:

$$f(e^{-i\alpha}z_1) = V_\infty e^{-\alpha i}z_1 + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(e^{-\alpha i}z_1) + \frac{m}{2\pi z_1 e^{-\alpha i}}, \quad \xi = z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}.$$

Bu ýerden

$$z_1 = \frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - r_0^2}$$

bolýandygyny görüp,

$$f_1(\xi) = V_\infty e^{-i\alpha}\left(\frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - r_0^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left[\mathrm{e}^{-i\alpha}\left(\frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - r_0^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{m}{2\pi\left(\frac{\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - r_0^2}\right)\cdot e^{-ia}}$$

alarys.

Žukowskiniň teoremasyna görä, $f'(\xi)$ önüm $\xi = a$ nokatda çäkli bolýar. Bu ýerden, tersine

$$f_1\left(z_1 + \frac{r_0^2}{z_1}\right) = V_\infty e^{-i\alpha}z_1 + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(e^{-i\alpha}z_1) + \frac{m}{2\pi z_1 e^{-i\alpha}} = f(e^{-i\alpha}z_1) \quad (*)$$

boljakdygy düşnüklidir.

$$(f_1(\xi))'_{z_1} = f_1'(\xi)\cdot\frac{d\xi}{dz_1} = f_1'(\xi)\cdot\left(1 - \frac{r_0^2}{z_1^2}\right)$$

deňlikde $\xi = a$ goýsak ($z_1 = r_0$), $f_1'(a)$ çäkli bolany sebäpli, $(f_1(\xi))'_{z_1}|_{z_1 = r_0} = 0$ bolar.

Beýleki tarapdan,

$$(f_1(\xi))'_{z_1} = \left[V_\infty e^{-i\alpha} z_1 + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(e^{-i\alpha} z_1) + \frac{m}{2\pi z_1 e^{-i\alpha}}\right]'_{z_1} =$$

$$= V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z_1} - \frac{m}{2\pi z_1^2 e^{-i\alpha}}.$$

Diýmek,

$$V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i r_0} - \frac{m}{2\pi r_0^2 e^{-i\alpha}} = 0$$

bolmaly bolýar. $m = r_0^2 2\pi V_\infty$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$V_\infty e^{-i\alpha} + \frac{\Gamma}{2\pi i r_0} - \frac{r_0^2 2\pi V_\infty}{2\pi r_0^2 e^{-i\alpha}} = 0,$$

$$V_\infty (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} = 0,$$

$$-iV_\infty 2\sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi i r_0} = 0$$

alarys. Bu ýerden Γ towlanma üçin ($2r_0 = a$)

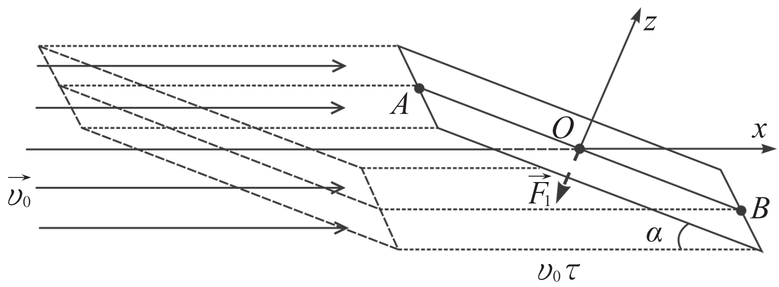
$$\Gamma = -2\pi a \sin\alpha V_\infty$$

formulany alarys. Γ-niň bahasyny Žukowskiniň $F_y = -\rho V_\infty \Gamma$ formulasynda ýerinde goýup hem-de $|F| = F_y \cos\alpha$ bolýandygyny, plastinanyň uzynlygynyň l-e deňdigini we $2al = S$ ululygyň plastinanyň meýdanydygyny göz öňünde tutup, göteriji güýç üçin

$$F = \pi\rho S \sin\alpha\cos\alpha V_\infty^2$$

formulany alarys. α ýeterlik derejede kici bolan halynda $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$ takmyn deňlikleri ulanyp, F üçin alnan formulany $F = \pi\rho S\alpha V_\infty^2$ görnüşde hem ýazmak bolar.

Göteriji güýji ýönekeý halda başgaça-da hasaplap bolýar. Goý, giňişlikde tizligi hemişelik v_0-a deň we gorizontal oka parallel bolan akymyň ugrunda, x oka α burç bilen ýapgyt ýerleşdirilen, meýdany S bolan plastina täsir edýän göteriji güýji tapmaly bolsun. 22-nji suratda plastinanyň kese kesiginiň ýerleşişi görkezilen.



22-nji surat

Ugrukdyryjysy plastinanyň çägi bolan, emele getirijileri υ_0 wektora parallel bolan silindrde plastinadan çepde x oky boýunça $\upsilon_0\tau$ aralykda plastina parallel kese kesigi geçireliň. τ – kiçi wagt aralygy. Netijede, esasy plastina bolan, beýikligi $\upsilon_0\tau\sin\alpha$ bolan silindr alarys. Şol silindriň içinde t pursatda kese kesikde ýatan, massasy m_i bolan howa bölejigi τ wagtda plastina ýeter we soňra plastina parallel hereket eder. υ^1 onuň t pursatdaky tizligi, υ^2 bolsa $t + \tau$ pursatdaky tizligi bolsun. O nokatda plastinanyň tekizligine perpendikulýar z okuny geçireliň. υ_z^1, υ_z^2 bilen tizlikleriň z oka bolan proýeksiýalaryny belgiläliň. Görşümiz ýaly, $\upsilon_z^2 = 0$, $\upsilon_z^1 = \upsilon_0\sin\alpha$ bolar. Indi silindriň içindäki howanyň hemme bölejikleriniň t pursatdan başlap, τ wagtda hereket mukdarynyň üýtgemesiniň z oka bolan proýeksiýasyny ýazalyň.

$$\sum m_i\upsilon_z^2 - \sum m_i\upsilon_z^1$$

aňlatmada $\upsilon_z^2 = 0$, $\upsilon_z^1 = \upsilon_0\sin\alpha$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$\sum m_i\upsilon_z^2 - \sum m_i\upsilon_z^1 = -\upsilon_0\sin\alpha\sum m_i = -M\upsilon_0\sin\alpha.$$

Bu ýerde M – howanyň silindriň içindäki böleginiň massasy. Howanyň dykyzlygyny ρ bilen belgiläp, silindriň göwrüminiň $\upsilon_0\tau\sin\alpha\cdot S$ bolýandygyny ýatlap,

$$\sum m_i\upsilon_z^2 - \sum m_i\upsilon_z^1 = -\upsilon_0\tau\sin\alpha S\cdot\rho\upsilon_0\sin\alpha$$

deňligi alarys. Beýleki tarapdan, hereket mukdary baradaky kanuna laýyklykda,

$$\sum m_i\upsilon_z^2 - \sum m_i\upsilon_z^1$$

tapawut silindriň içindäki howa bölejiklerine täsir edýän güýçleriň impulslarynyň z oka bolan proýeksiýalarynyň jemine deňdir. Ol güýçleriň esasysy plastinanyň howanyň basyşyna bolan $\vec{F_1}$ reaksiýasydyr. Ol güýç ululygy boýunça howanyň basyş güýjüne deň, ugry bolsa z okunyň tersine ugrukdyrylandyr. Galan güýçleri ujypsyz hasap edip, alarys:

$$\sum m_i \upsilon_z^2 - \sum m_i \upsilon_z^1 = - F_1 \tau$$

ýa-da

$$- \upsilon_0^2 \tau \sin^2 \alpha S \rho = - F_1 \tau.$$

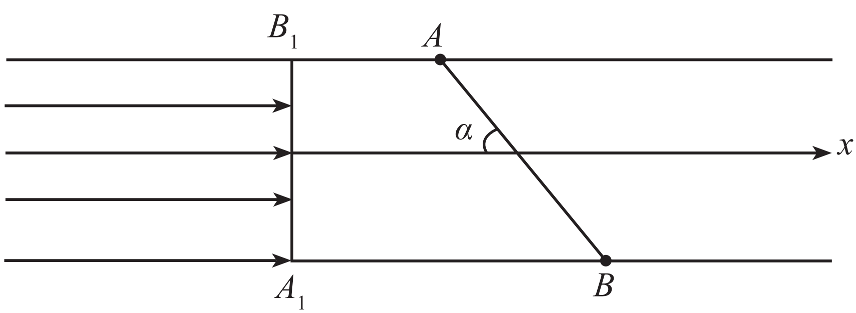
Bu ýerden

$$F_1 = \rho S \sin^2\alpha \cdot \upsilon_0^2$$

deňligi alarys. $\vec{F_1}$ reaksiýanyň y oky boýunça düzüjisi

$$F = \rho S \sin^2\alpha \cdot \upsilon_0^2 \cdot \cos\alpha$$

bolar. F güýç göteriji güýçdür. Bu güýç tapylanda akymda towlanma ýok hasap edildi. Şoňa görä, bu formulanyň örän nätakyk bolýandygyny tejribeler görkezýär. Mysala geçmezden ozal, Stoksuň adyny göterýän ýene-de bir ajaýyp kanun barada gürrüň edeliň. Goý, gorizontal akymyň ugrunda taraplary a bolan tekiz kwadrat ýerleşdirilsin (*23-nji surat*). $AB = a$ kwadratyň frontal kesigi bolsun.



23-nji surat

Biz, akym kese kesigi gönüburçluk (uzynlygy a, ini $A_1B_1 = a \sin\alpha$ deň) bolan turba boýunça geçýär diýip hasap edip bileris. Onda bu akym üçin Reýnoldsyň Re sany

$$Re = \frac{\rho a \sin\alpha \cdot \upsilon}{\mu(1 + \sin\alpha)} \tag{10}$$

formula arkaly kesgitlener. Bu ýerde υ – akymyň tizligi, ρ – howanyň dykyzlygy, μ – şepbeşiklik. $Re << 1$ bolanda bu akym üçin Stoksuň aşakdaky kanuny dogrudyr, ýagny kwadrat plastinanyň akyma täsir edýän F_g garşylyk güýji

$$F_g = ka \sin \alpha\mu\upsilon \tag{11}$$

formula arkaly kesgitlener. Bu ýerde k – koeffisiýent. Şepbeşikligiň (10) formuladan tapylan bahasyny (11) formulada ýerine goýup,

$$F_g = \frac{k}{Re} \cdot \frac{a^2 \rho \sin^2 \alpha\upsilon^2}{1 + \sin \alpha}$$

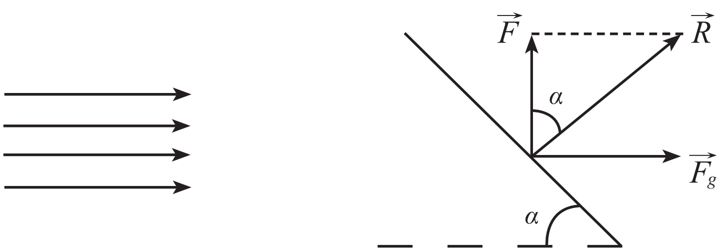
formula geleris. Indi, meýdany S bolan, akyma α burç bilen ýapgytlanan plastina üçin (kiçijik kwadratlardan durýar hasap edip),

$$F_g = \frac{k}{Re} \cdot \frac{S\rho \sin^2 \alpha\upsilon^2}{1 + \sin \alpha}$$

formula alarys. N.Ý.Žukowskiniň teoremasyna laýyklykda, plastina täsir edýän göteriji güýç

$$F = \pi\rho S \sin \alpha \cos \alpha \cdot \upsilon^2$$

formula arkaly tapylýar. 24-nji suratdan görnüşi ýaly, $|\vec{F_g}| = |\vec{F}|\text{tg}\alpha$ bolar.



24-nji surat

Bu ýagdaýda

$$\frac{k}{\text{Re}} S\rho \sin^2 \alpha\upsilon^2 = \pi\rho S \sin \alpha \cos \alpha \cdot \upsilon^2 \text{tg}\, \alpha,$$

ýagny

$$\frac{k}{\mathrm{Re}} = \pi$$

deňligi alarys. Bu deňlikden k-ny tapyp, Stoksuň (11) formulasyny plastina üçin

$$F_g = \frac{\pi\rho S \sin^2\alpha \upsilon^2}{1+\sin\alpha}$$

görnüşde ýazyp bileris. Indi göteriji güýç üçin alnan

$$F = \pi\rho S\upsilon^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

formulanyň ulanylyşyna bir mysal getireliň.

Uçary meýdany $10m^2$ deň bolan plastina hasap edip, $\alpha = 6^{\circ}$, $\upsilon = 100$ *km/sag,* $\rho = 3kg/m^3$ bolanda uçaryň agramyny çäklendirýän P bahany kesgitläliň.

Goý, uçaryň agramy P bolsun, onda onuň ýerden göterilmegi üçin

$$P = \pi\rho S\upsilon^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerurdyr. Berlenleri formulada ýerine goýup,

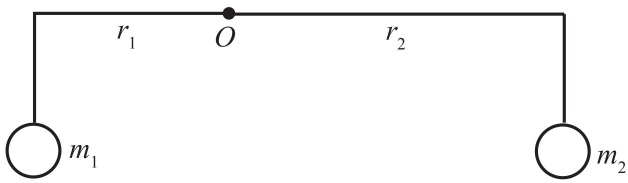
$$P = \pi \cdot 3 \cdot 10m^2 (100\ km/sag)^2 \frac{\pi}{180} \cdot 6 \approx 3550 \frac{kg \cdot m}{sek^2}$$

ýa-da $P \approx 360kG$ alarys. Şeýlelikde, uçaryň ýüki bilen bilelikdäki agramyny çäklendirýän baha $360kG$ töweregi bolar. Diýmek, ýük näçe köp bolsa, uçaryň agramy şonça az bolmaly bolýar. Bu mesele uçar ýasaýjy konstruktorlaryň öňünde durýan iň wajyp meseleleriň biridir.

14. MATEMATIKI MESELÄNI ÇÖZMEKDE ARHIMEDIŇ MEHANIKI MODELI ULANYŞY

Arhimed şaryň we başga-da birnäçe jisimleriň göwrümini tapmakda özüniň döreden ryçaglar nazaryýetini örän bir täsin usul bilen ulanýar.

Ilki bilen Arhimediň açan ryçaglar düzgünini ýatlalyň. Daýanç nokady O bolan ryçagyň çep gerdeniniň uzynlygy r_1, sag gerdeniniň uzynlygy r_2 bolsun we gerdenleriň gutarýan ýerinde massalary, degişlilikde, m_1 we m_2 bolan jisimler asylan bolsun (*25-nji surat*).



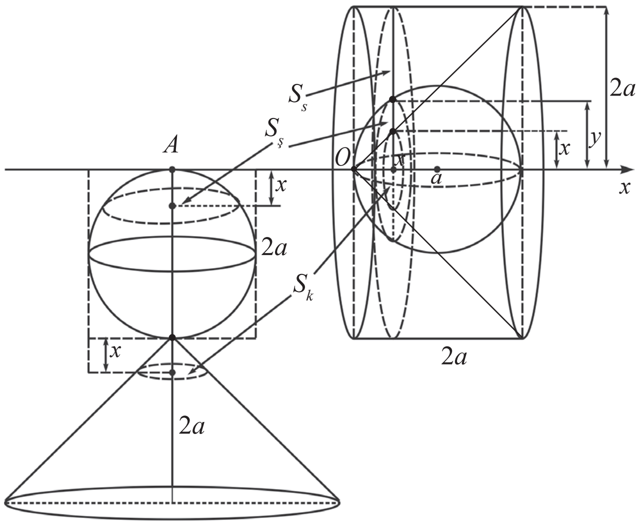
25-nji surat

Düzgüne laýyklykda, jisimleriň deňagramlylykda bolmaklary üçin, $m_1r_1 = m_2r_2$ deňlik ýerine ýetmelidir.

Indi onuň şaryň göwrümini tapyşyna garalyň. Bu meseläni çözende konusyň we silindriň göwrümleri oňa belli eken. Arhimediň bu işi matematikanyň taryhynda bir ajaýyp işleriň biridir.

Goý, radiusy a deň bolan şaryň göwrümini tapmaly bolsun (*26-njy surat*). Giňişlikde, x okuň üstünde, O başlangyçdan çepde $2a$ uzaklykda A nokat alalyň we şol nokatdan aşaklygyna, radiusy a deň şary we beýikligi $2a$, esasy $2a$ radiusly tegelek bolan konusy asalyň. O nokatdan sagda oky x oky bilen gabat gelýän, beýikligi $2a$, esasy $2a$ radiusly tegelek bolan silindri ýerleşdireliň. Garalýan jisimleriň üçüsiniň hem dykyzlygy 1-e deň hasap edilýär, ýagny olaryň massalary göwrümlerine deň. O nokady ryçagyň daýanç nokady hasap edip we Arhimediň pikir ýöredişine eýerip, şu jisimleriň deňagramlylykda boljakdygyny görkezeliň.

O nokatdan başlap, Ox okuna perpendikulýar tekizlikler geçirip, silindri beýiklikleri h bolan ýasyja silindrlere böleliň. h örän kiçi hasap edilýär. Edil şuňa meňzeşlikde, A nokatdan başlap, gorizontal tekizlikler geçirip, şary we konusy hem beýiklikleri h bolan ýasyja bölejiklere böleliň. Ol bölejikleriň islendiginiň esasynyň meýdany S bolsa, h örän kiçi bolany üçin, onuň göwrümi (hem-de massasy) $S{\cdot}h$ bolar. Şaryň diametriniň $2a$, konusyň beýikliginiň $2a$, silindriň beýikliginiň hem $2a$ bolany sebäpli, olar deň mukdardaky bölejiklere bölünerler. Indi şary we konusy, 26-njy suratdaky ýaly edip, silindriň içinde ýerleşdireliň we esaslary şol bir α tekizlikde ýatýan bölejiklere seredeliň. Goý, α tekizlik Ox okunyň x nokadyndan geçýän bolsun. Onda şaryň α tekizlikde ýatýan bölejiginiň esasynyň $S_ş$ meýdany O başlangyçdan çepde ýerleşýän şaryň A nokatdan x uzaklykda ýerleşýän degişli bölejiginiň esasynyň meýdanyna, konusyň α tekizlikde ýatýan bölejiginiň esasynyň S_k meýdany bolsa O başlangyçdan çepde ýerleşýän konusyň depesinden x uzaklykda ýerleşýän degişli bölejiginiň esasynyň meýdanyna deň bolar. Silindriň α tekizlikde ýatýan bölejiginiň esasynyň meýdanyny S_s bilen belgiläliň. Onda 26-njy suratdaky şarlaryň, konuslaryň we silindriň seredilýän bölejikleriniň massalary, degişlilikde,



26-njy surat

$S_ş \cdot h$, $S_k \cdot h$ we $S_s \cdot h$ bolar. Indi şu üç bölejigiň deňagramlylykda boljakdygyny görkezeliň. 26-njy suratdan görnüşi ýaly, $S_k = \pi x^2$, $S_ş = \pi y^2$, $S_s = \pi(2a)^2$ bolýar. Şeýle hem,

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$

ýa-da

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $2a\pi$ köpeldip,

$$2a\pi x^2 + 2a\pi y^2 = \pi(2a)^2 x \quad \text{ýa-da} \quad 2aS_k + 2aS_ş = xS_s,$$

ýa-da

$$2a(S_k \cdot h) + 2a(S_ş \cdot h) = x(S_s \cdot h),$$

ýa-da

$$2a[(S_k \cdot h) + (S_ş \cdot h)] = x(S_s \cdot h)$$

alarys. Diýmek, A nokatdan asylan şaryň we konusyň bölejikleri silindriň α tekizlikdäki bölejigi bilen beňagramlylykda bolýarlar. Arhimed şu ýerde örän täsin bir pikir ýöredýär. Ol: «eger üç jisimiň degişli bölejikleri üç-üçden deňagramlylykda bolsalar, onda olaryň özleri hem deňagramlylykda bolarlar» – diýýär. Bu pikir onuň şu usulynyň özenidir. Muňa laýyklykda, eger $V_ş$, V_k, V_s, degişlilikde, şaryň, konusyň we silindriň göwrümleri (massalary) bolsalar, onda

$$2aV_ş + 2aV_k = aV_s$$

deňlik ýerine ýetmeli bolar. Arhimed silindriň we konusyň göwrümleriniň öň belli bolan

$$V_s = \pi\,(2a)^2 \cdot 2a, \quad V_k = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a$$

formulalaryny ulanýar. Olaryň bahalaryny ýokardaky deňlikde ýerine goýup, alarys:

$$2aV_ş + 2a \cdot \frac{1}{3}\pi(2a)^2 \cdot 2a = a\pi(2a)^2 \cdot 2a.$$

Deňligi $2a$ gysgaldyp, alarys:

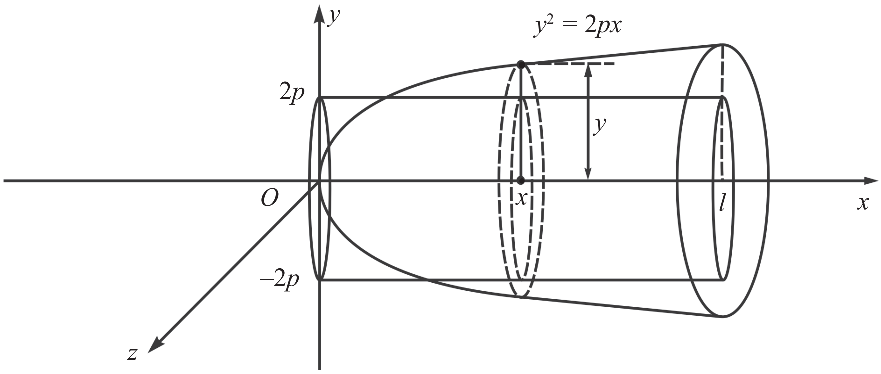
$$V_ş = \pi \cdot 4a^3 - \frac{8}{3}\pi a^3$$

ýa-da

$$V_ş = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Bu formula, hemmelere belli bolan, şaryň göwrümi tapylýan formuladyr. Arhimed bu işinde, öňdengörüjilik bilen, şeýle sözleri getirýär: «bu alnan netijäniň dogrulygy şübhesizdir, ýöne biziň bu netijäni almakda ulanan usulymyzy matematiki takyk diýip bilmerin» – diýýär we dowam edip, «geljekde ýiti alymlar döräp, olaryň bu netijäni matematiki takyk ýollar bilen subut etjekdiklerine ynanýaryn» – diýýär.

Bu beýik alymyň şu usuly bilen çözüp bolýan ýene bir meselä garalyň. $2px = y^2 + z^2$ paraboloid $y^2 = 2px$ parabolany x okunyň töwereginde aýlamak bilen alynýar. Şu paraboloidiň $x = l$ tekizlik bilen kesilip alnan böleginiň göwrümini tapalyň.



27-nji surat

Koordinatalar ulgamynda paraboloidi hem-de esasy $2p$ radiusly tegelek, beýikligi l bolan silindri guralyň (*27-nji surat*). Biz ýene-de bu jisimleriň dykyzlygyny bire deň hasap ederis. Ox okunyň x nokadyndan Ox okuna perpendikulýar tekizlik geçireliň. Ol tekizlik paraboloidi meýdany $S_p = \pi y^2$ bolan tegelek boýunça, silindri meýdany $S_s = \pi(2p)^2$ bolan tegelek boýunça keser. Bu tegeleklere degişli tegelekler diýeliň.

Paraboloid we silindr tükeniksiz köp degişli tegeleklerden durýar diýmek bolar. Indi paraboloidi Ox okunyň $A(-2p; 0)$ nokadyndan asylan hasap edeliň (*28-nji surat*).

O nokat ryçagyň daýanç nokady bolsun. $y^2 = 2px$ deňligiň iki tarapyny hem $2p\pi$ sana köpeldeliň:

$$2p\pi \cdot y^2 = 2p\pi \cdot 2px$$

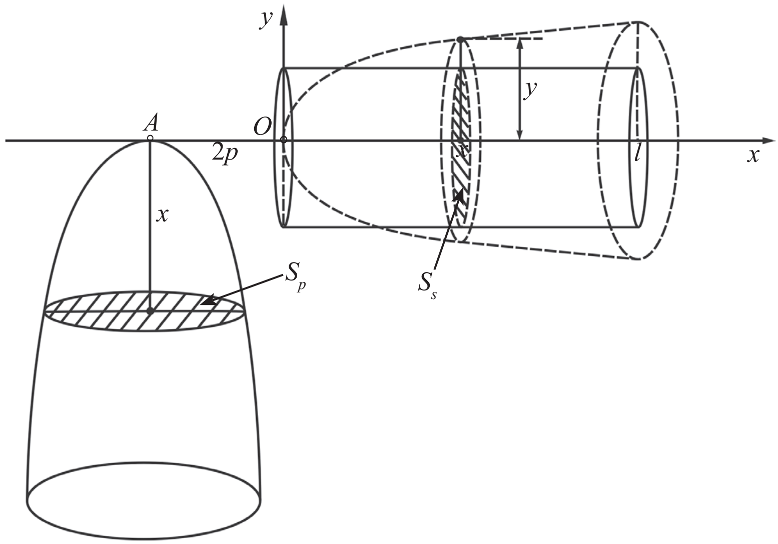
ýa-da

$$2pS_p = S_s x.$$

Bu deňlik paraboloidiň we silindriň degişli bölejikleriniň deňagramlylykda bolýandygyny görkezýär. Seredilýän paraboloidiň we silindriň deňagramlylykda bolan tükeniksiz köp degişli bölejiklerden durýanlygy sebäpli, Arhimediň ýöredýän pikirine laýyklykda, olaryň özleri hem deňagramlylykda bolarlar, ýagny

$$2pV_p = \frac{l}{2}V_s.$$

Bu ýerde V_p paraboloidiň göwrümi (hem-de massasy), V_s silindriň göwrümi (hem-de massasy).



28-nji surat

$V_s = \pi(2p)^2 \cdot l$ bolany sebäpli,

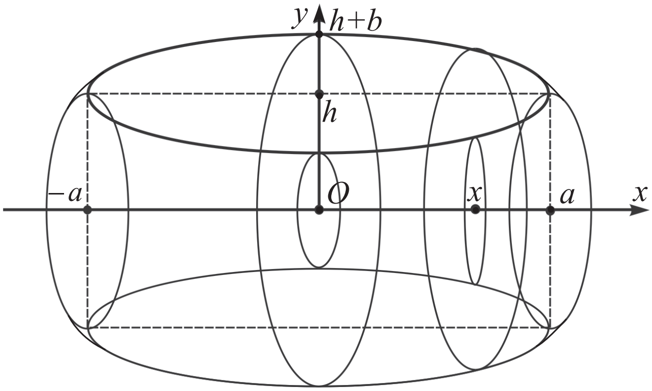
$$2pV_p = \frac{l}{2}\pi(2p)^2 \cdot l.$$

Bu ýerden, gysgaltmalardan soň,

$$V_p = \pi p l^2$$

formula geleris.

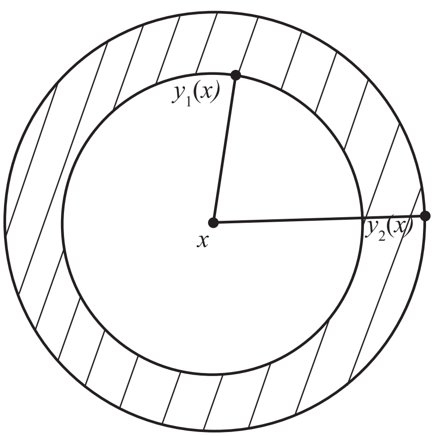
Arhimediň usuly bilen ýene bir meseläni çözeliň. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$ ellipsiň Ox okunyň daşyndan aýlanyp emele getiren jisiminiň (torunyň) göwrümini tapalyň (*29-njy surat*). Biz ýene-de garalýan jisimiň dykyzlygyny bire deň hasap ederis.



29-njy surat

Ox okuň x nokadynda *Ox* oka perpendikulýar tekizlik geçireliň. Ol tekizlik jisimi 30-njy suratda görkezilen halka boýunça keser. Şeýlelikde, $\forall x \in (-a; a)$ üçin jisimiň kese kesigi 30-njy suratdaky ýaly halka bolar. Biz Arhimediň usulyny ulanyp, jisim massalary meýdanyna, ýagny $\pi y_2^2(x) - \pi y_1^2(x)$ deň bolan halkalardan durýar hasap edip bileris. Jisimiň $x \geq 0$ ýarym giňişlikdäki böleginiň göwrümini tapalyň. Onuň üçin ellipsiň deňlemesini özgerdip ýazalyň:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y}{b^2} - \frac{h^2}{b^2}.$$



$$y_1(x) = h - b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

$$y_2(x) = h + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

30-njy surat

Görnüşi ýaly, $y_1(x)$ we $y_2(x)$ ululyklar ellipsiň deňlemesini kanagatlandyrýarlar:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y_2}{b^2} - \frac{h^2}{b^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 + 2h\frac{y_1}{b^2} - \frac{h^2}{b^2}.$$

Birinji deňlikden ikinji deňligi agzama-agza aýryp, alarys:

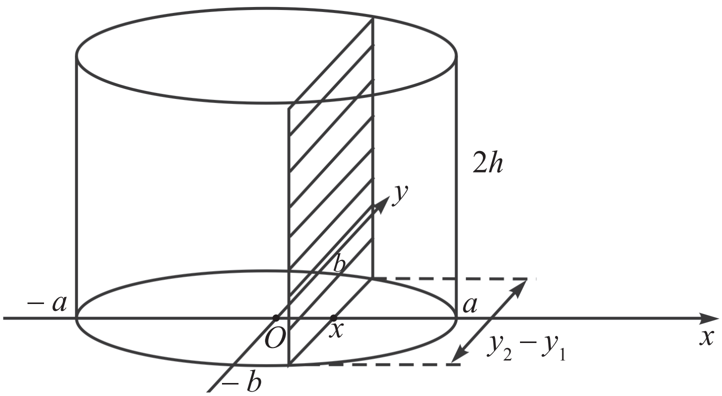
$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = \frac{2h}{b^2}(y_2 - y_1)$$

ýa-da

$$y_2^2 - y_1^2 = 2h(y_2 - y_1).$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem π köpeldeliň:

$$\pi y_2^2 - \pi y_1^2 = 2h(y_2 - y_1)\pi. \qquad (1)$$

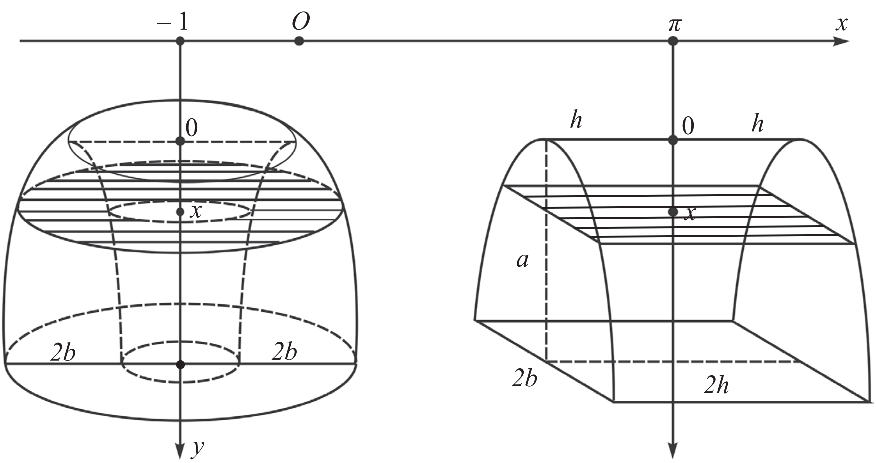


31-nji surat

Deňligiň çep bölegindäki ululyk 30-njy suratdaky halkanyň meýdanyna deňdir. $2h(y_2 - y_1)$ bolsa, esasy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips, beýikligi $2h$ bolan silindriň x nokatdaky kese kesiginiň meýdanyna deň bolýar (*31-nji surat*).

Indi Ox okunyň $x = -1$ nokadyndan aşaklygyna, jisimiň seredilýän ýarysyny asalyň (*32-nji surat*). $x = \pi$ nokadyndan bolsa, 31-nji suratdaky silindriň $x \geq 0$ ýarym giňişlikdäki bölegini asalyň. y okunyň $y = x$ nokadyndan gorizontal tekizlik geçirsek, ol, jisimi we silindri, degişlilikde, 30-njy, 31-nji suratlardaky ýaly kese kesikler boýunça keser. Ol kesikleriň massalary, degişlilikde, $\pi y_2^2 - \pi y_1^2$ we $2h(y_2 - y_1)$ ululyklara deň bolarlar. (1) deňlige görä,

$$\left(\pi y_2^2 - \pi y_1^2\right) \cdot 1 = \left[2h\left(y_2 - y_1\right)\right] \cdot \pi,$$



32-nji surat

ýagny O nokady ryçagyň daýanç nokady hasap etsek, onda seredilýän kese kesikler deňagramlylykda bolýarlar (*32-nji surat*). Arhimediň usulyna laýyklykda, jisimleriň özleri hem deňagramlylykda bolarlar, ýagny jisimiň garalýan ýarysynyň göwrümi (massasy) V_1 bolsa, onda

$$V_1 \cdot 1 = \left(\frac{\pi ab}{2} \cdot 2h\right) \cdot \pi$$

deňlik ýerine ýeter. Bu ýerden jisimiň doly $V = 2V_1$ göwrümi üçin

$$V = 2h\pi^2 ab$$

formulany alarys. Eger $a = b$ bolsa, ellips töwerege öwrülýär, jisim bolsa radiusy a deň bolan töweregiň Ox okunyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen tor bolar. Bu halda toruň göwrümi

$$V = 2h\pi^2a^2$$

formula arkaly tapylýar. Alnan formulalaryň dogrulygyny integral hasaplaýyşyň üsti bilen derňemek kyn däldir.

15. ERKIN ÜSTLI ÝERASTY SUWLARYŇ SYZYŞYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Model düzülende ediljek talaplary anyklalyň. Erkin üstli ýerasty suwlaryň akymy birjynsly gatlakda geçýän bolsun. Onuň daýanç esasy gorizontal hasap edeliň. Akymyň syzyş tizligi daýanç esasyna perpendikulýar ugur boýunça üýtgemeýär hasap edilýär, ýagny x, y oklary daýanç esasda ýatsalar, h oky ol esasa perpendikulýar geçirilse, onda syzyşyň $\vec{w}$ tizligi diňe x, y koordinatalara bagly bolar. Eger syzyşyň tizligi $\vec{w} = \{w_x, w_y\}$, suwuň üstüniň deňlemesi $h = h(x, y, t)$ bolsa, onda Darsiniň kanunyna laýyklykda

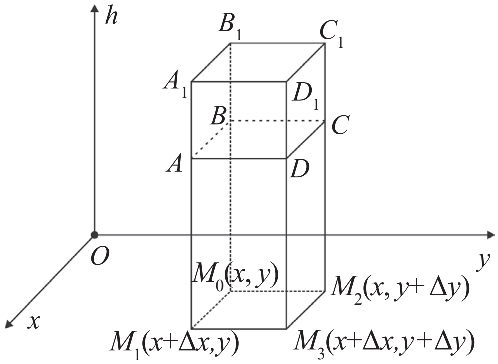
$$w_x = -c\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad w_y = -c\frac{\partial h}{\partial y}$$

bolar. Bu ýerde c syzyş koeffisiýenti. Indi akymyň ugrunda ýerleşýän umumy esasly iki sany silindrik jisimi alalyň, olaryň birinjisi ýokarsyndan $h = h(x, y, t)$ üst bilen, ikinjisi bolsa $h = h(x, y, t + \Delta t)$ üst bien çäklenen bolsun. Olaryň umumy esasy hökmünde daýanç esasda ýatýan, taraplary Δx we Δy bolan gönüburçlugy alalyň (*33-nji surat*) .

Düşnüklilik üçin üstleri, degişlilikde, $ABCD$ we $A_1B_1C_1D_1$ gönüburçluklar görnüşinde çyzdyk. Indi Δt wagtda birinji silindrik jisimiň içindäki suwuň näçe köpeljekdigini hasaplalyň. Belli bolşy ýaly, ol Q mukdar

$$Q = \Delta t \iint_{\Sigma} \vec{w} \cdot \vec{n}\, ds$$

formula arkaly tapylýar. Bu ýerde Σ şol jisimiň gapdal üsti, $\vec{n}$ şol üstüň nokatlarynda gurlan içki normal.



33-nji surat

Σ üst $\Sigma_1\,(M_0BCM_2)$, $\Sigma_2\,(M_2CDM_3)$, $\Sigma_3\,(M_3DAM_1)$, $\Sigma_4\,(M_1ABM_0)$ dört üstden durýar. Şoňa görä,

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{w}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{w}\cdot\vec{n}ds + \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{w}\cdot\vec{n}ds + \iint\limits_{\Sigma_3} \vec{w}\cdot\vec{n}ds + \iint\limits_{\Sigma_4} \vec{w}\cdot\vec{n}ds.$$

Sag tarapdaky integrallary hasaplalyň:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \vec{w}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma_1} \vec{w}\cdot\{1;0\}ds = \iint\limits_{\Sigma_1} w_x ds = -c\iint\limits_{\Sigma_1} h'_x(x,y,t)ds,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \vec{w}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma_2} \vec{w}\cdot\{0;-1\}ds = -\iint\limits_{\Sigma_2} w_y ds = c\iint\limits_{\Sigma_2} h'_y(x,y,t)ds,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \vec{w}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma_3} \vec{w}\cdot\{-1;0\}ds = -\iint\limits_{\Sigma_3} w_x ds = c\iint\limits_{\Sigma_3} h'_x(x,y,t)ds,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_4} \vec{w}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\Sigma_4} \vec{w}\cdot\{0;1\}ds = \iint\limits_{\Sigma_4} w_y ds = -c\iint\limits_{\Sigma_4} h'_y(x,y,t)ds.$$

Hasaplamany dowam etdirýäris:

$$-c\iint\limits_{\Sigma_1} h'_x(x,y,t)ds = -c\iint\limits_{\Sigma_1} h'_x(x_0,y,t)ds = -c\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} h'_x(x_0,y,t)h(x_0,y,t)dy,$$

$$c\iint\limits_{\Sigma_2} h'_y(x,y,t)ds = c\iint\limits_{\Sigma_2} h'_y(x,y_0+\Delta y,t)ds =$$

$$= c\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} h'_y(x,y_0+\Delta y,t)h(x,y_0+\Delta y,t)dx,$$

$$c\iint_{\Sigma_3} h'_x(x,y,t)ds = c\iint_{\Sigma_3} h'_x(x_0+\Delta x,y,t)ds =$$

$$= c\int_{y_0}^{y_0+\Delta y} h'_x(x_0+\Delta x,y,t)\cdot h(x_0+\Delta x,y,t)dy,$$

$$-c\iint_{\Sigma_4} h'_y(x,y,t)ds = -c\iint_{\Sigma_4} h'_y(x,y_0,t)ds =$$

$$= -c\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} h'_y(x,y_0,t)h(x,y_0,t)dx.$$

Integrallaryň bahalaryny Q üçin formulada ýerine goýup, alarys:

$$Q = c\Delta t\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}[h(x_0+\Delta x,y,t)\cdot h'_x(x_0+\Delta x,y,t) - h(x_0,y,t)\cdot h'_x(x_0,y,t)]dy +$$

$$+c\Delta t\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[h(x,y_0+\Delta y,t)\cdot h'_y(x,y_0+\Delta y,t) - h(x,y_0,t)\cdot h'_y(x,y_0,t)\right]dx =$$

$$= c\Delta t\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0+\Delta x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}\right]dy +$$

$$+c\Delta t\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial y}\bigg|_{y=y_0+\Delta y} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial h^2(x,y,t)}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}\right]dx$$

ýa-da

$$Q = \frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^2(x,y,t)}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}\Delta x\Delta y\Delta t + \frac{c}{2}\cdot\frac{\partial^2 h^2(x,y,t)}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}}\Delta x\Delta y\Delta t. \quad (1)$$

Bu ýerde $x_0 \le \xi,\xi_1 \le x_0+\Delta x,\ \ y_0 \le \eta,\eta_1 \le y_0+\Delta y$. Artan suw mukdary birinji silindrik jisimi ýokarsyndan çäklendirýän $h = h(x, y, t)$ üstüň $h = h(x, y, t+\Delta t)$ derejä galmagyna getirýär, ýagny artan suwuň göwrümi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ silindrik jisimiň göwrümine deňdir. Onda,

$$Q = m\iint_D [h(x,y,t+\Delta t) - h(x,y,t)]dxdy$$

ýa-da

$$Q = mh'_t(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x\Delta y\Delta t. \tag{1'}$$

Bu ýerde $x_0 \le \alpha \le x_0 + \Delta x$, $y_0 \le \beta \le y_0 + \Delta y$, $t \le \gamma \le t + \Delta t$, m – öýjüklilik koeffisiýenti. Q ululyk üçin tapylan (1) we (1′) bahalary deňläp, alarys:

$$\frac{c}{2}\cdot\left(\left.\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}} + \left.\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}}\right)\Delta x\Delta y\Delta t = mh'_t(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x\Delta y\Delta t$$

ýa-da

$$\left.\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}} + \left.\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=\xi_1\\ y=\eta_1}} = \frac{2m}{c}h'_t(\alpha,\beta,\gamma).$$

Bu ýerden, Δx, Δy we Δt nola ymtylanlarynda predele geçip, alarys:

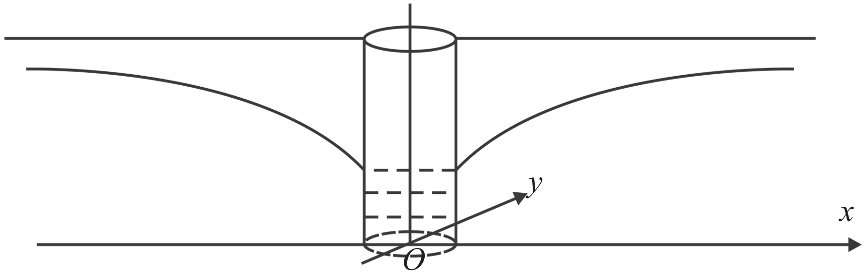
$$\frac{2m}{c}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Bu deňlemä Bussineskiň deňlemesi diýilýär. Oňa syzyş prosesiniň matematiki modeli hökmünde garap bolar. Deňleme getirilip çykarylanda köp çäklendirmeleri etmeli boldy. Şol sebäpli, alnan model takmyn model bolýar. Syzyş prosesiniň hemme taraplaryny göz öňünde tutýan model düzmek, umuman, mümkin hem däl, eger mümkin bolaýanda-da örän çylşyrymly deňlemelere getirerdi. Ýokarda ulanylan Darsiniň kanuny-da, şonuň esasynda çykarylan Bussineskiň deňlemesi-de köp-köp barlaglary geçendir. Şol sebäpli, olary ulanmak boljakdygyna şübhelenmese bolar.

Indi şu modeliň ulanylyşynyň bir mysalyna garalyň. Gazylan guýa toprakdan gelýän suwuň mukdaryny ýokardaky şertlerde hasaplajak bolalyň. Şol şertleriň ýerine ýetýänligi sebäpli, akyma Bussineskiň deňlemesini ulanmaga haklydyrys.

Guýynyň okunyň daýanç esas bilen kesişýän ýerinde xOy koordinatalar ulgamynyň başlangyç nokadyny ýerleşdirsek (*34-nji surat*) we $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ formulalar arkaly polýar koordinatalaryna geçsek, onda Bussineskiň deňlemesi

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial \varphi^2}\right) \tag{3}$$



34-nji surat

görnüşe geler. Eger akym guýynyň töwereginde simmetrik geçýän bolsa, onda $h(r, \varphi, t)$ funksiýa φ burça bagly bolmaz we (3) deňleme

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) \tag{4}$$

görnüşi alar. Has ýönekeý ýagdaýa seredeliň. Goý, akym wagta bagly bolmasyn, ýagny akym durnuklaşan bolsun. Onda $h(r, \varphi, t)$ wagta bagly bolmaz we (4) deňleme

$$\frac{d^2 h^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dh^2}{dr} = 0 \tag{5}$$

görnüşe geler. Bu deňlemäniň umumy çözüwini tapmak kyn däldir. Deňlemäni ýönekeýleşdireliň:

$$\frac{\dfrac{d^2 h^2}{dr^2}}{\dfrac{dh^2}{dr}} + \frac{1}{r} = 0, \qquad \frac{d}{dr}\left(\ln\frac{dh^2}{dr}\right) + \frac{1}{r} = 0, \qquad \ln\frac{dh^2}{dr} + \ln r = \ln C_1,$$

ýa-da

$$\frac{dh^2}{dr} = \frac{C_1}{r}, \tag{6}$$

ýa-da

$$h^2 = C_1 \ln r + C_2. \tag{7}$$

Guýynyň radiusy r_0, akymyň çäginiň radiusy R_0 hasap edeliň. (6) deňligiň iki tarapyndan hem r_0-dan R_0-a çenli integral alalyň. Onda

$$\int_{r_0}^{R_0} \frac{dh^2}{dr}dr = C_1 \int_{r_0}^{R_0} \frac{1}{r}dr$$

ýa-da

$$h^2(R_0) - h^2(r_0) = C_1(\ln R_0 - \ln r_0),$$

ýa-da $h(R_0) = H_k$, $h(r_0) = H_0$ belgilemeleri girizip,

$$H_k^2 - H_0^2 = C_1 \ln \frac{R_0}{r_0}$$

ýa-da

$$C_1 = \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}}$$

deňligi alarys. (7) deňlikde $r = r_0$ goýup,

$$h^2(r_0) = C_1 \ln r_0 + C_2$$

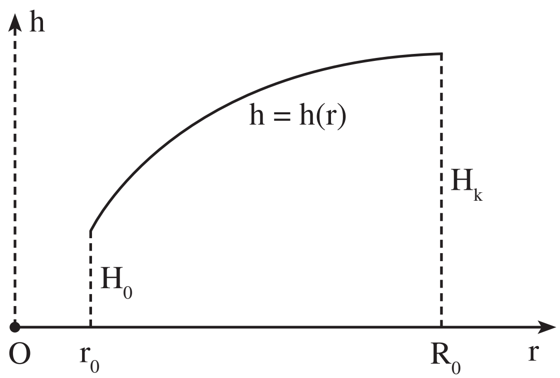
deňligi ýa-da

$$C_2 = H_0^2 - \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r_0$$

deňligi alarys. Netijede, suw üstüniň $h = h(r)$ deňlemesini

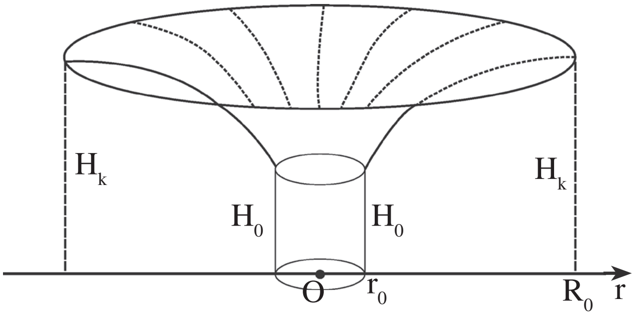
$$h(r) = \sqrt{\frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r + H_0^2 - \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \cdot \ln r_0}$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu funksiýanyň grafiginiň shematiki görnüşi 35-nji suratda getirilendir.



35-nji surat

Eger bu grafigi h okunyň töwereginde 2π burça aýlasak, onda ol guýguja meňzeş aýlanma üsti emele getirer (*36-njy surat*).



36-njy surat

Suratdan görnüşi ýaly, guýynyň suw syzyp girýän gapdal üstüniň meýdany $2\pi r_0 H_0$-a deň. Onda, Darsiniň kanunyna laýyklykda, oňa wagt birliginde syzyp girýän suwuň mukdary

$$Q = 2\pi r_0 H_0 c \left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0}$$

formula bilen kesgitlener. (6) deňlikden alarys:

$$2h\frac{dh}{dr} = \frac{C_1}{r}.$$

Bu ýerden $r = r_0$ bolanda C_1-iň bahasyny ýerine goýup, alarys:

$$2H_0 \left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{C_1}{r_0} = \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}} \cdot \frac{1}{r_0}.$$

$$2H_0 r_0 \left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0} = \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}} \quad \text{bolany üçin}$$

$$Q = \pi c \cdot \frac{H_k^2 - H_0^2}{\ln\frac{R_0}{r_0}} \tag{8}$$

formulany alarys. (8) deňlik giňden ulanylýan formulalaryň biridir.

Indi umumy ýagdaýa seredeliň. $Q(t)$ bilen guýa onuň gapdal üstünden wagt birliginde girýän suwuň mukdaryny belgiläliň we ony durnuklaşmadyk akym üçin tapjak bolalyň. (2) deňlemäni

$$c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)=m\frac{\partial h}{\partial t}$$

görnüşe getirip, ýaýlaryň içindäki birinji h köpeldijini onuň orta bahasy h^* bilen çalşyryp, takyklygy pesräk

$$ch^*\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]=m\frac{\partial h}{\partial t} \tag{9}$$

deňlemä gelýärler. (9) deňlemede polýar koordinatalaryna geçip, alarys:

$$h^* c\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}\right)=m\frac{\partial h}{\partial t}. \tag{10}$$

Bu deňlemäniň çözüwini $h(r,t)=u(\xi),\ \xi=\dfrac{r}{\sqrt{t}}$ görnüşde gözläliň.

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}},\quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}=\frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{t},\quad \frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{r}{[\sqrt{t}]^3}$$

deňlikleri ulanyp, (10) deňlemäni

$$h^* c\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=-\frac{m}{2}\cdot\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{r}{(\sqrt{t})^3}$$

görnüşe getireliň. Soňra özgerdip,

$$h^* c(u''\xi^2+u'\xi)=-\frac{m}{2}u'\xi^3$$

ýa-da

$$h^* c(u''\xi+u')=-\frac{m}{2}u'\xi^2,$$

ýa-da

$$u''\xi+u'\left(1+\frac{m}{2h^* c}\xi^2\right)=0$$

görnüşe getirse bolar. Soňky deňlemäni bir gezek integrirläp, alarys:

$$\ln u'+\ln\xi+\frac{m}{4h^* c}\xi^2=\ln C_1$$

ýa-da

$$u' = \frac{C_1}{\xi} e^{-\frac{m}{4h^* c}\cdot \xi^2}.$$

Indi $\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{du}{d\xi}\cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ deňligi $r\frac{\partial h}{\partial r} = \xi \frac{du}{d\xi}$ görnüşde ýazalyň. Goý, guýynyň radiusy r_0 we $h(r_0, t) = H(t)$ bolsun. Onda, Darsiniň kanuny boýunça, wagt birliginde syzyp girýän suwuň mukdarynyň $Q(t) = 2\pi c r_0 H(t)\cdot \left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$Q(t) = 2\pi c H(t)\xi u'(\xi)\Big|_{r=r_0}$$

ýa-da

$$Q(t) = 2\pi c H(t) C_1 e^{-\frac{m}{4h^* c}\cdot \frac{r_0^2}{t}}$$

deňligi alarys. $u' = C_1 \xi^{-1} \exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right]$ deňlemäni integrirläp,

$$u(\xi) = C_0 - C_1 \int_{\xi}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi$$

ýa-da

$$h(r,t) = C_0 - C_1 \int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi$$

deňlemä geleris. Bu ýerde $t \to 0$ ymtyldyryp, $h(r, 0) = C_0$ alarys. $C_0 = H_0$ – suwuň üstüniň başlangyç ýagdaýy bolýandygyny belläp, soňky deňligi

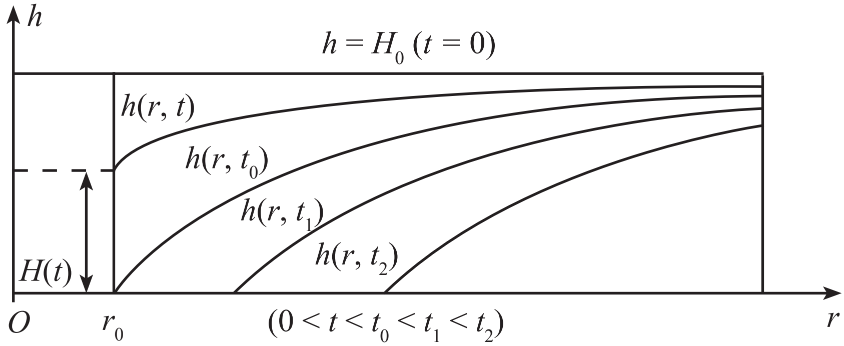
$$h(r,t) = H_0 - C_1 \int_{r/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi \tag{11}$$

görnüşde ýazyp bileris. t-niň käbir bahalarynda $h(r,t)$ funksiýanyň grafigi 37-nji suratdaky ýaly bolýar.

$h(r_0,t)$ funksiýanyň bahasyny (11) deňlikden tapyp, $H(t) = h(r_0, t)$ deňlikden

$$H(t) = H_0 - C_1 \int_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left[-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right] d\xi.$$

alarys.



37-nji surat

Deňligiň sag bölegindäki integralyň t boýunça artýan funksiýa bolany üçin, käbir t_0 san üçin $t = t_0$ bolanda $H(t_0) = 0$ bolar, ýagny

$$H_0 - C_1 \int_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi = 0.$$

Bu deňlikden C_1 hemişeligi tapýarys:

$$C_1 = H_0 \left(\int_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi \right)^{-1}.$$

C_1-iň tapylan bahasyny $H(t)$ üçin formulada ýerine goýup, alarys:

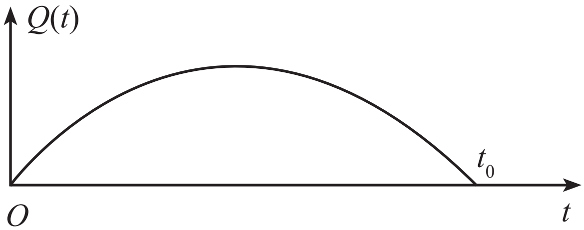
$$H(t) = H_0 \left(1 - \frac{\int_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi}{\int_{r_0/\sqrt{t_0}} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi} \right), \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

$H(t)$-niň tapylan bahasyny $Q(t)$ üçin formalada ýerine goýup,

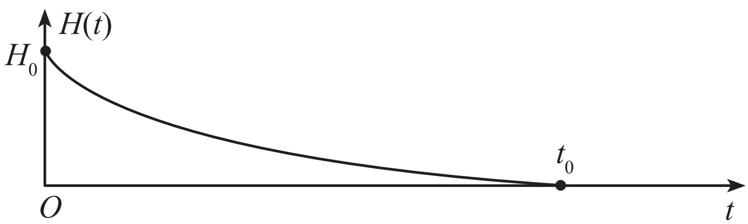
$$Q(t) = 2\pi c H_0 \left(1 - \frac{\int_{r_0/\sqrt{t}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi}{\int_{r_0/\sqrt{t_0}} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi} \right).$$

$$\cdot \frac{H_0}{\int\limits_{r_0/\sqrt{t_0}}^{\infty} \xi^{-1} \exp\left(-\frac{m}{4h^* c}\xi^2\right) d\xi} \cdot e^{-\frac{m}{4h^* c}\cdot\frac{r_0^2}{t}}$$

formula geleris, bu ýerde $0 < t \leq t_0$. $Q(t)$ we $H(t)$ funksiýalaryň shematiki grafikleri 38-nji we 39-njy suratlarda getirilen.



38-nji surat



39-njy surat

Şeýlelikde, $t = t_0$ bolanda $H(t_0) = 0$ bolýar we guýa suw gelmesi kesilýär.

Ýokarda getirilen hasaplamalar diňe erkin üstli, gorizontal daýanç esasly akymlar üçin geçirildi. Eger-de suwly gatlaga daşyndan goşmaça suw mukdary goşulýan bolsa, onda akym Bussineskiň deňlemesine däl-de,

$$m\frac{\partial h}{\partial t} = c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \omega \qquad (12)$$

görnüşdäki deňlemä tabyn bolýar. Bu ýerde ω akyma daşyndan wagt birliginde meýdan birliginden goşulýan suwuň mukdaryny aňladýar. Ideal halda, daşyndan gelýän suw mukdary guýa girýän suw mukdarynyň öwezini dolýan we şol sebäpli suwuň $h(x, y, t)$ derejesini üýtgetmän saklamaga ýardam edýän halynda, akym stasionar hala geler, ýagny belli bir $t = t_0$ wagtdan başlap, $h(x, y, t) \equiv h_0(x, y)$ bolar, wagta bagly bolmaz. Diýmek, D suwuň bütin tutýan meýdany bolsa,onda $t \geq t_0$ başlap

$$Q(t) = \iint\limits_D \omega dxdy$$

bolar. $h_0(x, y)$ funksiýa bolsa

$$c\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \omega = 0$$

deňlemäni kanagatlandyrar. Deňlemede polýar koordinatalaryna geçip, alarys:

$$\frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 h^2}{\partial \varphi^2}\right) + \omega = 0.$$

Akymy guýynyň töwereginde simmetrik hasap etsek we ω funksiýa φ argumente bagly däl hasap etsek, onda $h_0(r, \varphi)$ funksiýa hem φ argumente bagly bolmaz we deňleme

$$\frac{c}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) + \omega(r) = 0 \qquad (13)$$

görnüşe geler. (13) deňlemäniň iki tarapyny hem r-e köpeldip we r_0-dan r-e çenli integral alyp, taparys:

$$\frac{c}{2}\left[r(h^2)' - r_0(h^2)'\Big|_{r=r_0}\right] + \int\limits_{r_0}^{r} r\omega(r)dr = 0$$

ýa-da

$$chr\frac{dh}{dr} - ch(r_0)\frac{dh}{dr}\Big|_{r=r_0} + \int\limits_{r_0}^{r} r\omega dr = 0,$$

ýa-da

$$2\pi chr\frac{dh}{dr} - 2\pi ch(r_0)r_0h'(r_0) + 2\pi\int\limits_{r_0}^{r} r\omega dr = 0.$$

Indi Darsiniň kanuny boýunça $2\pi ch(r_0)h'(r_0)r_0 = Q$ bolýandygyny we beýleki tarapdan $Q = \iint\limits_D \omega dxdy = 2\pi\int\limits_{r_0}^{\infty} r\omega dr$ bolýandygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$2\pi chr\frac{dh}{dr} = 2\pi\int\limits_{r}^{\infty} r\omega dr.$$

Ýene bir gezek integrirlesek,

$$h^2(r) - h^2(r_0) = \frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{r}\int_r^{\infty} r\omega dr\right)dr \qquad (14)$$

deňligi alarys. $h(\infty) = H_0$ – suwuň başlangyç derejesi bolýandygyny göz öňünde tutup, soňky deňlikden

$$h^2(r_0) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\int_r^{\infty}\rho\omega(\rho)d\rho\right)dr$$

ýa-da

$$h^2(r_0) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr$$

formulany alarys. Indi $h^2(r_0)$ üçin tapylan bahany (14) deňlikde ýerine goýsak,

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \frac{2}{c}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}\left(\int_r^{\infty} r\omega dr\right)dr$$

formulany alarys. Ikinji integraly özgerdip, alarys:

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \frac{2}{c}\left[\int_{r_0}^{r} r\omega(r)\ln\frac{r}{r_0}dr + \int_r^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\frac{r}{r_0}d\rho\right]$$

ýa-da

$$h^2(r) = H_0^2 + \frac{2}{c}\int_r^{\infty}\rho\omega(\rho)\left[\ln\frac{r}{r_0} - \ln\frac{\rho}{r_0}\right]d\rho.$$

Ahyrda,

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_r^{\infty}\rho\omega(\rho)\cdot\ln\frac{\rho}{r}d\rho$$

formulany alarys. Soňky deňlikden

$$\int_{r_0}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\rho\cdot d\rho$$

integralyň ýygnanmagynyň we

$$\frac{2}{c}\int_{r_0}^{\infty}\rho\omega(\rho)\ln\frac{\rho}{r_0}d\rho \le H_0^2$$

deňsizligiň zerurlygy gelip çykýar. Şu zerurlyk şertleriniň ýerine ýeten halynda stasionar akymda $h(r)$ üçin we wagt birliginde syzyp girýän suwuň $Q(r_0)$ mukdary üçin

$$h^2(r) = H_0^2 - \frac{2}{c}\int_r^{\infty} \rho\omega(\rho)\ln\frac{\rho}{r}d\rho \equiv h^2(H_0, \omega),$$

$$Q(r_0) = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \rho\omega(\rho)d\rho \equiv Q(r_0, \omega)$$

formulalary alarys. Bu ýerde bir täsin ýagdaý ýüze çykýar. Eger $\omega_1(\rho) < \omega_2(\rho)$ bolsa, onda

$$h^2(H_0, \omega_1) > h^2(H_0, \omega_2),$$

$$Q(r_0, \omega_1) < Q(r_0, \omega_2)$$

deňsizlikler ýerlikli bolýar, ýagny wagt birliginde syzyp girýän suwuň mukdary köpelýär, $h_0(r_0, \omega)$ bolsa kiçelýär. Darsiniň formulasyna görä,

$$Q(r_0, \omega) = 2\pi c h_0(r_0, \omega)\frac{\partial h(r_0, \omega)}{\partial r} \cdot r_0.$$

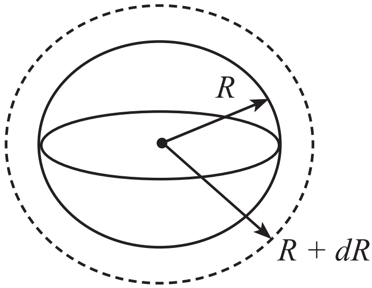
Diýmek, $Q(r_0, \omega)$ funksiýanyň ω boýunça artýan funksiýa bolmagy üçin $\frac{\partial h(r_0, \omega)}{\partial r}$ funksiýa artmaly bolýar.

16. GAPDAN ÇYKÝAN GAZYŇ MUKDARYNY WE TIZLIGINI HASAPLAMAGYŇ MATEMATIKI MODELI

Goý, gapda udel göwrümi V_1, basyşy p_1 bolan gaz, belli bir pursatdan başlap, gabyň deşiginden çykyp başlaýar diýeliň. Gazyň çykyş tizligini ω bilen, onuň çykalganyň ýanyndaky udel göwrümini V_2, basyşyny p_2 bilen belgiläliň. Adatça, p_2 gabyň daşky gurşawyndaky basyşa deň hem-de akym sürtülmesiz geçýär hasap edilip, islendik pursatda

$$p_1 V_1^k = p_2 V_2^k = const \tag{1}$$

kanunyň ýerine ýetýändigi kabul edilýär, bu ýagdaýda proses adiabatik proses bolýar. Belli bir pursatda, V udel göwrümi we p basyşy bolan gaz bölegi, wagtyň geçmegi bilen, deşige tarap hereket edip başlaýar. Ikinji bir pursatda onuň göwrümi $V + dV$, basyşy bolsa $p + dp$ bolar. Şu geçişde ýerine ýetirilen işiň mukdaryny kesgitläliň. Ol işe giňelme işi diýýärler, ony dA bilen belgiläliň. Goý, gaz bölejigi radiusy R-e deň bolan şar görnüşinde bolsun we



40-njy surat

ikinji pursatda bolsa giňelip, radiusy $R + dR$ bolan şary doldursyn (*40-njy surat*). Onda artan göwrüm $dV = 4\pi R^2 dR$ bolar. Göwrümi beýle artdyrmak üçin edilen dA iş, birinji şaryň üstüniň her bir nokadyny dR aralyga süýşürmek işine deňdir. Şaryň daşyndaky basyş, ýagny herekete päsgel berýän basyş p deň. Diýmek, şaryň hemme nokatlaryna täsir edýän güýç pS bolar. Bu ýerde $S = 4\pi R^2$ – şaryň üstüniň meýdany. Diýmek, tutuş üst dR aralyga süýşürilende bitirilen iş $pSdR$-e deň bolar:

$$dA = pSdR = pdV.$$

Eger indi, V_1 udel göwrümiň başlangyç haly, V_2 onuň soňky haly bolsa, onda ýerine ýetirilen A iş üçin

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

formulany alarys. $pV^k = \text{const}$ kanuny ulanyp, alarys:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V^k} dV = \frac{c}{-k+1} \cdot \frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{c}{-k+1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{-k+1} \cdot \left(\frac{cV_2}{V_2^k} - \frac{cV_1}{V_1^k} \right) = \frac{1}{-k+1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

ýa-da

$$A = \frac{1}{k-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2).$$

Beýleki tarapdan, termodinamikanyň birinji kanuny akym üçin

$$q_{daşky} = h_2 - h_1 + l_{teh} + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \qquad (2)$$

görnüşde bolýar. Bu ýerde, l_{teh} – tehniki iş, h_1 we h_2 – entalpiýa. Entalpiýa $h = U + pV$ formula bilen kesgitlenýär. Bu ýerde U – sistemanyň içki energiýasy, p – basyş, V – udel göwrüm. Biziň sistemamyz üçin $l_{teh} = 0$ bolýar. Proses adiabatik bolany sebäpli, $q_{daşky}$ daşky energiýa hem nola deň bolýar. Şeýlelikde, (2) deňleme

$$h_2 - h_1 + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0$$

görnüşi alýar. $h_1 = U_1 + p_1V_1, \quad h_2 = U_2 + p_2V_2$ bolany üçin

$$h_1 - h_2 = U_1 - U_2 + p_1V_1 - p_2V_2$$

deňligi alarys. $U_1 - U_2$ tapawut gaz bölejiginiň içki energiýasynyň artdyrmasy. Ol artdyrma diňe bitirilen A işiň hasabyna bolýar, ýagny

$$U_1 - U_2 = A.$$

Soňky üç deňlikleri birleşdirip, alarys:

$$U_1 - U_2 + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0$$

ýa-da $U_1 - U_2 = A$ bolýandygy üçin,

$$A + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0.$$

Indi A-nyň ýokarda tapylan bahasyny ýerine goýup, alarys:

$$\frac{1}{k-1}(p_1V_1 - p_2V_2) + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = 0,$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{2k}{k-1} \cdot (p_1V_1 - p_2V_2).$$

Adatça, ω_1 kiçi hasap edilip taşlanylýar we ω_2 tizlik üçin aşakdaky formulany alýarlar:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}(p_1V_1 - p_2V_2)}.$$

$p_1V_1 - p_2V_2$ tapawudy özgerdeliň:

$$p_1V_1 - p_2V_2 = p_1V_1\left(1 - \frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right).$$

$p_1V_1^k = p_2V_2^k$ bolany sebäpli,

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Indi $p_1V_1 - p_2V_2$ tapawudyň

$$p_1V_1 - p_2V_2 = p_1V_1\left[1 - \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}\right] = p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

bahasyny ω_2 üçin formulada ýerine goýup,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

formulany alarys. Indi biz deşikden wagt birliginde çykýan gazyň massasyny kesgitläp bileris. Eger deşigiň meýdany F bolsa, onda wagt birliginde $F\cdot\omega_2$ göwrümdäki gaz çykar, bu göwrümi deşigiň ýakynynda hasaplanan V_2 udel göwrüme bölsek, onda $m = \frac{F\omega_2}{V_2}$ – wagt birliginde deşikden çykan gazyň massasyny alarys. Bu ýerde ω_2-niň ýokarda tapylan bahasyny goýsak,

$$m = \frac{F}{V_2}\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

deňligi alarys. Indi V_1 we V_2 udel göwrümler üçin belli bolan $p_1V_1^k = p_2V_2^k$ formulany $V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}V_1$ görnüşde ýazyp,

$$m = \frac{F}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}V_1}\sqrt{\frac{2k}{k-1}p_1V_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

ýa-da biraz özgerdip, m üçin

$$m = F\sqrt{\frac{2k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{V_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$$

formulany alyp bolar. Gazyň deşikden çykmagy bilen baglanyşykly meseleleriň käbirinde «deşigiň tutýan F meýdany hemişelik ýagdaýynda $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň haýsy bahasynda deşikden wagt birliginde çykýan gazyň massasy maksimuma ýetýär» diýen sowal ýüze çykýar. Bu sowaly başgaça, ýagny «deşikden wagt birliginde çykýan gazyň massasy hemişelik halynda $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň haýsy bahasynda deşigiň tutýan meýdany iň kiçi baha eýe bolar» diýlen görnüşde hem goýmak bolar. m üçin alnan formuladaky köküň aşagyndaky aňlatmanyň maksimum bahasyny berýän $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň bahasy goýlan sowallaryň jogaby bolar. Ony tapmak üçin ol aňlatmanyň $\frac{p_2}{p_1}$-e görä önümini tapmaly we ol önümi nola deňlemeli:

$$\frac{2}{k}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}-1} = 0$$

ýa-da $\quad \frac{2}{k+1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}-\frac{2}{k}} = 0, \quad$ ýa-da $\quad \frac{2}{k+1} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 0.$

Bu ýerden $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň bahasyny taparys:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Garalýan funksiýa $\frac{p_2}{p_1} = 0$, $\frac{p_2}{p_1} = 1$ bahalarda nola deň. Ekstremum diňe bir $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ nokatda bar, diýmek, onuň maksimum nokady bolmagy üçin funksiýanyň şol nokatdaky bahasynyň položitel bolmagy ýeterlikdir. Funksiýanyň $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ nokatdaky bahasyny tapalyň:

$$\left.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right|_{\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k\cdot 2}{(k-1)k}} - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}} =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} \left[1 - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1}}\right] =$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} \cdot \frac{k+1-2}{k+1} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

$k-1 \geq 0$ bolany sebäpli, bu baha položitel san. Diýmek, ol funksiýanyň maksimal bahasydyr. $\frac{p_2}{p_1}$ gatnaşygyň tapylan bahasyna gatnaşygyň kritiki bahasy diýýärler we ony β_{kr} bilen belgileýärler:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \beta_{kr}.$$

$$m_{kr} = F\sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{V_1} \cdot \frac{k-1}{k+1} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}}$$

baha massanyň kritiki bahasy diýýärler. Çykýan massanyň m bahasynyň üýtgewsiz halynda

$$F_{kr} = m\frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} \cdot \frac{p_1}{V_1}}}$$

– deşigiň meýdanynyň iň kiçi bahasyny alarys.

$p_{kr} = \beta_{kr} \cdot p_1$ baha basyşyň kritiki bahasy diýýärler. Gazyň deşikden çykýan ω_2 tizliginiň $\frac{p_2}{p_1} = \beta_{kr}$ bolandaky

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k}}\right)}$$

ýa-da

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot p_1 V_1} \qquad (3)$$

bahasyna tizligiň kritiki bahasy diýýärler. Klapeýronyň $p_1 V_1 = RT_1$ deňligini ulanyp, soňky formulany

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot RT_1}$$

görnüşde hem ýazmak bolar. $p_1 V_1^k = p_{kr} V_{kr}^k$ ýa-da $V_1 = \left(\frac{p_{kr}}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} V_{kr}$ hem-de $p_1 = \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}$ bolýandygy sebäpli, (3) deňlikden alarys:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \left(p_{kr} : \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot V_{kr} \cdot \frac{p_{kr}}{\beta_{kr}}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \beta_{kr}^{\frac{1}{k}-1} \cdot p_{kr} \cdot V_{kr}}.$$

Belgilemä görä, $\beta_{kr} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$. Diýmek,

$$\beta_{kr}^{\frac{1}{k}-1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{-1} = \frac{k+1}{2}.$$

Onda ω_{kr} üçin

$$\omega_{kr} = \sqrt{k p_{kr} V_{kr}}$$

deňligi alarys. Fizika kursundan belli bolşy ýaly, $\sqrt{k p_{kr} V_{kr}}$ ululyk, parametrleri p_{kr} we V_{kr} bolan gurşawdaky sesiň tizligine deňdir. Diýmek, gazyň deşikden çykyş kritiki tizligi sesiň deşigiň golaýyndaky tizligine deňdir.

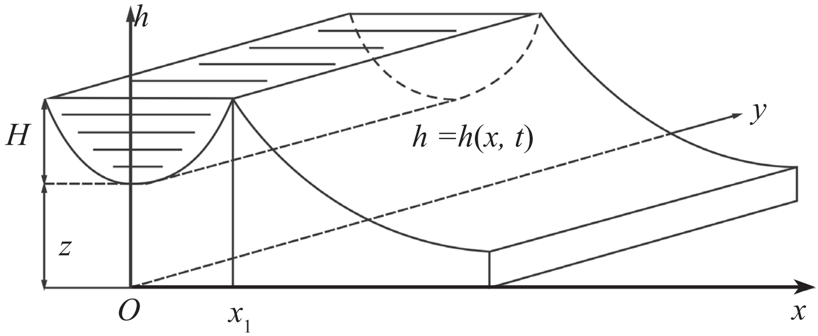
17. AÇYK HANALARDAN SYZYŞ MESELESI BARADA

Kanalyň açyk hanasyndan syzýan suwuň mukdaryny hasaplamaklyk diýseň çylşyrymly bolup, şu wagta çenli bu meseläni çözmeklikde ýeke-täk çemeleşme ýok. Çözgüt syzyşa täsir edýän köp sebäplere bagly bolýar we meselä olaryň ählisini göz öňünde tutmak arkaly çemeleşmek uly kynçylyklara sezewar edýär. Netijede, doly çözüwi tapmak hem başartmaýar.

Şu işde, meseläni kanalyň hanasyndaky suwuň hem-de kanalyň astyndaky suw geçirmeýän gatlagyň derejelerini, kanalyň kese kesiginiň görnüşini nazarda tutup, emma syzyşa täsir edýän beýleki sebäplerden diýseň «erkin» peýdalanyp, çözmek hödürlenýär. Ýerasty suwlaryň üsti t pursatda $h = h(x, t)$ deňleme bilen berilýär (ýagny tekiz meselä seredilýär) we h

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{m} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right)\right] \qquad (1)$$

syzyş deňlemesini kanagatlandyrýar diýip çak edilýär. Şu ýerde *m* – kanalyň hanasynyň daş-töweregindäki gurşawyň öýjükliligi, *k* – syzyş koeffisiýenti (*m* we *k* hemişelik ululyklar hasaplanylýar).



41-nji surat. Syzyşyň hasaplaýyş shemasy

$h = 0$, $h = h(x, t)$, $y = 0$, $y = 1$, $x = x_1$ üstler bilen çäklendirilen jisimiň V göwrümini hasaplalyň:

$$V = \int_{x_1}^{\infty} h(x,t)dx.$$

Diýmek, öýjüklerdäki suwuklygyň Q_1 göwrümi aşakdaky formula boýunça tapylar:

$$Q_1 = m\int_{x_1}^{\infty} h(x,t)dx.$$

Bu ýerden, Q_1-iň üýtgeýiş tizligi, ýagny $\frac{dQ_1}{dt}$, wagt birliginde kanalyň uzynlygy bire deň bolan böleginden syzýan suwuň mukdaryna deň bolar:

$$Q = m\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}dx.$$

(1) deňlemäni m-e köpeldip, onuň iki bölegini hem x boýunça x_1-den ∞-e çenli integrirläliň:

$$m\int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}dx = m\int_{x_1}^{\infty} \frac{k}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx,$$

$$m\int_{x_1}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial t}dx = k\cdot\left[h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=\infty} - h\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right].$$

$\lim\limits_{x\to\infty} h = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ bolany sebäpli, alarys:

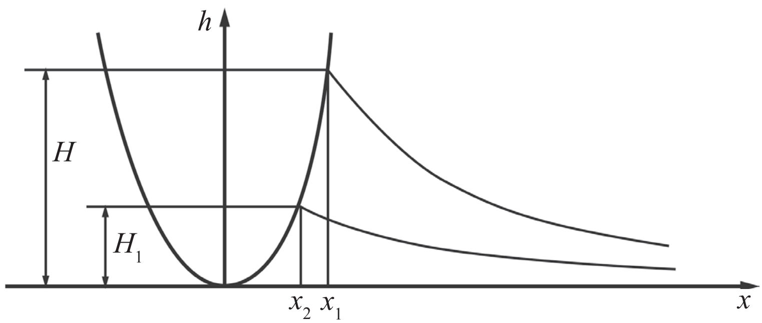
$$Q = -\,kh(x_1,t)\cdot h_x'(x_1,t). \qquad (2)$$

$h(x_1, t) = H + z$ bolany üçin, ähli kynçylyk $h'_x(x_1,t)$ ululygyň san bahasyny kesgitlemeklige syrygýar.

$z = 0$ ýagdaý.

Kanalyň kese kesigi $h = px^2$ parabola diýip çak edeliň. Onda $H = px_1^2$ bolar we

$$u = (x_2/x_1)^2 h[(x_1/x_2)x, t], \quad 0 < x_2 < x_1,$$



42-nji surat. z = 0 bolanda syzyşyň hasaplaýyş shemasy

funksiýa (1) deňlemäniň çözüwi bolar, özem

$$u(x_2,t) = (x_2/x_1)^2 h(x_1,t) = (x_2/x_1)^2 H = px_2^2 = H_1.$$

Indi

$$Q_1 = -\,ku(x_2,t)u_x'(x_2,t)$$

ululygy, ýagny suwuň beýikligi H_1-e deň bolanda, kanaldan wagt birliginde syzýan suwuň mukdaryny hasaplalyň:

$$Q_1 = -\,ku(x_2,t)u_x'(x_2,t) = -\,k(x_2/x_1)^2 h(x_1,t)(x_2/x_1)h_x'(x_1,t) =$$

$$= (x_2/x_1)^3[-kh(x_1,t)h_x'(x_1,t)] = (x_2/x_1)^3 Q,$$

bu ýerde $Q = -kh(x_1,t)h_x'(x_1,t)$.

Q_1-i başgaça-da ýazyp bolar:

$$Q_1 = (\sqrt{H_1}/\sqrt{H})^3 Q = H_1\sqrt{H_1}/(H\sqrt{H})Q$$

ýa-da $Q_1/(H_1\sqrt{H_1}) = w(t)$ belgilemäni girizip, alarys:

$$Q = w(t)H\sqrt{H}. \tag{3}$$

Indi w-niň t baglylyk häsiýetini kesgitlemek üçin, öwürmeleri geçireliň. x-ler okunda koordinatalar başlangyjy $x = x_1$ nokatda hasap edip,

$$h(x,t) = Hu(\eta),\quad \alpha = 2\sqrt{kH/m},\quad \eta = x/(\alpha\sqrt{t})$$

çalşyrma girizip, $u(\eta)$ üçin adaty differensial deňlemäni alarys:

$$\frac{d^2u^2}{d\eta^2} + 4\eta\frac{du}{d\eta} = 0. \tag{4}$$

$h(0, t) = H$, $H(\infty, t) = 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup, $u(\eta)$ üçin başlangyç şertleri alarys:

$$u(0) = 1,\quad u(\infty) = 0. \tag{5}$$

(4), (5) meseläniň çözüwini λ parametriň derejeleri boýunça

$$u(\eta) = 1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + ...$$

hatar görnüşinde we

$$u_i(0) = 0,\qquad \forall i \geq 1,\qquad u_i(\infty) = 0,\qquad \forall i \geq 2,$$

$$u_1(\infty) = R,\qquad R >> 1,\qquad u(\infty) = 1 + \lambda u_1(\infty) = 0$$

şertlerde gözläris. Bu ýerden λ kiçi parametr üçin $\lambda = -1/R$ alarys. $u(\eta)$-nyň bahasyny (4) deňlemede ýerine goýup, ýene-de λ-nyň derejeleri boýunça hatar alarys. Şol hataryň koeffisiýentlerini nola deňläp, $u_i(\eta)$ funksiýalar üçin deňlemeler sistemasyny alarys:

$$u_1'' + 2\eta u_1' = 0,$$

$$u_2'' + 2\eta u_2' = -(u_1^2)''/2,$$

$$u_3'' + 2\eta u_3' = -(u_1 u_2)''...$$

we ş.m.. Birinji deňlemäni $u_1(0)=0,\ u_1(\infty)=R$ şertlerde çözüp, alarys:

$$u_1(\eta)=\frac{2R}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta.$$

Ikinji deňlemäni $u_2(0)=0,\ u_2(\infty)=R$ şertlerde çözüp,

$$u_2(\eta)=\frac{R^2}{\pi}(1-e^{-2\eta^2})-\frac{R}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}u_1-\frac{1}{2}u_1^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)Ru_1$$

alarys we ş.m.. Soňra u üçin aňlatmada u_1-iň, u_2-niň we beýlekileriň bahalaryny goýup,

$$u=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta+\frac{1}{R^2}u_2(\eta)+....$$

alarys. Indi $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$ tapalyň:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)R^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}+...$$

ýa-da

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)+...$$

R-i ýeterlik derejede uly hasap edip,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}\approx-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

ýazyp bolar. Şuny göz öňünde tutup, alarys:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=H\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=H\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}\cdot\frac{1}{\alpha\sqrt{t}}=-\frac{2H}{\alpha\sqrt{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

ýa-da

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}=-\sqrt{\frac{m}{k\pi t}}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{H}.$$

$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}$ üçin tapylan bahany

$$Q=-kh(0,t)h_x'(0,t)$$

deňlikde ýerine goýup, taparys:

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)H\sqrt{H}. \qquad (6)$$

(3) we (6) deňlemeleri deňeşdirip, alarys:

$$w(t) = \sqrt{\frac{mk}{\pi t}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right).$$

Şeýlelikde, (3) we (6) formulalar alnandaky ortalaşdyrmalary we ýönekeýleşdirmeleri göz öňünde tutup, syzyşyň $z = 0$ ýagdaýdaky ahyrky hasaplaýyş formulasyny

$$Q = w_0\sqrt{\frac{mk}{\pi t}}H\sqrt{H} \qquad (7)$$

görnüşde gözlemek zerur.

Tejribe arkaly kesgitlenýän w_0 koeffisiýenti ortalaşdyryş koeffisiýenti diýip atlandyrmak bolar.

Aşakdaky delilleri hem (6) formulanyň esaslandyrylyşyna degişli diýmek bolar. (4) deňlemäniň çözüwi

$$u = 1 + \beta(\eta\sqrt{2}) - \beta^2(\eta\sqrt{2})^2/2 + ...$$

görnüşde gözlenýär.

η-nyň uly bahalarynda $u(\eta)$ funksiýanyň nola ymtylmagy üçin, $\beta = -0{,}628$ deňligiň zerurlygy sanly usul bilen anyklanylýar. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$ önümiň bahasyny tapalyň:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\alpha\sqrt{t}}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{m}{2tk}}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{H}}.$$

Diýmek,

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = H\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sqrt{\frac{m}{2tk}}\sqrt{H}\cdot 0{,}628$$

ýa-da (2) formula goýup,

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{2t}}H\sqrt{H}\cdot 0{,}628$$

alarys.

$z \neq 0$ ýagdaý.

(1) deňlemäniň sag bölegini $\frac{k}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(h^* \frac{\partial h}{\partial x}\right)$ aňlatma bilen çalşyralyň, bu ýerde h^* ululyk $h(x, t)$-niň ortalasdyrylan bahasy (hemişlelik ululyk). $\frac{k}{m} \cdot h^* = a^2$ belgiläp, syzyş üçin

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{8}$$

täze deňlemäni alarys.

Goý, $x \geqslant x_1$ bolanda (8) deňlemäniň gözlenýän çözüwi $h(x, t)$ bolsun (*41-nji surat*).

Goý, $h(x, 0) = \varphi(x)$, $x \geq x_1$ bolsun, $\varphi(x)$-i analitik ýagdaýda $(0, x)$ aralyga dowam etdireliň. Alnan funksiýany ýene-de $\varphi(x)$ bilen belgiläliň hem-de (8) deňlemäniň $-\infty < x < \infty$ aralykda kesgitlenen, $x \geq 0$ halda $\tilde{h}(x,0) = \varphi(x)$, $x < 0$ halda bolsa $\tilde{h}(x,0) = \varphi(-x)$ deňlikleri kanagatlandyrýan $\tilde{h}(x,t)$ çözüwini tapalyň. Bu çözüw, belli bolşy ýaly,

$$\tilde{h}(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

formula bilen berilýär, bu ýerde

$$\psi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \geq 0, \quad \psi(x) = \varphi(-x) \quad \forall x < 0.$$

$\tilde{h}_x'(x,t) \approx h_x'(x,t)$ çaklama tebigydyr. $\tilde{h}_x'(x_1,t)$-ni hasaplalyň.

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right]_x' d\xi = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right]_\xi' d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

$\psi'(x)$ funksiýanyň täkligi sebäpli,

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Şuny we Lagranžyň teoremasyny ulanyp, alarys:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - \left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} \right|_{x=c} \cdot x; \quad 0 < c < x.$$

Indi $\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2}$ hasaplalyň:

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right]'_x d\xi = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right]'_\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi''(\xi)}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = -K(x,t) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Islendik x üçin b položitel ululyk tapylyp, $0 \le K(x, t) \le b$ bolar.

Şeýlelikde,

$$\left. \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right|_{x=x_1} = K(c,t) \cdot x_1 \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

alarys we

$$Q = -k \cdot h(x_1, t) \cdot h'_x(x_1, t) = \frac{K(c,t) \cdot k}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot (H+z) x_1$$

bolar. Çak edilişine görä, kanalyň kese kesigi $h = px^2$ parabola görnüşindedir. Diýmek, $H = px_1^2$, $x_1 = \sqrt{H/p}$ bolar. Şuny nazarda tutup, alarys:

$$Q = \frac{k \cdot K(c,t)}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot (H+z) \cdot \sqrt{H/p}.$$

Indi

$$\frac{k \cdot K(c,t)}{2a\sqrt{\pi t p}} = w(t)$$

belgiläp, ahyrda

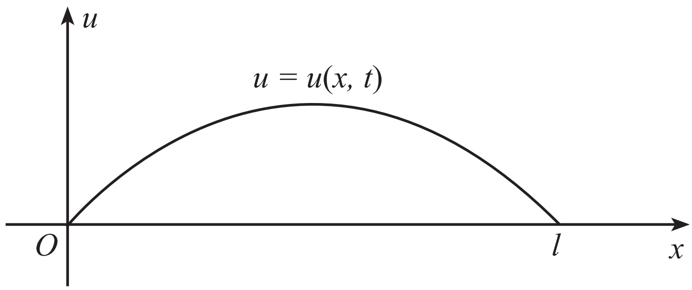
$$Q = w(t) \cdot (H+z) \cdot \sqrt{H} \tag{9}$$

alarys.

Alnan (7) we (9) formulalar daş görnüşi boýunça meňzeşdirler, (7) formula $z = 0$ bolanda (9) formuladan gelip çykýar.

18. TARYŇ YRGYLDYSY BARADAKY MESELÄNIŇ MATEMATIKI MODELI

Tar çekdirilip, onuň uçlary Ox okuň O we l nokatlarynda berkidilen. Ol käbir täsir astynda deňagramlylyk ýagdaýyndan çykarylýar we bir tekizlikde yrgyldap başlaýar. Mesele taryň islendik wagtdaky eýelejek ýagdaýyny kesgitlemekden durýar. Meseläni anyklalyň we matematiki dile geçireliň. Tekizlikde xOu koordinatalar ulgamyny guralyň (*43-nji surat*).



43-nji surat

Ilkibaşda tar $[0, l]$ kesim bilen gabat gelýär. $t = 0$ wagtda tara täsir edip, $u = \varphi(x)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat geler ýaly edýärler we soňra taryň nokatlarynyň başlangyç tizlikleri $\psi(x)$ funksiýa bilen kesgitlener ýaly edip goýberýärler. Tar yrgyldap başlaýar. Onuň t wagtdaky ýagdaýy $u = u(x, t)$ funksiýanyň grafigi bilen gabat gelýär diýeliň. Tar 0 we l nokatlarda berkidilen bolany üçin $u(0, t) \equiv u(l, t) \equiv 0$ bolar. Tara daşyndan täsir edýän güýç ýok halynda taryň yrgyldysyna erkin yrgyldy diýilýär. Mesele taryň erkin yrgyldysyny anyklamakdan durýar. Matematiki dilde $u(0, t) \equiv u(l, t) \equiv 0, u(x, 0) = \varphi(x), u_t'(x, 0) = \psi(x)$ şertleri kanagatlandyrýan we islendik t wagtda taryň ýagdaýyny kesgitleýän $u(x, t)$ funksiýany kesgitlemekden durýar. Meseläniň matematiki modelini düzeliň. Model aşakdaky çäklendirmelerde düzülýär.

1. Biz taryň kiçi yrgyldylary bilen gyzyklanýarys, ýagny $u(x,t)$ funksiýanyň özi we onuň $u_x'(x, t)$ önümi islendik $0 \le x \le l$ we islendik t üçin kiçi funksiýalar hasaplaýarys.

2. Hasaplamalarda $u^2(x, t)$, $[u_x'(x, t)]^2$ ululyklary $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ ululyklara görä örän kiçi hasap etjekdiris.

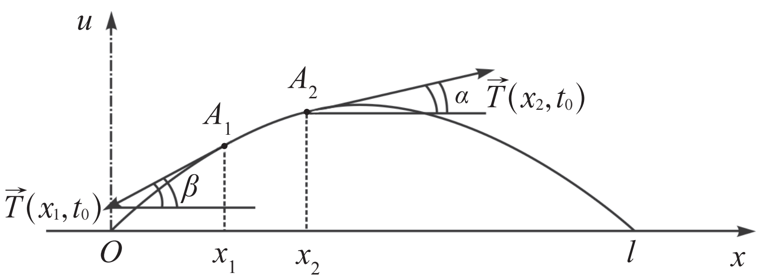
3. $u(x, t)$ funksiýanyň garalýan $\{0 \le x \le l,\ 0 \le t < \infty\}$ ýaýlada üznüksiz birinji we ikinji tertipli önümleri bar hasap etjekdiris.

4. Gukuň kanunyna laýyklykda, taryň islendik nokadynda, süýnmä proporsional we tara şol nokatda galtaşýan göni boýunça täsir edýän dartylma güýji bar.

5. Yrgyldylar kiçi bolany sebäpli, taryň başlangyç pursatdaky islendik nokady diňe Ox okuna perpendikulýar göni boýunça hereket edýär hasap edilýär.

6. Tara täsir edýän daşky güýçler we inersiýa güýji Ou okuna parallel täsir edýär hasap edilýär.

Ýokarda edilen çäklendirmelerden birnäçe netijeler alalyň. $\vec{T}(x,t)$ bilen tara t pursatda onuň $A(x, u(x, t))$ nokadynda täsir edýän dartylma güýjüni belgiläliň. Taryň başlangyç ($t = 0$) halda x okunyň x_1 we x_2 nokatlarynyň aralygyndaky böleginiň t_0 pursatdaky ýagdaýy $u = u(x, t_0)$ ($x_1 \le x < x_2$) deňlik bilen kesgitlener (*44-nji surat*).



44-nji surat

Ol bölejige A_1, A_2 nokatlarda, suratda görkezilişi ýaly, dartylma güýçleri täsir edýär. Tara täsir edýän beýleki güýçler, çäklendirmä görä, Ou okuna parallel täsir edýär. Mehanikanyň kanunyna laýyklykda, A_1A_2 duga täsir edýän hemme güýçler deňagramlylykda bolmaly, ýagny olaryň Ox okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmaly. Şol sebäpli, $\vec{T}(x_1, t_0)$ we $\vec{T}(x_2, t_0)$ dartylma güýçleriniň Ox okuna bolan proýeksiýalarynyň jemi nola deň bolmaly bolýar, ýagny

$$-|\vec{T}(x_1, t_0)| \cdot \cos\beta + |\vec{T}(x_2, t_0)| \cdot \cos\alpha = 0.$$

44-nji suratdan görnüşi ýaly, $tg\beta = u_x'(x_1, t_0)$, $tg\alpha = u_x'(x_2, t_0)$. Onda, 2-nji çäklendirmäni ulanyp, alarys:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+[u_x'(x_1,t_0)]^2}} = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+[u_x'(x_2,t_0)]^2}} = 1.$$

Bu ýerden

$$|\vec{T}(x_1,t_0)| = |\vec{T}(x_2,t_0)|$$

deňlik gelip çykýar. x_1, x_2 nokatlaryň erkin bolandyklary sebäpli, t_0 pursatda taryň islendik $(x, u(x, t_0))$ nokadyndaky dartylmanyň moduly hemişelik bahasyny saklaýar. Indi A_1A_2 duganyň $|A_1A_2|$ uzynlygyny tapalyň:

$$|A_1A_2| = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x'(x,t_0))^2}\,dx.$$

2-nji çäklendirmäni ulansak,

$$|A_1A_2| = |x_2 - x_1|$$

deňligi alarys. Bu bolsa, taryň başlangyç halda Ox okunyň $[x_1, x_2]$ kesimi bilen gabat gelýän böleginiň islendik t_0 wagtdaky uzynlygynyň şol kesimiň uzynlygyna deňdigini, ýagny onuň uzynlygynyň wagta bagly däldigini aňladýar. Bu bolsa, öz gezeginde, Gukuň kanunyna laýyklykda, taryň islendik nokadyndaky dartylmanyň wagta bagly däldigini aňladýar. Şeýlelikde, dartylma güýjüniň moduly $|\vec{T}(x,t)|$ x-e we t bagly däl bolýar, ýagny $\left|\vec{T}(x,t)\right| \equiv T_0$. Bu ýerde T_0 – taryň nokatlaryndaky başlangyç $(t = 0)$ pursatdaky dartylmadyr. Ine, şu çäklendirmeleri we alnan netijeleri ulanyp, biz taryň yrgyldysyny kesgitleýän $u(x, t)$ funksiýanyň kanagatlandyrýan deňlemesini getirip çykaralyň.

Başda taryň erkin yrgyldysynyň, ýagny tara inersiýa güýjünden we dartylma güýjünden başga daşky güýçleriň täsir etmeýän halyndaky yrgyldysynyň deňlemesini çykaralyň. Ilki bilen taryň yrgyldysynyň kinetik we potensial energiýalaryny tapalyň. Hereketde taryň bölejikleriniň uzynlyklarynyň üýtgemeýänligi üçin onuň K kinetik energiýasy

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

formula arkaly tapylar. Bu ýerde $\rho(x)$ – taryň dykyzlygy. Tara täsir edýän dartylma güýçleriniň $t = 0$ pursatdan t_0 pursata çenli bitiren işlerini hasaplalyň. Taryň nokatlarynyň Ou oka parallel hereket eýdändikleri sebäpli, dartylma güýçleriniň Ou oka bolan proýeksiýalarynyň bitiren işini hasaplamak ýeterlikdir. Taryň A_1A_2 dugasyny alalyň. Çäklendirmeleri ulanyp, şol duga täsir edýän $\vec{T_1}(x_1, t_0)$, $\vec{T_2}(x_2, t_0)$, dartylma güýçleriniň Ou oka bolan T_{1u}, T_{2u} proýeksiýalaryny tapalyň:

$$T_{1u} = -T_0 \sin\beta = -T_0 \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = -T_0 \frac{u_x'(x_1, t_0)}{\sqrt{1+(u_x'(x_1, t_0))^2}} \approx -T_0 u'_x(x_1, t_0);$$

$$T_{2u} = T_0 \sin\alpha = T_0 \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = T_0 \frac{u_x'(x_2, t_0)}{\sqrt{1+(u_x'(x_2, t_0))^2}} \approx T_0 u'_x(x_2, t_0).$$

Olaryň jemini hasaplalyň:

$$T_{1u} + T_{2u} = T_0 u_x'(x_2, t_0) - T_0 u_x'(x_1, t_0) = T_0 u_{xx}''(x_0, t_0)(x_2 - x_1)$$

bu ýerde $x_1 \le x_0 \le x_2$. A_1A_2 dugany ýeterlik kiçi hasap edeliň. Onda onuň t_1-den t_2-ä çenli geçen aralygy, takmynan, $u_t'(x_0, t^*)(t_2 - t_1)$-e deň bolar ($t_1 \le t^* \le t_2$). Dartylma güýçleriniň A_1A_2 duga t_1 pursatdan t_2 pursata çenli hereket edendäki bitiren A_{12} işi bolsa

$$A_{12} = T_0 u_{xx}''(x_0, t^*) \cdot u_t'(x_0, t^*)(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)$$

ýa-da $x_2 - x_1 = dx$, $t_2 - t_1 = dt$, $x_0 = x$, $t^* = t$ belgilemeleri girizsek,

$$A_{12} = T_0 u_{xx}''(x, t) \cdot u_t'(x, t) dxdt$$

bolar. Bu ýerden tutuş taryň $t = 0$ pursatdan t_0 pursata çenli eden hereketinde dartylma güýçleriniň bitiren A işi üçin

$$A = \int_0^{t_0} \int_0^{l} T_0 u_{xx}''(x, t) \cdot u'_t(x, t) dxdt$$

formulany alarys. Bu formulany özgerdeliň:

$$A = \int_0^{t_0} \left(\int_0^{l} T_0 u_t'(x, t) du_x'(x, t) \right) dt = \int_0^{t_0} [T_0 u_t'(x, t) \cdot u_x'(x, t)]_{x=0}^{x=l} dt -$$

$$- \int_0^{t_0} \int_0^{l} T_0 u'_x(x, t) \cdot u_{xt}''(x, t) dxdt.$$

Taryň 0 we l nokatlarda berkidilendigi sebäpli, $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$. Şunuň esasynda, $u_t'(0,t) = u_t'(l,t) \equiv 0$ bolar we ýokardaky formuladaky birinji integral nola deň bolup, formula

$$A = -\int_0^{t_0}\int_0^l T_0 u'_x(x,t)\cdot u''_{xt}(x,t)\,dxdt$$

görnüşe geler. Indi

$$\int_0^l u_x'(x,t)\cdot u''_{xt}(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

deňligi göz öňünde tutup,

$$A = -\int_0^l \frac{T_0}{2}\left[(u_x'(x,t_0))^2 - (u_x'(x,0))^2\right]dx$$

alarys. Başlangyç halda tar [0, l] kesim bilen gabat gelýär diýlipdi. Şoňa görä, $u(x, 0) \equiv 0$ we $u_x'(x,0) \equiv 0$ boljakdygyny göz öňünde tutup, alarys:

$$A = -\frac{T_0}{2}\int_0^l [u'_x(x,t_0)]^2\,dx.$$

Görnüşi ýaly, dartylma güýçleriniň bitiren işi diňe taryň başlangyç we ahyrky ($t = t_0$) ýagdaýy bilen kesgitlenýär. Diýmek, taryň $t = t_0$ pursatdaky potensial energiýasy A deň bolar.

$$L = K + A = \frac{1}{2}\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{T_0}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Lagranžyň funksiýasyny düzeliň we oňa Gamiltonyň prinsipini ulanalyň, ýagny islendik t_0 üçin

$$J(u) = \int_0^{t_0} L\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left[\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]dt$$

integralyň wariasiýasy nola deň bolmaly bolar. Başgaça aýdylanda, $\upsilon(x,t)\Big|_{t=0} = \upsilon(x,t)\Big|_{t=t_0} \equiv 0,\quad \upsilon(x,t)\Big|_{x=0} = \upsilon(x,t)\Big|_{x=l}$ şertleri kanagatlandyrýan we birinji tertipli hususy önümli islendik $\upsilon(x, t)$ funksiýa üçin

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(u+\alpha\upsilon)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

ýa-da

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left\{\int_0^l \rho_0\left[\frac{\partial(u+\alpha\upsilon)}{\partial t}\right]^2 - T_0\left[\frac{\partial(u+\alpha\upsilon)}{\partial x}\right]^2\right\}_{\alpha=0} dxdt = 0$$

bolmaly bolar. Onda

$$\int_0^{t_0}\int_0^l\left\{\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial t} - T_0\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right\}dxdt = 0, \qquad (1)$$

alarys.

$$\int_0^{t_0}\int_0^l \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right)dxdt = \int_0^l \rho_0\left(\int_0^{t_0}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dt\right)dx =$$

$$= \int_0^l \rho_0\left[u_t'(x,t)\cdot\upsilon(x,t)\Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\upsilon dt\right]dx,$$

$$\int_0^{t_0}\int_0^l T_0\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial x}dxdt = T_0\int_0^{t_0}\left(\int_0^l\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial x}dx\right)dt =$$

$$= T_0\int_0^{t_0}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\upsilon(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\upsilon(x,t)dx\right]dt$$

deňliklerde $\upsilon(x,t)\Big|_{x=0}^{x=l} \equiv 0$, $\upsilon(x,t)\Big|_{t=0}^{t=t_0} \equiv 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$\int_0^{t_0}\int_0^l \rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dxdt = -\int_0^{t_0}\int_0^l \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\upsilon(x,t)dxdt,$$

$$\int_0^{t_0}\int_0^l T_0\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\upsilon}{\partial x}dxdt = -T_0\int_0^{t_0}\int_0^l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\upsilon(x,t)dxdt$$

deňlikleri alarys we olary ulanyp, (1) deňligi

$$\int_0^{t_0}\int_0^l\left(\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\upsilon(x,t)dxdt = 0$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden, $v(x, t)$ funksiýanyň erkin bolany üçin,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

ýa-da $\frac{T_0}{\rho_0} = a^2$ belgileme girizip, taryň erkin yrgyldysynyň aşakdaky deňlemesini alarys:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Indi biz ýokarda goýlan meseläni matematiki dilde ýazmaga taýýar. Ol şundan ybarat. (2) deňlemäniň

$$u(0, t) = u(l, t) \equiv 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{4}$$

$$u_t'(x, 0) = \psi(x) \tag{5}$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly. (3) şertlere çäk şertleri, (4) we (5) şertlere başlangyç şertler diýilýär. Olara bilelikde, (2) deňleme üçin gyra meselesi diýilýär. Kompýuteriň kömegi bilen, (2) deňleme üçin gyra meselesiniň sanly çözüwlerini islendik takyklykda tapyp bolar. Beýle takmyn çözüwi tapmak üçin, häzirki zaman kompýuterlerinde ýörite programmalar bardyr. Ýöne, käbir hallarda, çözüwi analitiki görnüşde tapmak hem gerek bolýar. Mysal üçin, saz gurallarynyň tarlarynyň emele getirýän owazlary öwrenilende, ol taryň çykarýan esasy owazyny saýgarmak gerek bolanda, şeýle çözüwiň gerek bolmagy mümkin. Analitiki çözüwi tapmagyň bir usulyna Furýeniň üýtgeýänleri bölme usuly diýilýär. Ol şundan ybarat. (2) deňlemäniň $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ görnüşdäki, $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ şertleri kanagatlandyrýan, noldan tapawutly çözüwini tapýarlar. $X(x)$, $T(t)$ funksiýalary iki gezek üznüksiz differensirlenýän funksiýalar hasap edip, (2) deňlemede $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ funksiýany ýerine goýýarlar:

$$\frac{\partial^2 [X(x) \cdot T(t)]}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 [X(x) \cdot T(t)]}{\partial x^2},$$

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a^2 T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}.$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ funksiýa böleliň:

$$\frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} = a^2 \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2X}{dx}.$$

Üýtgeýänler bölündiler. Bu ýagdaý diňe käbir λ hemişelik san üçin

$$\frac{1}{a^2T} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} \equiv \frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} \equiv \lambda$$

bolanda bolup biler. Soňky deňlikleri iki deňlik görnüşinde ýazalyň:

$$\frac{1}{a^2T} \cdot \frac{d^2T}{dt^2} = \lambda, \tag{6}$$

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = \lambda. \tag{7}$$

Şerte görä, $u(0, t) = X(0) \cdot T(t) \equiv 0$, $u(l, t) = X(l) \cdot T(t) \equiv 0$ deňlikler ýerine ýetmeli bolar. Bu bolsa diňe $X(0) = X(l) = 0$ ýagdaýda bolup biler. Eger, mysal üçin, $X(l) \neq 0$ bolsa, onda $T(t) \equiv 0$ we çözüw $u(x, t) \equiv 0$ bolardy. Şeýlelikde, (7) deňlemäniň $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly bolýar. Bu ýerde üç halyň bolmagy mümkin: $\lambda < 0$, $\lambda > 0$, $\lambda = 0$.

$\lambda < 0$ bolanda (7) deňlemäniň umumy çözüwi

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

görnüşde, λ > 0 bolanda

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

görnüşde, λ = 0 bolanda

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

görnüşde bolar. $X(x)$ funksiýanyň soňky iki görnüşi $X(0) = X(l) = 0$ şertleri diňe $C_1 = C_2 = 0$ bolanda kanagatlandyrýar. Bu ýagdaýda $X(x) \equiv 0$ we $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \equiv 0$ bolar.

Diýmek, diňe λ < 0 ýagdaý galýar. $X(x)$ funksiýanyň $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrmagyny talap edip, alarys:

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

Soňky deňlikde $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$ bolmaly. Başga halda $C_2 = 0$ we ýene-de $u(x, t) \equiv 0$ bolardy. $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$ deňlemäni çözüp, alarys:

$$\sqrt{\lambda}\, l = k\pi$$

ýa-da

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

Diýmek, (7) deňlemäniň $X(0) = X(l) = 0$ şertleri kanagatlandyrýan

$$X(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \quad k = 1, 2, ...$$

görnüşdäki tükeniksiz köp çözüwleri, (2) deňlemäniň bolsa $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ şertleri kanagatlandyrýan

$$u(x,t) = \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot T(t)$$

görnüşdäki tükeniksiz köp çözüwleri bolar. $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ bahany (6) deňlemä goýup, $T(t)$ üçin

$$T''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

deňlemä geleris. Onuň umumy çözüwini

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t, \quad k = 1, 2, ...$$

görnüşde ýazyp bileris. Ahyrda, $u_k(x, t)$ üçin

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right)$$

formula geleris. (2) deňleme çyzykly bolany sebäpli, formal taýdan

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \tag{8}$$

funksiýa hem (2) deňlemäniň çözüwi bolar. Onuň hakyky çözüw bolmaklygy üçin (8) hatary x boýunça iki gezek, t boýunça hem iki gezek agzama-agza differensirläp bolmagy gerekdir. Bu şertiň ýerine ýetmegi üçin, (8) hatary differensirläp alnan hatarlaryň hemmesiniň x-iň we t-niň hemme bahalarynda deňölçegli ýygnanmagy ýeterlikdir. Ol hatarlaryň deňölçegli ýygnanmagy üçin, Weýerştrassyň teoremasyna laýyklykda,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2|A_k|+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2|B_k| \tag{9}$$

san hatarynyň ýygnanmagy ýeterlikdir.

(8) deňlik bilen kesgitlenýän $u(x, t)$ funksiýa $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ şertleri kanagatlandyrýar (bu şertleri $u_k(x, t)$ funksiýalaryň her biriniň kanagatlandyrýanlygy sebäpli). Indi $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t'(x,0) = \psi(x)$ şertleriň hem kanagatlandyrylmagyny talap edeliň:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,0) = \varphi(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k)_t'(x,0) = \psi(x)$$

ýa-da ýaýbaň görnüşde,

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x = \varphi(x), \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}B_k\sin\frac{k\pi}{l}x = \psi(x). \tag{11}$$

Çäk şertlerine laýyklykda, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ bolar. Indi, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, $\psi(x) = -\psi(-x)$ formulalar arkaly $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalary $[-l, 0]$ kesimde täk funksiýa hökmünde dowam etdireliň. Onda (10), (11) hatarlara, degişlilikde, $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň furýe hatary diýmek bolar. Onda A_k we B_k koeffisiýentler

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad \frac{ak\pi}{l}B_k = \frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

formulalar arkaly tapylar. Furýe hatarlarynyň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (9) hataryň ýygnanmagy üçin $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ funksiýalaryň iki gezek üznüksiz differensirlenýän bolmaklary ýeterlikdir. Şeýlelikde, eger

1) $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$;

2) $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ iki gezek endigan differensirlenýän funksiýalar bolsa, onda

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{l}x\Big(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\cdot\cos\frac{ak\pi}{l}t +$$

$$+\frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\cdot\sin\frac{ak\pi}{l}t\Big) \tag{12}$$

formula arkaly kesgitlenýän $u(x, t)$ funksiýa (2) deňlemäniň (3), (4), (5) gyra şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolýar. Diýmek, $u = u(x, t)$ funksiýa taryň islendik t pursatdaky ýagdaýyny kesgitleýär. Şu meseläni hem çözmek gerekdi.

Eger $\psi(x) \equiv 0$ bolsa, $u(x, t)$ üçin

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\cos\frac{ak\pi}{l}t$$

formulany alarys. Eger şu formulada $\varphi(x)=\sin\frac{\pi}{l}x$ goýsak,

$$u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{a\pi}{l}t$$

alarys. Taryň şeýle yrgyldysynyň berýän owazyna taryň esasy owazy diýilýär. Ýokardaky hataryň galan agzalarynyň her biriniň berýän owazyna taryň belent owazy diýýärler.

Goý, tara inersiýa we dartylma güýçlerinden başga-da, paýlanyş dykyzlygy $F(x, t)$ bolan, Ou oka parallel güýç täsir etsin. Taryň daşky güýçleriň täsir etmegindäki hereketine taryň mejbury yrgyldysy diýilýär. Taryň mejbury yrgyldysynyň deňlemesini, mehanikanyň esasy deňlemesini ulanyp çykaralyň. Mehanikanyň kanunyna laýyklykda, jisime täsir edýän güýçleriň dt wagtda bitiren işleriniň jemi nola deň bolmalydyr. Taryň yrgyldysy barada ýokarda edilen çäklendirmeler öz güýjüni saklaýan halynda, taryň $x,\ \ x+dx$ nokatlaryň arasyndaky bölejigine täsir edýän güýçleri kesgitläliň: $-\rho_0 dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ – inersiýa güýji, Ou oka parallel, $T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$ – dartylma güýçleriniň Ou oka bolan proýeksiýalarynyň jemi, $F(x, t)dx$ – daşky güýç. Diýmek, dt wagtda taryň garalýan bölejigi du aralyga süýşen bolsa, onda

$$-\rho_0 dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}du+T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdu+F(x,t)dxdu=0$$

deňlik ýerine ýeter. Bu ýerden, $dxdu$ köpeldijä gysgaldyp,

$$-\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) = 0$$

deňlemäni, ýa-da $\frac{T_0}{\rho_0} = a^2$, $\frac{F(x,t)}{\rho_0} = f(x,t)$ belgilemeleri girizip,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2'}$$

taryň mejbury yrgyldysynyň deňlemesini alarys. Indi, daşky güýçler täsir edýän ýagdaýynda, taryň islendik t pursatdaky ýagdaýyny kesgitlemeli bolsun. Matematiki dilde bu mesele (2′) deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesini çözmeli diýmekdir. $\varphi(x)$ we $\psi(x)$ baradaky çäklendirmeleri göz öňünde tutup,

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - t\psi(x) - \varphi(x)$$

funksiýa girizeliň. $\upsilon(x, t)$ funksiýa

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x) \tag{14}$$

deňlemäni we

$$\upsilon(0, t) = \upsilon(l, t) = 0, \tag{3'}$$

$$\upsilon(x, 0) = 0, \tag{4'}$$

$$\upsilon_t'(x,0) = 0 \tag{5'}$$

şertleri kanagatlandyrar. Şeýlelikde, (2′) deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesi (14) deňleme üçin (3′), (4′), (5′) gyra meselesine getirilýär. Soňky mesele çözülende, islendik t üçin $f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x)$ funksiýany [0, l] kesimde

$$f(x,t) + t\psi''(x) + \varphi''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x$$

furýe hataryna dargadyp bolýar diýip hasap edilýär we $\upsilon(x, t)$ çözüw

$$\upsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x$$

görnüşde gözlenilýär. $\upsilon(x, t)$ çözüwi kesgitleýän hatary x boýunça iki gezek we t boýunça iki gezek agzama-agza differensirläp bolýar hasap edip, $\upsilon(x, t)$ funksiýanyň υ''_{xx}, υ''_{tt} önümlerini tapýarlar we (14) deňlemede ýerine goýup, aşakdaky deňligi alýarlar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k''(t)\sin\frac{k\pi}{l}x \equiv -a^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Bu ýerden, meňzeş agzalary toparlap, alarys:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k''(t) + \left(a\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k(t) - f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x \equiv 0.$$

Bu deňligiň ýerine ýetmegi üçin, ýagny $\upsilon(x, t)$ funksiýanyň (14) deňlemäniň çözüwi bolmagy üçin

$$a_k''(t) + \left(a\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, ...$$

deňlikleriň ýerine ýetmegi ýeterlikdir. $\upsilon(x, t)$ funksiýa, gurluşyna görä, çäk şertleri kanagatlandyrýar. Onuň $\upsilon(x, 0) = 0$, $\upsilon_t'(x, 0) = 0$ başlangyç şertleri kanagatlandyrmagy üçin $a_k(t)$ funksiýalar

$$a_k(0) = 0, \quad a_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

şertleri kanagatlandyrmalydyr, başgaça, $a_k(t)$ funksiýalar, degişlilikde,

$$a_k''(t) + \left(a\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k(t) = f_k(t),$$

$$a_k(0) = a_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

meseläniň çözüwi bolmalydyr. Belli bolşy ýaly, soňky meseläniň çözüwi

$$a_k(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

formula arkaly tapylýar. Şeýlelikde, (14) deňleme üçin (3′), (4′), (5′) gyra meselesiniň çözüwi

$$\upsilon(x, t) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x$$

hatar görnüşinde tapylýar. Elbetde, $f_k(\tau)$ funksiýalardan $\upsilon(x, t)$ funksiýanyň çözüw bolmagyny ýerlikli etmegini talap edýärler. Onuň üçin $\upsilon(x, t)$ funksiýany kesgitleýän hataryň t boýunça iki gezek we x boýunça iki gezek (gerek ýaýlada) agzama-agza differensirläp bolmagy ýeterlikdir. Şu çäklendirmelerde (2′) deňleme üçin (3), (4), (5) gyra meselesiniň çözüwi

$$u(x,t) = t\psi(x) + \varphi(x) + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x$$

görnüşde bolar. Taryň mejbury yrgyldysynda onuň t pursatdaky ýagdaýy ýokardaky formuladan tapylýar.

19. JISIMDE TEMPERATURANYŇ PAÝLANYŞYNYŇ MATEMATIKI MODELI

Giňişlikdäki jisimiň erkin $M(x, y, z)$ nokadynyň temperaturasyny $T(x, y, z, t)$ bilen belgiläliň, bu ýerde t – wagt. Fizika kursundan belli bolşy ýaly, jisimiň nokatlarynda temperatura dürli bahalara eýe bolsa, onda ol jisimde temperaturanyň ýokary ýerlerinden onuň pes bolan ýerlerine tarap ýylylyk akymy döreýär. Bu akymyň mukdaryny kesgitlemek üçin, meýdany Δs bolan tekiz üstüň bölejigi jisimde ýerleşdirilen diýeliň, $\vec{n}$ ol bölejige geçirilen normal wektor bolsun. Onda, Furýeniň kanunyna laýyklykda, şol bölejikden wagt birliginde normal wektoryň ugry boýunça akyp geçýän ΔQ ýylylyk mukdary

$$\Delta Q \cong -\lambda \Delta s\left(gradT \cdot \vec{n}\right) \tag{1}$$

formula arkaly kesgitlenýär we bu deňlik Δs näçe kiçi bolsa, şonça hem takyk hasap edilýär. λ koeffisiýente ýylylyk geçirijilik koeffisiýenti diýilýär. Formulanyň sag bölegindäki minus alamaty ýylylyk akymynyň temperatyranyň pes tarapyna ugrukdyrylandygyny aňladýar. Jisimiň içinde onuň σ endigan üst bilen çäklenen bölejigini göz öňüne getireliň we şol bölejik üçin ýylylygyň balans deňlemesini ýazalyň. Goý, $\vec{n}(x,y,z)$ wektor σ üstüň $M(x, y, z)$ nokadyndaky daşky normal wektory bolsun. σ üsti $\sigma_i, i = \overline{1,m}$, bölejiklere böleliň, Δs_i – i-nji bölejigiň meýdany. Eger σ_i bölejikler ýeterlik kiçi bolsa, biz olara tekiz üst hökmünde garap bileris. Goý, $\vec{n}_i$ şol bölejigiň $M(x_i, y_i, z_i)$ nokadyndaky daşky normal wektory bolsun. Onda σ_i bölejikden Δt wagtda geçýän ΔQ_i ýylylyk mukdary, (1) formula laýyklykda,

$$\Delta Q_i \cong -\lambda \Delta s_i\left(gradT \cdot \vec{n}_i\right)\Delta t$$

formula arkaly kesgitlener. Bu ýerde *gradT* wektor $M(x_i, y_i, z_i)$ nokatda t pursatda kesgitlenen. Tutuş σ üstden Δt wagtda akyp geçýän ýylylyk mukdary

$$\Delta Q \approx -\sum_{i=1}^{m} \lambda \Delta s_i (gradT \cdot \vec{n}_i)\Delta t$$

takmyn formula bilen kesgitlener. Δs_i meýdanlar nola ymtylanda, soňky deňlikden

$$\Delta Q = -\lambda \iint_{\sigma} (gradT \cdot \vec{n}) ds \cdot \Delta t$$

takyk formulany alarys. $-\Delta Q$ ululyk jisimiň σ üst bilen çäklenen bölegine Δt wagtda girýän ýylylyk mukdaryny aňladýar. Biz bu mukdary başgaça-da hasaplap bileris.

Garalýan bölejigiň göwrümini V_σ, onuň giňişlikde tutýan ýaýlasyny D bilen belgiläliň. Onda onuň t pursatdaky orta temperaturasy

$$\frac{1}{V_\sigma} \iiint_D T(x,y,z,t) dxdydz$$

bolar. Orta temperaturanyň Δt wagtdaky ΔT üýtgemesi

$$\frac{1}{V_\sigma} \iiint_D [T(x,y,z,t+\Delta t) - T(x,y,z,t)] dxdydz$$

integrala deň bolar.

Goý, jisimiň içinde, ýylylyk akymynyň dykyzlygy $f(x, y, z, t)$ bolan ýylylyk çeşmesi bar bolsun. Ol çeşmeden garalýan bölejige Δt wagtda

$$\Delta Q_1 = \iiint_D f(x,y,z,t) dxdydz \cdot \Delta t$$

ýylylyk mukdary siňer. Jisime Δt wagtda siňen $-\Delta Q + \Delta Q_1$ ýylylyk mukdary onuň temperaturasyny ΔT ululyga üýtgeder. Onda, G.Gelmgolsyň prinsipine laýyklykda,

$$-\Delta Q + \Delta Q_1 = c \iiint_D \rho(x,y,z) dxdydz \cdot \Delta T$$

deňlik ýerine ýeter. Bu deňlikde $-\Delta Q$, ΔQ_1, ΔT ululyklaryň bahalaryny goýup,

$$\lambda \iint_{\sigma} (gradT \cdot \vec{n}) ds \cdot \Delta t + \iiint_D f(x,y,z,t) dxdydz \cdot \Delta t =$$

$$= c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz \cdot \frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D [T(x,y,z,t+\Delta t) - T(x,y,z,t)]dxdydz$$

alarys. Soňky deňligiň iki tarapyny hem Δt bölüp we Δt nola ymtylanda predele geçip, aşakdaky deňlige geleris:

$$\lambda\iint\limits_\sigma (gradT\cdot\vec{n})ds + \iiint\limits_D f(x,y,z,t)dxdydz =$$

$$= c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz \cdot \frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz.$$

Bu deňligiň birinji integralyna Ostrogradskiniň formulasyny ulanyp, alarys:

$$\lambda\iiint\limits_D div(gradT)dxdydz + \iiint\limits_D f(x,y,z,t)dxdydz =$$

$$= c\iiint\limits_D \rho(x,y,z,t)dxdydz \cdot \frac{1}{V_\sigma}\iiint\limits_D \frac{\partial T}{\partial t}dxdydz.$$

Bu deňlikdäki integrallara orta baha baradaky teoremany ulanyp we σ üst gysylyp, D ýaýla $M(x, y, z)$ nokada ýygnananda predele geçip, aşakdaky deňlemä geleris:

$$\lambda\cdot div(gradT) + f(x,y,z) = c\rho\cdot\frac{\partial T}{\partial t}.$$

$\frac{f(x,y,z,t)}{c\rho} = F,\ \ \frac{\lambda}{c\rho} = a^2$ belgilemeleri girizip we $div(gradT) =$ $= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ bolýandygyny göz öňünde tutup, soňky deňligi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + F(x,y,z,t) \qquad (2)$$

görnüşde ýazyp bileris. (2) deňlemä ýylylyk geçirijilik deňlemesi diýilýär. Biziň başda goýan meselämiziň çözüwi bolan $T(x, y, z, t)$ temperatura (2) deňlemäniň çözüwi bolýar. (2) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwi bar. Olaryň içinden gereklisini saýlap almak üçin käbir şertler gerek. Olaryň birinjisi hökmünde temperaturanyň başlangyç bahasyny, ýagny $T(x, y, z, t)$ funksiýanyň jisime degişli nokatlardaky $t = 0$ bolandaky bahasyny, ikinjisi hökmünde bolsa temperaturanyň jisimiň üst nokatlaryndaky islendik t pursatdaky bahasyny almak ýeterlikdir. Şeýlelikde, deňleme üçin şeýle gyra meselesine gelýäris.

(2) deňlemäniň

$$T(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ (x,y,z)\in D, \tag{3}$$

$$T(x,y,z,t)=\psi(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Sigma \tag{4}$$

şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapmaly; bu yerde D – jisimiň tutýan ýaýlasy, Σ – onuň üsti (ýa-da D ýaýlanyň çägi). Bu mesele biziň başda goýan «temperaturany kesgitlemeli» diýen meselämiziň matematiki modelidir. Differensial deňlemeler nazaryýetinden belli bolşy ýaly, meseläniň ýeke-täk çözüwi bardyr. Kompýuteriň kömegi bilen ol çözüwi islendik takyklykda tapyp bolýar. Diýmek, biz jisimiň islendik nokadyndaky, islendik wagtdaky temperaturasyny islendik takyklyk bilen tapyp bileris. Şeýlelikde, goýlan mesele doly çözüldi diýmek bolar.

Örän ýuka plastinada temperaturany kesgitlemek baradaky meseläniň

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{5}$$

$$T(x,y,0)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in D, \tag{6}$$

$$T(x,y,t)=\psi(x,y,t),\ (x,y)\in L \tag{7}$$

meselä syrygjakdygy (D – plastinanyň tutýan ýaýlasy, L – onuň çägi), örän inçe steržende temperaturany kesgitlemek meselesiniň bolsa (steržen Ox okunyň $[0;\ l]$ kesimi bilen gabat gelýär diýip hasap edilende),

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{8}$$

$$T(x,0)=\varphi(x),\quad x\in[a;b], \tag{9}$$

$$T(0,t)=\psi_1(t),\quad T(l,t)=\psi_2(t),\quad 0\le t<\infty \tag{10}$$

meselä syrygjakdygy düşnüklidir.

D ýaýla (ýa-da jisim) $\{0\le x\le l,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c\}$ deňsizlikler arkaly kesgitlenýän gönüburçly parallelepiped bolan halynda, (2), (3), (4) meseläniň analitiki çözüwiniň tapylyşyny görkezeliň.

(2), (3), (4) meselä girýän $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z, t)$ funksiýalar barada şeýle çäklendirmeleri girizeliň: D ýaýlada $\varphi(x, y, z)$, $\psi(0, y, z, t)$, $\psi(l, y, z, t)$, $\psi(x, 0, z, t)$, $\psi(x, b, z, t)$, $\psi(x, y, 0, t)$, $\psi(x, y, c, t)$ funksiýalaryň, olara girýän üýtgeýänler boýunça, birinji we ikinji tertipli hususy önümleri bardyr, $\varphi(x,y,z) \in C(\overline{D})$, $\psi(x,y,z,t) \in C(\sum)$.

$$R(x,y,z,t) = \frac{1}{z(c-z)x(l-x) + z(c-z)y(b-y) + x(l-x)y(b-y)} \cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{x\psi(l,y,z,t)}{l} + \frac{(l-x)\psi(0,y,z,t)}{l}\right)y(b-y)z(c-z) + \right.$$

$$+\left(\frac{y\psi(x,b,z,t)}{b} + \frac{(b-y)\psi(x,0,z,t)}{b}\right)x(l-x)z(c-z) +$$

$$\left. +\left(\frac{z\psi(x,y,c,t)}{c} + \frac{(c-z)\psi(x,y,0,t)}{c}\right)x(l-x)y(b-y)\right]$$

funksiýa seredeliň. $R(x, y, z, t)$ funksiýa prizmanyň gapyrgalarynda ýatmaýan nokatlarynda kesgitlenen. Gapyrgalara degişli $M(x, y, z)$ nokatlarda funksiýany $R(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t)$ deňlik arkaly kesgitläliň. Gurluşyndan görnüşi ýaly, $R(x, y, z, t)$ funksiýa D ýaýlanyň içki nokatlarynda iki gezek differensirlenýän, $\overline{D}$ ýaýlada bolsa üznüksiz funksiýa bolar.

Dogrudan hem, $R(x, y, z, t)$ funksiýany kesgitleýän drobuň sanawjysy we maýdalawjysy prizmanyň gapyrgalarynda ýatmaýan nokatlarda iki gezek differensirlenýän funksiýalar we onuň maýdalawjysy şol nokatlarda nola deň däl. Diýmek, $R(x, y, z, t)$ – prizmanyň gapyrgalarynyň nokatlaryndan özge nokatlarda iki gezek differensirlenýän üznüksiz funksiýa bolar. Prizmanyň gapyrgalarynda ýatýan nokatlarda hem bu funksiýanyň üznüksiz boljakdygyny, haýsy-da bolsa bir, mysal üçin, $x = 0$, $y = 0$ gapyrga üçin subut edeliň.

Goý, $M_0(0,\ 0,\ z_0)$, $0 \le z_0 \le c$ şol gapyrganyň nokady bolsun. $\lim\limits_{M \to M_0} R(x,y,z,t)$ predeli tapalyň. Kesgitlemä görä, Σ üstüň nokatlarynda $R(x, y, z, t)$ üznüksiz. Şol sebäpli, $M(x, y, z, t)$ nokat $M(0, 0, z_0)$ nokada Σ üstde ýatmaýan nokatlar boýunça ymtylýan ýagdaýyna seretmek ýeterlik. Bu ýagdaýda $R(x, y, z, t)$ funksiýany kesgitleýän drobuň maýdalawjysy noldan tapawutly bolýar.

$$\frac{x\psi(l,y,z,t)}{l}+\frac{(l-x)\psi(0,y,z,t)}{l}=\psi(0,0,z_0,t)+\varepsilon_1,$$

$$\frac{y\psi(x,b,z,t)}{b}+\frac{(b-y)\psi(x,0,z,t)}{b}=\psi(0,0,z_0,t)+\varepsilon_2,$$

$$\frac{z\psi(x,y,c,t)}{c}+\frac{(c-z)\psi(x,y,0,t)}{c}=\frac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+$$

$$+\frac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}+\varepsilon_3$$

bolýandygyny göz öňünde tutup (bu ýerde ε_1, ε_2, ε_3 ululyklar, M nokat M_0 nokada ymtylanda, tükeniksiz kiçi funksiýalar),

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\varepsilon_1 y(b-y)z(c-z)+\varepsilon_2 x(l-x)z(c-z)+\varepsilon_3 y(b-y)x(l-x)}{y(b-y)z(c-z)+x(l-x)z(c-z)+y(b-y)(x(l-x)}=0,$$

$$\lim_{M\to M_0}\left|\frac{\left[\frac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+\frac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}-\psi(0,0,z_0,t)\right]x(l-x)y(b-y)}{y(b-y)z(c-z)+x(l-x)z(c-z)+x(l-x)y(b-y)}\right|\leq$$

$$\leq\lim_{M\to M_0}\frac{\left|\frac{z_0\psi(0,0,c,t)}{c}+\frac{(c-z_0)\psi(0,0,0,t)}{c}-\psi(0,0,z_0,t)\right|x(l-x)y(b-y)}{x(l-x)z(c-z)}=0$$

alarys. Bu ýerden $\lim\limits_{M\to M_0}R(x,y,z,t)=\psi(0,0,z_0,t)$ boljakdygy gelip çykýar. $z_0=0$ ýagdaý hem edil şeýle subut edilýär. Diýmek, $R(x, y, z, t)$ funksiýa tutuş $\overline{D}$ ýaýlada üznüksizdir. Ondan başga-da, $M(x, y, z)\in\sum$ üçin $R(x, y, z, t)=\psi(x, y, z, t)$ deňlik ýerine ýeter. Goý, $T(x, y, z, t)$ (2), (3), (4) meseläniň çözüwi bolsun. $V(x, y, z, t)=$ $=T(x, y, z, t)-R(x, y, z, t)$ funksiýa garalyň. Ol D ýaýlada

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\Delta V+f_1(x,y,z,t), \tag{11}$$

$$f_1(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)+a^2\Delta R-\frac{\partial R}{\partial t}$$

deňlemäni we

$$V(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z)-R(x, y, z, 0)\equiv\varphi_1, \tag{12}$$

$$V(x, y, z, t)_{M(x, y, z)} = 0 \tag{13}$$

şertleri kanagatlandyrar.

(11), (12), (13) meselä girýän φ_1, f_1 funksiýalar barada şeýle çäklendirmeleri girizeliň: D ýaýlada bu funksiýalar

$$\varphi_1(x,y,z) = \sum_{m,n,k=1}^{s} A_{m,n,k} \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \sin\frac{k\pi}{c}z,$$

$$f_1(x,y,z,t) = \sum_{m,n,k=1}^{s} B_{m,n,k}(t) \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \sin\frac{k\pi}{c}z$$

görnüşde bolmaly, bu ýerde $A_{m,n,k}$ – sanlar, $B_{m,n,k}$ (t) – t argumentiň funksiýalary. Bu çäklendirmeler φ_1, f_1 funksiýalar üçin şeýle bir gysby çäklendirmeler däldir. Sebäbi, furýe hatarlarynyň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, funksiýalaryň uly toplumy islendik takyklykda ýokardaky görnüşde aňladylyp bilner [12].

(2) deňlemäniň nazaryýetinden belli bolşy ýaly, (2), (3), (4) mesele korrekt goýlan meseledir, ýagny bu meseläniň çözüwi başlangyç şerte, çäk şerte we $F(x, y, z, t)$ funksiýa üznüksiz baglydyr. Şol sebäpli biziň φ_1, f_1 funksiýalar barada eden çäklendirmelerimiz ýerliklidir diýmek bolar. φ_1, f_1 funksiýalar ýokarda berlen görnüşlerde hasap edip, (11), (12), (13) meseläniň çözüwini

$$V = \sum_{m,n,k=1}^{s} V_{m,n,k}(t) \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \sin\frac{k\pi}{c}z \tag{14}$$

görnüşde gözläliň. Çözüwiň (14) deňlik bilen berlen bahasyny (10) deňlemede ýerine goýup, alarys:

$$\sum_{m,n,k=1}^{s} \left\{ V'_{m,n,k}(t) + a^2\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2\right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot V_{m,n,k}(t) - B_{m,n,k}(t) \right\} \cdot \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \sin\frac{k\pi}{c}z \equiv 0.$$

Bu ýerden, ýaýyň içindäki koeffisiýentleri nola deňläp,

$$V'_{m,n,k}(t) + a^2\pi^2\left[\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right] \cdot V_{m,n,k}(t) - B_{m,n,k}(t) = 0,$$

$$m = \overline{1,s},\ n = \overline{1,s},\ k = \overline{1,s},$$

deňlemeler ulgamyna geleris. (14) deňlik bilen gözlenýän $V(x, y, z, t)$ funksiýa (13) şerti kanagatlandyrýar. Onuň (12) şerti kanagatlandyrmagy üçin

$$V_{m,n,k}(0) = A_{m,n,k}, \quad m = \overline{1,s}, \;\; n = \overline{1,s}, \;\; k = \overline{1,s},$$

şertleriň ýerine ýetmegi ýeterlikdir.

Diýmek, (11), (12), (13) meseläni doly çözmek üçin,

$$V'_{m,n,k}(t) + a^2\pi^2\left[\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right]\cdot V_{m,n,k}(t) - B_{m,n,k}(t) = 0,$$

$$V_{m,n,k}(0) = A_{m,n,k}, \quad m = \overline{1,s}, \;\; n = \overline{1,s}, \;\; k = \overline{1,s},$$

meseleleri çözmek ýeterlikdir. Belli bolşy ýaly, bu deňlemeleriň çözüwleri

$$V_{m,n,k}(t) = e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\left[A_{m,n,k} + \int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right],$$
$$m = \overline{1,s}, \;\; n = \overline{1,s}, \;\; k = \overline{1,s},$$

görnüşde bolar. Şeýlelikde, (11), (12), (13) meseläniň çözüwi

$$V(x,y,z,t) = \sum_{m,n,k=1}^{s} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\left[A_{m,n,k} + \int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}dt\right]\cdot$$
$$\cdot \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\frac{n\pi}{b}y \cdot \sin\frac{k\pi}{c}z \tag{15}$$

formula arkaly kesgitlener (2), (3), (4) meseläniň çözüwi bolsa, ýokarda aýdylyşyna görä,

$$T(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) + R(x, y, z, t) \tag{16}$$

formula arkaly kesgitlener. Biziň şertlerimizde alnan çözüwiň takyklygy s-e baglydyr. Ol näçe uly bolsa, çözüw şonça-da takykdyr diýmek bolar. Matematiki model çözüldi. Indi (16) çözüw boýunça, s sany saýlap almak bilen, jisimiň islendik nokadynyň islendik wagtdaky temperaturasyny gerek takyklykda tapyp bileris. Goýlan fiziki mesele doly çözüldi diýmek bolar.

(15) formuladan birnäçe netije çykaryp bolar. Formulany

$$T(x,y,z,t) = \sum_{m,n,k=1}^{s} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} A_{m,n,k} + R(x,y,z,t) + \\ + \sum_{m,n,k=1}^{s} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} \int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} dt \tag{16.1}$$

görnüşde ýazalyň. $R(x, y, z, t)$ funksiýa temperaturanyň ýaýlanyň çägindäki bahalary bilen kesgitlenýär, $B_{m,n,k}(t)$ koeffisiýentler jisimiň içindäki ýylylyk akymynyň çeşmesiniň paýlanyş dykyzlygy we temperaturanyň çäkdäki bahalary bilen ($R(x, y, z, t)$ finksiýa bilen) kesgitlenýär, $A_{m,n,k}$ koeffisiýentler bolsa temperaturanyň başlangyç wagtdaky bahalary bilen kesgitlenýär. Formuladan görnüşi ýaly, onuň sag bölegindäki birinji agza wagtyň geçmegi bilen nola ymtylýar, ýagny wagtyň geçmegi bilen temperaturanyň paýlanyşyna başlangyç şertiň täsiri azalýar. Diňe ýylylyk çeşmesiniň hem-de gyra şertleriniň täsiri saklanýar.

Eger $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt$ integrallar ýygnanýan bolsa, onda $M > 0$ san tapylyp, m, n, k sanlaryň s-den uly bolmadyk bahalary üçin $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt \le M$ deňsizlikler ýerine ýeter we $\forall\varepsilon > 0$ san üçin t_0 san tapylyp, m, n, k sanlaryň s-deň uly bolmadyk bahalary üçin $\int_{t_0}^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt \le \varepsilon$ deňsizlikler ýerlikli bolar.

Onda, $t > t_0$ üçin

$$\left| e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} \int_0^t B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} dt \right| \le \\ \le \left| e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} \int_0^{t_0} B_{m,n,k}(t)\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} dt \right| + \\ + \left| e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} \int_{t_0}^t B_{m,n,k}(t) e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t} dt \right| \le \\ \le M\cdot e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t}\cdot e^{a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}\right)\cdot t_0} + \varepsilon$$

deňsizlik ýerlikli bolar. Diýmek, (16.1) formulada, $t \to \infty$ halda üçünji agza hem nola ymtylar. Bu bolsa, ýokardaky çäklendirmelerde, t-niň uly bahalarynda temperaturanyň paýlanyşyna ýylylyk çeşmesiniň hem täsiriniň azaljakdygyny görkezýär. Diýmek, $\int_0^\infty |B_{m,n,k}(t)|dt$ integrallar ýygnanýan bolanlarynda, wagtyň uly bahalarynda temperaturanyň paýlanyşyna diňe temperaturanyň çäk nokatlardaky bahalary täsir eder.

Aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin, ýönekeýje mysala seredeliň. Goý, (8), (9), (10) meseläni $\varphi_1(t) \equiv C_1$, $\psi(t) \equiv C_2$, $0 \le t < \infty$, C_1, C_2 – hemişelik sanlar, $\varphi(x) \equiv C_3$, $0 \le x \le l$, C_3 – hemişelik san, $f(x,t) = \dfrac{x(l-x)}{e^t}$, $0 \le x \le l$, $0 \le t < \infty$, bahalarda çözmeli bolsun. Bu mesele üçin

$$R(x,t) + \frac{xC_2}{l} + \frac{(l-x)C_1}{l}, \quad f_1(x,t) = f(x,t), \quad V(x,t) = T(x,t) - R(x,t)$$

bolar we (11), (12), (13) mesele

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{17}$$

$$V(0,t) = V(l,t) = 0, \tag{18}$$

$$V(x,0) = C_3 - \frac{xC_2 + (l-x)C_1}{l} \tag{19}$$

görnüşe geler.

$f(x,t)$ we $V(x,0)$ funksiýalary, olaryň takmyn bahalary bolan,

$$T(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\left(A_m + \int_0^t B_m(t)e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}dt\right)\cdot \sin\frac{m\pi}{l} + \frac{xC_2 + (l-x)C_1}{l}.$$

$$B_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x(l-x)}{e^t}\cdot \sin\frac{m\pi}{l}xdx.$$

bilen çalşyryp, täze

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{17$'$}$$

$$V(0,t) = V(l,t) = 0, \tag{18$'$}$$

$$V(x,0) = C_3 - \frac{xC_2 + (l-x)C_1}{l} \tag{19$'$}$$

meselä seredeliň. Onuň çözüwini

$$V(x,t)=\sum_{m=1}^{s}V_m(t)\sin\frac{m\pi}{l}x \tag{20}$$

görnüşde gözläliň. $V(x,t)$ funksiýanyň (17′), (18′), (19′) meseläniň çözüwi bolmagy üçin, $V_m(t)$ funksiýa

$$\frac{dV_m}{dt}=-\frac{a^2m^2\pi^2}{l^2}V_m+B_m(t), \tag{21}$$

$$V_k(0)=A_m, \quad m=\overline{1,s},$$

meseläniň çözüwi bolmaly bolar. Bu meseläniň çözüwi

$$V_k(t)=e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}\left(A_k+\int_0^t B_m(t)\cdot e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}dt\right)$$

görnüşde bolýar. $V_m(t)$ funksiýalaryň bahalaryny (20) deňlemede ýerine goýup, alarys:

$$V(x,t)=\sum_{m=1}^{s}e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}\left(A_m+\int_0^t B_m(t)\cdot e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}dt\right)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}x.$$

$V(x, t)$ funksiýanyň bu bahasyny $T(x, t) = V(x, t) + R(x, t)$ formulada goýup, $T(x, t)$ temperaturanyň paýlanyş kanunyny taparys:

$$T(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}\left(A_m+\int_0^t B_m(t)e^{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2t}dt\right)\cdot\sin\frac{m\pi}{l}+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}.$$

Bu formuladaky

$$B_m(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{x(l-x)}{e^t}\cdot\sin\frac{m\pi}{l}xdx.$$

integraly hasaplap, alarys:

$$B_m(t)=\frac{2b_m}{l\cdot e^t}, \quad m=\overline{1,s}, \quad b_m-\text{san}.$$

Görnüşi ýaly, $\int_0^\infty|B_k(t)|dt$ integrallar ýygnanýar. Diýmek, $T(x, t)$ temperaturanyň paýlanyşyna t-niň uly bahalarynda diňe C_1, C_2 sanlar täsir ederler. Dogrudan hem, $T(x,t)$ üçin alnan formulada $B_m(t)$ funksiýalaryň bahalaryny goýup we integrallary hasaplap, alarys:

$$T(x,t)=\sum_{m=1}^{s} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}+$$

$$+\left(A_m+\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{1}{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1}\cdot e^{\left[\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1\right]t}-\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{1}{\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{am\pi}{l}x+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}$$

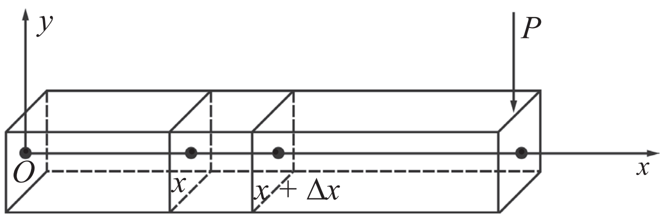
ýa-da

$$T(x,t)=\left[\sum_{m=1}^{s} e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\left(A_m-\frac{2b_m}{l}\cdot\frac{l^2}{(am\pi)^2-l^2}\right)+\sum_{m=1}^{s}\frac{2b_m l^2}{(am\pi)^2-l^2}e^{-t}\right]\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{am\pi}{l}x+\frac{xC_2+(l-x)C_1}{l}.$$

$\lim\limits_{t\to\infty}T(x,t)=\dfrac{xC_2+(l-x)C_1}{l}$ bolany sebäpli, bu ýerden ýokardaky tassyklama gös-göni gelip çykar.

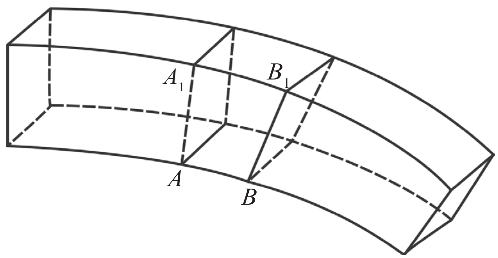
20. PÜRSÜŇ OKUNYŇ EGILMESINIŇ DEŇLEMESI



45-nji surat

Gönüburçly prizma görnüşli pürsüň bir çeti diwara pugta berkidilen, beýleki, erkin çetine bolsa, ýokardan aşak ugrukdyrylan P güýç täsir edýär diýeliň. P güýjüň täsir edýän M nokady pürsüň okunyň ýokarsynda ýerleşen diýeliň. Pürs şol güýjüň täsiri astynda egilýär we belli bir halda deňagramlylykda bolýar. Şonuň bilen birlikde, pürsüň oky hem egilýär. Okuň egilendäki deňlemesini meseläniň matematiki modelini gurmak bilen tapalyň.

Goý, Ox oky pürsüň oky bilen gabat gelsin, Oy oky bolsa pürsüň ýokarky granyna perpendikulýar geçsin. P güýjüň täsiri astynda pürs 46-njy suratdaky ýagdaýa geldi diýeliň. Başlangyç halda pürsüň okunyň x we $x + \Delta x$ nokatlaryndan geçýän kese kesikleriniň arasynda ýerleşen bölegi, soňky halda täze ýagdaýa geçer. Bernulliniň gipotezasyna görä, kese kesikler soňky halda hem tekiz görnüşde bolýarlar. Egilme örän kiçi bolany sebäpli, kese kesikleriň taraplarynyň başlangyç haldaky uzynlyklarynyň otnositel ulalmasy (ýa-da kiçelmesi) örän kiçi bolýar diýip kabul edeliň. Pürsüň egilmesiniň xOy tekizlige görä simmetrik bolany üçin, pürsüň şol tekizlik bilen kesişmesiniň egilmesini öwrenmek ýeterlikdir (*45-nji surat*).



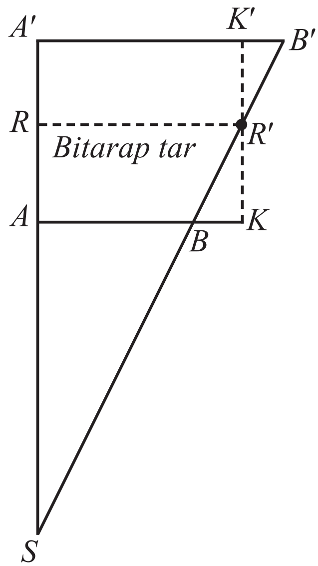
46-njy surat

Ilkibaşda bu kesik gönüburçluk emele getirýär. Düşnüklilik üçin, ol Ox oka parallel tarlardan durýar hasap edeliň. P güýjüň täsiri astynda, bu kesik täze ýagdaýa geler. Onuň bir tarynyň uzynlygy üýtgemän galar [11] (ony «bitarap» tar diýip atlandyralyň), ondan ýokarda ýerleşen tarlary süýner, aşakda ýerleşen tarlary bolsa gysgalar.

Egilmäniň kiçi bolýanlygy sebäpli, 46-njy suratdaky AB we $A'B'$ dugalary parallel göni çyzyklar hasap edip bileris. Onda, pürsüň xOy tekizlik boýunça kesiginiň x we $x + \Delta x$ nokatlar arasyndaky böleginiň soňky ýagdaýyny, 47-nji suratdaky ýaly edip çyzyp bileris.

AA' we BB' gönüleriň kesişme nokady (47-nji suratdaky S nokat) $A'B'$ duganyň egrilik merkezi bolar. SA' bolsa şol duganyň egrilik radiusy bolar. Tarlar AB we $A'B'$ aralykda meňzeş ýerleşýärler hasap edip, S nokat RR' bitarap duganyň hem egrilik merkezi, SR bolsa onuň egrilik radiusy diýse bolar. $\Delta R'K'B'$ we $\Delta SRR'$ üçburçluklar meňzeş. Şol sebäpden, aşakdaky deňlik dogry bolar:

$$\frac{K'B'}{RR'} = \frac{K'R'}{SR}.$$



47-nji surat

$SR = \rho$ – bitarap taryň egrilik radiusy. $K'R' = u$, $RR' = \Delta x$ belgilemeleri ulanyp, soňky deňligi başgaça-da ýazyp bolar:

$$\frac{K'B'}{\Delta x} = \frac{u}{\rho}.$$

Δx – taryň bölejiginiň başdaky uzynlygy, $K'B'$ bolsa onuň egilmeden soňky uzalmasy. $\varepsilon = \dfrac{K'B'}{\Delta x}$ gatnaşyga taryň otnositel uzalmasy diýýärler. Gukuň kanunyna görä, σ – normal dartgynlyk, ε – otnositel uzalma we E özara

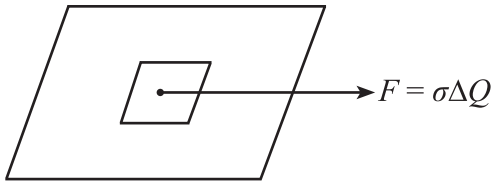
$$\sigma = E\varepsilon$$

baglylykda bolýarlar. P güýjüň täsiri astynda pürsüň islendik kese kesiginde tarlary süýndürýän (ýa-da gysýan) kese kesige normal içki güýçler emele gelýär. Kese kesigiň ΔQ meýdanyna täsir edýän içki F güýç, kesgitlemä görä,

$$F = \sigma \cdot dQ$$

formula bilen kesgitlenýär (*48-nji surat*).

Kese kesikdäki bitarap tarlaryň nokatlary ok emele getirýärler. Oňa bitarap ok diýýärler. Şol okdan ýokardaky tarlar P güýjüň täsiri astynda süýnýärler, aşakdakylar bolsa ýygrylýarlar. Şol sebäpli, bitarap okdan ýokarda täsir edýän içki güýçler bir tarapa, aşakda täsir edýän içki güýçler bolsa ters tarapa ugrukdyrylandyr (*49-njy surat*).

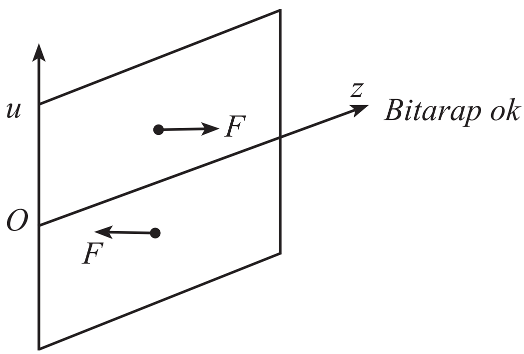


48-nji surat

F içki güýçleriň bitarap oka görä momentleriniň jemini M_z bilen belgileýärler we oňa egilme momenti diýip at berýärler. Eger kese kesikde zOu koordinata oklaryny ýerleşdirsek (*49-njy surat*), onda M_z üçin

$$M_z = \iint_Q u\sigma dQ$$

formulany alarys. Bu ýerde Q – kese kesik. $\sigma = E\varepsilon$, $\varepsilon = \dfrac{u}{\rho}$ deňlikleri ulanyp,



49-njy surat

$$M_z = \iint_Q u^2 \frac{E}{\rho} dQ = \frac{E}{\rho} \iint_Q u^2 dQ = \frac{EI_z}{\rho}$$

deňligi alarys. Bu ýerde $I_z = \iint\limits_Q u^2 dQ$ – Q kese kesigiň bitarap ok boýunça inersiýa momenti. Indi M_z egilme momentini başgaça tapalyň.

Goý, pürs P güýjüň täsiri astynda deňagramlylyk ýagdaýynda bolsun (*46-njy surat*). Onuň islendik kese kesigine garalyň. Pürsüň kese kesikden sag böleginiň onuň çep bölegine bolan täsirini şol kese kesikde dörän içki güýçler bilen çalşyralyň. Ol içki güýçleriň şol kesigiň bitarap okuna görä momentleriniň jemi, ýokarda aýdylanlara görä, M_z deň. Pürsüň kese kesiginden çepdäki bölegi hem oňa täsir edýän daşky güýçleriň (reaksiýa, agyrlyk we ş.m.) we kesikde dörän içki güýçleriň täsiri astynda deňagramlylykda bolýar.

Beýleki tarapdan, tutuş pürs hem oňa täsir edýän daşky güýçleriň täsiri astynda deňagramlylykda bolýar. Diýmek, pürsüň kese kesikden çep bölegine täsir edýän daşky güýçler, onuň kese kesikden sag bölegine täsir edýän daşky güýçler bilen bilelikde deňagramlylykda bolýarlar. Şol sebäpli, kese kesigiň bitarap okuna görä **içki güýçleriň M_z momenti, şol oka görä pürsüň kese kesikden sagda ýatýan bölegine täsir edýän daşky güýçleriň momentine deň bolýar.** Indi biz pürsüň okunyň deňlemesini ýazmaga taýýar.

Pürsüň okunyň deňlemesi $y = y(x)$ bolsun. Ýokarda görşümiz ýaly, okuň islendik nokadynda geçirilen kese kesik üçin

$$M_z = \frac{EI_z}{\rho}$$

deňlik dogry. Bu ýerde ρ – okuň şol nokatdaky egrilik radiusy. Matematiki analizden belli bolşy ýaly,

$$\rho^{-1} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

formula bar. Egilme kiçi bolany sebäpli, y'^2 örän kiçi ululyk bolýar we ony taşlap, uly takyklykda

$$\rho^{-1} = |y''|$$

formulany alarys.

Şeýlelikde, $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$ we $\rho^{-1} = |y''|$ deňlikleriň esasynda, $y(x)$ egriniň güberçek bolýandygyny göz öňünde tutup, ok üçin

$$-y'' = \frac{M_z}{EI_z}$$

deňlemäni alarys.

Bu deňleme pürsüň okunyň ýagdaýyny kesgitleýän $y = y(x)$ funksiýa üçin differensial deňlemedir. Pürsüň okunyň $(x, y(x))$ nokadyndan geçýän kese kesigi üçin M_z egrilik momentini, pürs agramsyz hasap edip, pürsüň kese kesikden sag bölegine täsir edýän P güýjüň kesigiň bitarap okuna görä momenti bilen çalşyryp bolýar:

$$M_z = P(l - x).$$

Ok üçin bolsa

$$y'' + \frac{P(l-x)}{EI_z} = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemäni çözüp,

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EI_z} + C_1 x + C_2$$

alarys. $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ bolanlygy sebäpli,

$$0 = -\frac{P \cdot l^3}{6EI_z} + C_2, \qquad 0 = \frac{P \cdot l^2}{2EI_z} + C_1$$

ýa-da

$$C_1 = -\frac{P \cdot l^2}{2EI_z}, \qquad C_2 = \frac{P \cdot l^3}{6EI_z}$$

bolar. Ahyrda pürsüň okunyň deňlemesini

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EI_z} - \frac{P \cdot l^2}{2EI_z}x + \frac{P \cdot l^3}{6EI_z}$$

görnüşde ýa-da

$$y = \frac{P}{2EI_z}\left[-\frac{(l-x)^3}{3} - l^2 x + \frac{l^3}{3}\right],$$

$$y = \frac{P}{2EI_z}\left[\frac{x}{3}(l^2 + l(l-x) + (l-x)^2) - l^2 x\right],$$

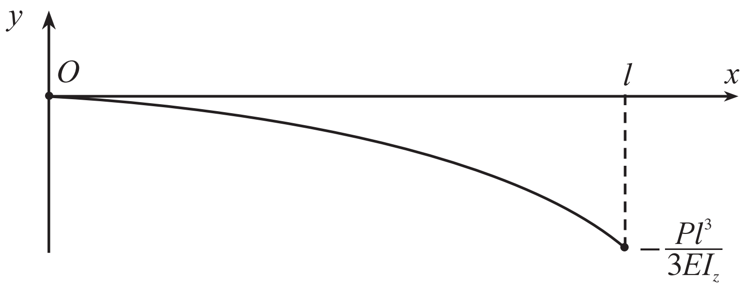
$$y = \frac{Px}{6EI_z}[l(l-x) + (l-x)^2 - 2l^2],$$

$$y = \frac{Px}{6EI_z}[x^2 - 3lx], \quad y = \frac{Px^2}{6EI_z}(x - 3l)$$

ýönekeý görnüşde ýazyp bileris.

$$y' = \frac{P(l-x)^2}{2EI_z} - \frac{P \cdot l^2}{2EI_z} = \frac{P}{2EI_z}[(l-x)^2 - l^2]$$

önümiň we y'' önümiň $(0, l)$ aralykda otrisatel bolany üçin, $y(x)$ funksiýa $(0, l)$ aralykda otrisatel, monoton kemelýän we onuň grafigi güberçek bolýar. $y(x)$ funksiýanyň takmyn grafigi 50-nji suratda getirilen.



50-nji surat

Goý, indi kese kesigi Q bolan gönüburçly prizma görnüşli pürsüň dykyzlygy $\rho = \rho(x)$ bolsun. Onda pürsüň seredilýän kese kesikden sagda ýerleşen bölegine, P güýçden başga, pürsüň sag böleginiň agramy hem täsir eder. Pürsüň sag böleginiň agyrlyk merkezini tapalyň. Pürs öz okuna görä simmetrik bolany üçin, agyrlyk merkezi ol okuň, ýagny Ox okunyň üstünde ýatar. Diýmek, xOy tekizlikde onuň koordinatalary $x = x_c$, $y = 0$ bolar. x_c bolsa, belli bolşy ýaly,

$$x_c = \frac{1}{\int_x^l Q\rho dx}\int_x^l xQ\rho dx = \frac{\int_x^l x\rho dx}{\int_x^l \rho dx}$$

formula boýunça tapylýar. Indi biz, pürsüň sag bölegine täsir edýän güýçleriň biri hökmünde, P güýje parallel, $(x_c, 0)$ nokatda täsir edýän $P_1 = gQ\int_x^l \rho dx$ güýji alyp bileris. Bu halda, kese kesikdäki egiji M_z moment P we P_1 güýçleriň kesigiň bitarap okuna görä momentleriniň jemine deň bolar:

$$M_z = P(l-x) + P_1(x_c - x).$$

Pürsüň oky üçin deňleme

$$y'' + \frac{P(l-x) + P_1(x_c - x)}{EI_z} = 0 \qquad (\alpha)$$

görnüşde bolar. $\rho = \rho_0$ ýagdaýda

$$P_1 = gQ\rho_0(l-x), \qquad x_c = \frac{l+x}{2}$$

deňlikleri alarys we (α) deňlemäni

$$y'' + \frac{P(l-x) + \frac{1}{2}gQ\rho_0(l-x)^2}{EI_z} = 0 \qquad (\beta)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu deňlemäni çözüp, pürsüň oky üçin

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EI_z} - \frac{gQ\rho_0}{EI_z} \cdot \frac{(l-x)^4}{24} + C_1 x + C_2$$

formulany alarys. Indi $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ bolýandygyny göz öňünde tutup,

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EI_z} - \frac{gQ\rho_0(l-x)^4}{24EI_z} - x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z} + \frac{gQ\rho_0}{EI_z} \cdot \frac{l^3}{6}\right) +$$

$$+ \frac{Pl^3}{6EI_z} + \frac{gQ\rho_0}{EI_z} \cdot \frac{l^4}{24}$$

ýa-da

$$y = -\frac{(l-x)^3}{6EI_z}\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right) - \frac{l^3}{6EI_z}\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right) -$$

$$-x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z} - \frac{gQ\rho_0 l^3}{24EI_z} + \frac{gQ\rho_0 l^3}{6EI_z}\right),$$

ýa-da

$$y = \left[-\frac{(l-x)^3}{6EI_z} + \frac{l^3}{6EI_z}\right]\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right) - x\left(\frac{Pl^2}{2EI_z} + \frac{gQ\rho_0 l^3}{8EI_z}\right),$$

ýa-da

$$y = \left[\frac{l^3}{6EI_z} - \frac{(l-x)^3}{6EI_z}\right]\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right) - \frac{xl^2}{2EI_z}\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4} l\right),$$

ýa-da

$$y = \left[\frac{l^3}{6EI_z} - \frac{(l-x)^3}{6EI_z} - \frac{xl^2}{2EI_z}\right]\left(P + \frac{gQ\rho_0}{4}(l-x)\right) - \frac{x^2 l^2}{8EI_z} gQ\rho_0$$

formulany alarys. Bu ýerde hem $y'(x) \le 0$, $y''(x) \le 0$ bolany sebäpli, $y(x)$ funksiýanyň grafigi 50-nji suratdaky ýaly bolar.

Indi, bir çeti $x = 0$, beýleki çeti $x = l$ tekizliklerde berkidilen gönüburçly prizma görnüşli pürsüň diňe öz agramynyň täsiri astyndaky egilmesini öwreneliň (*51-nji surat*).

51-nji surat

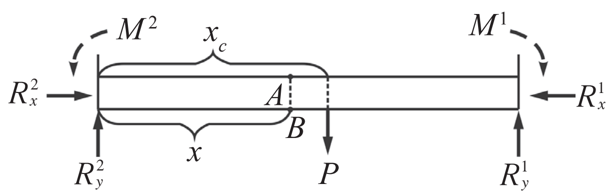
Pürsüň dykyzlygyny $\rho(x)$ (ýagny pürsüň dykyzlygy diňe uzynlygy boýunça üýtgeýär hasap edilýär), kese kesiginiň meýdanyny Q bilen belgiläp, onuň okunyň deňlemesini ýazmaklyga girişeliň. Pürse täsir edýän güýçler we momentler 52-nji suratdaky ýaly bolar.

Pürs deňagramlylykda hasap edip, statikanyň deňlemelerini ýazalyň:

$$R_y^2 + R_y^1 - P = 0,$$

$$R_x^2 - R_x^1 = 0,$$

$$-M^2 + Px_c - lR_y^1 + M^1 = 0.$$



$$x_c = \frac{1}{m}\int_0^l x\rho Q dx, \quad P = \int_0^l \rho(x) gQ dx, \quad m = \int_0^l \rho(x) Q dx.$$

52-nji surat

Pürsüň x nokatda geçirilen AB kese kesigindäki egiji M_z momenti kesgitläliň (*52-nji surat*):

$$M_z = R_y^2 x - M^2 - P_1(x - x_{c_1}),$$

bu ýerde

$$P_1 = \int_0^x Q\rho g dx, \quad m_1 = \int_0^x Q\rho dx, \quad x_{c_1} = \frac{1}{m_1}\int_0^x x\rho Q dx.$$

Pürsüň orta çyzygy üçin deňlemede M_z-iň bahasyny goýup we iki gezek integrirläp, alarys:

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x M_z \cdot \frac{1}{EI_z} dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

$y(x)$ funksiýa, şerte görä, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$, $y'(l) = 0$ deňlikleri kanagatlandyrmaly bolar. Olaryň birinji ikisinden $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ gelip çykýar we $y(x)$

$$y = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{1}{EI_z} (R_y^2 x - M^2 - P_1(x - x_{c_1})) dx \right) dx$$

görnüşi alar. Üçünji we dördünji şertleri ulanyp, alarys:

$$\frac{R_y^2}{6EI_z} l^3 - \frac{M^2}{2EI_z} l^2 - \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx = 0,$$

$$\frac{R_y^2}{2EI_z} l^2 - \frac{M^2 l}{EI_z} - \frac{1}{EI_z} \int_0^l P_1(x - x_{c_1}) dx = 0.$$

Bu ýerden näbelli M^2 moment we R_y^2 reaktiw güýç tapylýar –

$$M^2 = \frac{2}{l} \int_0^l P_1(x - x_{c_1}) dx - \frac{6}{l^2} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx,$$

$$R_y^2 = \frac{6}{l^2} \int_0^l P_1(x - x_{c_1}) dx - \frac{12}{l^3} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx$$

we $y(x)$ aşakdaky görnüşe geler:

$$y(x) = \left[\frac{6}{l^2} \int_0^l P_1(x - x_{c_1}) dx - \frac{12}{l^3} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx \right] \frac{x^3}{6EI_z} -$$

$$- \left[\frac{2}{l} \int_0^l P_1(x - x_{c_1}) dx - \frac{6}{l^2} \int_0^l \left(\int_0^x P_1(x - x_{c_1}) dx \right) dx \right] \frac{x^2}{2EI_z} -$$

$$-\frac{1}{EI_z}\int_0^x\left(\int_0^x P_1(x-x_{c_1})dx\right)dx.$$

Pürs birjynsly bolan halynda, ýagny $\rho(x)=\rho_0$ – hemişelik bolanda, $y(x)$ has ýönekeý görnüşe gelýär. Bu ýagdaýda $P_1 = Q\rho_0 gx$, $m_1 = Q\rho_0 x$, $x_{c_1}=\frac{x}{2}$ bolar we

$$M^2=\frac{2}{l}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^3}{6}-\frac{6}{l^2}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^4}{24}=\frac{1}{12}Q\rho_0 gl^2,$$

$$R_y^2=\frac{6}{l^2}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^3}{6}-\frac{12}{l^3}Q\rho_0 g\cdot\frac{l^4}{24}=\frac{1}{2}Q\rho_0 gl,$$

$$\int_0^x\left(\int_0^x P_1(x-x_{c_1})dx\right)dx=Q\rho_0 g\cdot\frac{x^4}{24}$$

bahalary alarys. Bu bahalary ulanyp, $y(x)$ üçin

$$y(x)=\frac{1}{2}Q\rho_0 gl\cdot\frac{x^3}{6EI_z}-\frac{1}{12}Q\rho_0 gl^2\cdot\frac{x^2}{2EI_z}-\frac{1}{EI_z}\cdot Q\rho_0 g\cdot\frac{x^4}{24}$$

ýa-da

$$y(x)=-\frac{Q\rho_0 g}{24EI_z}x^2(l-x)^2$$

formulany alarys.

21. YKDYSADY MATEMATIKI MODELLER WE OLARYŇ ÇÖZÜLIŞ ÝOLLARY

Biz şu bölümi ykdysadyýet bilen baglanyşdyrsak-da, durmuşda şu hili modellere getirilip çözülýän, ykdysadyýet bilen gös-göni bagly bolmadyk meseleler hem az däldir. Bu hili meseleleriň biri barada soňra gürrüň ederis. Häzir bolsa, ykdysadyýetiň matematiki modele getirilýän meşhur bir meselesine seredeliň.

Önüm öndürmek üçin, kärhanada çig malyň, ukyply hünärmenleriň, önümçilik jaýlarynyň, enjamlaryň we ş.m. bar bolmagy zerurdyr. Elbetde, önümçilik kärhana üçin amatly bolmalydyr. Bu esasy mesele. Ondan başga-da, şol bir serişdeler harç edilende, dürli tehnologiýalary ulanmak arkaly girdejini ýokarlandyrmaklyk meseläniň özeni bolup durýar. Ine, şu meseläni çözmek üçin, matematikanyň usullaryny ulanmak mümkinçiligi bar.

Goý, kärhanada şol bir önüm s sany dürli tehnologiýalaryň kömegi we m sany dürli serişdäni ulanmak bilen öndürilýän bolsun. a_{ij} arkaly i-nji tehnologiýa ulanylanda wagt birliginde j-nji serişdäniň harç edilen mukdaryny belgiläliň, b_j – j-nji serişdäniň umumy mukdary, x_i – i-nji tehnologiýanyň ulanylýan umumy wagty bolsun. Onda $\sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i \le b_j,\ j=\overline{1,m}$ deňsizlikler ýerine ýetmeli bolar. Bu ýerde, manysyna görä, $x_i,\ i=\overline{1,s}$ – otrisatel däl sanlar. Eger indi c_j bilen j-nji tehnologiýa ulanylanda önümiň wagt birliginde öndürilýän mukdaryny belgilesek, onda

$$I = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_sx_s \tag{1}$$

funksiýa kärhanada bir tapgyrda öndürilen önümiň mukdaryny aňladar. Elbetde, ol mukdar näçe uly bolsa, kärhana üçin şonçada amatlydyr. Bu amatlylygy matematiki dilde aňladyp bolýar. $b_j - \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\cdot x_i = x_{s+j},\quad s+m=n$ belgilemeleri girizip,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = b_j, \quad 1 \le j \le m, \tag{2}$$

täze ulgam düzeliň. Bu ýerde, j-nji deňlemede,

$$a_{(s+j)j} = 1, \quad a_{(s+k)j} = 0, \quad 1 \le k \le m, \quad k \ne j.$$

(2) ulgamyň $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwine meýilnama diýýärler. Bu meýilnama n ölçegli R_n giňişligiň nokady hökmünde garasak, onda ähli meýilnamalaryň köplügi şol giňişlikde D köplügi emele getirýär. Indi ýokarda agzalan amatlylygy şeýle beýan etmek bolar:

***I* funksiýanyň *D* köplükdäki iň uly bahasyny kabul edýän nokadyny tapmaly.**

Başgaça aýdylanda, mümkin bolan meýilnamalaryň içinden, I funksiýanyň iň uly baha eýe bolýanyny saýlap almaly. I funksiýa maksat funksiýasy diýýärler. Maksat funksiýasynyň iň uly baha eýe bolýan meýilnamasyna optimal meýilnama diýýärler. (2) ulgam çyzykly we I funksiýa hem çyzykly bolany sebäpli, optimal meýilnamany tapmak meselesine çyzykly programmirleme meselesi diýilýär.

$M(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ R_n giňişligiň iki nokady bolsun. $Q(x_1\alpha+(1-\alpha)y_1, x_2\alpha+(1-\alpha)y_2, ..., x_n\alpha+(1-\alpha)y_n), 0 \le \alpha \le 1$, nokatlaryň köplügine M we N nokatlary birikdirýän kesim diýýärler. Eger käbir köplük, özüniň islendik iki nokady bilen bilelikde, olary birikdirýän kesimi hem öz içinde saklaýan bolsa, onda oňa güberçek köplük diýýärler. D köplük güberçek köplükdir. Dogrydan-da, goý, $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ nokatlar D köplügiň $(x_1, x_2, ..., x_n)$ we $(y_1, y_2, ..., y_n)$ meýilnamalara degişli nokatlary bolsun. Bize islendik $0 \le \alpha \le 1$ üçin Q nokadyň koordinatalarynyň meýilnama emele getirýändigini görkezmek gerek. $x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \; y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}$ bolany üçin $x_i\alpha + (1-\alpha)y_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$ boljakdygy düşnüklidir. Indi Q nokadyň koordinatalarynyň (2) ulgamy kanagatlandyrýandygyny görkezeliň:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x_i\alpha + (1-\alpha)y_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i =$$

$$= \alpha b_j + (1-\alpha)b_j = b_j.$$

Diýmek, islendik α üçin Q nokadyň koordinatalarynyň meýilnama emele getirýändigi dogry bolýar.

Eger D köplüge degişli $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokat, şol köplüge degişli başga iki nokady birikdirýän kesimleriň hiç birinde ýatmaýan bolsa, onda S nokada D köplügiň depesi diýýärler. D köplük tükenikli sandaky depesi bolan köpburçlukdyr. D köplük çäkli bolanda, onuň depeleriniň iň bolmanda biriniň optimal meýilnama bolýandygyny görkezeliň.

D çäkli bolany sebäpli, käbir $R > 0$ san tapylyp, D köplük merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly sferanyň içinde ýatar. h_0 ýeterlik uly položitel san bolanda, $I = h_0$ tekizlik sferanyň daşynda ýatar. Diýmek, D köplügiň nokatlary $I < h_0$ deňsizligi kanagatlandyrarlar. Şol sebäpli, $h = h_{max}$, $0 < h_{max} < h_0$ san tapylyp, $I = h_{max}$ tekizlik D köplügi käbir K köplük boýunça keser. $h > h_{max}$ halda bolsa, $I = h$ tekizlik D ýaýlany kesmez. Diýmek, I funksiýanyň D ýaýladaky iň uly bahasy $h = h_{max}$ bolar. I maksat funksiýasy K köplügiň islendik nokadynda şol baha eýe bolar. Indi bize K köplügiň nokatlarynyň iň bolmanda biriniň D köplügiň depesi bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir.

K çäkli we güberçek köplük. Bu ýagdaý D köplügiň çäklidiginden we güberçek bolýandygyndan gelip çykýar. K köplügiň depesi bar bolsa, onda ol nokat D köplügiň hem depesi bolar. K köplügiň depesiniň barlygyny induksiýa boýunça subut edip bolýar. K köplük

$n-1$ ölçegli $I = h_{max}$ tekizlikde ýerleşýär. Şol tekizlikde ýatýan, $n-2$ ölçegli tekizlik alyp we ony parallel süýşürmek bilen, K üçin, edil ýokarda edilişi ýaly, K_1 köplük gurulýar. Eger K_1 köplük bir nokatdan durmaýan bolsa, onda K_1 üçin hem şu usuly gaýtalap, K_2 köplük alýarlar we ş.m. Birnäçe ädimden soň, biz bir M_0 nokatdan durýan K_0 köplüge geleris. Elbetde, M_0 nokat K_0 köplügiň depesi bolar. Onda, ýokarda aýdylanlara laýyklykda, M_0 nokat K köplügiň hem depesi bolar. Şeýlelikde, aşakdaky lemma dogry bolýar.

Lemma 1. Eger D çäkli bolsa, onda I funksiýa D köplügiň depeleriniň birinde maksimal baha eýe bolar.

Goý, $I(x)$ funksiýa D köplükde ýokardan çäkli bolsun. Eger D köplük çäkli bolsa, onda Lemma-1-e görä, $I(x)$ maksimal baha D köplügiň depeleriniň birinde eýe bolýar. Goý, D köplük çäksiz bolsun. Onda käbir $I_0 > 0$ san üçin $I(x) \geq I_0$ köplük D köplük bilen kesişmez. Lemma-1-iň subut edilişini gaýtalap, aşakdaky lemma geleris.

Lemma 2. Eger D köplükde $I(x)$ funksiýa ýokarsyndan çäkli bolsa, onda $I(x)$ özüniň D köplükdäki iň uly bahasyna D köplügiň depeleriniň birinde eýe bolar.

Şol depäni $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bilen belgiläliň. Onda, kesgitlemä görä, $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ optimal meýilnama bolar. Esasy mesele şu meýilnamany tapmakdan durýar. Optimal meýilnamany tapmaklygyň dürli ýollary bar. Olaryň esasysyna simpleks usul diýilýär. Bu usul, esasan, D ýaýla çäkli bolanda ulanylýar. D ýaýlanyň çäkli bolmadyk halynda maksat funksiýasynyň D ýaýlada çäkli bolýandygyny anyklamak möhüm meseleleriň biridir. Bu meseläni çözmäge girişeliň. Amatlylyk üçin, D köplügiň $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokadyny $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ wektor görnüşinde ýazmagy kabul edeliň. $\vec{x} \geq 0$ belgi bilen koordinatalary otrisatel däl wektory belgiläliň.

(2) ulgamda islendi $n-m$ näbellini nola deňläp, kelteldilen ulgamlaryň C_n^{n-m} sanysyny alarys. Olaryň içinden, diňe bir otrisatel däl çözüwi bar bolan, başga hiç hili çözüwi bolmadyk ulgamlaryň çözüwleriniň toplumyny Q_0 bilen belgiläliň. Umuman, (2) ulgamda islendik $n-m+i$, $0 \leq i \leq m-1$ näbellini nola deňläp, kelteldilen ulgamlaryň C_n^{n-m+i} sanysyny alarys. Olaryň içinden diňe bir otrisatel däl çözüwi bar bolan we başga hiç hili çözüwi bolmadyklarynyň

çözüwlerinden Q_i köplük düzeliň. Maksat funksiýasynyň $Q = \sum_{i=0}^{m-1} Q_i$ köplügiň nokatlarynyň birinde maksimal baha eýe bolýandygyny görkezeliň. Bir zady bellemek zerur. Eger kelteldilen ulgam x_1, x_2, ..., x_s näbellileri nola deňlemek arkaly alnan bolsa, onda biz onuň çözüwi diýip $\vec{x}(0, 0, 0..., 0, x_{s+1}^0, ..., x_n^0)$ wektora aýtjakdyrys. Bu ýerde $(x_{s+1}^0, x_{s+2}^0, ..., x_n^0)$ – kelteldilen ulgamyň çözüwi.

Goý, $I(\vec{x})$ maksat funksiýasy D ýaýlanyň $\vec{x}_0 \geq 0$ nokadynda maksimal baha eýe bolýan bolsun we $\vec{x}_0$ wektoryň hemme koordinatalary položitel sanlar bolsun. Goý, $\vec{x}_1 \in D$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_0$ bolsun. Onda, islendik kiçi t üçin, $\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)$ nokat hem D ýaýla degişli bolar we

$$I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0) + t \cdot (I(\vec{x}_0) - I(\vec{x}_1))$$

deňlik ýerine ýeter. Eger $I(\vec{x}_0) \neq I(\vec{x}_1)$ bolsa, onda t-ni $sign t = sign[I(\vec{x}_0) - I(\vec{x}_1)]$ bolar ýaly saýlap alsak, $I(\vec{x}) > I(\vec{x}_0)$ alarys. Bu bolsa, $\vec{x}_0$ nokatda $I(\vec{x})$ maksimuma eýe bolýar diýen çaklama garşy gelýär. Diýmek, ýa $\vec{x}_0$ wektoryň käbir koordinatalary nola deň bolmaly, ýa-da D ýaýlanyň hemme nokatlarynda $I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0)$ deňlik ýerlikli bolar.

Ikinji halda, S.N.Çernikowyň teoremasyna görä [18], Q köplük boş bolmaz. $Q \subset D$ bolany sebäpli, $I(\vec{x})$ maksat funksiýasy Q köplügiň nokadynda hem maksimuma eýe bolar.

Birinji halda, $\vec{x}_0$ çözüwiň nola deň näbellilerini saklamaýan (2) ulgamyň kelteldilen ulgamyna seredeliň. Bu täze ulgamyň položitel $\vec{x}_0$ çözüwi bar, özi hem şol çözüwde $I(\vec{x})$ maksimal baha eýe bolýar. Eger $\vec{x}_0$ çözüw kelteldilen ulgamyň ýeke-täk çözüwi bolsa, onda $\vec{x}_0 \in Q$ bolar. Eger-de bu ulgamyň başga-da çözüwleri bar bolsa, onda şol çözüwleriň köplüginde $I(\vec{x}) = I(\vec{x}_0)$ bolar. Bu halda, $I(\vec{x})$ hökmany halda Q köplügiň nokatlarynyň birinde $I(\vec{x}_0)$ baha eýe bolar. Şeýlelikde, aşakdaky lemma subut edildi.

Lemma 3. Eger Q köplük boş bolsa, onda D ýaýla hem boş bolýar. Eger Q köplük boş bolmasa, onda $I(\vec{x})$ funksiýa maksimum baha Q köplügiň nokatlarynyň birinde eýe bolýar.

Lemma 4. Goý, (2) ulgamyň $\{\vec{x}_k\}_1^\infty$, $|\vec{x}_k| \to \infty$, $\vec{x}_k \geq 0$, çözüwleriniň yzygiderligi bar bolsun. Eger $\vec{x}_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\}$, $\forall k, \forall s$, üçin $x_k^s \geq \alpha > 0$ bolsa we käbir $1 < s \leq n$ üçin $\{x_k^s\}_{k=1}^\infty$ yzygiderlik monoton, çäkli we $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^s = a$ bolsa, onda

$$\sum_{i=1, i\neq s}^{n} a_{ij} x_i = b_j - a_{is} \cdot a, \quad j = \overrightarrow{1,m}, \tag{3}$$

ulgamyň hem $|\vec{x}'_k| \to \infty$, $\vec{x}_k \geq 0$, $\forall k, s$ üçin $\vec{x}'^s_k \geq \dfrac{a}{2}$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwleriniň $\{\vec{x}'_k\}_1^\infty$ yzygiderligi bardyr.

Subudy. (2) ulgamyň $A = \{a_{ij}\}_m^n$ matrisasynyň s-nji sütünini saklamaýan m tertipli minorlarynyň hemmesi nola deň diýeliň. Onda (2) ulgamyň deňlemelerini utgaşdyrmak bilen onuň bir deňlemesini $\tilde{a}_{ik}^s x^s = \tilde{b}_k$ görnüşe getirip bolar. Eger-de $\tilde{a}_{ik}^s x^s = 0$, $\tilde{b}_k = 0$ bolsa, onda (2) ulgamyň deňlemeleri çyzykly baglanyşykly bolardy. Bu bolsa, (2) ulgam baradaky başdaky çaklama garşy gelerdi. Eger-de $\tilde{a}_{ik}^s \neq 0$ bolsa, onda (2) ulgamyň islendik çözüwiniň s-nji koordinatasy $x^s = \dfrac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{ik}^s} = a$ hemişelik bolardy. Diýmek, $\{\vec{x}_k\}$, $\vec{x}_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\}$ (2) ulgamyň çözüwleri bolsa, onda $\{\vec{x}'_k\}$, $\vec{x}'_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{s-1}, x_k^{s+1}, ..., x_k^n\}$ wektorlar (3) ulgamyň çözüwleri bolardy we lemmanyň tassyklamasynyň dogrulygy gelip çykardy.

Goý, A matrisanyň s-nji sütünini saklamaýan, m tertipli minorlarynyň iň bolmanda biri nola deň däl diýeliň. Diýmek, (3) ulgamyň A' matrisanyň m tertipli minorlarynyň hem iň bolmanda biri nola deň däldir. Indi, (3) ulgamda, şu minora girmeýän sütünlerine degişli näbellileriniň ýerine, $\vec{x}_k$ çözüwiň şol nomerli koordinatalaryny goýsak we ony şol minora degişli sütünleriň näbellilerine görä çözsek, onda $\vec{x}'_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^{s-1}, x_k^{s+1}, ..., x_k^n\}$ wektor bilen (3) ulgamyň alnan çözüwiniň arasyndaky tapawudyň normasyny, k-ny ýeterlik uly almak bilen, islendik sandan, mysal üçin $\dfrac{a}{2}$-den, kiçi edip boljakdygy düşnüklidir. Bu bolsa lemmanyň tassyklamasynyň subudy bolýar.

Teorema. Eger $D \neq \emptyset$ bolsa, onda $I(\vec{x})$ maksat funksiýasynyň D ýaýlanyň nokatlarynda çäksiz bolmagy üçin,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{4}$$

$$I(\vec{x}) = 1 \tag{5}$$

ulgamyň $\vec{x}_0 \geq 0$ çözüwiniň bolmagy zerurdyr we ýeterlikdir.

Ýeterlikliginiň subudy.

Goý, $\vec{x}_1 \in D$ bolsun. Onda islendik $t \geq 0$ üçin $\vec{x}_1 + t \cdot \vec{x}_0 \in D$ we $I(\vec{x}_1 + t \cdot \vec{x}_0) = I(\vec{x}_1) + t \cdot I(\vec{x}_0) = I(\vec{x}_1) + t$ bolar. Teoremanyň şertiniň ýeterlikligi subut edildi.

Zerurlygynyň subudy.

Teoremany matematiki induksiýa usuly boýunça subut edeliň. Goý, näbellileriň sany iki bolsun. Onda (2) ulgam

$$ax + by = c$$

görnüşde, $I(\vec{x})$ funksiýa bolsa $I(\vec{x}) = \alpha x + \beta y$ görnüşde bolar. (4)-(5) ulgam bolsa

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ \alpha x + \beta y = 1 \end{cases}$$

görnüşde bolar.

Soňky ulgamyň otrisatel däl çözüwi ýok diýeliň. Onda, $x = -\frac{b}{a}y$, $I(\vec{x}) = \alpha x + \beta y = \left(-\alpha\frac{b}{a} + \beta\right)y.$ bolýandygy sebäpli, ýa $-\alpha\frac{b}{a} + \beta < 0$, ýa-da $-\alpha\frac{b}{a} + \beta > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ bolar. (2) ulgamy, ýagny $ax + by = c$ deňlemäni çözüp, taparys: $x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$ we $I(\vec{x}) = \alpha x + \beta y = \left(-\alpha\frac{b}{a} + \beta\right)y + \alpha \cdot \frac{c}{a}$. Eger x, y (2) ulgamyň islendik otrisatel däl çözüwi bolsa, onda $x \geq 0$, $y \geq 0$ bolýar we ýa $I(\vec{x}) \leq \alpha \cdot \frac{c}{a}$, ýa-da $I(\vec{x}) \leq \beta \cdot \frac{c}{b}$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny $I(\vec{x})$ çäkli bolýar.

Goý, teorema näbelliniň sany $n-1$ bolanda dogry bolsun. Tersinden subut edeliň. Goý, (2) ulgamyň $\vec{x}_k \geq 0$, $|\vec{x}_k| \to \infty$, we $I(\vec{x}_k) \to \infty$ şertleri kanagatlandyrýan $\{\vec{x}_k\}_1^\infty$ çözüwleriniň yzygiderligi bar bolsun. $\vec{x}_k = \{x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n\}$ çözüwleriň hemme koordinatalary k-nyň ösmegi bilen tükeniksizlige ymtylýan bolsun. Onda k ýeterlik uly bolanda, $\frac{\vec{x}_k - \vec{x}_1}{I(\vec{x}_k - \vec{x}_1)} = \vec{z}_k$ wektor (4) ulgamyň $\vec{z}_k \geq 0$, $I(\vec{z}_k) = 1$ şertleri kanagatlandyrýan çözüwi bolar. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek, käbir $1 \le s \le n$ we $\forall k$ üçin $0 \le x_k^s \le M$ şert ýerine ýetýär. $\{\vec{x}_k\}_1^\infty$ yzygiderligiň $\{\vec{x}_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ bölek yzygiderligini $x_{k_i}^s$ sanlar monoton yzygiderlik bolar ýaly saýlap alyp bolýar. Goý, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}^s = a \ge 0$ bolsun. $A \ge 0$ san alalyň we $y_i = A + x_i$ özgertme girizeliň. Onda (2) ulgam

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = b_j - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) A, \quad j = \overline{1,m}, \tag{6}$$

görnüşe, $I(\vec{x})$ bolsa

$$I(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) A$$

görnüşe geler. Elbetde, $\vec{y}_k = \{x_k^1 + A,\ x_k^2 + A,\ ...,\ x_k^n + A\}$ wektorlar (6) ulgamyň otrisatel däl çözüwleri bolar, özi hem, islendik s we k üçin $x_k^s \ge A$ deňsizlikler ýerlikli bolar. Bu çözüwleriň $\vec{y}_k \ge 0$, $|\vec{y}_k| \to \infty$ we $I(\vec{y}_k) \to \infty$ şertleri kanagatlandyrjakdygy düşnüklidir. Lemma 4-e görä y_s näbellisiniň ýerine 0 goýulyp alnan

$$\sum_{i=1, i\ne s}^{n} a_{ij} y_i = b_j - \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) A - a_{sj} \cdot a \tag{7}$$

ulgamyň hem $\vec{y}_k \ge 0$, $|\vec{y}_k| \to \infty$ we $I(\vec{y}_k) \to \infty$ çözüwleri bolmaly. Emma bu ulgamda näbellileriň sany $n - 1$ we $A = \{a_{ij}\}_1^n$ matrisadan s-nji sütüni taşlanyp alnan A' matrisa üçin hem

$$A'y = 0$$

ulgamyň $I(y)$ maksat funksiýasynda $y_s = 0$ goýulyp alnan, $\tilde{I}(\vec{y}) = 1$ deňligi kanagatlandyrýan otrisatel däl çözüwi ýok. Onda, induksiýa görä, (7) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň köplüginde $\tilde{I}(\vec{y})$ çäkli bolmaly bolar. Bu bolsa ýokarda alnan netijä garşy gelýär. Bu garşylyk teoremanyň dogrulygyny tassyklaýar.

Şeýlelikde, (4)-(5) ulgamyň otrisatel däl çözüwiniň bolmazlygy, (2) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň köplüginde maksat funksiýasynyň çäkli bolmagynyň zerur we ýeterlik şerti bolýar.

Belli bolşy ýaly, simpleks usulyň ulanylmagy üçin maksat funksiýasynyň çäkli bolmagy zerurdyr.

Şol sebäpli, ilki bilen maksat funksiýasynyň çäkliligi anyklanylýar we soňra simpleks usuly ulanylýar. Bu meseläni çözmeklige şeýle çemeleşmek hödürlenilýär: (4)-(5) ulgamyň çözüwiniň barlygyny, ýoklugyny derňemek üçin, ulgamyň $m + 1$ näbelliden başgalaryny nola deňläp, C_n^{m+1} sany, $m + 1$ näbellili, $m + 1$ deňlemeden durýan ulgamlar alynýar. Eger bir ulgamyň otrisatel däl çözüwi bar bolsa, onda derňew tamamlanýar. Eger-de şol ulgamlaryň hiç biriniň otrisatel däl çözüwi bolmasa, onda S.N.Çernikowyň teoremasyna laýyklykda, (4)-(5) ulgamyň otrisatel däl çözüwi ýok bolýar. Bu bolsa (2) ulgamyň otrisatel däl çözüwleriniň D köplüginde maksat funksiýasy çäkli diýmekdir.

Maksat funksiýasy çäkli bolany sebäpli, ol ekstremuma D köplügiň depelerinde ýetip bilýär. Eger şol depeleri ýeke-ýekeden tapsak we maksat funksiýasynyň şol nokatlardaky bahalaryny kesgitlesek, soňra maksat funksiýasynyň tapylan bahalarynyň içinden iň ulusyny saýlap alsak, şol hem gözlenilýän maksimal baha bolar.

Bu usul simpleks usuldan kän tapawutlanmaýar, ýöne bu ýerde geçirilýän amallaryň sany simpleks usulyndakydan has köp bolýar. Şeýle-de bolsa, usulyň ýönekeý düşündirilişini we häzirki zaman kompýuterleriniň hasaplaýyş mümkinçiliginiň örän ýokarydygyny göz öňünde tutup, şeýle usuly az sanly deňlemelerden we näbellilerden durýan meseleler üçin hödürlemek bolar.

PEÝDALANYLAN EDEBIÝATLAR

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.

3. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.

4. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.

5. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.

6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.

7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.

8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň 27-nji awgusty.

9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.

10. Hudaýberenow Ö.G. Ýokary matematika. Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007.

11. *Дарпов А.В.*, *Шапиро Г.С.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1969.

12. *Гилберт Ж.*, *Курант Р.* Математическая физика. Т.1. М.: Наука, 1983.

13. *Гинзбург И.П.* Аэродинамика. М.: Высшая школа, 1988.

14. *Краснов Н.Ф*. Аэродинамика в вопросах и задачах. М.: Высшая школа, 1985.

15. *Лаврентьев М.А*., *Шабат Б.В*. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 2003.

16. *Николаи Е.Л*. Теоретическая механика. М.: Наука, 1956.

17. *Савельев И.В*. Курс общей физики. Т.1. М.: Наука, 1977.

18. *Черников С.Н*. Линейные неравенства. М.: Наука, 1967.

MAZMUNY

Öwezmämmet Hudaýberenow, Nurmuhammet Nuryllaýew

TEHNIKI WE YKDYSADY MESELELERDE MATEMATIKI MODELIRLEME

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw gollanmasy

Redaktor	*M. Hallaýew*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Neşir üçin jogapkär	*N. Hudaýberenow*

Ýygnamaga berildi 11.05.2012ý. Çap etmäge rugsat edildi .
Möçberi 60 x 90 $^{1}/_{16}$. Ofset kagyzy.
Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi.
Şertli-reňkli ottiski . Hasap-neşir listi .
Çap listi Sany 1000. Sargyt № 1212

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.